PENENTUAN SOLUSI PERIODIK PERSAMAAN *NERVE-IMPULSES* DENGAN MENGGUNAKAN *SHOOTING METHOD*

Aang Nuryaman[1]

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan AlamUniversitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia, 35145

email:aang_74@unila.ac.id

ABSTRAK

Pengintegralan numerik langsung dapat digunakan untuk mencari solusi periodik pada sistem persamaan *nerve impulses* yang telah didiskusikan oleh FitzHugh (1961). Kondisi awal diiterasikan sedemikian sehingga nilainya sama dengan kondisi akhir secara bersamaan. Interval waktu integrasi yaitu perioda impuls juga dapat dimasukkan ke dalam iterasi. Pada makalah ini akan dipaparkan shooting method untuk menentukan solusi periodik persamaan *nerve impulses* tersebut dan perilakunya berdasarkan simulasi.

Kata Kunci*: Solusi periodik, shooting method, persamaan nerve impulses*

PENDAHULUAN

Memecahkan masalah sistem taklinier dengan menggunakan integrasi numerik langsung merupakan cara yang paling dasar. Tetapi metode ini menjadi berarti hanya dalam kasus komputer digunakan secara luas pada penelitian-penelitian sains. Integrasi numerik langsung pada masalah nilai awal sering digunakan untuk memeriksa berbagai hampiran metode analitik (Hsu, 1975).

Masalah eksistensi solusi periodik dalam sistem taklinier nerve impulses sudah banyak didiskusikan oleh FitzHugh (1961). Adapun metode penentuan solusi periodik secara numerik itu sendiri didasarkan pada teori Poincare's consequence (Poincare, 1881), yakni jika satu ekspresi posisi sebuah sistem di dalam ruang keadaan pada akhir periode sebagai pemetaan dari posisi di awal periode, maka solusi periodik berkaitan dengan titik tetap dari pemetaan tersebut. Prosedur numerik untuk mendapatkan solusi periodik dari suatu sistem sistem autonomous maupun non-autonomous sudah banyak pula dikaji diantaranya oleh Hsu (1977) dan Urabe (1957). Penentuan solusi periodik dari sistem autonomous dan non-autonomous juga bisa dinyatakan sebagai masalah nilai batas di dua titik (Ling, 1981). Salah satu metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas di dua titik pada sistem persamaan diferensial tak linier adalah shooting method. Metode ini mulai digunakan oleh Ruf (1978) untuk menghitung kurva resonansi dari sistem persamaan non-autonomous berupa persamaan Duffing. Pada makalah ini akan dipaparkan bagaimana penerepan shooting method untuk mendapatkan solusi periodik dari persamaan nerve impulses.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan untuk penelitian dalam makalah ini adalah melalui studi literatur dan simulasi komputasi. Prosedur pertama kali yang dilakukan adalah menentukan syarat solusi periodik sistem persamaan diferensial model nerve impulses. Syarat solusi periodik ini membentuk masalah nilai batas dari suatu sistem persamaan diferensial taklinier. Selanjutnya dari masalah nilai batas ini diturunkan algoritma pencarian solusi periodik sistem terkait dengan menggunakan shooting method dan mensimulasikannya secara komputasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penentuan solusi periodik dari sistem nerve impulses taklinier dapat dinyatakan sebagai masalah nilai batas dua titik dari persamaan diferensial:

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(0) - x(T) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n, f \in \mathbf{R}^m \tag{1}$$

Dimana T menyatakan perioda. Ada banyak cara untuk memecahkan masalah ini dan salah satu di antaranya yang paling efisien adalah shooting method (Fehlberg, 1969). Dalam makalah ini yang akan digunakan adalah shooting method sederhana.

Untuk menentukan $x(0)$ yang memenuhi masalah (1), diperkenalkan vektor parameter $s \in \mathbf{R}^m$. Di sini yang mungkin $m = n$ atau $m = n - 1$. Dalam kasus periode T diketahui maka pilihan sederhana untuk parameter s adalah $s = x(0) = x_0$ dan bila sebaliknya maka T harus dipilih sebagai salah satu komponen parameter s. Dengan demikian persamaan (1) dapat dituliskan sebagai:

$$\dot{x} = f(t, x, g(s)), \qquad F(s) = x(0, s) - x(T, s) = x_s - x_T = 0 \tag{2}$$

Dimana fungsi vektor $g(s)$ menggambarkan kebergantungan persamaan diferensial pada parameter s. Misalkan akar dari persamaan (2) dinotasikan dengan s_* yaitu :

$$F(s_*) = 0 \tag{3}$$

Jadi jika **s** dekat dengan solusi s_* maka kita dapat menghitung fungsi $F(s)$ dengan mengintegrasikan persamaan diferensial (1) untuk satu perioda T. Dengan memodifikasi nilai awal s, maka diharapkan akan konvergen ke solusi yaitu $s \to s_*$ dan $F \to 0$.

Prosedur umum untuk mencari akar dari persamaan (2) adalah metode Newton-Raphson dengan mengiterasikan nilai awal,

$$s_{k+1} = s_k + \Delta s_k \tag{4}$$

Faktor koreksi Δs_k dibentuk dengan ekspansi $F(s)$ pada persamaan (2) dalam deret Taylor hingga orde satu yaitu:

$$F(s_{k+1}) \approx F(s_k) + \frac{\partial F(s_k)}{\partial s_k} \Delta s_k \tag{5}$$

Dengan demikian persamaan (4) menjadi:

$$s_{k+1} = s_k - \left(\frac{\partial F(s_k)}{\partial s_k}\right)^{-1} F(s_k) \tag{6}$$

Dimana $\frac{\partial F(s_k)}{\partial s_k}$ matriks Jacobian fungsi vektor $F(s)$. Untuk perioda T tertentu, maka:

$$\frac{\partial F(s)}{\partial s} = \frac{\partial x_0}{\partial s} - \frac{\partial x_T}{\partial s} \tag{7}$$

Jelas bahwa $\frac{\partial x_0}{\partial s} = I_n$, matriks identitas berorde-n dan $\frac{\partial x_T}{\partial s}$ adalah nilai solusi dari masalah nilai awal persamaan diferensial matriks:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]' = \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s}\cdot\frac{\partial f}{\partial g}, \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{t=0} = \frac{\partial x_0}{\partial s} = I_n \tag{8}$$

pada saat $t = T$. Di samping itu dalam menentukan solusi (8) harus disertai dengan

memecahkan masalah nilai awal:

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \tag{9}$$

Pada umumnya $F(s)$ dan $F'(s)$ dapat dihitung dengan menggunakan integrasi numerik langsung dari masalah nilai awal, salah satunya adalah dengan menggunakan metode Runge – Kutta – Fehlberg (RKF45) seperti yang digunakan pada makalah ini.

Berikut ini akan disimulasikan shooting method untuk kasus persamaan nerve impulse (impuls syaraf).

Persamaan nerve impulse merupakan perumuman dari persamaan van der Pol (1926) yang dinyatakan sebagai:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\left(x + y - \frac{x^3}{3} + \lambda\right) \\ -\frac{x - a + by}{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y)\end{bmatrix} \tag{10}$$

dengan :

$$1 - \frac{2b}{3} < a < 1, \qquad 0 < b < 1, \qquad b < c^2 \tag{11}$$

a dan b keduanya positif.
Syarat awal untuk menentukan solusi periodik pada perioda T tertentu adalah:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(T) \\ y(T)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

Pilih vektor parameter $s = [s_1, s_2]^T = [x(0), y(0)]^T$, maka $g(s) = 0$, dan masalah nilai awal menjadi:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]' = \frac{\partial x}{\partial s}\begin{bmatrix} c(1 + x^2) & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c}\end{bmatrix}, \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

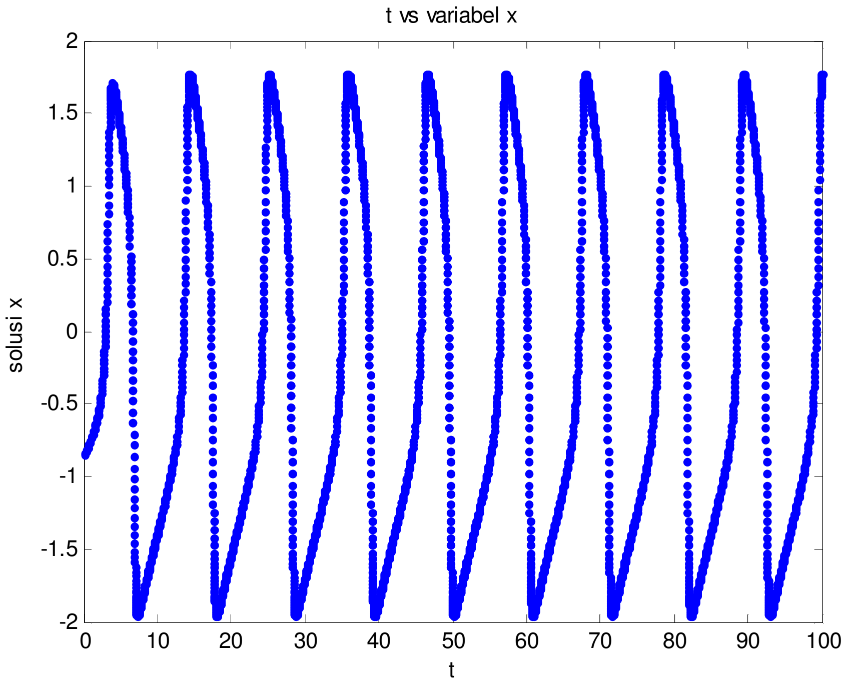
dengan

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_1} \\ \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial y}{\partial s_2}\end{bmatrix} \tag{13}$$

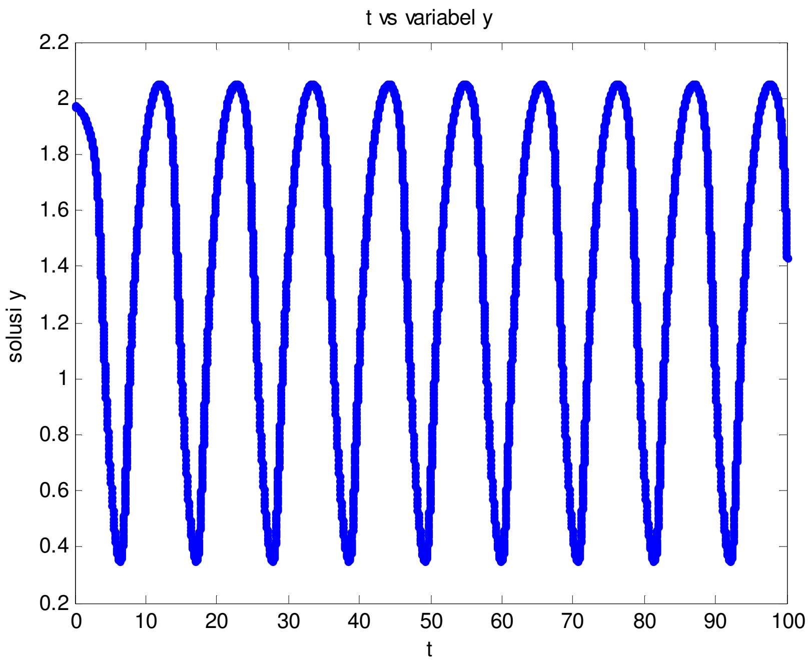
Sedangkan matrix Jacobian (7) adalah:

$$\frac{\partial F(s)}{\partial s} = \begin{bmatrix} 1 - \left.\frac{\partial x}{\partial s_1}\right|_{t=T} & -\left.\frac{\partial y}{\partial s_1}\right|_{t=T} \\ -\left.\frac{\partial x}{\partial s_2}\right|_{t=T} & 1 - \left.\frac{\partial y}{\partial s_2}\right|_{t=T}\end{bmatrix} \tag{14}$$

Dengan menggunakan skema iterasi (6) dimana matriks Jacobiannya ditunjukan oleh persamaan (14) untuk mendapatkan syarat awal, diperoleh plot perilaku solusi periodik variabel x dan y terhadap waktu t untuk kasus c = 3, $\lambda = -1{,}3$; $a = 0{,}7$ dan $b = 0{,}8$ dengan toleransi error 10^{-6} dapat dilihat pada Gambar 1 dan Gambar 2.

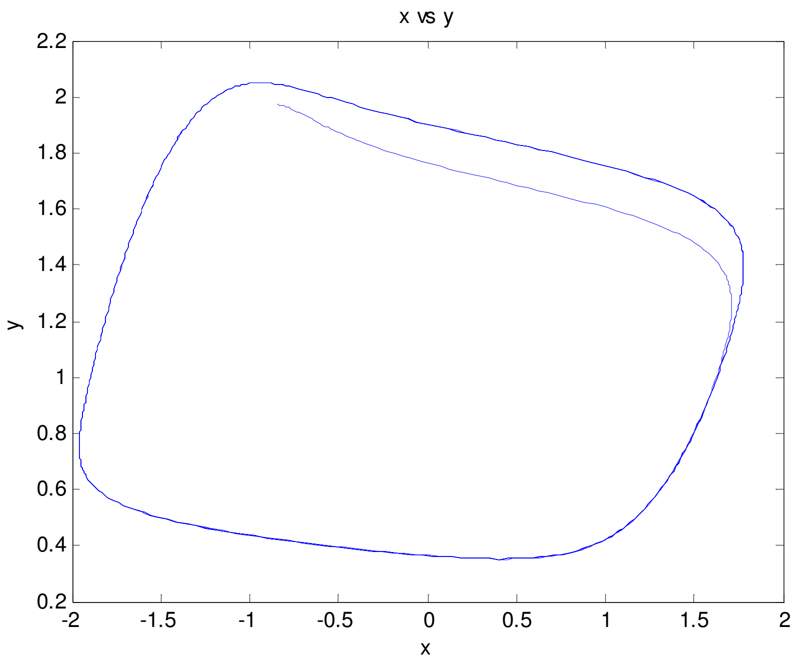


Gambar 1. Plot Perilaku Solusi x(t) terhadap t



Gambar 2. Plot perilaku solusil y(t) terhadap t

Sedangkan plot perilaku solusi periodik sistem persamaan nerve impulses untuk x vs y dapat dilihat seperti Gambar 3.



Gambar 3. Plot solusi periodik sistem persamaan nerve impulses

KESIMPULAN DAN SARAN

Shooting method cukup sukses untuk dapat menentukan solusi periodik dari sistem persamaan nerve impulses dengan toleransi error yang cukup kecil dan waktu running komputasi yang cukup singkat. Namun pada makalah ini belum dikaji lebih lanjut mengenai kestabilan solusi periodik untuk persamaan nerve impulses itu sendiri dan bagaimana untuk kasus perioda T tak tentu. Hal ini bisa menjadi bahan penelitian untuk selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

FitzHugh, R. 1961. Impulses and physiological states in theoritical models of nerve membrane. *Biophys. J.* **1**. 445-466

Poincare', H. 1881. Memoire sur les courbes definies par une equation differentielles, *J. Math*. **3** Serie 7. 375-422

Hsu, C.S. 1977. *Nonlinear Behavior of Multibody System under Impulsive Parametric Excitation, in "Dynamic Of Multibody Systems,"*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

Hsu, C.S. 1977. On Nonlinear Parametric ExcitationProblem, *Adv. Appl. Mech.*, **17**. 245-301.Urabe, *M.* Numerical Determination of Periodic Solution of Nonlinear System, *J. Sci Hiroshima Univ. Ser. A*, **20**. 125-148.