**SOLUSI ANALITIK MODEL HOMOGEN SEMU 1-D**

**UNTUK REAKSI OKSIDASI**

**MENGGUNAKAN *HOMOTOPY PERTURBATION METHOD***

**ANALYTICAL SOLUTION OF 1-D PSEUDO HOMOGENENOUS MODEL FOR OXIDATION REACTION**

**USING *HOMOTOPY PERTURBATION METHOD***

Aang Nuryaman

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Lampung

Jalan Prof. Soemantri Brojonegoro No 1, Gedong Meneng Rajabasa, Bandarlampung 35145 Indonesia

**Abstrak**

Dalam artikel ini, kami mengkaji sebuah solusi dari persamaan konveksi-difusi yang diturunkan dari reaksi oksidasi di dalam sebuah reaktor kimia. Di sini komponen konversi dari gas umpan sebagai peubah tak bebasnya. Di dalam kajian ini, proses reaksi diasumsikan berupa model homogen semu satu-dimensi dan berada pada nilai laju reaksi tertentu. Dengan proses penskalaan ulang, bentuk nonlinear dari laju reaksi dapat dihampiri dengan bentuk linier sehingga menghasilkan sebuah persamaan konveksi-difusi linier yang dilengkapi dengan syarat awal dan sekumpulan syarat batas. Pada artikel ini dikaji solusi analitik dari masalah syarat awal dan syarat batas ini menggunakan metode perturbasi homotopi.

*Keywords: persamaan konveksi-difusi, model homogen semu 1-D, metode perturbasi homotopi*

**Abstract**

In this article, we study a solution of convective-diffusion equation arising from the oxidation reaction in a chemical reactor. Here the conversion of the feed gas is dependent variable. In this study, the reaction process are assumed to be 1-D pseudo homogeneous model and it is evaluated at a certain rate of reaction. With the re-scaling process, the nonlinear term of the reaction rate can be approximated as a linear term, resulting a linear convective-diffusion equation with an initial condition and a set of boundary conditions. In this article we study an analytical solution of the initial value problem and the boundary conditions using the homotopy perturbation method.

*Keywords: convective-diffusion equation, 1-D pseudo homogeneous model, homotopy perturbation method*.

**PENDAHULUAN**

Reaksi oksidasi merupakan reaksi kimia yang berlangsung antara sebuah zat reaktan dengan gas oksigen. Untuk reaksi oksidasi pada hidrokarbon, jika reaksi berlangsung sempurna maka akan menghasilkan gas karbon dioksida dan molekul air. Pada sebuah reaktor katalitik, reaksi oksidasi dapat dipandang sebagai masalah dinamika fluida pada media berpori dimana gas reaktan bertindak sebagai fluida sedangkan katalisnya bertindak sebagai media berporinya.

Dinamika peubah tak bebas pada reaksi oksidasi pada setiap waktu dan posisi, biasanya digambarkan dalam bentuk sistem persamaan difusi-konveksi yang di dalamnya mengandung suku tak linier yang merupakan kontribusi dari laju reaksi. Beberapa model matematika telah dibahas untuk menggambarkan dinamika peubah tak bebas, khususnya konsentrasi dan temperatur. Perbedaan utama antara model bergantung pada faktor disipasi panas yang dimodelkan. Disipasi panas yang dimaksudkan di sini adalah konduktifitas panas aksial, perpindahan panas antar fasa atau perpindahan panas di dalam butiran katalis dan difusi radial panas. Kontribusi faktor disipasi panas akan memberikan model yang berbeda. Secara umum model matematika yang digunakan berbentuk model homogen semu dan model heterogen (Matros dan Bunimovich, 1996).

Keberadaan suku tak linier pada model matemataika reaksi oksidasi menjadikan pendekatan numerik sebagai alternatif untuk menggambarkan perilaku dinamika peubah tak bebasnya. Namun ada juga peneliti yang melakukan pendekatan analitik, dengan menggunakan asumsi tertentu, untuk melihat perilaku peubah tak bebas. Diantaranya Nuryaman *et al*. (2012) mengkaji masalah perturbasi singular untuk peubah konversi pada kondisi tunak dan menyelesaikannya dengan menggunakan matched asymptotic method. Selanjutnya Nuryaman dan Gunawan (2017) menggunakan metode ekspansi asimtotik untuk menyelesaikan maslah perturbasi singular untuk peubah temperatur dan konsentrasi pada saat kondisi tunak. Dalam penelitiannya tersebut, kedua artikel menggunakan model homogen semu 1-D. Pada artikel ini akan dikaji perilaku kondisi konversi melalui pendekatan analitik pada saat kondisi tak tunak menggunakan metode perturbasi homotopi.

**BAHAN DAN METODE**

Model homogen semu 1-D yang digunakan diadopsi dari model yang dikemukakan oleh Khinast *et al*. (1999) yaitu

 (1)

 (2)

dengan dan . Peubah dan secara berturut-turut menyatakan temperatur (K) dan konsentrasi (fraksi mol, mol/liter) gas umpan pada posisi dan waktu . Adapun syarat batasnya adalah

 di (3)

 di (4)

yang dikenal dengan syarat batas Danckwert (Danckwerts, 1953) di mana dan menyatakan konsentrasi dan temperatur gas umpan yang masuk ke dalam reaktor serta L menyatakan panjang reaktor (m). Syarat batas ini diturunkan dari asumsi model bahwa dispersi massa dan energi hanya muncul di dalam reaktor. Secara fisis dispersi massa (energi) menyatakan penyebaran atau perubahan konsentrasi (temperatur) gas umpan dari satu titik ke titik lain karena adanya perbedaan konsentrasi (temperatur). Sedangkan syarat batas di ujung kanan reaktor diturunkan dari asumsi bahwa tidak ada pengaruh peralatan pada perilaku aliran. Secara fisis, konsentrasi (temperatur) gas umpan di bagian dalam dan di bagian luar ujung kanan reaktor adalah sama. Dengan kata lain tidak ada perubahan konsentrasi (temperatur) gas umpan di titik berikutnya pada ujung kanan reaktor.

Kondisi gas umpan yang masuk di ujung reaktor diasumsikan memiliki temperatur dan konsentrasi tetap (konstan). Adapun pada saat kondisi awal, , diasumsikan reaktor telah dipanaskan terlebih dahulu sehingga mencapai suhu tertentu yang diinginkan, yaitu .

Proses nondimensionalisasi dengan menggunakan parameter dan peubah tak berdimensi , , , serta sehingga diperoleh persamaan tak berdimensi untuk masalah nilai batas dan nilai awal (1) – (4) sebagai berikut (Van Noorden *et al*., 2003)

 (5)

 (6)

dan syarat batas

 (7)

 (8)

serta syarat awal , .

Pada penelitian sebelumnya, Nuryaman *et al*. (2012) mengkontruksi suatu masalah perturbasi singular untuk peubah konversi menggunakan persamaan (5) – (8) pada kondisi tunak dengan mengasumsikan bahwa kondisi tunak terjadi pada saat laju reaksi tertentu dimana reaktor masih dapat beroperasi. Dengan demikian laju reaksi dievaluasi pada peubah tak berdimensi temperatur tertentu sehingga masalah kondisi tunak dapat disederhanakan menjadi persamaan konversi saja. Solusi hampiran asimtotik menggunakan *matched asymptotic method* hingga orde pertama diperoleh untuk masalah perturbasi singular peubah konversi.

Kemudian Nuryaman dan Gunawan (2017) menggunakan proses penskalan ulang berbeda pada persamaan (1) – (4) serta asumsi tertentu untuk mendapatkan masalah perturbasi singular untuk peubah tak berdimensi temperatur dan konsentrasi pada saat kondisi tunak. Dengan menggunakan transformasi peubah bebas dan metode ekspansi asimtotik diperoleh solusi hampiran asimtotik hingga orde kedua untuk masalah kondisi tunak tersebut.

Pada artikel ini akan dikaji dinamika peubah konversi pada saat kondisi tak tunak dengan menggunakan persamaan (5) – (8). Untuk penyederhanaan, diasumsikan konversi dievaluasi pada laju reaksi tertentu dimana reaksi oksidasi dapat berlangsung secara spontan. Dengan demikian masalah dibatasi dengan meninjau persamaan untuk peubah konversi saja yaitu

 (9)

dan syarat batas serta syarat awal

 . (10)

Pada subbab berikutnya akan disajikan solusi analitik dari masalah nilai batas dan nilai awal yang digambarkan oleh persamaan (9) – (10) menggunakan metode perturbasi homotopi.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Metode perturbasi homotopi pertama kali diperkenalkan oleh He (1999). Dalam paper tersebut menyatakan bahwa ide dasar metode ini adalah dengan memperkenalkan parameter homotopi, sebutlah , yang nilainya bervariasi dari 0 sampai dengan 1. Pada saat , persamaan direduksi menjadi bentuk yang disederhanakan. Sebagaimana berangsur-angsur bertambah secara kontinu menuju 1, maka persamaan menuju sebuah barisan deformasi dan solusi pada masing-masing langkah mendekati solusi pada langkah sebelumnya. Pada akhirnya saat , persamaan menuju ke bentuk awal persamaan dan langkah terakhir deformasi memberikan solusi yang diinginkan.

Tinjau persamaan diferensial parsial

, (11)

dengan syarat batas

, (12)

dimana operator linier, operator nonlinier, operator batas, adalah batas dari daerah asal , dan fungsi analitik yang diketahui. Definisikan sebuah homotopi sedemikian sehingga

 (13)

Dimana , dan dan hampiran solusi awal persamaan (11) yang memenuhi syarat batas (12). Dari persamaan (13) maka diperoleh

 (14)

 (15)

Sebagaimana bergerak dari 0 menuju 1, maka bergerak dari menuju . Pada topologi hal ini disebut dengan deformasi dan serta dinamakan homotopik. Selanjutnya diasumsikan bahwa solusi persamaan (14) dan (15) dapat dinyatakan dalam bentuk deret kuasa dalam p,

 (16)

dengan . Maka solusi hampiran untuk persamaan (11) dapat dibentuk dengan menggunakan

 (17)

Dengan menggunakan metode perturbasi homotopi yang dijelaskan di atas, maka untuk masalah yang dinyatakan oleh persamaan (9) dan (10) pilih operator linier dan non linier secara berturut-turut

 (18)

. (19)

Dari persamaan (13) maka diperoleh

 (20)

Dengan menggunakan asumsi dapat dinyatakan dalam bentuk deret kuasa (16), maka diperoleh

. (21)

Untuk hampiran solusi awal dipilih .

Penyelesaian persamaan (21) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan ruas kiri dan ruas kanan yang memiliki orde yang sama yaitu

Orde (22)

Orde (23)

Orde (24)

Orde (25)

Syarat awal memberikan untuk setiap orde

Orde (26)

Dengan mengintegralkan terhadap t, maka solusi umum persamaan (22) adalah

 (27)

Dengan menggunakan persamaan (26) dan tebakan awal maka diperoleh . Dengan demikian solusi khusus persamaan (22) adalah

 (28)

Selanjutnya untuk kasus orde , dengan menggunakan persamaan (28) dan tebakan awal maka persamaan (23) menjadi

 (29)

dengan solusi umum

. (30)

Syarat awal memberikan sehingga

. (31)

Adapun untuk orde , dengan menggunakan persamaan (31) maka persamaan (24) menjadi

 (32)

dengan solusi umum

. (33)

Syarat awal memberikan sehingga

. (34)

Dengan menggunakan hasil orde sebelumnya maka untuk orde diperoleh:

. (35)

. (36)

. (37)

Dengan demikian diperoleh solusi untuk adalah

 (38)

Sebagai perbandingan, plot solusi analitik akan dibandingkan dengan solusi numerik dari persamaan (10). Untuk mendapatkan hampiran numeriknya di penelitian ini menggunakan metode forward time center space. Plot konversi terhadap waktu untuk tertentu (ujung reaktor) diberikan pada Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1. Plot t vs untuk dan .



Gambar 2. Plot t vs untuk dan .

**KESIMPULAN**

Berdasarkan data yang tersedia, telah dikaji model matematika untuk peubah konversi pada saat kondisi tak tunak. Dengan menggunakan metode perturbasi homotopi, telah diperoleh solusi analitik untuk masalah tersebut dan membandingkannya dengan solusi numerik untuk peubah posisi tertentu. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa plot solusi analitik mendekati plot solusi hampiran numeriknya untuk nilai parameter yang terkait dengan laju reaksi yang cukup besar..

**UCAPAN TERIMAKASIH**

Penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada Ketua dan Sekretaris Jurusan Matematika serta Dekan FMIPA Universitas Lampung atas dukungan moril dan bantuan dana yang diberikan sehingga publikasi penelitian ini dapat terlaksana.

**DAFTAR PUSTAKA**

A. Nuryaman, A.Y. Gunawan, K.A. Sidarto, Y.W. Budhi. 2012. “A Singular Perturbation Problem for Steady State Conversion of Methane OxidationProcess in Reverse Flow Reactor ”, *ITB Journal of Science* Vol 44A No 3, pp. 277-287.

A. Nuryaman, and A.Y. Gunawan. 2017. “A Singular Perturbation Problem in Steady State of Methane Combustion Using Reverse Flow Reactor ”, *Far East Journal of Mathematical Sciences* (FJMS) Vol 102 No 9, , pp. 2069-2079.

Dankwerts, P.V. 1953. Continous flow system: Distribution of Residence times. *Chem. Eng. Sci.*, 2: 1-13.

J. H. He. 1999. Homotopy perturbation technique. *Comput. Math. Appl. Mech. Eng.* 178(3-4)., 257-262.

Khinast, J., Jeong, Y.O., Luss, D. 1999. Dependence of cooled reverse-flow reactor dynamics on reactor model. *A.I.Ch.E. Journal* 45, 299–309.

Matros, Y. S., and Bunimovich, G. A. 1996. Reverse-flow operation in fixed bed catalytic reactors, *Catalysis Reviews: Science and Engineering*, 38, 1 – 66.

Van Noorden, T.L., Verduyn Lunel, S.M.V. & Bliek, A. 2003. The Efficient Computation of Periodic States of Cyclically Operated Chemical Processes, IMA *Journal of Applied Mathematics*, **68**, pp. 149-166..