PROSIDING

SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK 2017

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAIDISIPLIN ILMU UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF
2017

PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :
Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :
Shela Malinda Tampubolon

Alamat :
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN
KETUA PELAKSANA
SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema “pengunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa”.

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmuan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

KEPANITIAAN

Penasehat	: 1. Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P
	2. Prof. Dr. Bujang Rahman
	3. Prof. Dr. Ir. Kamal, M.Sc
	4. Ir. Warsono, M.Sc., Ph.D
	5. Dr. Hartoyo, M.Si
Pengarah	: 1. Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D
	2. Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc
	3. Dian Kurniasari S.Si., M.Sc
	4. Drs. Suratman Umar, M.Sc.
Penanggung Jawab	: Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D
Ketua Pelaksana	: Prof. Drs. Mustofa, M.A., Ph.D
Sekretaris	: Dra. Dorrah Aziz, M.Si
Bendahara	: Amanto, S.Si., M.Sc
Kesekretariatan	: Subian Saidi, S.Si., M.Si
	Dr. Notiragayu, M.Si
	- Syamsu Huda, S.I.P., M.M
	- Srimiati, S.Pd
	- Johan, S.P
	- Riendi Ferdian, S.I.P
	- Siti Marbiyah, S.Si
	- Rosihin Anwar, S.Kom
	- Shela Malinda T
	- Della Desiyana
	- Nandra Adi Prayoga
	- Himatika
Seksi-seksi :	
Acara	: Dr. Aang Nuryaman, M.Si
	Dr. Khoirin Nisa, M.Si
	Drs. Rudi Ruswandi, M.Si

	Drs. Eri Setiawan, M.Si
Konsumsi	: Widiarti S.Si., M.Si Dr. Asmiati, M.Si
Transportasi/akomodasi	: Drs. Nusyirwan, M.Si Agus Sutrisno, S.Si., M.Si
Perlengkapan	: Drs. Tiryono R., M.Sc., Ph.D - Agus Suroso, A.Md - Tamrinsyah - Supriyadi - Drajat - Maeda Sulistiana
Reviewer	: Drs. Suharsono, M.Sc., Ph.D - Dr. La Zakaria S.Si., M.Sc - Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si - Dr. Ir. Netti Herawati, M.Sc

DAFTAR ISI

Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017
ISBN No. 978-602-98559-3-7

PEMBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM-BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN

Intan Puspitasari, Agus Sutrisno, Tiryono Ruby, Muslim Ansori
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1, Bandar Lampung
Telp. +62721701609, Fax. +62721702767, Website : unila.ac.id

ABSTRAK

Persamaan diferensial sering kali diterapkan pada berbagai model matematika yang menggambarkan masalah dalam kehidupan nyata, salah satunya dalam masalah finansial yaitu investasi. Investasi berupa tabungan bank dapat diaplikasikan menjadi sebuah model matematika, yaitu

$$\frac{dP(t)}{dt} = r.P(t)$$

dimana P(t) merupakan besarnya tabungan pada tahun ke-t (dalam rupiah), r adalah besarnya bunga, dan t adalah waktu ke-t (dalam tahun). Model tersebut dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Pada umumnya, digunakan ekspansi Taylor untuk menurunkan metode numerik dari suatu model. Akan tetapi, ekspansi Taylor akan membutuhkan turunan tingkat tinggi yang menyebabkan kompleksitas perhitungan bertambah. Berbeda dengan ekspansi Taylor, skema Runge-Kutta dan Adam-Bashfort Moulton adalah alternatif dari metode numerik untuk mendapatkan konvergensi tinggi tanpa memerlukan turunan tingkat tinggi. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adam-Bashfort Moulton dalam penyelesaian model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Dari kedua metode tersebut ditentukan metode terbaik dalam mengaproksimasi nilai penyelesaian model tersebut dengan melihat nilai galat dari kedua metode tersebut. Dalam penelitian ini ditentukan 2 contoh kasus dari model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Selanjutnya, dicari solusi numerik berdasarkan dari kedua metode tersebut dengan menggunakan software MATLAB R2013b. Kemudian, bandingkan galat kedua solusi numerik tersebut terhadap solusi analitiknya. Setelah dilakukan tahap-tahap pada metode penelitian, dapat disimpulkan bahwa semakin kecil bunga pertahunnya, maka hasil aproksimasi semakin mendekati hasil eksaknya. Sebaliknya, semakin besar bunga pertahunnya, maka selisih antara hasil aproksimasi dan hasil eksaknya akan semakin besar. Metode Runge-Kutta Orde 4 lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada x(i) yang besar dibandingkan dengan metode Adam-Bashfort Moulton. Sebaliknya, dari kedua contoh kasus tersebut terlihat bahwa metode Adam-Bashfort Moulton lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada x(i) yang kecil dibandingkan metode Runge-Kutta Orde 4.

***Kata kunci** : Runge-Kutta, Adam-Bashfort Moulton*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial sering kali diterapkan pada berbagai model matematika yang menggambarkan masalah dalam kehidupan nyata, salah satunya dalam bidang finansial yaitu investasi. Investasi memiliki berbagai jenis, diantaranya yaitu saham, deposito berjangka, emas, tabungan bank, dan masih banyak lagi. Namun, yang akan dibahas pada penelitian ini hanyalah investasi berupa tabungan bank. Investasi berupa tabungan bank ini dapat diaplikasikan menjadi sebuah model matematika.

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Model tersebut berbentuk persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dP(t)}{dt} = r.P(t)$$

dimana P(t) merupakan besarnya tabungan pada tahun ke-*t* (dalam rupiah), *r* adalah besarnya bunga, dan t adalah tahun ke-*t* (dalam tahun). Model tersebut dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik disebut juga metode sejati karena memberikan solusi sejati atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat sama dengan nol. Sedangkan, metode numerik adalah satu-satunya metode alternatif yang ada dalam upaya menyelesaikan persoalan-persoalan matematis dengan mengkaji parametrik dari persoalan dari medan yang bersifat sembarang.

Pada umumnya, digunakan ekspansi Taylor untuk menurunkan metode numerik dari suatu model. Akan tetapi, ekspansi Taylor akan membutuhkan turunan tingkat tinggi yang menyebabkan kompleksitas perhitungan bertambah. Berbeda dengan ekspansi Taylor, skema Runge-Kutta adalah alternatif dari metode numerik untuk mendapatkan konvergensi tinggi tanpa memerlukan turunan tingkat tinggi.

Metode Runge-Kutta yang paling mendekati konvergen ialah yang berorde empat. Metode Runge-Kutta Orde 4 merupakan metode langkah tunggal yang memiliki nilai galat terkecil, sedangkan pada metode langkah ganda dapat digunakan metode Adam-Bashfort Moulton untuk mengaproksimasikan penyelesaian model tersebut dengan galat terkecil. Oleh karena itu, penelitian ini akan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adam-Bashfort Moulton dalam penyelesaian model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Dari kedua metode tersebut akan ditentukan metode terbaik dalam mengaproksimasi nilai penyelesaian model tersebut dengan melihat nilai galat dari kedua metode tersebut.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Model Matematika

Model matematika suatu fenomena adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari fenomena tersebut. Ekspresi dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau ekspresi-ekspresi matematika yang lain seperti fungsi maupun relasi. Model matematika digunakan untuk menjelaskan karakteristik fenomena yang dimodelkannya, dapat secara kualitatif dan kuantitatif [1].

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variable bebas, variable tak bebas dan derivatif-derivatif dari variable tidak bebas terhadap variable bebasnya. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam persamaan diferensial. Derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari derivatie tertinggi dalam persamaan diferensial [2].

2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika *x* adalah fungsi dari *t*, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \, cosx \quad (1)$$

Dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial [3].

2.4 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Linier

Persamaan diferensial biasa linier memiliki bentuk umum

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (2)$$

Dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut input atau unsur nonhomogen. Jika $f(t)$ disebut input, maka solusi dari persamaan diferensial x_t biasanya disebut output. Jika ruas sebelah kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai *t* dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen. Contoh persamaan diferemsial biasa linier adalah

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3t \quad (3)$$

Yang merupakan persamaan diferensial biasa linier nonhomogen order satu [4].

2.5 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinier

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linier, yaitu pada (2.1), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier. Contoh persamaaan diferensial biasa nonlinier

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x^2 = sin\ t \quad (4)$$

Yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier nonhomogen order dua [4].

2.6 Persamaan Diferensial sebagai Model Matematika

Banyak sekali fenomena yang jika dibawa ke dalam model matematika bentuknya berupa persamaan diferensial biasa (PDB) maupun persamaan diferensial parsial (PDP). Fenomena yang demikian disebut lump problems yang dapat dimodelkan dengan PDB. Dapat diartikan bahwa lumps problems menjadi masalah-masalah yang tak terdistribusi sebagai lawan dari masalah-masalah terdistribusi [1].

2.7 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatif, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik. Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan [5].

2.8 Metode Runge-Kutta

Secara umum, Runge-Kutta digunakan dalam penyelesaian masalah yang berhubungan dengan perhitungan numerik. Model umum dari metode Runge-Kutta tersebut yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n)h \tag{5}$$

Dengan a_i adalah konstan dan k_i adalah :

$k_1 = f\ (x_i\ ,\ y_i)$

$k_2 = f\ (x_i +\ p_1 .h.\ y_i +\ q_{11} .k_1 .h)$

$k_3 = f\ (x_i +\ p_2 .h.\ y_i +\ q_{21} .k_1 .h +\ q_{22} .k_2 .h)$

$k_4 = f\ (x_i +\ p_{n-1} .h.\ y_i +\ q_{n-1\,,1} .k_1 .h +\ q_{n-1\,,2} .k_2 .h + \ldots\ldots +$

$\qquad q_{n-1\,,n-1} .k_{n-1} .h)$ (6)

Dengan p_{n-1} dan $q_{n-1,2}$ adalah konstan. Persamaan diatas adalah fungsi utama dari Runge-Kutta dan k_n adalah fungsi evaluasi dari metode Runge-Kutta [6].

2.9 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta mempunyai galat pemotongan lokal yang sebanding dengan Δx^5. Metode yang sangat terkenal untuk mengaproksimasi solusi masalah nilai awal orde pertama adalah metode Runge-Kutta orde ke empat. Prosedur metode Runge-Kutta orde ke empat untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut sebagai berikut :

Tahap 1. Bagilah interval $x_0 \le x \le b$ menjadi p subinterval dengan menggunakan titik-titik yang berspasi sama :

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_p = x_{p-1} + \Delta x = b \tag{7}$$

Tahap 2. Untuk $= 1, 2, 3, \ldots, p$, dapatkan barisan aproksimasi berikut :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \tag{8}$$

dimana

$K_1 = g(x_{n-1}\,, y_{n-1})\ \Delta x$

ISBN No. 978-602-98559-3-7

$K_2 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right) \Delta x$

$K_3 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2}\right) \Delta x$

$K_4 = g(x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3) \Delta x$ (9)

Tahap 3. $K_1 = g(x, y) \Delta x$

$K_2 = g(x + 0{,}5\ \Delta x\ ,\ y + 0{,}5\ \Delta x\ K_1) \Delta x$

$K_3 = g(x + 0{,}5\ \Delta x\ ,\ y + 0{,}5\ \Delta x\ K_2) \Delta x$

$K_4 = g(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta x\ K_3) \Delta x$

$y = y + \left(\frac{1}{6}\right)(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$x = x + \Delta x$ [7]. (10)

2.10 Metode Adam-Bashfort-Multon

Metode sebelumnya yaitu metode euler taylor, runge kutta dinamakan metode satu langkah (single-step) karena hanya menggunakan satu titik untuk mencari titik sebelumnya yaitu untuk mencari (x_1 dan y_1) memerlukan titik awal (x_0 dan y_0). Sebaliknya, metode banyak langkah (multi-step) memerlukan beberapa nilai awal sebelumnya.

Metode Adam merupakan metode multi-step yang didasarkan pada kalkulus :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{11}$$

$$dy = f(x)\, dx \tag{12}$$

(1) $\int dy = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \rightarrow y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \frac{\Delta h}{2}[3f_i - f_{i-1}]$ untuk 2 titik

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \frac{\Delta h}{12}[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$ untuk 2 titik (13)

Untuk meramalkan suatu titik *f(x)*, *y(x)* diperlukan 4 titik sebelumnya yaitu titik :

$$(x_{i-3}, f_{i-3}), (x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}) \text{ dan } (x_i, f_i)$$

Dari titik ini diramalkan :

$$p_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \tag{14}$$

Kemudian dikoreksi menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} - 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-3}) \text{ [8]} \tag{15}$$

2.11 Model Pertumbuhan Uang yang diinvestasikan

Model pertumbuhan uang yang ditabung di bank juga mempunyai model pertumbuhan yang sama, yaitu bahwa laju pertambahan banyaknya uang yang ditabung, *P(t)*, sebanding dengan banyaknya uang yang ditabung pada waktu *t*. Jadi model matematikanya berbentuk

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\ ,\quad r > 0 \tag{16}$$

Dimana *r* adalah besarnya bunga pertahun [7].

2.12 Investasi

Investasi adalah penanaman modal untuk satu atau lebih aktiva yang dimiliki dan biasanya berjangka waktu lama dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa-masa yang akan datang [9].

2.13 Jenis-Jenis Investasi

Produk-produk investasi yang tersedia di pasaran antara lain:

1. Tabungan di bank

Dengan menyimpan uang di tabungan, maka akan mendapatkan suku bunga tertentu yang besarnya mengikuti kebijakan bank bersangkutan. Produk tabungan biasanya memperbolehkan kita mengambil uang kapanpun yang kita inginkan.

2. Deposito di bank

Produk deposito hampir sama dengan produk tabungan. Bedanya, dalam deposito tidak dapat mengambil uang kapanpun yang diinginkan, kecuali apabila uang tersebut sudah menginap di bank selama jangka waktu tertentu (tersedia pilihan antara satu, tiga, enam, dua belas, sampai dua puluh empat bulan, tetapi ada juga yang harian). Suku bunga deposito biasanya lebih tinggi daripada suku bunga tabungan. Selama deposito kita belum jatuh tempo, uang tersebut tidak akan terpengaruh pada naik turunnya suku bunga di bank.

3. Saham

Saham adalah kepemilikan atas sebuah perusahaan tersebut. Dengan membeli saham, berarti membeli sebagian perusahaan tersebut. Apabila perusahaan tersebut mengalami keuntungan, maka pemegang saham biasanya akan mendapatkan sebagian keuntungan yang disebut deviden. Saham juga bisa dijual kepada pihak lain, baik dengan harga yang lebih tinggi yang selisih harganya disebut capital gain maupun lebih rendah daripada kita membelinya yang selisih harganya disebut capital loss. Jadi, keuntungan yang bisa didapat dari saham ada dua yaitu deviden dan capital gain.

4. Properti

Investasi dalam properti berarti investasi dalam bentuk tanah atau rumah [10].

3. METODE PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan contoh kasus dari model pertumbuhan uang yang diinvestasikan dengan melakukan simulasi pada beberapa parameter yang mempengaruhi model tersebut.
2. Mencari solusi numerik berdasarkan metode Runge-Kutta Orde 4 dengan menggunakan *software* MATLAB berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi kasus dengan cara sebagai berikut :
   a. Mendeklarasikan parameter-parameter dari contoh kasus tersebut kedalam *software* Matlab R2013b.
   b. Membuat program untuk solusi numerik berdasarkan metode Runge-Kutta orde empat.
3. Mencari solusi numerik berdasarkan metode Adam-Bashfort Moulton dengan menggunakan *software* MATLAB berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi kasus dengan cara sebagai berikut :
   a. Mendeklarasikan parameter-parameter dari contoh kasus tersebut kedalam *software* Matlab R2013b.
   b. Membuat program untuk solusi numerik berdasarkan metode Adam-Bashfort Moulton.

4. Mencari nilai galat kedua metode tersebut terhadap solusi analitik dari contoh kasus.
5. Menetukan metode terbaik dalam mengaproksimasi solusi model pertumbuhan uang yang diinvestasikan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Contoh Kasus 1 (Bunga per annum/pertahun)

Jika bunga sebesar 10%pa dan besar tabungan diawal sebesar Rp.10.000.000, hitunglah nilai aproksimasi besarnya uang setiap tahun hingga tahun ke-20 menggunakan metode Runge-Kutta orde 4!

Penyelesaian :

Dari contoh kasus tersebut diketahui :

$P(0) = y(0) = 10.000.000$

$t(0) = x(0) = 0$

$\Delta x = 1$

$r = 10\%\text{pa} = 0{,}1$ (per-tahun)

n=20

Contoh kasus 1 tersebut diselesaikan dengan menggunakan *software* MATLAB, sehingga didapatkan nilai aproksimasi sebagai berikut :

Tabel 1. Hasil Aproksimasi dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 1)

X(i) (dalam tahun)	***Y(i)* analitik** (dalam rupiah)	***Y(i)* aproksimasi (Runge-Kutta Orde 4)** (dalam rupiah)	***Y(i)* aproksimasi (Adam-Bashfort Moulton)** (dalam rupiah)
1	11.051.708,33333333	11.051.709,18075648	11.051.708,33333333
2	12.214.025,70850695	12.214.027,58160170	12.214.025,70850695
3	13.498.584,97062538	13.498.588,07576003	13.498.584,97062538
4	14.918.242,40080686	14.918.246,97641270	14.918.245,40355310
5	16.487.206,38596838	16.487.212,70700128	16.487.213,08338743
6	18.221.179,62091933	18.221.188,00390509	18.221.190,73458307
7	20.137.516,26596777	20.137.527,07470477	20.137.532,65361586
8	22.255.395,63292315	22.255.409,28492468	22.255.418,28127850
9	24.596.014,13780071	24.596.031,11156950	24.596.044,18244477
10	27.182.797,44135165	27.182.818,28459046	27.182.836,18752231
11	30.041.634,90058981	30.041.660,23946433	30.041.683,84626175
12	33.201.138,67778059	33.201.169,22736548	33.201.199,53976755
13	36.692.930,10013834	36.692.966,67619245	36.693.004,84355603
14	40.551.956,13621164	40.551.999,66844675	40.552.047,00771641
15	44.816.839,15635380	44.816.890,70338065	44.816.948,72162644

16	49.530.263,47779349	49.530.324,24395115	49.530.394,66379336
17	54.739.402,56297260	54.739.473,91727201	54.739.558,70555078
18	60.496.391,14668923	60.496.474,64412947	60.496.576,04422073
19	66.858.847,01724582	66.858.944,42279270	66.859.064,99102014
20	73.890.447,67375541	73.890.560,98930651	73.890.703,63595378

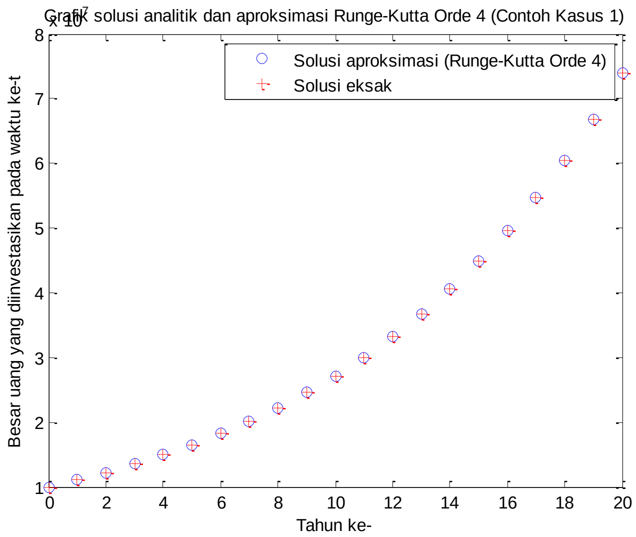
Berdasarkan tabel 1, maka dapat ditentukan galat dari kedua metode tersebut. Galat tersebut berguna dalam menetukan keakuratan dari kedua metode dalam mengaproksimasikan nilai eksak dari contoh kasus 1 pada model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Nilai galat tersebut dapat dilihat pada tabel berikut :

Tabel 2. Nilai Galat dari Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 1)

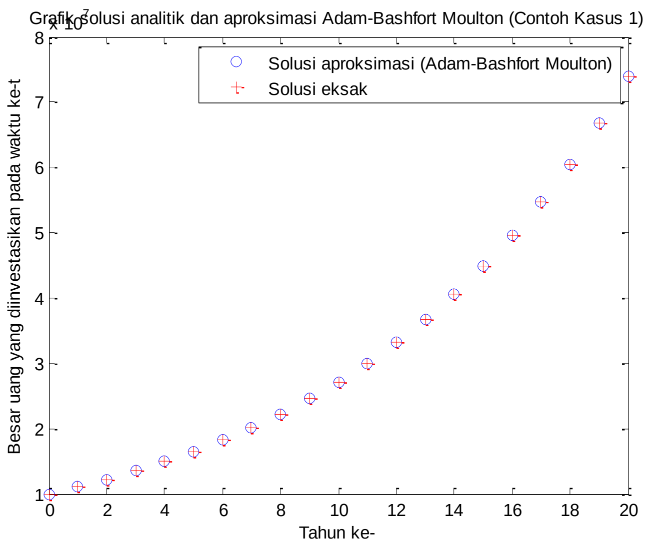
X(i) (dalam tahun)	**Nilai Galat Metode Runge-Kutta Orde 4** (dalam rupiah)	**Nilai Galat Metode Adam-Bashfort Moulton** (dalam rupiah)
1	1,0996599583333	0
2	2,4185317048295	0
3	3,9894225751018	0
4	5,8495087278527	3,0027462411672
5	8,0408811117998	6,6974190510809
6	10,6111569979211	11,1136637404561
7	13,6141647396738	16,3876480869949
8	17,1107103019759	22,6483553498983
9	21,1694350770220	30,0446440614760
10	25,8677755925148	38,7461706623435
11	31,2930369279308	48,9456719420850
12	37,5435930006340	60,8619869574904
13	44,7302283811933	74,7434176951647
14	52,9776379629593	90,8715047687292
15	62,4261026635142	109,5652726367116
16	73,2333613957802	131,1859998703003
17	85,5767018373876	156,1425781846046
18	99,6552950739348	184,8975315019488
19	115,6928020234213	217,9737743213773
20	133,9402826968873	255,9621983766556

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai aproksimasi dengan kedua metode tersebut pada contoh kasus 1 sudah mendekati nilai analitiknya. Untuk nilai $x(i) \leq 5$, nilai aproksimasi dengan metode Adam-Bashfort Moulton lebih mendekati solusi eksaknya, hal itu ditandai dengan lebih kecilnya galat pada metode Adam-

Bashfort Moulton dibandingkan metode Runge-Kutta Orde 4. Namun, pada nilai *x(i)*> 5 dapat dilihat bahwa nilai galat metode Runge-Kutta Orde 4 lebih kecil dibandingkan metode Adam-Bashfort Moulton, sehingga metode Runge-Kutta Orde 4 lebih baik dibandingkan metode Adam-Bashfort Moulton dalam mengaproksimasikan solusi dari contoh kasus 1 pada x(i) yang semakin besar. Dari *software* MATLAB juga, dapat dilihat grafik dari hasil aproksimasi dengan metode Runge-Kutta Orde 4 dan hasil analitik dari contoh kasus 1, yaitu sebagai berikut :



Gambar 1. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Runge-Kutta dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 1.



Gambar 2. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Adam-Bashfort Moulton dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 1

Dari kedua grafik tersebut terlihat bahwa kedua metode tersebut layak digunakan dalam mengaproksimasikan nilai eksak dari kasus 1 model pertumbuhan uang yang diinvestasikan, karena pada setiap titik dalam grafik tersebut hampir berimpitan.

4.2 Contoh Kasus 2 (Bunga harian)

Jika bunga perhari sebesar 0.025% dan besar tabungan diawal sebesar Rp.10.000.000, hitunglah nilai aproksimasi besarnya uang setiap tahun hingga tahun ke-20 menggunakan metode Runge-Kutta orde 4!

Penyelesaian :

Dari contoh kasus tersebut diketahui :

$P(0) = y(0) = 10.000.000$

$t(0) = x(0) = 0$

$\Delta x = 1$

$r \quad = 0{,}025\% \text{ perhari} = 0{,}025\% \times 360 = 9\%$ (per-tahun) = 0,09 (per-tahun)

Contoh kasus 2 tersebut diselesaikan dengan menggunakan *software* MATLAB, sehingga didapatkan nilai aproksimasi sebagai berikut :

Tabel 3. Hasil Aproksimasi dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 2).

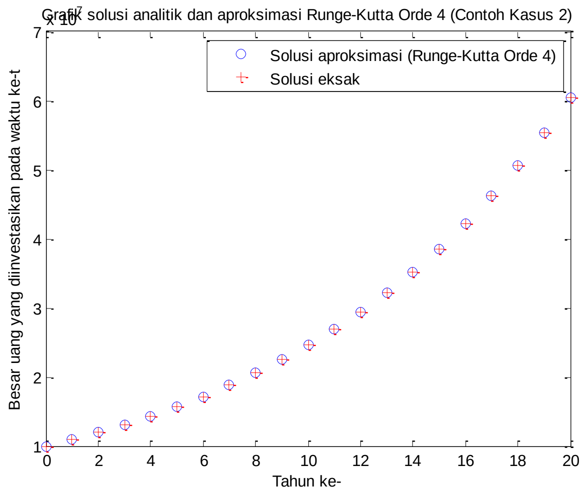
X(i) (dalam tahun)	***Y(i)* analitik** (dalam rupiah)	***Y(i)* aproksimasi (Runge-Kutta Orde 4)** (dalam rupiah)	***Y(i)* aproksimasi (Adam-Bashfort Moulton)** (dalam rupiah)
1	10.941.742,83705210	10.941.742,33750000	10.941.742,33750000
2	11.972.173,63121810	11.972.172,53802400	11.972.172,53802400
3	13.099.644,50733248	13.099.642,71311520	13.099.642,71311520
4	14.333.294,14560340	14.333.291,52802159	14.333.293,33653435
5	15.683.121,85490169	15.683.118,27478840	15.683.122,26461198
6	17.160.068,62184859	17.160.063,92112722	17.160.070,47542374
7	18.776.105,79264343	18.776.099,79200039	18.776.109,35985808
8	20.544.332,10643888	20.544.324,60272556	20.544.337,69375382
9	22.479.079,86676471	22.479.070,63009851	22.479.087,82300668
10	24.596.0311,1156949	24.596.019,88210017	24.596.041,83337015
11	26.912.344,72349263	26.912.331,20779673	26.912.358,66117915
12	29.446.795,51065524	29.446.779,37771719	29.446.813,17484586
13	32.219.926,38528500	32.219.907,26201901	32.219.948,35425114
14	35.254.214,87365382	35.254.192,33991571	35.254.241,80153393
15	38.574.255,30696974	38.574.228,89000238	38.574.287,93293014
16	42.206.958,16996552	42.206.927,33821547	42.206.997,32841390
17	46.181.768,22299781	46.181.732,37923384	46.181.814,85496623
18	50.530.903,16563867	50.530.861,63929575	50.530.958,33146601
19	55.289.614,77624004	55.289.566,81490369	55.289.679,66969735
20	60.496.474,64412945	60.496.419,40406668	60.496.550,60814787

Berdasarkan tabel 3, maka dapat ditentukan galat dari kedua metode tersebut. Galat tersebut berguna dalam menetukan keakuratan dari kedua metode dalam mengaproksimasikan nilai eksak dari contoh kasus 2 pada model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Nilai galat tersebut dapat dilihat pada tabel berikut :

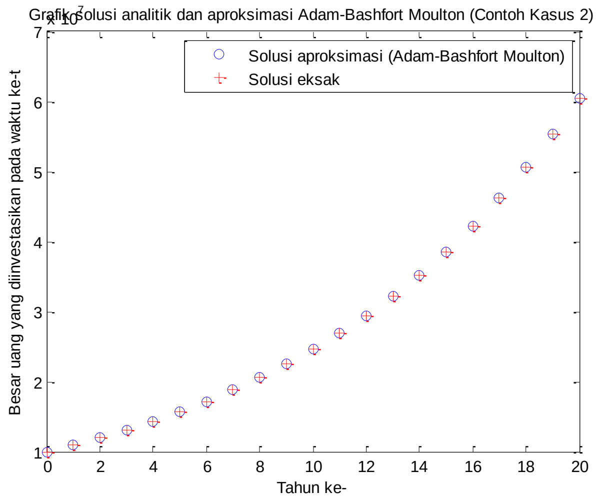
Tabel 4. Nilai Galat dari Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 2)

X(i) (dalam tahun)	**Nilai Galat Metode Runge-Kutta Orde 4** (dalam rupiah)	**Nilai Galat Metode Adam-Bashfort Moulton** (dalam rupiah)
1	0.499552099034190	0.499552099034190
2	1.093194099143148	1.093194099143148
3	1.794217279180884	1.794217279180884
4	2.617581808939576	0.809069050475955
5	3.580113289877772	0.409710289910436
6	4.700721371918917	1.853575147688389
7	6.000643040984869	3.567214649170637
8	7.503713317215443	5.587314940989018
9	9.236666198819876	7.956241969019175
10	11.229469321668148	10.721800658851862
11	13.515695899724960	13.937686521559954
12	16.132938049733639	17.664190620183945
13	19.123265992850065	21.968966137617826
14	22.533738113939762	26.927880108356476
15	26.416967362165451	32.625960402190685
16	30.831750050187111	39.158448383212090
17	35.843763969838619	46.631968423724174
18	41.526342920958996	55.165827341377735
19	47.961336351931095	64.893457308411598
20	55.240062765777111	75.964018419384956

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai aproksimasi dengan kedua metode tersebut pada contoh kasus 2 sudah mendekati nilai analitiknya. Untuk nilai $x(i)\leq 3$, nilai aproksimasi dari kedua metode tersebut bernilai sama, hal itu ditandai dengan sama besarnya nilai galat dari kedua metode tersebut. Pada nilai x(i)=4 hingga x(i)= 10, nilai aproksimasi dari metode Adam-Bashfort lebih baik dibandingkan aproksimasi dari metode Runge-Kutta Orde 4 karena galat yang dimiliki metode Adam-Bashfort Moulton lebih rendah dibandingkan dengan metode Runge-Kutta Orde 4 pada nilai x(i) tersebut. Namun, pada nilai $x(i)> 10$ dapat dilihat bahwa nilai galat metode Runge-Kutta Orde 4 lebih kecil dibandingkan metode Adam-Bashfort Moulton, sehingga metode Runge-Kutta Orde 4 lebih baik dibandingkan metode Adam-Bashfort Moulton dalam mengaproksimasikan solusi dari contoh kasus 2 pada x(i) yang semakin besar. Dari *software* MATLAB juga, dapat dilihat grafik dari hasil aproksimasi dengan metode Runge-Kutta Orde 4 dan hasil analitik dari contoh kasus 1, yaitu sebagai berikut :



Gambar 3. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Runge-Kutta dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 2.



Gambar 4. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Adam-Bashfort Moulton dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 2.

Dari kedua grafik tersebut terlihat bahwa kedua metode tersebut layak digunakan dalam mengaproksimasikan nilai eksak dari kasus 2 model pertumbuhan uang yang diinvestasikan, karena pada setiap titik dalam grafik tersebut hampir berimpitan.

4. KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa metode Runge-Kutta Orde 4 dan Adam-Bashfort Moulton dapat diterapkan pada model pertumbuhan uang yang diinvestasikan tersebut. Semakin kecil bunga pertahunnya, maka hasil aproksimasi semakin mendekati hasil eksaknya. Hal ini ditunjukkan pada contoh kasus 2 yang hasil aproksimasinya lebih mendekati nilai eksaknya dibandingkan dengan contoh kasus 1. Sebaliknya, semakin besar bunga pertahunnya, maka selisih antara hasil aproksimasi dan

ISBN No. 978-602-98559-3-7

hasil eksaknya akan semakin besar. Hal ini ditunjukkan pada contoh kasus 1 yang memiliki selisih yang besar antara hasil aproksimasi dan hasil eksaknya.

Metode Runge-Kutta Orde 4 lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada x(i) yang besar dibandingkan dengan metode Adam-Bashfort Moulton, hal itu terlehat pada kedua contoh kasus. Sebaliknya, dari kedua contoh kasus tersebut terlihat bahwa metode Adam-Bashfort Moulton lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada x(i) yang kecil dibandingkan metode Runge-Kutta Orde 4.

KEPUSPTAKAAN

[1] Cahyono, Edi. 2013. *Pemodelan Matematika*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

[2] Wardiman. 1981. *Persamaan Diferensial*. Citra Offset, Yogyakarta.

[3] Campbell. Haberman. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

[4] Hidayat. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. UPT Penerbitan Universitas Jember, Jember.

[5] Triatmodjo. 2012. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

[6] Muhammad, Singgih Tahwin. dkk. 2015. Pengkajian metode extended runge kutta dan penerapannya pada persamaan diferensial biasa. *Jurnal Sains dan Seni ITS Vol. 4, No.1, (2015) 2337-3520 (2301-928X Print).*

[7] Kartono. 2011. *Persamaan Diferensial*. C.V Andi Offset, Yogyakarta.

[8] Salusu, Abraham. 2008. *Metode Numerik : Dilengkapi dengan Animasi Matematika dan Panduan Singkat Maple*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

[9] Sunariyah, 2006, *Pengantar Pengetahuan Pasar Modal*, Edisi ke Lima, UPP AMP YKPN, Yogyakarta.

[10] Senduk. 2004. *Seri Perencana Keuangan Keluarga : Mencari Penghasilan Tambahan.* Alex Media Komputoindo, Jakarta.