



PROSIDING SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK
2017

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA,
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA



**SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF
2017**

PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :

Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :

Shela Malinda Tampubolon

Alamat :

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN KETUA PELAKSANA SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema “penggunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa”.

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmunan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

KEPANITIAAN

Penasehat : 1. Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P
2. Prof. Dr. Bujang Rahman
3. Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc
4. Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D
5. Dr. Hartoyo, M.Si

Pengarah : 1. Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D
2. Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc
3. Dian Kurniasari S.Si., M.Sc
4. Drs. Suratman Umar, M.Sc.

Penanggung Jawab : Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D

Ketua Pelaksana : Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D

Sekretaris : Dra. Dorrah Aziz, M.Si

Bendahara : Amanto, S.Si., M.Sc

Kesekretariatan : Subian Saidi, S.Si., M.Si

Dr. Notiragayu, M.Si

- Syamsu Huda, S.I.P., M.M

- Srimiati, S.Pd

- Johan, S.P

- Riendi Ferdian, S.I.P

- Siti Marbiyah, S.Si

- Rosihin Anwar, S.Kom

- Shela Malinda T

- Della Desiyana

- Nandra Adi Prayoga

- Himatika

Seksi-seksi :

Acara : Dr. Aang Nuryaman, M.Si

Dr. Khoirin Nisa, M.Si

Drs. Rudi Ruswandi, M.Si

Drs. Eri Setiawan, M.Si

Konsumsi : Widiarti S.Si., M.Si
Dr. Asmiati, M.Si

Transportasi/akomodasi : Drs. Nusyirwan, M.Si
Agus Sutrisno, S.Si., M.Si

Perlengkapan : Drs. Tiryono R., M.Sc., Ph.D
- Agus Suroso, A.Md
- Tamrinsyah
- Supriyadi
- Drajat
- Maeda Sulistiana

Reviewer : Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D
- Dr. La Zakaria S.Si., M.Sc
- Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
- Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

DAFTAR ISI

| | |
|---|-----|
| KATA SAMBUTAN | iii |
| KEPANITIAAN | iv |
| DAFTAR ISI | vi |
| Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen (<i>Fauzia Anisatul F, Suharsono S, dan Dorrah Aziz</i>) | 1 |
| Simulasi Interaksi Angin Laut dan Bukit Barisan dalam Pembentukan Pola Cuaca di Wilayah Sumatera Barat Menggunakan Model Wrf-Arw (<i>Achmad Rafli Pahlevi</i>) | 7 |
| Penerapan Mekanisme Pertahanan Diri (Self-Defense) sebagai Upaya Strategi Pengurangan Rasa Takut Terhadap Kejahatan (Studi Pada Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung yang Menduduki Peringkat <i>Crime Rate</i> Tertinggi) (<i>Teuku Fahmi</i>) | 18 |
| Tingkat Ketahanan Individu Mahasiswa Unila pada Aspek Soft Skill (<i>Pitojo Budiono, Feni Rosalia, dan Lilih Muflihah</i>) | 33 |
| Metode Analisis Homotopi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Linear Non Homogen Orde Satu (<i>Atika Faradilla dan Suharsono S</i>) | 44 |
| Penerapan Neural Machine Translation Untuk Eksperimen Penerjemahan Secara Otomatis pada Bahasa Lampung – Indonesia (<i>Zaenal Abidin</i>) | 53 |
| Ukuran Risiko Cre-Var (<i>Insani Putri dan Khreshna I.A.Syuhada</i>) | 69 |
| Penentuan Risiko Investasi dengan Momen Orde Tinggi $V @ R - C_v @ R$ (<i>Marianik dan Khreshna I.A.Syuhada</i>) | 77 |
| Simulasi Komputasi Aliran Panas pada Model Pengering Kabinet dengan Metode Beda Hingga (<i>Vivi Nur Utami, Tiryono Ruby, Subian Saidi, dan Amanto</i>) | 83 |
| Segmentasi Wilayah Berdasarkan Derajat Kesehatan dengan Menggunakan <i>Finite Mixture Partial Least Square</i> (Fimix-Pls) (<i>Agustina Riyanti</i>) | 90 |
| Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan $L 3/2$ (<i>Risky Aulia Ulfa, Muslim Ansori, Suharsono S, dan Agus Sutrisno</i>) | 99 |
| Analisis Rangkaian Resistor, Induktor dan Kapasitor (RLC) dengan Metode Runge-Kutta Dan Adams Bashforth Moulton (<i>Yudandi K.A., Agus Sutrisno, Amanto, dan Dorrah Aziz</i>) | 110 |

| | |
|---|-----|
| Representasi Operator Linier dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan L 13/12 (<i>Amanda Yona Ningtyas, Muslim Ansori, Subian Saidi, dan Amanto</i>) | 116 |
| Desain Kontrol Model Suhu Ruangan (<i>Zulfikar Fakhri Bismar dan Aang Nuryaman</i>) | 126 |
| Penerapan Logika Fuzzy pada Suara Tv Sebagai Alternative Menghemat Daya Listrik (<i>Agus Wantoro</i>) | 135 |
| Clustering Wilayah Lampung Berdasarkan Tingkat Kesejahteraan (<i>Henida Widyatama</i>)..... | 149 |
| Pemanfaatan Sistem Informasi Geografis Untuk Valuasi Jasa Lingkungan Mangrove dalam Penyakit Malaria di Provinsi Lampung (<i>Imawan A.Q., Samsul Bakri, dan Dyah W.S.R.W.</i>) | 156 |
| Analisis Pengendalian Persediaan Dalam Mencapai Tingkat Produksi <i>Crude Palm Oil</i> (CPO) yang Optimal di PT. Kresna Duta Agroindo Langling Merangin-Jambi (<i>Marcelly Widya W., Hery Wibowo, dan Estika Devi Erinda</i>) | 171 |
| Analisis <i>Cluster Data Longitudinal</i> pada Pengelompokan Daerah Berdasarkan Indikator IPM di Jawa Barat (<i>A.S Awalluddin dan I. Taufik</i>)..... | 187 |
| Indek Pembangunan Manusia dan Faktor Yang Mempengaruhinya di Daerah Perkotaan Provinsi Lampung (<i>Ahmad Rifa'i dan Hartono</i>)..... | 195 |
| <i>Parameter Estimation Of Bernoulli Distribution Using Maximum Likelihood and Bayesian Methods</i> (<i>Nurmaita Hamsyiah, Khoirin Nisa, dan Warsono</i>)..... | 214 |
| Proses Pengamanan Data Menggunakan Kombinasi Metode Kriptografi <i>Data Encryption Standard</i> dan <i>Steganografi End Of File</i> (<i>Dedi Darwis, Wamiliana, dan Akmal Junaidi</i>). | 228 |
| <i>Bayesian Inference of Poisson Distribution Using Conjugate A and Non-Informative Prior</i> (<i>Misgiyati, Khoirin Nisa, dan Warsono</i>). | 241 |
| Analisis Klasifikasi Menggunakan Metode Regresi Logistik Ordinal dan Klasifikasi Naïve Bayes pada Data Alumni Unila Tahun 2016 (<i>Shintia F., Rudi Ruswandi, dan Subian Saidi</i>).... | 251 |
| Analisis Model <i>Markov Switching Autoregressive</i> (MSAR) pada <i>Data Time Series</i> (<i>Aulianda Prasyanti, Mustofa Usman, dan Dorrah Aziz</i>)..... | 263 |
| Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8 (<i>Faranika Latip., Dorrah Aziz, dan Suharsono S</i>)..... | 278 |
| Pengembangan Ekowisata dengan Memanfaatkan Media Sosial untuk Mengukur Selera Calon Konsumen (<i>Gustafika Maulana, Gunardi Djoko Winarso, dan Samsul Bakri</i>). | 293 |
| Diagonalisasi Secara Unger Matriks Hermite dan Aplikasinya pada Pengamanan Pesan Rahasia (<i>Abdurrois, Dorrah Aziz, dan Aang Nuryaman</i>) | 308 |

| | |
|---|-----|
| Pembandingan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton dalam Penyelesaian Model Pertumbuhan Uang yang Diinvestasikan (<i>Intan Puspitasari, Agus Sutrisno, Tiryono Ruby, dan Muslim Ansori</i>) | 328 |
| Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde-N Non Homogen dengan Fungsi Green (<i>Fathurrohman Al Ayubi, Dorrah Aziz, dan Muslim Ansori</i>)..... | 341 |
| Penyelesaian Kata Ambigu pada Proses Pos Tagging Menggunakan Algoritma <i>Hidden Markov Model</i> (HMM) (<i>Agus Mulyanto, Yeni Agus Nurhuda, dan Nova Wiyanto</i>)..... | 347 |
| Sistem Temu Kembali Citra Daun Tumbuhan Menggunakan Metode Eigenface (<i>Supiyanto dan Samuel A. Mandowen</i>) | 359 |
| Efektivitas Model <i>Problem Solving</i> dalam Meningkatkan Kemampuan Berfikir Lancar Mahasiswa pada Materi Ph Larutan (<i>Ratu Betta Rudibyani</i>)..... | 368 |
| <i>The Optimal Bandwidth for Kernel Density Estimation of Skewed Distribution: A Case Study on Survival Data of Cancer Patients</i> (<i>Netti Herawati, Khoirin Nisa, dan Eri Setiawan</i>)..... | 380 |
| Karakteristik Larutan Kimia Di Dalam Air Dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear (<i>Titik Suparwati</i>)..... | 389 |
| Bentuk Solusi Gelombang Berjalan Persamaan $\Delta\Delta$ mKdV Yang Diperumum (<i>Notiragayu, Rudi Ruswandi, dan La Zakaria</i>)..... | 398 |
| Pendugaan Blup Dan Eblup(Suatu Pendekatan Simulasi) (<i>Nusyirwan</i>)..... | 403 |

Representasi Operator Linear dari Ruang barisan l_3 ke Ruang Barisan $l_{3/2}$

Risky Aulia Ulfa¹⁾, Muslim Ansori²⁾, Suharsono³⁾, Agus Sutrisno⁴⁾

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung
Jln. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
E-Mail : riskyaul9@gmail.com

¹⁾Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
^{2,3,4)}Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

ABSTRAK

Suatu pemetaan pada ruang vector khususnya ruang bernorma disebut operator. Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_3 \rightarrow l_{3/2}$, dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$, $l_3 = \{x = (x_i) \mid (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty\}$ dan $l_{3/2} = \{x = (x_i) \mid (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} < \infty\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya dikonstruksikan operator A dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$. dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang banach.

Kata Kunci : Operator, Ruang Barisan Terbatas

1. PENDAHULUAN

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_3 \rightarrow l_{3/2}$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$,

$l_3 = \{x = (x_i) \mid (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty\}$ dan

$l_{3/2} = \left\{ x = (x_i) \mid \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \in l_3$ maka

$$\begin{aligned}
 A(x) = Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sehingga timbul suatu permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_{3/2}$.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Operator

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan pada ruang vector khususnya ruang bernorma disebut operator [2].

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

- Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
- Operator $A : X \rightarrow Y$ dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha x) = \alpha Ax$ dan $A(x + y) = Ax + Ay$ [2].

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}; x_k \in \mathbb{R}\}$$

- Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \{x \in \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\} \quad (1)$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_{\infty} = \{ \bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty \} \quad (2)$$

dan norm pada l_{∞} yaitu

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{k \geq 1} |x_k|$$

[1].

Definisi 2.2.2

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$(x_j y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^{\infty} \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|^p \|y\|^q \quad (3)$$

[1].

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1

Ruang vector adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan (+): $X \times X \rightarrow X$ dan fungsi perkalian skalar (\cdot): $F \times X \rightarrow X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku :

- i. $x + y = y + x$
- ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$
- iv. ada $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = \theta$
- v. $1 \cdot x = x$
- vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$ (Maddox, 1970).

2.4 Basis

Definisi 2.4.1

Ruang vector V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vector V .

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (4)$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B , jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V , maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

[1].

Definisi 2.4.2

Diberikan ruang vektor V . Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear [1].

Definisi 2.4.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan \mathcal{F} . Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan \check{e}_k vektor di dalam R^n yang komponen ke- k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n [1].

2.5 Ruang Metrik

Ruang metric merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang metric merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line* R .

Definisi 2.5.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu metrik di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku :

- i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
- ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (X, d) dengan d adalah metric pada X disebut ruang metrik. Setiap anggota X disebut titik dan nilai $d(x, y)$ disebut jarak (*distance*) dari titik x ke titik y atau jarak antara titik x dan titik y [2].

2.6 Ruang Bernorma

Definisi 2.6.1

Diberikan ruang linear X . Fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

- i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
- ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
- iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

Disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan non negative $\|x\|$ disebut norma vektor x . Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui [1].

2.7 Ruang Banach

Definisi 2.7.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorma X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen [1].

3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Operator A dikonstruksikan dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$ dengan

basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$. Selanjutnya, mengkonstruksikan norma operator A . Jika pendefinisian operator dapat dilakukan maka akan diselidiki apakah koleksi semua operator tersebut membentuk ruang Banach. Sebagai aplikasi, operator A direpresentasikan sebagai matriks takhingga yang dikerjakan pada barisan barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, yang dimaksud dengan ruang barisanterbatas l_3 dapat didefinisikan sebagai :

$$l_3 = \left\{ x = (x_i) \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}} < \infty \right. \right\}$$

dengan $(x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ merupakan barisan bilangan real \mathbb{R} . Ruang barisan l_3 merupakan ruang Banach dengan ruang dual $(l_3)^* = \{x^*: l_3 \rightarrow \mathbb{R}\}$ yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu pada l_3 .

Untuk sebarang $x^* \in (l_3)^*$ dan $x \in l_3$, penulisan $\langle x, x^* \rangle$ dimaksudkan sebagai fungsional x^* pada x atau $x^*(x)$. Barisan vektor $\{e_n\} \subset l_3$ dinamakan basis pada l_3 jika untuk setiap vektor $x \in l_3$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{a_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Barisan $\{e_n^*\} \in (l_3)^*$ dengan $\|e_n^*\| = 1$ untuk setiap n dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset l_3$ jika

$$\langle e_m, e_n^* \rangle = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$. Selanjutnya, pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ disebut system biortonormal pada l_3 maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

dengan $\langle x, e_n^* \rangle = a_n$.

Jika $A \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ maka operator $A^* \in \mathcal{L}_c((l_3)^*, (l_{3/2})^*)$ disebut operator pendamping (adjoint operator)

A jika dan hanya jika untuk setiap $x \in l_3$ dan $y^* \in (l_{3/2})^*$, berlaku

$$\langle A(x), y^* \rangle = \langle x, A^*(y^*) \rangle$$

Jadi, jika $\{e_n\} \subset l_3$ dan $\{d_m^*\} \in (l_{3/2})^*$ diperoleh

$$\langle A(e_n), d_m^* \rangle = \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle$$

Jika $\{e_n\}, \{f_n\} \subset l_3$ basis pada l_3 dan $\{d_m\} \subset l_{3/2}$ basis pada $l_{3/2}$, maka untuk setiap $A \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ berlaku

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle e_n^* \quad (a)$$

Dan

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle f_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle f_n^* \quad (b)$$

Berdasarkan persamaan (a) dan (b) diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(f_k), d_m^* \rangle f_k^* \right\|^2 \quad (c)$$

Berdasarkan persamaan (a), (b) dan (c) didefinisikan pengertian operator dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$ sebagai berikut

Definisi 1.1 Operator $A \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ merupakan operator-SM jika

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| < \infty$$

Dengan $\{e_n\} \subset l_3$ basis pada l_3 dan $\{d_m\} \subset l_{3/2}$ basis pada $l_{3/2}$.

Dapat dipahami bahwa bilangan $\|A\|$ dengan

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| < \infty$$

Tidak bergantung pada pemilihan basis $\{e_n\}$ pada l_3 . Selanjutnya, notasi $SM(l_3, l_{3/2})$ menyatakan koleksi semua operator-SM dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan $l_{3/2}$.

Teorema 1.2 Untuk setiap $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ berlaku

- i. $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$
- ii. $SM(l_3, l_{3/2})$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|\cdot\|_{SM}$
- iii. Jika $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ maka A operator kompak.

Bukti :

- i. Diambil sebarang basis $\{e_n\} \subset l_3$ dan $x \in l_3$ dan $\{d_m\} \subset l_{3/2}$ basis pada $l_{3/2}$, maka berdasarkan (a), (b) dan (c) diperoleh

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m \right\| \\ &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, A^*(d_m^*) \rangle d_m \right\| \\ &\leq \|x\| \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m^*)\| \\ &= \|x\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \|x\| \|A\|_{SM} \end{aligned}$$

Yang berakibat $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$.

- ii. Pertama ditunjukkan bahwa $SM(l_3, l_{3/2})$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\cdot\|_{SM}$ sebab :

a. Untuk setiap $A \in SM(l_3, l_{3/2})$

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \geq 0$$

dan

$$\|A\|_{SM} = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* = A^*(d_m^*) = \theta \quad (\forall m)$$

$$\Leftrightarrow A^* = 0 \text{ (operator nol)}$$

$$\Leftrightarrow A = 0 \text{ (operator nol)}$$

b. Untuk setiap $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dan skalar α , diperoleh

$$\begin{aligned} \|\alpha A\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= |\alpha| \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= |\alpha| \|A\|_{SM} \end{aligned}$$

c. Jika diberikan $A_1, A_2 \in SM(l_3, l_{3/2})$ maka

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_1 + A_2)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_1)(e_k) + (A_2)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* + \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\|A_1 + A_2\|_{SM} \leq \|A_1\|_{SM} + \|A_2\|_{SM}$$

Selanjutnya menunjukkan kelengkapan ruang $SM(l_3, l_{3/2})$ sebagai berikut :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset SM(l_3, l_{3/2})$. Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positif $i, j \geq n_0$, berlaku

$$\|A_i - A_j\|_{SM} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Akan dibuktikan bahwa terdapat $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ sehingga

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|A_i - A\|_{SM} = 0$$

Karena

$$\|A_i - A_j\|_{\mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})} \leq \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk setiap $A_i, A_j \in SM(l_3, l_{3/2})$ dengan $i, j \geq n_0$, maka barisan $\{A_i\}$ juga merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$. Karena $\mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ ruang lengkap maka terdapat $A \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ sehingga $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = A$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_i - A)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_i - A)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Untuk sebarang bilangan bulat $i \geq n_0$. Dengan kata lain, $A - A_i \in SM(l_3, l_{3/2})$, untuk $i \geq n_0$. Oleh karena itu, $A - A_{n_0} + A_{n_0} = A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dan terbukti bahwa barisan $\{A_i\}$ konvergen ke suatu $A \in SM(l_3, l_{3/2})$.

Jadi, $SM(l_3, l_{3/2})$ merupakan ruang bernorma yang lengkap atau ruang Banach.

iii. Jika $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dan $x \in l_3$, maka

$$A(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan bulat positif n , dapat didefinisikan operator $A_n: l_3 \rightarrow l_{3/2}$ dengan

$$A_n(x) = \sum_{m=1}^n \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Jelas bahwa $A_n \in \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ dan A_n merupakan operator berhingga. Dengan kata lain, A_n operator kompak. Karena $\{A_n\}$ konvergen ke K maka K operator kompak.

Berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh :

Akibat 1.3 $SM(l_3, l_{3/2}) \subset K(l_3, l_{3/2}) \subset \mathcal{L}_c(l_3, l_{3/2})$ dengan $K(l_3, l_{3/2})$ koleksi operator kompak dari l_3 ke $l_{3/2}$. Operator $A \in SM(l_3, l_{3/2})$ dapat diwakili oleh matriks tak hingga $A = A_{\infty \times \infty}$. Oleh karena itu, dalam bentuk matriks tak hingga karakteristik operator-SM tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

Teorema 1.4 Suatu operator linear kontinu $A: l_3 \rightarrow l_{3/2}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks (a_{ij}) yang memenuhi :

- i. $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l_{3/2}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_3$
- ii. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^3 < \infty$
- iii. $\sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| < \infty$

Bukti :

(Syarat perlu) karena $A: l_3 \rightarrow l_{3/2}$ linear dan kontinu maka dengan sendirinya berlaku i) dan ii). Operator A dalam bentuk matriks (a_{ij}) dikerjakan pada basis standard $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$ berbentuk

$$Ae_k = (a_{jk})_{j=1}^{\infty}$$

Karena $A = (a_{ij})$ operator-SM maka

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, d_m^*) d_m \right\| &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} d_m \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \right\| < \infty \end{aligned}$$

(Syarat cukup) berdasarkan i) dan ii) maka $A = (a_{ij}): l_3 \rightarrow l_{3/2}$ linear dan kontinu. Selanjutnya, berdasarkan iii) diperoleh

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, d_m^*) d_m \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \right\| < \infty$$

Terbukti $A = (a_{ij})$ merupakan operator-SM

Contoh 1.5 Matriks $A = (a_{ij})$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ i^{3/2} & i \neq j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Merepresentasikan operator-SM $A: l_3 \rightarrow l_{3/2}$ sebab :

i. Untuk setiap $x = (x_j) \in l_3$ berlaku

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_j}{j^{3/2}} \right|^{3/2} \right)^{2/3} < \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{3/2} \right)^{2/3} < \infty$$

Jadi, $Ax \in l_{3/2}$

ii. Bagian kedua terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{3/2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i^{3/2}} \right|^{3/2} < \infty$$

iii. Bagian ketiga terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} < \infty$$

5. SIMPULAN

Operator linear dan kontinu $A : l_3 \rightarrow l_{3/2}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks

$A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l_{3/2}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_3$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{3/2} < \infty$
3. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$

Koleksi semua operator SM $A : l_3 \rightarrow l_{3/2}$ yang dinotasikan dengan SM $(l_3, l_{3/2})$ membentuk ruang Banach.

6. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis menyampaikan ucapan terimakasih kepada Bapak Muslim Ansori, Bapak Suharsono dan Bapak Agus Sutrisno karena telah membimbing dan memberi arahan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini serta kepada Penyelenggara Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 yang telah memfasilitasi kegiatan Seminar Nasional ini.

7. KEPUSTAKAAN

- [1] Darmawijaya, S. (2007). *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- [2] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.
- [3] Maddox, I.J. (1970). *Element of Functional Analysis*. Cambridge University Press, London.

