



Vol 2, No.1 Januari 2016

Math



Jurnal Pendidikan Matematika

Program Studi Pendidikan Matematika STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung

Math

Home > Archives > Vol 2, No 1 (2016)

### Vol 2, No 1 (2016)

#### Table of Contents

##### Articles

ANALISIS KESALAHAN SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL-SOAL KESEBANGUNAN	PDF
<i>Siti Rahayu</i>	
PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN KONTEKSTUAL PADA MATERI PECAHAN	PDF
<i>Robia Astuti</i>	
EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE CIRC (COOPERATIVE INTEGRATED READING AND COMPOTITION) PADA KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH	PDF
<i>Binti Anisaul Khasanah</i>	
EFEKTIVITAS MODEL PEMBELAJARAN OPEN ENDED DENGAN MEDIA POWER POIN PADA MATERI LINGKARAN DAN BANGUN RUANG KUBUS DAN BALOK	PDF
<i>Suminto .</i>	
KARAKTERISTIK FUNGSI DISTRIBUSI FOUR-PARAMETER GENERALIZED-t	PDF
<i>Rahman Cahyadi, Warsono ., Mustofa Usman, Dian Kurniasari</i>	
PERSEPSI MAHA SISWA TENTANG KOMPETENSI MENGAJAR DOSEN PENGAMPU PADA MATA KULIAH STRUKTUR ALJABAR	PDF
<i>Naning Sutriningsih</i>	
PERBANDINGAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA ANTARA PENGGUNAAN MEDIA BERBASIS KOMPUTER DAN CETAK	PDF

OPEN JOURNAL SYSTEMS

Journal Help

##### USER

Username

Password

Remember me

Login

##### NOTIFICATIONS

▶ View

▶ Subscribe

##### JOURNAL CONTENT

Search

All ▼

Search

Browse

▶ By Issue

▶ By Author

▶ By Title

PERSEPSI MAHASISWA TENTANG KOMPETENSI MENGAJAR DOSEN PENGAMPU PADA MATA KULIAH STRUKTUR ALJABAR	PDF
<i>Naning Sutriningsih</i>	
PERBANDINGAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA ANTARA PENGGUNAAN MEDIA BERBASIS KOMPUTER DAN CETAK	PDF
<i>Abi Fadila</i>	
PEMBELAJARAN MATEMATIKA MENGGUNAKAN THINK TALK WRITE DITINJAU DARI KECERDASAN LOGIKA MATEMATIKA	PDF
<i>Ari Suningsih</i>	
EFEKTIVITAS PEMBELAJARAN STATISTIK KELAS IX SMP MELALUI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF	PDF
<i>Fitri Era Sugesti</i>	
HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA DENGAN MODEL PEMBELAJARAN STAD MELALUI PENDEKATAN PEMBELAJARAN BRAIN BASED LEARNING	PDF
<i>Hidayatulloh .</i>	
PENERAPAN METODE INQUIRY PADA MATERI HIMPUNAN	PDF
<i>Ana Istiani</i>	
EFEKTIVITAS METODE INQUIRY TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA	PDF
<i>Wahyu Kusumaningtyas</i>	
EFEKTIVITAS STRATEGI PEMBELAJARAN SISWA AKTIF TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA	PDF
<i>Wahyu Nofiansyah</i>	
EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN REASONING AND PROBLEM SOLVING DITUNJANG MEDIA POWER POINT TERHADAP HASIL BELAJAR MATERI LINGKARAN	PDF
<i>Amalia Zulvia Widyaningrum</i>	
PENINGKATAN KEMAMPUAN REPRESENTASI MATEMATIS MELALUI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF THINK PAIR SHARE	PDF
<i>Yunni Arnidha</i>	
ANALISIS KECENDERUNGAN PENELITIAN SKRIPSI MAHASISWA PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SUKABUMI TAHUN AKADEMIK 2014-2015	PDF
<i>Nur'aini Muhassanah, Aritsya Imswatama</i>	
PENGARUH STRATEGI EVERYONE IS A TEACHER HERE TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA	PDF
<i>Sulaiman .</i>	
EFEKTIVITAS MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE NUMBERED HEADS TOGETHER DITINJAU DARI AKTIVITAS DAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA	PDF
<i>Komarudin .</i>	
PEMBELAJARAN LINGKARAN DENGAN METODE DEMONSTRASI MELALUI ALAT PERAGA KONKRIT DAN ALAT PERAGA GAMBAR	PDF
<i>Nurmitasari .</i>	

[Home](#) > [About the Journal](#) > [Editorial Team](#)

## Editorial Team

### Editor in Chief

Ari Suningsih, STKIP Muhammadiyah Pringsewu

### Managing Editor

Rahma Faelasofi, STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung

### Editors

Purna Bayu Nugroho, STKIP Muhammadiyah Kota Bumi  
Veria Septianingtias, STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung  
Seftika ., STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung  
Muji Yati, STKIP Muhammadiyah Pringsewu  
Nur Faizal, STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung

### Reviewers

Hartono Hartono, IKIP PGRI Pontianak  
Aflich Yusnita Fitrianna, STKIP Siliwangi Bandung  
Sri Hastuti Noer, Universitas Lampung  
Novalia ., IAIN Raden Intan  
Septiana Wijayanti, Universitas Widya Dharma  
Nuraini Muhasanah, STMIK Sinar Nusantara Surakarta  
Mutia Mutia, IAIN Curub Bengkulu  
Bambang Sri Anggoro, IAIN Raden Intan Lampung  
Yadi Ardiawan, IKIP PGRI Pontianak

## KARAKTERISTIK FUNGSI DISTRIBUSI *FOUR-PARAMETER GENERALIZED-t*

Rahman Cahyadi<sup>1</sup>, Warsono<sup>2</sup>, Mustofa Usman<sup>3</sup>, Dian Kurniasari<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Pendidikan Matematika, STKIP Muhammadiyah Pringsewu

Email: [rahman\\_cahyadi@yahoo.com](mailto:rahman_cahyadi@yahoo.com)

<sup>2</sup>Matematika, Universitas Lampung

<sup>3</sup>Matematika, Universitas Lampung

<sup>4</sup>Matematika, Universitas Lampung

### *Abstract*

*This research is about the characteristic function of four-parameter generalized t distribution. Four-parameter generalized t distribution has four parameters which are  $\mu$  as a location parameter,  $\sigma$  as a scale parameter,  $p$  and  $q$  as a shape parameter, and  $B$  as a function of beta. The characteristic function are retrieved from the expectation of  $e^{itx}$ , where  $i$  as a imaginary number. Then, the characteristic function of four-parameter generalized t distribution was able to be determined by using definition and trigonometric expansions. Based on those two methods this study got the same results and then will be continued proving the fundamental properties of the characteristic function of four-parameter generalized t distribution. Furthermore, it needs graph simulation on a characteristic function of four-parameter generalized t distribution. Graph simulation result on the characteristic function of four-parameter generalized t distribution was formed a closed curve (circle) are smooth.*

**Keywords:** *four-parameter generalized t distribution, characteristic function, graph simulation*

### 1. PENDAHULUAN

*Distribusi t* merupakan salah satu dari keluarga distribusi peluang kontinu yang penurunannya berdasarkan distribusi normal baku dan distribusi khi-kuadrat. Distribusi *four-parameter generalized t* merupakan bentuk perumuman dari *distribusi t* dengan menambahkan lagi parameter yang lain. Distribusi *four-parameter generalized t* memiliki empat parameter yaitu parameter bentuk  $(p,q)$ , parameter lokasi  $(\mu)$ , dan

parameter skala  $(\sigma)$  serta  $B$  sebagai fungsi beta. Sudah banyak peneliti yang membahas tentang distribusi *four-parameter generalized t* diantaranya yaitu: McDonald dan Newey (1988), Boyer dkk (2003), Chan dkk (2007), Lee dkk (2012).

Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistika. Fungsi karakteristik dapat digunakan untuk menentukan fungsi distribusi dari suatu peubah acak yang dikenal sebagai teorema inversi fungsi

karakteristik. Teorema inversi fungsi karakteristik merupakan salah satu sifat yang menjadi ciri khas fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik juga memiliki sifat-sifat dasar. Namun demikian, sejauh penelusuran yang telah penulis lakukan bahwa belum ditemukan penjelasan tentang fungsi karakteristik khususnya fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t*.

Pada penelitian ini, penulis akan membahas lebih dalam mengenai fungsi karakteristik, dan pembuktian sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* (1), kemudian akan dilanjutkan dengan melakukan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan *software MATLAB R2010b*. Menurut McDonald dan Newey (1988) distribusi *generalized t* memiliki fungsi kepekatan peluang berbentuk :

$$GT(x; \mu, \sigma, p, q) = \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left[1 + \frac{1}{q} \left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p} + q}}$$

for  $-\infty < x < \infty$  (1)

Dimana  $\mu \in \mathbb{R}$  adalah parameter lokasi,  $\sigma > 0$  adalah parameter skala,  $p > 0$  dan  $q > 0$  keduanya parameter bentuk

dan  $B(\cdot)$  Apakah fungsi beta (Chan et al, 2007),

Fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dapat diperoleh dari fungsi pembangkit momen dengan menambahkan  $i$  sebagai bagian imajiner dan ekspansi trigonometri. Dalam penelitian ini digunakan dua cara tersebut untuk mencari fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t*. Selanjutnya akan dibuktikan sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dan melakukan simulasi grafik gambar fungsi kepekatan peluang dan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t*. Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan dalam penelitian ini akan dibahas kajian tentang “Fungsi Karakteristik dari Distribusi *four-parameter generalized t*”.

## 2. PEMBAHASAN

### 1) Distribusi Four-Parameter

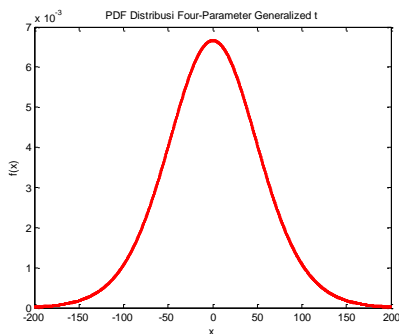
#### Generalized t

Suatu peubah acak  $X$  dikatakan memiliki distribusi *generalized t*, dengan parameter  $\sigma, \mu, p$  dan  $q$ , dan jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluang dari  $X$  adalah

$$GT(x; \mu, \sigma, p, q) = \frac{p}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left[1 + \frac{1}{q} \left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p} + q}}$$

for  $-\infty < x < \infty$  (2)

Dimana  $\mu \in \mathbb{R}$  adalah parameter lokasi,  $\sigma > 0$  adalah parameter skala,  $p > 0$  dan  $q > 0$  keduanya parameter bentuk dan  $B(\cdot)$  Adalah fungsi beta (Chan et al, 2007).

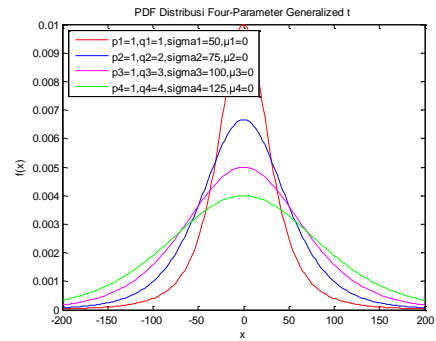


**Gambar 1. Grafik Fungsi Kepekatan Peluang dari Distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=1, q=20, \sigma=100, \mu=0$**

2) Simulasi Grafik Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi *Four-Parameter Generalized t*

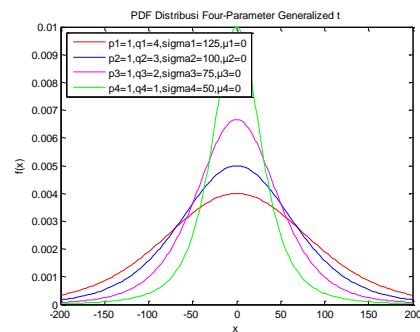
Pada bagian ini akan dibahas mengenai simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan menggunakan software MATLAB R2010b.

(1) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  tetap,  $q$  meningkat,  $\sigma$  meningkat,  $\mu$  tetap



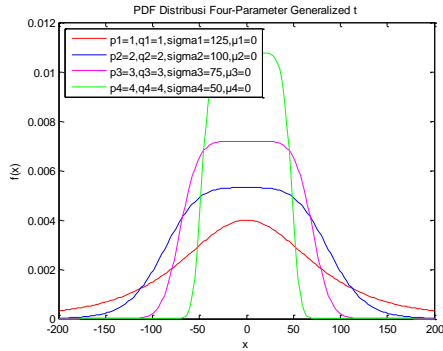
**Gambar 2. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=1, q=(1,2,3,4), \sigma=(50,75,100,125), \mu=0$**

(2) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  tetap,  $q$  menurun,  $\sigma$  menurun,  $\mu$  tetap



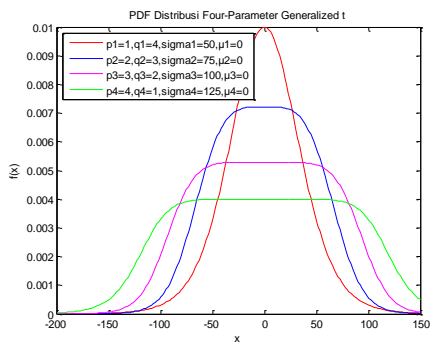
**Gambar 3. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=1, q=(4,3,2,1), \sigma=(125,100,75,50), \mu=0$**

(3) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  meningkat,  $q$  meningkat,  $\sigma$  menurun,  $\mu$  tetap



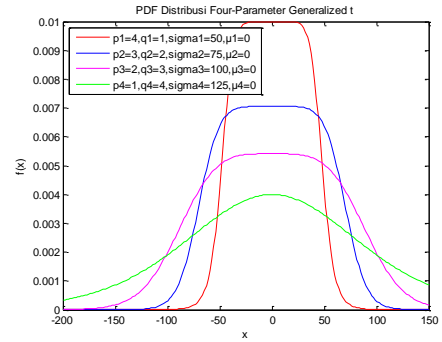
**Gambar 4. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(1,2,3,4)$ ,  $q=(1,2,3,4)$ ,  $\sigma=(125,100,75,50)$ ,  $\mu=0$**

- (4) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  meningkat,  $q$  menurun,  $\sigma$  meningkat,  $\mu$  tetap



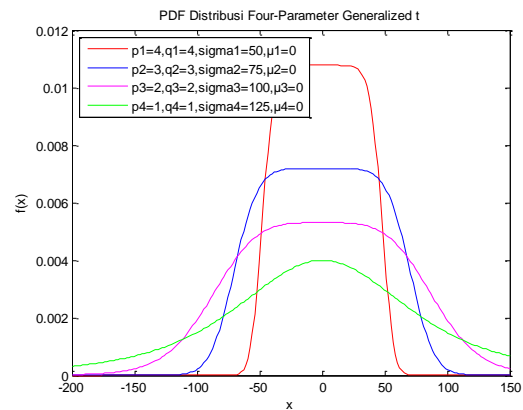
**Gambar 5. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(1,2,3,4)$ ,  $q=(4,3,2,1)$ ,  $\sigma=(50,75,100,125)$ ,  $\mu=0$**

- (5) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  menurun,  $q$  meningkat,  $\sigma$  meningkat,  $\mu$  tetap



**Gambar 6. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(4,3,2,1)$ ,  $q=(1,2,3,4)$ ,  $\sigma=(50,75,100,125)$ ,  $\mu=0$**

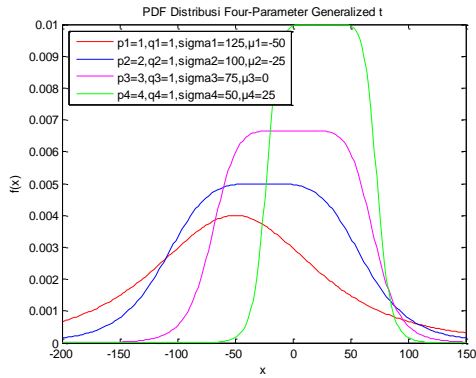
- (6) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  menurun,  $q$  menurun,  $\sigma$  meningkat,  $\mu$  tetap



**Gambar 7. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(4,3,2,1)$ ,  $q=(4,3,2,1)$ ,  $\sigma=(50,75,100,125)$ ,  $\mu=0$**

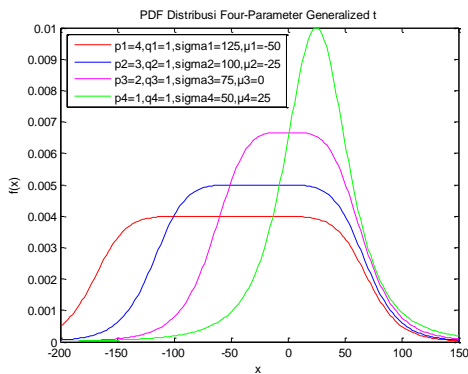
- (7) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  meningkat,  $q$  tetap,  $\sigma$  menurun,  $\mu$  berbeda





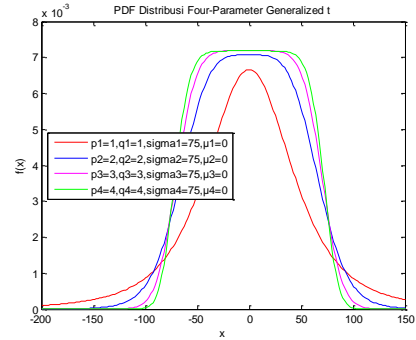
**Gambar 8. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(1,2,3,4)$ ,  $q=1$ ,  $\sigma=(125,100,75,50)$ ,  $\mu=(-50,-25,0,25)$**

- (8) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  menurun,  $q$  tetap,  $\sigma$  menurun,  $\mu$  berbeda



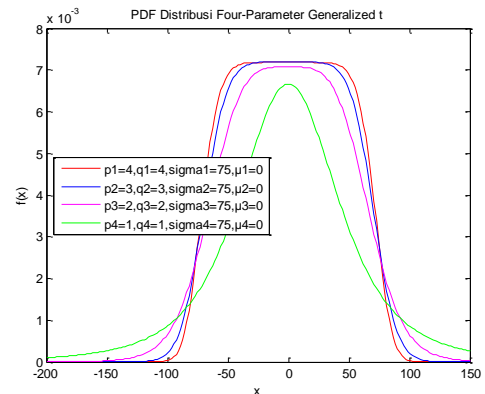
**Gambar 9. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(4,3,2,1)$ ,  $q=1$ ,  $\sigma=(125,100,75,50)$ ,  $\mu=(-50,-25,0,25)$**

- (9) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  meningkat,  $q$  meningkat,  $\sigma$  tetap,  $\mu$  tetap



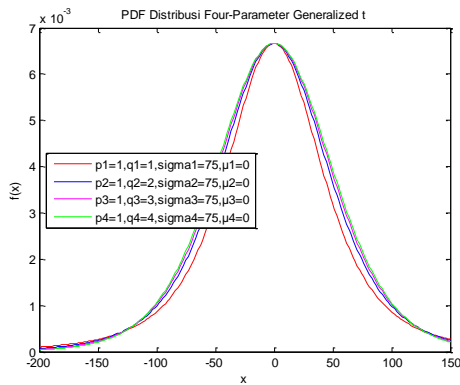
**Gambar 10. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(1,2,3,4)$ ,  $q=(1,2,3,4)$ ,  $\sigma=75$ ,  $\mu=0$**

- (10) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  menurun,  $q$  menurun,  $\sigma$  tetap,  $\mu$  tetap



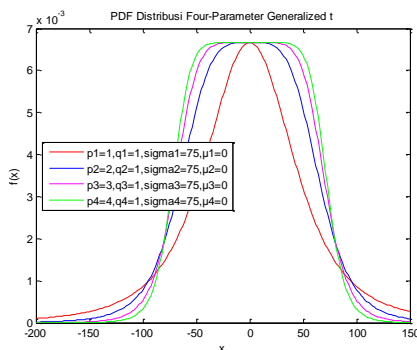
**Gambar 11. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(4,3,2,1)$ ,  $q=(4,3,2,1)$ ,  $\sigma=75$ ,  $\mu=0$**

- (11) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  tetap,  $q$  meningkat,  $\sigma$  tetap,  $\mu$  tetap



**Gambar 12. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=1, q=(1,2,3,4), \sigma=75, \mu=0$**

(12) Simulasi grafik fungsi kepekatan peluang dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan nilai  $p$  meningkat,  $q$  tetap,  $\sigma$  tetap,  $\mu$  tetap



**Gambar 13. Grafik Fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $p=(1,2,3,4), q=1, \sigma=75, \mu=0$**

Dari gambar grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* dapat di lihat bahwa  $\sigma$  adalah parameter skala,  $p$  dan  $q$  adalah parameter bentuk sehingga semakin menurun nilai  $\sigma$  maka semakin kecil skala dari grafik yang terbentuk dan sebaliknya, semakin meningkat nilai  $\sigma$  maka semakin besar

skala dari grafik yang terbentuk. Sedangkan puncak grafik yang terbentuk dipengaruhi oleh meningkat atau menurun nilai  $p$  dan  $q$ . Kemudian  $\mu$  adalah parameter lokasi sehingga dapat di lihat pada gambar bahwa grafik selalu simetri pada  $\mu$ .

### 3) Fungsi Karakteristik Distribusi Four-Parameter Generalized t

(1) Fungsi Karakteristik Distribusi *Four-Parameter Generalized t* dengan definisi

Pada bagian ini akan dijelaskan fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t*. Fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dapat diperoleh dari fungsi pembangkit momen dengan menambahkan  $i$  sebagai bagian imajiner.

Jika  $X$  adalah distribusi peubah acak distribusi *generalized t* dengan parameter  $\mu \in \mathbb{R}$  dan  $\sigma, p, q > 0$ , maka fungsi karakteristik  $X$  adalah sebagai berikut :

$$\phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Oleh karena batas  $x$  pada fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* adalah  $-\infty < x < \infty$ , dan berdasarkan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang

distribusi *four-parameter generalized t* diperoleh grafik plot yang simetri pada  $\mu$ , maka berdasarkan teorema simetri berlaku:

$$\begin{aligned} \phi_{x-\mu}(t) &= 2 \int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)} f(x) dx \\ &= 2 \int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)} \frac{P}{2\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left[1 + \frac{1}{q} \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{\frac{1}{p}+q}\right]} dx \end{aligned}$$

Misalkan  $y = \frac{1}{q} \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^{\frac{1}{p}+q}$  kita dapat

menulis ulang persamaan ( 2 ) dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned} \phi_{x-\mu}(t) &= \frac{P}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} e^{it(x-\mu)} \frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma dy \\ &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)^{\mu}} \int_0^{\infty} e^{it(x-\mu)} \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy \end{aligned} \tag{3}$$

Menggunakan MacLaurin dari fungsi  $e^{it(x-\mu)}$ , maka persamaan ( 3 ) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \phi_{x-\mu}(t) &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it(x-\mu))^n}{n!} \right) \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{n}{p}, q - \frac{n}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{n}{p}\right)\Gamma\left(q - \frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma(q)} \end{aligned}$$

Dengan pendekatan Stirling, diperoleh

$$\phi_{x-\mu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(itq^{\frac{1}{p}}\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^n}{n!} \tag{4}$$

Dengan menggunakan ekspansi deret MacLaurin, persamaan (4) dapat dinyatakan sebagai

$$\phi_{x-\mu}(t) = e^{itq^{\frac{1}{p}}\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Jadi fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) = e^{it\mu} E(e^{it(x-\mu)}) = e^{it\mu} \cdot \phi_{x-\mu}(t) \\ &= e^{it\mu} \cdot e^{it\sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} = e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)} \end{aligned}$$

(2) Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan ekspansi trigonometri

Selain menggunakan metode yang dijelaskan sebelumnya, pada bagian ini akan dijelaskan cara lain untuk menentukan fungsi dari karakteristik, sebagai berikut :

Akan ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) = E[\cos(tx) + i \sin(tx)] \\ &= E[\cos(tx)] + i E[\sin(tx)] \\ &= e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)} \end{aligned}$$

Bukti :

$$\phi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Oleh karena batas x pada fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* adalah  $-\infty < x < \infty$ , dan berdasarkan simulasi grafik fungsi kepekatan peluang distribusi *four-parameter generalized t* diperoleh grafik plot yang simetri pada  $\mu$ , maka berdasarkan teorema simetri berlaku:

$$\phi_{x-\mu}(t) = 2 \int_{\mu}^{\infty} e^{it(x-\mu)} f(x) dx$$

$$= 2 \int_{\mu}^{\infty} [\text{Cos}(t(x-\mu)) + i \text{Sin}(t(x-\mu))] f(x) dx$$

(5)

Persamaan (5) akan diselesaikan berikut ini

$$f(x-\mu) = \text{Cos}(t(x-\mu)) \text{ dan}$$

$$f(x-\mu) = \text{Sin}(t(x-\mu))$$

$$f(x-\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-\mu)^n : \text{dimana } C_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

Oleh karena,

$$\text{Cos}(t(x-\mu)) = 1 - \frac{1}{2!} (t(x-\mu))^2 + \frac{1}{4!} (t(x-\mu))^4 \mp \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (t(x-\mu))^{2n}$$

$$i \text{Sin}(t(x-\mu)) = it(x-\mu) - \frac{i}{3!} (t(x-\mu))^3 + \frac{i}{5!} (t(x-\mu))^5 \mp \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} i (t(x-\mu))^{2n+1}$$

Dengan memisahkan menjadi dua bagian, kita selesaikan secara terpisah dari persamaan (5) yang kita miliki,

**Bagian pertama**

$$\int_{\mu}^{\infty} \text{Cos}(t(x-\mu)) f(x) dx = \int_{\mu}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-\mu)^n \right) \frac{p}{\alpha q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left[ 1 + \frac{1}{q} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

$$= \frac{p}{\alpha q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty} \left( 1 - \frac{(t(x-\mu))^2}{2!} + \frac{(t(x-\mu))^4}{4!} \mp \dots \right) \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{q} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

(6)

Dengan memisalkan  $y = \frac{1}{q} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^p$  kita dapat menuliskan persamaan (6) dalam bentuk berikut

$$\int_{\mu}^{\infty} \text{Cos}(t(x-\mu)) f(x) dx = \frac{p}{\alpha q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty} \left( 1 - \frac{(t(x-\mu))^2}{2!} + \frac{(t(x-\mu))^4}{4!} \mp \dots \right) \frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{(t(x-\mu))^2}{2!} + \frac{(t(x-\mu))^4}{4!} \mp \dots \right) \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \int_0^{\infty} \frac{(t(x-\mu))^2}{2!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \int_0^{\infty} \frac{(t(x-\mu))^4}{4!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2!} \left( y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^2 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \int_0^{\infty} \frac{t^4}{4!} \left( y^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^4 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \frac{t^2}{2!} q^{\frac{2}{p}} \sigma^2 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \frac{t^4}{4!} q^{\frac{4}{p}} \sigma^4 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \frac{t^2}{2!} q^{\frac{2}{p}} \sigma^2 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q-\frac{2}{p}}} dy + \frac{t^4}{4!} q^{\frac{4}{p}} \sigma^4 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q-\frac{4}{p}}} dy + \dots \right]$$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi Beta, kita memiliki

$$\int_{\mu}^{\infty} \text{Cos}(t(x-\mu)) f(x) dx = \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ B\left(\frac{1}{p}, q\right) - \frac{t^2}{2!} q^{\frac{2}{p}} \sigma^2 B\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}, q - \frac{2}{p}\right) + \frac{t^4}{4!} q^{\frac{4}{p}} \sigma^4 B\left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p}, q - \frac{4}{p}\right) + \dots \right]$$

$$= 1 - \frac{(t q^{\frac{1}{p}} \sigma)^2}{2!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}, q - \frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{(t q^{\frac{1}{p}} \sigma)^4}{4!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p}, q - \frac{4}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \dots$$

(7)

**Bagian kedua**

$$\int_{\mu}^{\infty} i \text{Sin}(t(x-\mu)) f(x) dx = \int_{\mu}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-\mu)^n \right) \frac{p}{\alpha q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left[ 1 + \frac{1}{q} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

$$= \frac{p}{\alpha q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty} \left( it(x-\mu) - \frac{i(t(x-\mu))^3}{3!} + \frac{i(t(x-\mu))^5}{5!} \mp \dots \right) \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{q} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}+q}} dx$$

(8)

Dengan memisalkan  $y = \frac{1}{q} \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^p$  kita dapat menuliskan persamaan (8) dalam bentuk berikut

$$2 \int_{\mu}^{\infty} i \text{Sin}(t(x-\mu)) f(x) dx = \frac{p}{\alpha q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \left( it(x-\mu) - \frac{i(t(x-\mu))^3}{3!} + \frac{i(t(x-\mu))^5}{5!} \mp \dots \right) \frac{1}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \left( itx - \frac{i(t(x-\mu))^3}{3!} + \frac{i(t(x-\mu))^5}{5!} - \dots \right) \cdot \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ \int_0^{\infty} it(x-\mu) \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \int_0^{\infty} \frac{i(t(x-\mu))^3}{3!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \int_0^{\infty} \frac{i(t(x-\mu))^5}{5!} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ \int_0^{\infty} it \left( y^{\frac{1}{p}} \sigma \right) \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \int_0^{\infty} \frac{it^3}{3!} \left( y^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^3 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \int_0^{\infty} \frac{it^5}{5!} \left( y^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^5 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right] \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ itq^{\frac{1}{p}} \sigma \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy - \frac{it^3}{3!} q^{\frac{3}{p}} \sigma^3 \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \frac{it^5}{5!} q^{\frac{5}{p}} \sigma^5 \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{p}} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ itq^{\frac{1}{p}} \sigma \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+q}} dy - \frac{it^3}{3!} q^{\frac{3}{p}} \sigma^3 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+q}} dy + \frac{it^5}{5!} q^{\frac{5}{p}} \sigma^5 \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+q}} dy + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi

Beta, kita memiliki

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \left[ itq^{\frac{1}{p}} \sigma B\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}, q - \frac{1}{p}\right) - \frac{it^3}{3!} q^{\frac{3}{p}} \sigma^3 B\left(\frac{1}{p} + \frac{3}{p}, q - \frac{3}{p}\right) + \frac{it^5}{5!} q^{\frac{5}{p}} \sigma^5 B\left(\frac{1}{p} + \frac{5}{p}, q - \frac{5}{p}\right) + \dots \right] \\
 &= itq^{\frac{1}{p}} \sigma \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}, q - \frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{it^3}{3!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{3}{p}, q - \frac{3}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{it^5}{5!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{5}{p}, q - \frac{5}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \dots
 \end{aligned}$$

(9)

Mensubstitusikan Persamaan ( 7 ) dan

Persamaan ( 9 ) ke dalam Persamaan ( 5 ),  
jadi

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \left[ 1 - \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^2}{2!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}, q - \frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^4}{4!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p}, q - \frac{4}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \dots \right] \\
 &+ \left[ itq^{\frac{1}{p}} \sigma \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}, q - \frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{it^3}{3!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{3}{p}, q - \frac{3}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{it^5}{5!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{5}{p}, q - \frac{5}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \dots \right] \\
 &= 1 + itq^{\frac{1}{p}} \sigma \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}, q - \frac{1}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^2}{2!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p}, q - \frac{2}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \frac{it^3}{3!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{3}{p}, q - \frac{3}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \\
 &+ \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^4}{4!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{4}{p}, q - \frac{4}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} + \frac{it^5}{5!} \frac{B\left(\frac{1}{p} + \frac{5}{p}, q - \frac{5}{p}\right)}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} - \dots
 \end{aligned}$$

Diketahui bahwa  $i = \sqrt{-1}$ ,  $i$  adalah bagian dari imajiner, sehingga persamaan menjadi

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{n}{p}\right) \Gamma\left(q - \frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma(q)} \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{n}{p}\right) \Gamma\left(q - \frac{n}{p}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p} + q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p} + q\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma(q)} \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + \frac{n}{p}\right) \Gamma\left(q - \frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma(q)}
 \end{aligned}$$

Dengan pendekatan Stirling, kita memperoleh

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^n}{n!} \frac{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p} + \frac{n}{p} - \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-q} (q)^{q - \frac{n}{p} - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-q} (q)^{q - \frac{1}{2}}} \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \right)^n}{n!} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{n}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{n}{p}} \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} \cos(t(x-\mu)) f(x) dx + \int_{\mu}^{\infty} i \sin(t(x-\mu)) f(x) dx = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( itq^{\frac{1}{p}} \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \right)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

(10)

dan persamaan ( 10 ) dapat ditulis kembali sebagai bentuk berikut

$$\phi_{x-\mu}(t) = e^{itq^{\frac{1}{p}} \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Jadi fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) = e^{i\mu t} E(e^{it(x-\mu)}) = e^{i\mu t} \cdot \phi_{x-\mu}(t) \\ &= e^{i\mu t} \cdot e^{it\sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} = e^{it\left(\mu + \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)} \end{aligned}$$

Dengan demikian, fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu + \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

Berdasarkan penjabaran tersebut dalam menentukan fungsi karakteristik menggunakan definisi dan menggunakan ekspansi trigonometri diperoleh hasil yang sama. Sehingga dapat disimpulkan fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* adalah :

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu + \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

(3) Pembuktian Sifat-Sifat Dasar Fungsi

Karakteristik dari Fungsi

Karakteristik Distribusi *Four-*

*Parameter Generalized t*

Pada bagian ini akan dibahas tentang sifat-sifat dasar fungsi karakteristik dari fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t*. Akan ditunjukkan bahwa fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat-sifat dasar dari fungsi karakteristik.

Sifat 1. Misalkan fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized* adalah

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu + \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)} \text{Maka } \phi_x(0) = 1.$$

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$\phi_x(t) = e^{it\left(\mu + \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

Masukan  $t = 0$ , maka kita mendapatkan

$$\begin{aligned} \phi_x(0) &= e^{0\left(\mu + \sigma \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)} = e^0 \\ \phi_x(0) &= 1 \end{aligned}$$

Sifat 2.  $|\phi_x(t)| \leq 1$

Bukti:

Menurut definisi, diketahui bahwa :

$$e^{itx} = \cos(tx) + i \sin(tx)$$

dan  $i = \sqrt{-1}$ , sehingga

$$|e^{itx}|^2 = \cos^2(tx) + \sin^2(tx) = 1$$

$$|e^{itx}| = \sqrt{1} = 1$$

jadi diperoleh

$$\begin{aligned} |\phi_x(t)| &= \left| 2 \int_{\mu}^{\infty} e^{itx} \cdot dF \right| \\ &\leq 2 \int_{\mu}^{\infty} |e^{itx}| dF \\ &= 2 \int_{\mu}^{\infty} 1 \cdot dF \\ &= 2 \int_{\mu}^{\infty} dF \\ &= 2 \int_{\mu}^{\infty} f(x) dx \\ &= 2 \int_{\mu}^{\infty} \frac{p}{2\sigma q^p B\left(\frac{1}{p}, q\right) \left[1 + \frac{1}{q} \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx \\ &= \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_{\mu}^{\infty} \frac{p}{\left[1 + \frac{1}{q} \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}+q}} dx \end{aligned}$$

(15)

Misalkan  $y = \frac{1}{q} \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|^p$  kita dapat menulis

ulang persamaan ( 15 ) dalam bentuk

berikut

$$|\phi_x(t)| = \frac{p}{\sigma q^{\frac{1}{p}} B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{[1+y]^{\frac{1}{p}+q}} \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} q^{\frac{1}{p}} \sigma dy$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{[1+y]^{\frac{1}{p}+q}} dy$$

Karena  $B\left(\frac{1}{p}, q\right) = \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{p}+q}} dy$ , maka

$$|\phi_x(t)| = \frac{1}{B\left(\frac{1}{p}, q\right)} B\left(\frac{1}{p}, q\right)$$

$$= 1$$



Sifat 3.

Misalkan  $\phi_x(t) = e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$  adalah fungsi karakteristik dari peubah acak X dari distribusi *four-parameter generalized t*. Maka fungsi karakteristik peubah acak -X adalah  $\overline{\phi_x(t)}$

Bukti.

Misalkan  $\overline{\phi_x(t)}$  adalah konjugat kompleks dari  $\phi_x(t)$ , akan ditunjukkan bahwa fungsi karakteristik (-t) adalah  $\overline{\phi_x(t)}$ , maka :

$$\phi_x(-t) = e^{-it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{it\left(\mu + \sigma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\phi_x(t)}$$

$$= \overline{\phi_x(t)}$$

Jadi, fungsi karakteristik (-t) dari distribusi *four-parameter generalized t*

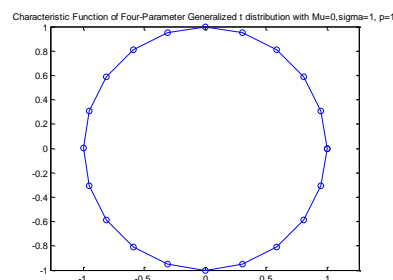
adalah  $\phi_x(-t) = \frac{1}{\phi_x(t)}$

Dari pembuktian ketiga sifat fungsi karakteristik tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat-sifat dasar dari fungsi karakteristik. Selanjutnya akan dilakukan simulasi grafik fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t*.

### 3) Simulasi Grafik Fungsi Karakteristik Distribusi *Four-Parameter Generalized t*

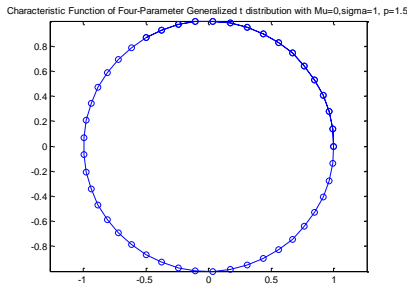
Pada bagian ini akan dibahas mengenai simulasi grafik fungsi karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan menggunakan software MATLAB R2010b.

1. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=1$ .



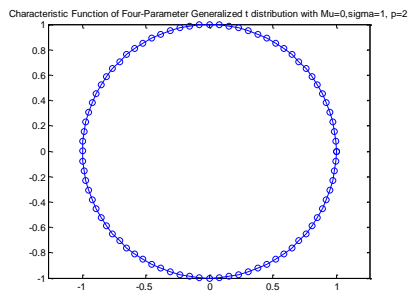
**Gambar 14. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=1$ .**

2. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=1,5$ .



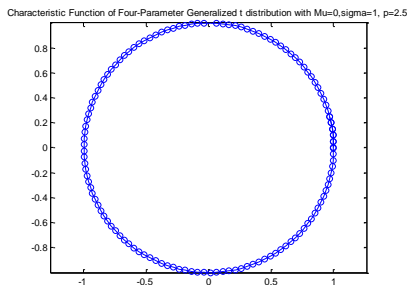
**Gambar 15. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=1,5$**

3. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=2$



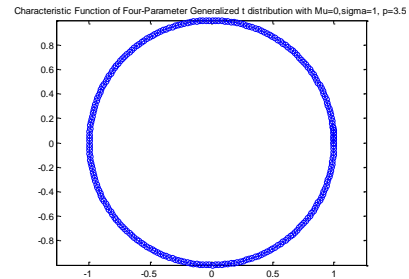
**Gambar 16. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=2$**

4. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=2,5$ .



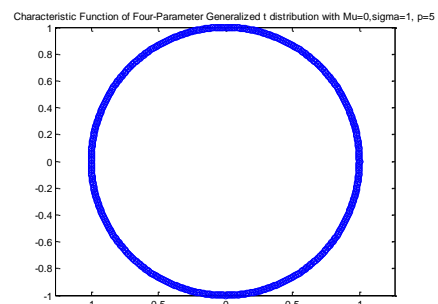
**Gambar 17. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=2,5$ .**

5. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=3,5$ .



**Gambar 18. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=3,5$**

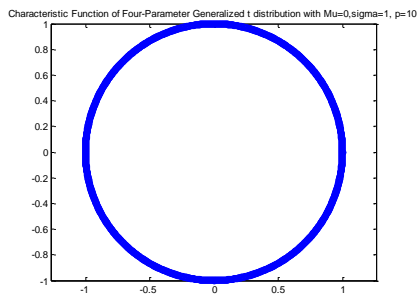
6. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=5$ .



**Gambar 19. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=5$**

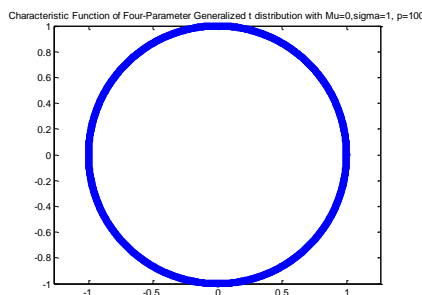
7. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=10$ .





**Gambar 20. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=10$**

8. Simulasi grafik fungsi Karakteristik dari distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=100$ .



**Gambar 21. Grafik Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* dengan  $\mu=0, \sigma=1$  dan  $p=100$ .**

Berdasarkan hasil simulasi grafik fungsi karakteristik dari *distribusi four-parameter generalized t* dengan menggunakan software MATLAB R2010b dapat disimpulkan bahwa semakin meningkat nilai parameter bentuk yaitu  $p$ , maka grafik fungsi karakteristik *distribusi four-parameter generalized t* akan membentuk kurva tertutup (lingkaran) yang mulus.

### 3. KESIMPULAN

Kita dapat menyimpulkan beberapa poin dari paparan diatas sebagai berikut :

1. Fungsi karakteristik dari distribusi four-parameter generalized t adalah

$$\phi_x(t) = e^{it \left( \mu + \sigma \left( \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \right)}$$

2. Fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* memenuhi sifat-sifat dasar fungsi karakteristik.
3. Hasil simulasi grafik menunjukkan bahwa semakin meningkat nilai parameter  $p$  yaitu parameter bentuk, maka grafik fungsi karakteristik distribusi *four-parameter generalized t* membentuk kurva tertutup (lingkaran) yang mulus.

### 4. DAFTAR PUSTAKA

Boyer, Brian H., James B. McDonald, Whitney K. Newey. (2003). A Comparison of Partially Adaptive and Reweighted Least Squares Estimation. *Econometric Reviews Vol.22. No.2 pp: 115-134.*

Chan, J.S.K, Choy, S.T.B, and Markov U.E: 2007. Robust Bayesian Analysis of Loss Reserves Data Using the Generalized-t Distribution. *Quantitative Finance Research Centre. University of Technology Sydney. www.qfrc.uts.edu.au*

Lee, Anthony, Francois Caron, Arnaud Doucet, and Chris Holmes. (2012). Bayesian Sparsity-Path-

Analysis of Genetic Association  
Signal using Generalized  $t$  Priors.  
*Statistical Applications in  
Genetics and Molecular Biology.*  
Computational Statistical Methods  
For Genomics And Systems  
Biology.

McDonald ,James B and Whitney K.  
Newey. (1988). Partially  
Adaptive Estimation of  
Regression Models Via The  
Generalized  $t$  Distribution.  
*Econmet Theory 4*: 428-457.