PROSIDING

SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK 2017

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAIDISIPLIN ILMU UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF
2017

PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :
Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :
Shela Malinda Tampubolon

Alamat :
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN
KETUA PELAKSANA
SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema "pengunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa".

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmuan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

KEPANITIAAN

Penasehat	: 1. Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P 2. Prof. Dr. Bujang Rahman 3. Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc 4. Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D 5. Dr. Hartoyo, M.Si
Pengarah	: 1. Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D 2. Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc 3. Dian Kurniasari S.Si., M.Sc 4. Drs. Suratman Umar, M.Sc.
Penanggung Jawab	: Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Ketua Pelaksana	: Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D
Sekretaris	: Dra. Dorrah Aziz, M.Si
Bendahara	: Amanto, S.Si., M.Sc
Kesekretariatan	: Subian Saidi, S.Si., M.Si Dr. Notiragayu, M.Si - Syamsu Huda, S.I.P., M.M - Srimiati, S.Pd - Johan, S.P - Riendi Ferdian, S.I.P - Siti Marbiyah, S.Si - Rosihin Anwar, S.Kom - Shela Malinda T - Della Desiyana - Nandra Adi Prayoga - Himatika
Seksi-seksi :	
Acara	: Dr. Aang Nuryaman, M.Si Dr. Khoirin Nisa, M.Si Drs. Rudi Ruswandi, M.Si

	Drs. Eri Setiawan, M.Si
Konsumsi	: Widiarti S.Si., M.Si Dr. Asmiati, M.Si
Transportasi/akomodasi	: Drs. Nusyirwan, M.Si Agus Sutrisno, S.Si., M.Si
Perlengkapan	: Drs. Tiryono R., M.Sc., Ph.D - Agus Suroso, A.Md - Tamrinsyah - Supriyadi - Drajat - Maeda Sulistiana
Reviewer	: Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D - Dr. La Zakaria S.Si., M.Sc - Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si - Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

DAFTAR ISI

Representasi Operator Linear dari Ruang barisan l_3 ke Ruang Barisan $l_{3/2}$

Risky Aulia Ulfa[1], Muslim Ansori[2], Suharsono[3], Agus Sutrisno[4]
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung
Jln. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
E-Mail : riskyaul9@gmail.com
[1]Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
[2,3,4]Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

ABSTRAK

Suatu pemetaan pada ruang vector khususnya ruang bernorma disebut operator. Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Sebagai contoh, suatu matriksA : $l_3 \to l_{3/2}$*, dengan* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $l_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$ *dan* $l_{3/2} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty \right\}$ *merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya dikontruksikan operator A dari ruang barisan* l_3 *ke ruang barisan* $l_{3/2}$ *dengan basis standar* $\{e_k\}$ *dengan* $e_k = (0,0,\ldots,1_{(k)},\ldots)$*.dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang banach.*

***Kata Kunci** : Operator, Ruang Barisan Terbatas*

1. PENDAHULUAN

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_3 \to l_{3/2}$ dengan $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$,

$l_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$ dan

$l_{3/2} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real.

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Jika $x = (x_i) \in l_3$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul suatu permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_{3/2}$.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Operator

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan pada ruang vector khususnya ruang bernorma disebut operator [2].

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku A(αx) = αAx dan A(x + y) = Ax + Ay[2].

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{x \in \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\} \quad (1)$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \{\bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k\geq 1}|x_k| < \infty\} \tag{2}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\geq 1}|x_k|$$

[1].

Definisi 2.2.2

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk$x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$\left(x_j y_j\right)_{j\in N} \in l^\infty \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty}|x_j y_j| \leq \|x\|^p \|y\|^q \tag{3}$$

[1].

2.3Ruang Vektor

Definisi 2.3.1

Ruang vector adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku :

i. $x + y = y + x$
ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
iii. ada$\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$
iv. ada$-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$
v. $1 \cdot x = x$
vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$
vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$(Maddox, 1970).

2.4 Basis

Definisi 2.4.1

Ruang vector V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vector V.

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad (4)$$

Secara umum, jika$B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$$

[1].

Definisi 2.4.2

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear [1].

Definisi 2.4.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \ldots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n [1].

2.5 Ruang Metrik

Ruang metric merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang metric merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line R*.

Definisi 2.5.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu metriks di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku :

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika *x = y*
iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (*X*, *d*) dengan *d* adalah metric pada *X* disebut ruang metrik. Setiap anggota *X* disebut titik dan nilai *d(x,y)* disebut jarak (*distance)* dari titik *x* ke titik *y* atau jarak antara titik *x* dan titik *y* [2].

2.6 Ruang Bernorma

Definisi 2.6.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi$x \in X \to \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

Disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan non negative $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui [1].

2.7 Ruang Banach

Definisi 2.7.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen [1].

3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Operator A dikontruksikan dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$ dengan

basis standar$\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0, \ldots, 1_{(k)}, \ldots\right)$. Selanjutnya, mengkontruksikan norma operator $A.$ Jika pendefinisian operator dapat dilakukan maka akan diselidiki apakah koleksi semua operator tersebut membentuk ruang Banach. Sebagai aplikasi, operator A direpresentasikan sebagai matriks takhingga yang dikerjakan pada barisan barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$ dengan basis standar$\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0, \ldots, 1_{(k)}, \ldots\right)$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, yang dimaksud dengan ruang barisanterbatas $l_3$dapat didefinisikan sebagai :

$$l_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$$

dengan $(x_i) = (x_1, x_2, \ldots)$ merupakan barisan bilangan real $\mathbb{R}$. Ruang barisan l_3 merupakan ruang Banach dengan ruang dual $(l_3)^* = \{x^* : l_3 \to \mathbb{R}\}$ yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu pada l_3.

Untuk sebarang $x^* \in (l_3)^*$dan$x \in l_3$, penulisan $\langle x, x^* \rangle$ dimaksudkan sebagai fungsional x^* pada x atau $x^*(x)$. Barisan vektor $\{e_n\} \subset l_3$ dinamakan basis pada l_3 jika untuk setiap vektor $x \in l_3$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{a_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Barisan $\{e_n^*\} \in (l_3)^*$ dengan $\|e_n^*\| = 1$ untuk setiap n dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset l_3$ jika

$$\langle e_m, e_n^* \rangle = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$. Selanjutnya, pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ disebut system biortonormal pada l_3 maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

dengan $\langle x, e_n^* \rangle = a_n$.

Jika $A \in \mathcal{L}_c\left(l_3, l_{3/2}\right)$ maka operator $A^* \in \mathcal{L}_c\left((l_3)^*, \left(l_{3/2}\right)^*\right)$ disebut operator pendamping (adjoint operator) A jika dan hanya jika untuk setiap $x \in l_3$dan $y^* \in \left(l_{3/2}\right)^*$, berlaku

$$\langle A(x), y^* \rangle = \langle x, A^*(y^*) \rangle$$

Jadi, jika $\{e_n\} \subset l_3$ dan $\{d_m^*\} \in \left(l_{3/2}\right)^*$ diperoleh

$$\langle A(e_n), d_m^* \rangle = \langle e^n, A^*(d_m^*) \rangle$$

Jika $\{e_n\}, \{f_n\} \subset l_3$ basis pada l_3 dan $\{d_m\} \subset l_{3/2}$ basis pada $l_{3/2}$, maka untuk setiap $A \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ berlaku

$$A^*(d_m^*) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle e_n^* \qquad \text{(a)}$$

Dan

$$A^*(d_m^*) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle f_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle f_n^* \qquad \text{(b)}$$

Berdasarkan persamaan (a) dan (b) diperoleh

$$\textstyle\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(f_k), d_m^* \rangle f_k^* \right\| \qquad \text{(c)}$$

Berdasarkan persamaan (a), (b) dan (c) didefinisikan pengertian operator dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$sebagai berikut

Definisi 1.1 Operator $A \in \mathcal{L}_c\left(l_3, l_{3/2}\right)$ merupakan operator-SM jika

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), d_m^*\rangle e_k^*\right\| < \infty$$

Dengan $\{e_n\} \subset l_3$ basis pada l_3 dan $\{d_m\} \subset l_{3/2}$ basis pada $l_{3/2}$.

Dapat dipahami bahwa bilangan $\|A\|$ dengan

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), d_m^*\rangle e_k^*\right\| < \infty$$

Tidak bergantung pada pemilihan basis $\{e_n\}$ pada l_3. Selanjutnya, notasi $SM(l_3, l_{3/2})$ menyatakan koleksi semua operator-SM dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$.

Teorema 1.2 Untuk setiap $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ berlaku

i.$\|A\| \leq \|A\|_{SM}$

ii. $SM(l_3, l_{3/2})$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|.\|_{SM}$

iii. Jika$A \in SM(l_3, l_{3/2})$ maka A operator kompak.

Bukti :

i. Diambil sebarang basis $\{e_n\} \subset l_3$dan$x \in l_3$ dan $\{d_m\} \subset l_{3/2}$ basis pada $l_{3/2}$, maka berdasarkan (a), (b) dan (c) diperoleh

$$\begin{aligned}
\|A\,(x)\| &= \left\|\sum_{m=1}^{\infty}\langle A(x), d_m^*\rangle\, d_m\right\| \\
&= \left\|\sum_{m=1}^{\infty}\langle x, A^*(d_m^*)\rangle\, d_m\right\| \\
&\leq \|x\|\sum_{m=1}^{\infty}\|A^*(d_m^*)\| \\
&\|x\|\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), d_m^*\rangle e_k^*\right\| \\
&= \|x\|\|A\|_{SM}
\end{aligned}$$

Yang berakibat $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$.

ii. Pertama ditunjukkan bahwa $SM(l_3, l_{3/2})$ merupakan ruang bernorma terhadap norma$\|.\|_{SM}$ sebab :

a. Untuk setiap $A \in SM(l_3, l_{3/2})$

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \geq 0$$

dan

$$\|A\|_{SM} = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* = A^*(d_m^*) = \theta \ (\forall m)$$

$$\Leftrightarrow A^* = 0 \text{ (operatornol)}$$

$$\Leftrightarrow A = 0 \text{ (operatornol)}$$

b. Untuk setiap $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dan skalar α, diperoleh

$$\begin{aligned} \|\alpha A\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= |\alpha| \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= |\alpha| \|A\|_{SM} \end{aligned}$$

c. Jika diberikan $A_1, A_2 \in SM(l_3, l_{3/2})$ maka

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_1 + A_2)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle \big((A_1)(e_k) + (A_2)(e_k) \big), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* + \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

Dengan kata lain,

$$\|A_1 + A_2\|_{SM} \leq \|A_1\|_{SM} + \|A_2\|_{SM}$$

Selanjutnya menunjukkan kelengkapan ruang $SM\ (l_3, l_{3/2})$ sebagai berikut :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset SM(l_3, l_{3/2})$. Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positif $i, j \geq n_0$, berlaku

$$\|A_i - A_j\|_{SM} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Akan dibuktikan bahwa terdapat $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ sehingga

$$\lim_{i\to\infty}\|A_i - A\|_{SM} = 0$$

Karena

$$\|A_i - A_j\|_{\mathcal{L}_c\left(l_3, l_{3/2}\right)} \leq \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk setiap $A_i, A_j \in SM(l_3, l_{3/2})$ dengan $i, j \geq n_0$, maka barisan $\{A_i\}$ juga merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$. Karena $\mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ ruang lengkap maka terdapat $A \in \mathcal{L}_c\left(l_3, l_{3/2}\right)$ sehingga $\lim_{j\to\infty} A_j = A$. Oleh karena itu,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\big((A_i - A)(e_k), d_m^*\big)e_k^*\right\|$$
$$= \lim_{j\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\big((A_i - A)(e_k), d_m^*\big)e_k^*\right\|$$
$$= \lim_{j\to\infty}\|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk sebarang bilangan bulat $i \geq n_0$. Dengan kata lain,$A - A_i \in SM(l_3, l_{3/2})$, untuk$i \geq n_0$. Oleh karena itu, $A - A_{n_0} + A_{n_0} = A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dan terbukti bahwa barisan $\{A_i\}$ konvergen ke suatu $A \in SM(l_3, l_{3/2})$. Jadi, $SM(l_3, l_{3/2})$ merupakan ruang bernorma yang lengkap atau ruang Banach.

iii. Jika $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dan $x \in l_3$, maka

$$A(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\langle A(x), d_m^*\rangle d_m$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan bulat positif n, dapat didefinisikan operator $A_n: l_3 \to l_{3/2}$dengan

$$A_n(x) = \sum_{m=1}^{n}\langle A(x), d_m^*\rangle d_m$$

Jelas bahwa $A_n \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ dan A_n merupakan operator berhingga. Dengan kata lain, A_n operator kompak. Karena $\{A_n\}$ konvergen ke K maka K operator kompak.

BerdasarkanTeorema 1.2 diperoleh :

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Akibat 1.3 $SM(l_3, l_{3/2}) \subset K\left(l_3, l_{3/2}\right) \subset \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ dengan $K\left(l_3, l_{3/2}\right)$ koleksi operator kompak dari l_3 ke $l_{3/2}$. Operator $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dapat diwakili oleh matriks tak hingga $A = A_{\infty\times\infty}$. Oleh karena itu, dalam bentuk matriks tak hingga karakteristik operator-SM tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

Teorema 1.4 Suatu operator linear kontinu$A: l_3 \to l_{3/2}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks (a_{ij}) yang memenuhi :

i. $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right\} \in l_{3/2}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_3$

ii. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^3 < \infty$

iii. $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| < \infty$

Bukti :

(Syarat perlu) karena $A: l_3 \to l_{3/2}$ linear dan kontinu maka dengan sendirinya berlaku i) dan ii). Operator A dalam bentuk matriks (a_{ij}) dikerjakan pada basis standard $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\dots,1_{(k)},\dots\right)$ berbentuk

$$Ae_k = (a_{jk})_{j=1}^{\infty}$$

Karena $A = (a_{ij})$ operator-SM maka

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(Ae_k, d_m^*)d_m\right\| &= \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}d_m\right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}\right\| < \infty\end{aligned}$$

(Syarat cukup) berdasarkan i) dan ii) maka $A = (a_{ij}): l_3 \to l_{3/2}$ linear dan kontinu. Selanjutnya, berdasarkan iii) diperoleh

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(Ae_k, d_m^*)d_m\right\| = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}\right\| < \infty$$

Terbukti $A = (a_{ij})$ merupakan operator-SM

Contoh 1.5 Matriks $A = (a_{ij})$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases}\dfrac{1}{i^{3/2}} & i = j\\ 0 & i \neq j\end{cases}$$

Merepresentasikan operator-SM $A: l_3 \to l_{3/2}$sebab :

ISBN No. 978-602-98559-3-7

i. Untuk setiap $x = (x_j) \in l_3$ berlaku

$$\|Ax\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{x_j}{j^{3/2}}\right|^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^{3/2}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty$$

Jadi, $Ax \in l_{3/2}$

ii. Bagian kedua terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^{3/2} = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{1}{i^{3/2}}\right|^{3/2} < \infty$$

iii. Bagian ketiga terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{3/2}} < \infty$$

5. SIMPULAN

Operator linear dan kontinu A : $l_3 \rightarrow l_{3/2}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right\} \in l_{3/2}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_3$

2. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^{3/2} < \infty$

3. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right| < \infty$

Koleksi semua operator SM A : $l_3 \rightarrow l_{3/2}$ yang dinotasikan dengan SM (l_3 , $l_{3/2}$) membentuk ruang Banach.

6. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis menyampaikan ucapan terimakasih kepada Bapak Muslim Ansori, Bapak Suharsono dan Bapak Agus Sutrisno karena telah membimbing dan memberi arahan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini serta kepada Penyelenggara Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 yang telah memfasilitasi kegiatan Seminar Nasional ini.

7. KEPUSTAKAAN

[1] Darmawijaya, S. (2007). *PengantarAnalisisAbstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

[2] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.

[3] Maddox, I.J. (1970). *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.