ISSN : 2337-9057

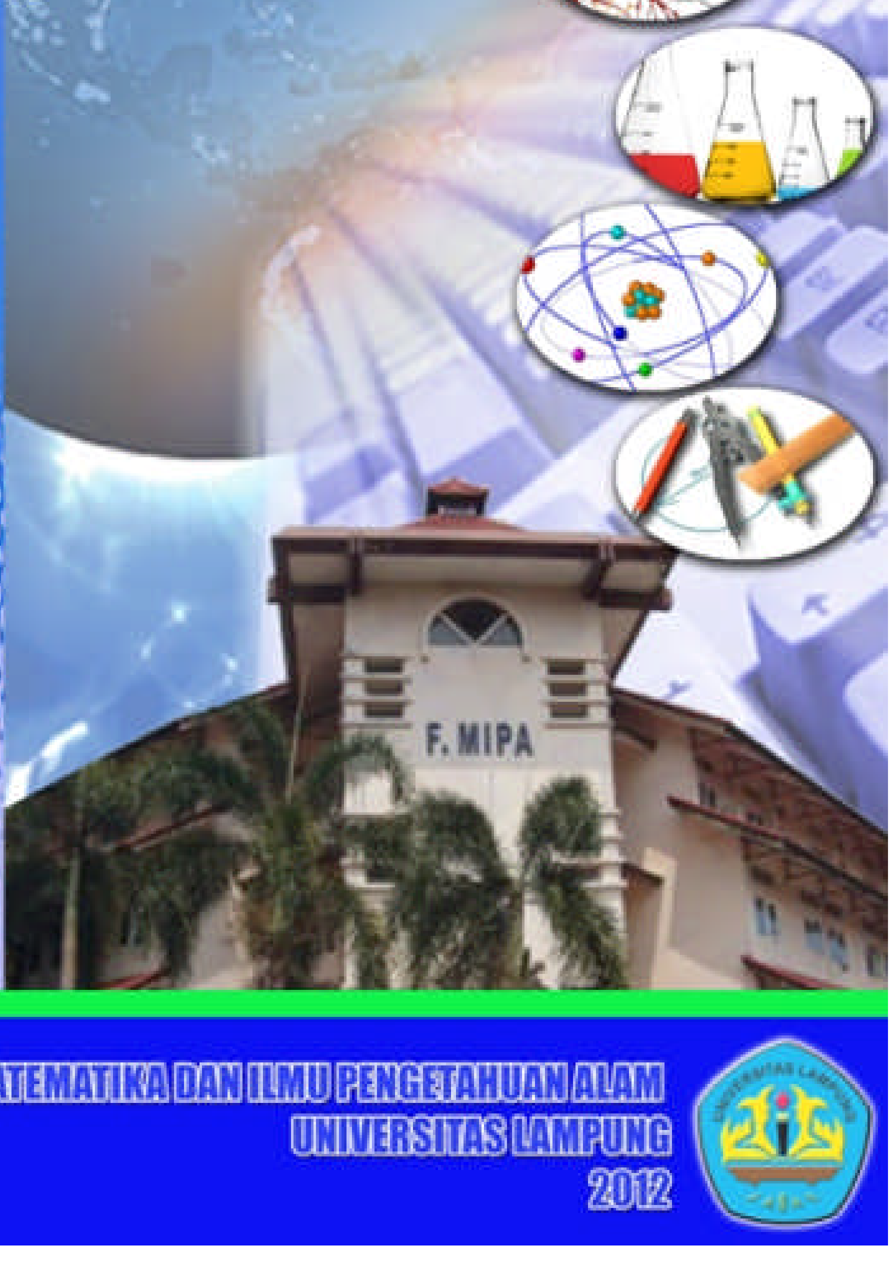
PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

SEMINAR HASIL PENELITIAN

SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012



FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012

DAFTAR ISI

Kelompok Statistika

Kelompok Kimia

KelompokFisika

Ring Armendariz

Tri Handono[1], Ahmad faisol[2], Fitriani[3]
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[1]
rihanD25@yahoo.com
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[2]
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[3]

Abstrak

Misalkan *R* ring komutatif dan *R*[*x*] ring polinomial. Suatu ring *R* dikatakan ring Armendariz jika diberikan sebarang dua polinomial *f*(*x*) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,*g*(*x*) = $\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ ∈ *R*[*x*] dimana $a_i, b_j \in R$ sedemikian sehingga jika *f*(*x*)*g*(*x*) = 0 maka $a_i b_j$ = 0 untuk setiap *i* dan *j*. Dalam makalah ini dikaji beberapa ring yang memenuhi sifat Armendariz. Jika *R* adalah daerah ideal utama yang komutatif dan *A* ideal di *R* maka *R/A* merupakan ring Armendariz. Selanjutnya, jika diketahui *R* daerah integral dengan *A* ideal di *R* dan ring faktor *R/A* merupakan Armendariz maka struktur ring *R* ⊕ *R/A* adalah Armendariz yang hasil operasi pergandaan didefinisikan dengan $(a,\bar{u})\cdot(b,\bar{v}) = (ab,\overline{av+ub})$. Ring *R* ⊕ *R/A* juga merupakan Armendariz terkait sifat ring *reduced* yaitu ring yang tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol.

Kata Kunci : *Ring Armendariz, Ring reduced, Daerah integral,Daerah Ideal Utama, Direct Sum*

1. Pendahuluan

Struktur aljabar adalah himpunan atau beberapa himpunan yang dilengkapi dengan suatu operasi atau beberapa operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Salah satu contoh struktur aljabar adalah ring. Ring adalah struktur aljabar dengan satu himpunan dan dua operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Ring polinomial dibentuk dari perluasan suatu ring. Ring polinomial merupakan suatu himpunan yang berisi polinomial-polinomial yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Suatu ring *R* komutatif dikatakan Armendariz jika pergandaan dua buah polinomial dengan koefisiennya merupakan elemen ring *R* menghasilkan nol, maka mengakibatkan pergandaan koefisiennya nol. Ring yang mempunyai sifat Armendariz dikatakan ring Armendariz. Ide awal mengenai ring Armendariz diperkenalkan oleh Rege dan Chawcharia pada tahun 1997 dan pemilihan nama ring Armendariz tersebut berdasarkan atas nama orang yang menemukan yaitu Efraim P. Armendariz pada tahun 1973. Pada penelitian ini, akan dikaji ring dan beberapa struktur ring yang mempunyai sifat Armendariz.

2. Landasan teori

2.1 Operasi Biner

Diberikan himpunan $S \neq \emptyset$. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan *S* adalah suatu aturan yang mengawankan setiap pasangan beraturan (*a,b*) ∈ *S* x *S* dengan tepat satu elemen *S.*

$* : S \times S \rightarrow S$
$(a,b) \mapsto (a * b) \in S$ (Gilbert dan Nicholson, 2004).
Contoh :
Penjumlahan biasa "+" dan perkalian biasa "•" pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ adalah operasi biner.

2.2 Operasi *Direct Sum*

Diberikan *R* dan *S* suatu ring. Operasi *direct sum* pada struktur ring
$R \oplus S = \{(r,s) | r \in R$ dan $s \in S\}$ berlaku $(r,s) + (t,u) = (r+t, s+u)$ dan $(r,s)\cdot(t,u) = (rt, ru+st)$ (Rege dan Chhawchharia, 1997).

2.3 Ring

Diberikan *R* himpunan sebarang tak kosong, + dan • adalah sebarang dua operasi pada *R*. Himpunan < *R*,+, •> dikatakan ring jika memenuhi sifat :

1. Terhadap operasi +,
   a). Tertutup, yaitu untuk setiap *a,b* ∈ *R* berlaku *a* + *b* ∈ *R.*
   b). Asosiatif, yaitu untuk setiap *a,b,c* ∈ *R* berlaku (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*).
   c).Mempunyai elemen identitas, yaitu terdapat *0* ∈ *R* sedemikian sehingga untuk setiap *a* ∈ *R* berlaku
   $$0 + a = a + 0 = a.$$

d).Elemen invers, yaitu untuk setiap $a \in R$ terdapat $-a \in R$ sedemikian sehingga berlaku a + -a = -a+ a = 0

e).Komutatif, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.

2. Terhadap operasi •,

a). Tertutup, yaitu untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a \bullet b \in R$.

b). Asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

3. Terhadap operasi + dan •,

a). Distribusi kanan, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c).$$

b).Distribusi kiri, yaitu untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku

$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$$

(Herstein, 1996).

Diberikan ring $< R,+,\bullet>$, jika terhadap operasi • pada *R* berlaku $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a,b \in R$, maka *R* disebut ring komutatif (Dummit dan Foote, 2004).
Contoh :
$<Z, +, \bullet>$ adalah ring komutatif.

2.4 Subring

Diberikan suatu ring *R* dan himpunan $S \subset R$ dengan $S \neq \emptyset$. Himpunan *S* disebut subring jika *S* merupakan ring terhadap operasi yang sama pada *R* (Herstein, 1996).
Contoh :
Himpunan *2Z* merupakan subring pada ring $<Z, +, \bullet >$.

2.5 Daerah Integral

Suatu ring komutatif *R* dikatakan daerah integral jika $a \bullet b = 0$ di *R* yang berakibat bahwa $a = 0$ atau $b = 0$ (Herstein, 1996).
Contoh :
Himpunan $< R,+,\bullet>$ dan himpunan $< Z,+, \bullet>$ adalah contoh daerah integral.

2.6 Ideal

Diberikan *R* ring dan $I \subseteq R$. *I* dikatakan ideal jika :

a. *I* subring pada *R* ;
b. $rI \subseteq I$, untuk setiap $r \in R$;
c. $Ir \subseteq I$, untuk setiap $r \in R$;

(i) Jika $I \subseteq R$ hanya memenuhi (*a*) dan (*b*) maka *I* dikatakan ideal kiri pada *R.*

(ii)Jika $I \subseteq R$ hanya memenuhi (*a*) dan (*c*) maka *I* dikatakan ideal kanan pada *R* (Herstein, 1996).

2.7 Pembangun

Diketahui *R* ring komutatif dan *A* ideal pada *R.* Himpunan $A = \{pr \mid r \in R\}$suatu ideal yang dibangun suatu elemen *p* dan *p* disebut pembangun ideal *A* dapat ditulis $\langle p \rangle = A$ (Dummit dan Foote, 2004).

2.8 Daerah Ideal Utama

Suatu daerah integral dikatakan daerah ideal utama jika untuk setiap ideal *I* di *R* berbentuk $I = \{xa \mid x \in R\}$ untuk suatu $a \in I$ (Herstein, 1996).
Contoh :
Diberikan daerah integral *Z.* Terdapat $I \subset Z$. Karena $I = \{0\}$ ideal pada *Z* yang dibangun oleh elemen *0* dan jika $I \neq \{0\}$ ideal pada *Z* yang berisi semua kelipatan dari *a* juga dibangun oleh *a* yaitu $\langle a \rangle = aZ$,maka *Z* disebut daerah ideal utama.

2.9 Ring Faktor

Jika *N* adalah ideal pada ring *R*, maka ring koset $\beta + N$ yang dibangkitkan oleh operasi koset adalah ring faktor dan dinotasikan sebagai berikut.
$R/N = \{\beta + N \mid \beta \in R\}$ (Herstein, 1996).
Contoh :
Diketahui *4Z* merupakan ideal pada ring *Z*. Dapat dibentuk himpunan
$Z/4Z = \{a + 4Z \mid a \in Z\}$ yang merupakan ring faktor.

2.10 Ring Polinomial

Diberikan ring *R*. Himpunan $< R[x],+,\bullet >$ yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien anggota ring *R* dalam variabel *x* dan dilengkapi dua operasi biner dikatakan ring polinomial. Ring polinomial dapat disajikan sebagai $<R[x],+,\bullet> = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , a_i \in R$ (Herstein, 1996).
Contoh :
Himpunan $< Z[x],+, \bullet >$ dengan koefisien elemen ring *Z* merupakan ring polinomial.

2.11 Nilpoten

Diberikan ring *R* dan $a \in R$ dikatakan nilpoten jika $a^n = 0$, untuk suatu $n \in Z^+$
(Herstein, 1996).
Contoh :
Diberikan ring Z_8 dan karena $\bar{2}^3 = \bar{4}^2 = \bar{6}^3 = \bar{0}$ maka $\{\bar{2}\},\{\bar{4}\},\{\bar{6}\}$ adalah elemen nilpoten tak nol pada Z_8.

2.12 Ring *Reduced*

Suatu ring dikatakan ring *reduced* jika tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol
(Herstein, 1996).
Contoh :
Ring Z_6 adalah ring *reduced* karena tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol.

2.13 Ring Armendariz

Suatu ring R dikatakan ring Armendariz jika diberikan sebarang dua polinomial $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$ dimana $a_i, b_j \in R$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i dan j.

3. Metode Penelitian

Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah studi literatur.

Pada tahap pertama, akan ditunjukkan ring faktor *R/A* merupakan ring Armendariz dengan R suatu daerah ideal utama yang komutatif dan A ideal pada R. Selanjutnya diberikan sebarang dua polinomial dengan koefisiennya merupakan elemen ring faktor *R/A*. Akan ditunjukkan bahwa jika pergandaan dua elemen polinomial sama dengan nol maka pergandaan koefisiennya juga nol.

Pada tahap kedua, dibentuk ring yang lebih luas yaitu struktur ring $R \oplus R/A$ yang merupakan ring dengan operasi *direct sum* yang didefinisikan khusus. Akan dibuktikan bahwa struktur ring $R \oplus R/A$ merupakan ring Armendariz, dengan R suatu daerah integral, A ideal pada R dan *R/A* ring faktor yang Armendariz. Selanjutnya diberikan sebarang dua polinomial dengan koefisiennya merupakan elemen ring $R \oplus R/A$. Akan ditunjukkan bahwa jika pergandaan dua elemen polinomial sama dengan nol maka pergandaan koefisiennya nol, namun terlebih dahulu disajikan pembuktian struktur ring $R \oplus R/A$ memenuhi aksioma-aksioma ring.

Pada tahap berikutnya akan ditunjukkan bahwa struktur ring $R \oplus R/A$ terkait sifat ring *reduced* memenuhi sifat Armendariz.
Sebelumnya dikaji terlebih dahulu tentang ring *reduced* R dan beberapa lemma yang mendukung pembuktian struktur ring $R \oplus R/A$ adalah Armendariz. Selanjutnya diambil sebarang dua polinomial dengan koefisiennya merupakan elemen ring $R \oplus R/A$. Akan ditunjukkan bahwa jika pergandaan dua elemen polinomial sama dengan nol maka pergandaan koefisiennya nol.
Bentuk struktur ring $R \oplus R/A$ berakibat bahwa ring $R \oplus R$ juga merupakan ring Armendariz dengan diberikan ideal A sama dengan nol.

4. Hasil dan Pembahasan

Berikut ini dikaji beberapa karakteristik ring dan ring faktor yang mempunyai sifat Armendariz.

4.1 Teorema

Diketahui R adalah daerah ideal utama yang komutatif dan A ideal di R. Misalkan $A = \langle x_0 \rangle$ ideal A yang dibangun oleh unsur $x_0 \in R$. Akan ditunjukkan *R/A* merupakan ring Armendariz dengan kata lain jika $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$ maka $\overline{a_\imath b_\jmath} = \bar{0}$.

Bukti :
Diberikan sebarang dua polinomial $\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^i$, $\bar{g}(x) = \sum_{j=0}^{m} \bar{b}_j x^j \in R/A[x]$ dimana $\bar{a}_i, \bar{b}_j$ untuk setiap i dan j elemen
$R/A = \{\bar{a} = a+A \mid a \in R\}$.

Diasumsikan $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow (\overline{a_0} + \overline{a_1}x + \overline{a_2}\, x^2 + \cdots + \overline{a_n}\, x^n)\ (\overline{b_0} + \overline{b_1}x + \overline{b_2}\, x^2 + \cdots + \overline{b_m}\, x^m) = \bar{0}$$
$$\Leftrightarrow (\overline{a_0}\ \overline{b_0}) + (\overline{a_0}\ \overline{b_1} + \overline{a_1}\ \overline{b_0})x + \cdots + (\overline{a_0}\ \overline{b_m} + \overline{a_1}\ \overline{b_{m-1}} + \cdots + \overline{a_n}\ \overline{b_0})\, x^{n+m} = \bar{0}$$
$$\Leftrightarrow \overline{a_0 b_0} + (\overline{a_0 b_1 + a_1 b_0})x + \cdots + (\overline{a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_n b_0})\, x^{n+m} = \bar{0}.$$

Akibatnya

$$\overline{a_0 b_0} = \bar{0} \qquad (4.1)$$
$$\overline{a_0 b_1 + a_1 b_0} = \bar{0} \qquad (4.2)$$
$$\overline{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0} = \bar{0} \qquad (4.3)$$
$$\vdots$$

dan seterusnya.

Dari persamaan (4.1) dapat ditulis $a_0 b_0 + A = 0 + A$ dimana $a_0 b_0 \in R$. Karena R daerah ideal utama, maka a_0 dapat dinyatakan sebagai $a_0 = x_0 r_0 \in A$ suatu elemen ideal utama yang dibangun oleh $x_0 \in A$ yang mengakibatkan $r_0(x_0 b_0) + A = 0 + A$. Karena $x_0 \in A$ dan A ideal utama maka diperoleh $x_0 b_0 + A = 0 + A$.
Dari persamaan (4.2) dapat ditulis $a_0 b_1 + a_1 b_0 + A = 0 + A$ dimana $a_0 b_1 + a_1 b_0 \in R$.

$a_0 b_1 + a_1 b_0 + A$
$x_0(a_0 b_1 + a_1 b_0) + A = 0 + A$ (dikali $x_0 + A$)
$x_0 a_0 b_1 + x_0 a_1 b_0 + A = 0 + A$
$x_0 a_0 b_1 + a_1 x_0 b_0 + A = 0 + A$ (R komutatif)
$x_0 a_0 b_1 + 0 + A = 0 + A$ ($x_0 b_0 + A = 0 + A$)
$x_0(a_0 b_1) + A = 0 + A$.

Karena $x_0, a_0 \in A$ dan A ideal utama maka diperoleh $a_0 b_1 + A = 0 + A$ dan $x_0 b_1 + A = 0 + A$. Selanjutnya subtitusikan $a_0 b_1 + A = 0 + A$ ke persamaan (4.2) dan diperoleh $a_1 b_0 + A = 0 + A$ sehingga terbukti $\overline{a_0 b_1 + a_1 b_0} = \bar{0}$.

Dari persamaan (4.3) dapat ditulis $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + A = 0 + A$ dimana $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \in R$.

$a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + A = 0 + A$
$x_0a_0b_2 + x_0a_1b_1 + x_0a_2b_0 + A = 0 + A$
(dikali $x_0 + A$)
$x_0a_0b_2 + a_1x_0b_1 + a_2x_0b_0 + A = 0 + A$
(R komutatif)
$x_0a_0b_2 + a_1x_0b_1 + 0 + A = 0 + A$
($x_0b_0 + A = 0 + A$)
$x_0a_0b_2 + 0 + 0 + A = 0 + A$
($x_0b_1 + A = 0 + A$)
$x_0a_0b_2 + A = 0 + A$.

Karena $x_0, a_0 \in A$ dan A ideal utama maka diperoleh $a_0b_2 + A = 0 + A$ dan $x_0b_2 + A = 0 + A$. Selanjutnya subtitusikan $a_0b_2 + A = 0 + A$ ke persamaan (4.3) sehingga diperoleh $a_1b_1 + a_2b_0 + A = 0 + A$. Karena R daerah ideal utama maka haruslah memenuhi sifat tertutup pada operasi penjumlahan, maka diperoleh $a_1b_1 + A = 0 + A$ dan $a_2b_0 + A = 0 + A$ sehingga terbukti $\overline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0} = \bar{0}$.

Berdasarkan persamaan (4.1), (4.2), (4.3) dan dapat dilanjutkan dengan langkah yang serupa sehingga didapat $\overline{a_ib_j} = \bar{0}$ untuk setiap i dan j. Oleh karena itu R/A merupakan ring Armendariz. ■

Untuk selanjutnya diberikan tentang sifat Armendariz, namun dibuktikan terlebih dahulu bahwa struktur ring $R \oplus R/A$ memenuhi aksioma-aksioma ring.

4.2 Lemma

Diberikan R ring dan A ideal pada R. Didefinisikan dua operasi pada struktur ring $R \oplus R/A$, yaitu + dan • sebagai berikut :

$$(a,\bar{u}) + (b,\bar{v}) = (a + b, \bar{u} + \bar{v}) \text{ dan}$$
$$(a,\bar{u}) \bullet (b,\bar{v}) = ab, \overline{av + ub}.$$

maka < $R \oplus R/A$, +, •> memenuhi aksioma – aksioma ring.

Berikut ini akan disajikan teorema suatu struktur ring yang memenuhi sifat Armendariz.

4.3 Teorema

Diketahui R daerah integral dengan A ideal di R dan R/A Armendariz maka ring $R \oplus R/A$ Armendariz.

Bukti :
Diberikan sebarang dua polinomial $f(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i, \bar{u}_i)x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{m}(b_j, \bar{v}_j)x^j \in (R \oplus R/A)[x]$, dimana koefisiennya merupakan elemen ring $R \oplus R/A$. Akan ditunjukkan ring $R \oplus R/A$ adalah Armendariz dengan kata lain jika $f(x)g(x) = (0,\bar{0}) = 0$ maka $(a_i, \bar{u}_i)(b_j, \bar{v}_j) = (a_ib_j, \overline{a_iv_j + u_ib_j}) = 0$.
Selanjutnya untuk mempermudah pembuktian, digunakan notasi sebagai berikut : $f(x) = (f_0(x), \overline{f_1}(x))$ dan $g(x) = (g_0(x), \overline{g_1}(x))$.

Diasumsikan $f(x)g(x) = 0$
$\Leftrightarrow ((a_0, \bar{u}_0) + (a_1, \bar{u}_1)x + (a_2, \bar{u}_2)x^2 + \cdots + (a_n, \bar{u}_n)x^n)((b_0, \bar{v}_0) + (b_1, \bar{v}_1)x + (b_2, \bar{v}_2)x^2 + \cdots + (b_m, \bar{v}_m)\, x^m) = 0$
$\Leftrightarrow ((a_0, \bar{u}_0)(b_0, \bar{v}_0)) + ((a_0, \bar{u}_0)(b_1, \bar{v}_1) + (a_1, \bar{u}_1)(b_0, \bar{v}_0))x + \cdots + ((a_0, \bar{u}_0)(b_m, \bar{v}_m + (a_1, \bar{u}_1)(b_{m-1}, \bar{v}_{m-1}) + \cdots + (a_n, \bar{u}_n)(b_0, \bar{v}_0))\, x^{n+m} = 0$
$\Leftrightarrow (a_0b_0, \overline{a_0v_0 + u_0b_0}) + ((a_0b_1, \overline{a_0v_1 + u_0b_1}) + (a_1b_0, \overline{a_1v_0 + u_1b_0}))x....... = 0$
$\Leftrightarrow (a_0b_0, \overline{a_0v_0 + u_0b_0}) + (a_0b_1 + a_1b_0, \overline{a_0v_1 + u_0b_1 + a_1v_0 + u_1b_0})x........ = 0$
$\Leftrightarrow a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots, \overline{a_0v_0 + u_0b_0} + (\overline{a_1v_0 + u_1b_0 + a_1v_0 + u_1b_0})x + \cdots = 0$
$\Leftrightarrow f_0(x)g_0(x), \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0.$

Akibatnya

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \qquad (4.4)$$
$$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = \bar{0} \qquad (4.5)$$

Karena R adalah daerah integral maka terdapat dua kemungkinan, yaitu :

***a*).** $f_0(x) = 0$,
Jika $f_0(x) = 0$, maka dari persamaan (4.5) diperoleh :

$$\begin{aligned} \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\ \overline{0g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\ \overline{0 \quad + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\ \overline{f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Karena R/A Armendariz, $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$ berakibat $\overline{u_ib_j} = \bar{0}$ untuk setiap i dan j dan $f_0(x) = 0$ berakibat $a_i = 0$ untuk setiap i. Selanjutnya dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (a_i, \bar{u}_i)(b_j, \bar{v}_j) &= (a_ib_j, \overline{a_iv_j + u_ib_j}) \\ &= (0b_j, \overline{0v_j + 0}) \\ &= (0, \bar{0}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

***b*).** $g_0(x) = 0$,
Jika $g_0(x) = 0$, maka dari persamaan (4.5) diperoleh :

$$\begin{aligned} \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} &= \bar{0} \\ \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)0} &= \bar{0} \\ \overline{f_0(x)g_1(x) + \quad 0} &= \bar{0} \\ \overline{f_0(x)g_1(x)} &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Karena R/A Armendariz, $\overline{f_0(x)g_1(x)} = \bar{0}$ berakibat $\overline{a_iv_j} = \bar{0}$ untuk setiap i dan j dan $g_0(x) = 0$ berakibat $b_j = 0$ untuk setiap j.

Selanjutnya dapat disimpulkan sebagai berikut:

$(a_i,\bar{u}_i)(b_j,\bar{v}_j)$ = $(a_i b_j,\overline{a_\iota v_j + u_\iota b_j})$
= $(a_i 0,\overline{0 + u_\iota 0})$
= $(0,\bar{0})$
= *0*.

Dari **a)** dan **b)** terbukti bahwa $(a_i,\bar{u}_i)(b_j,\bar{v}_j)$ = $(a_i b_j,\overline{a_\iota v_j + u_\iota b_j})$ = *0* untuk setiap *i* dan *j*. Oleh karena itu struktur ring *R* ⊕ *R/A* ring Armendariz. ■

Pada teorema 4.3 bahwa jika *R* daerah integral dengan *A* ideal di *R* dan ring *R/A* Armendariz maka struktur ring *R* ⊕ *R/A* ring Armendariz. Pembahasan selanjutnya akan dikaji karakterisasi ring *reduced* pada suatu struktur ring yang juga mempunyai sifat Armendariz.

Berikut ini akan disajikan terlebih dahulu beberapa lemma yang mendukung.

4.4 Lemma

Diketahui ring *R reduced* dan untuk setiap *a,b* ∈ *R* berlaku *ab* = 0 jika dan hanya jika *ba* = 0.

bukti :
(⇒) Diberikan *R* ring *reduced*. Diambil sebarang *a,b* ∈ *R* dengan *ab* = 0*.* Akan ditunjukkan *ba* = 0. Andaikan *ba* ≠ 0*,* karena *R* ring *reduced* maka *ba* bukan elemen nilpoten yang artinya $(ba)^n$ ≠ 0 untuk suatu *n.* Ambil *n = 2* sehingga diperoleh $(ba)^2$= *baba* ≠ 0. Diketahui bahwa *ab* = 0 sehingga $(ba)^2$ = *baba* = *b0a* = 0 yang berarti *ba* merupakan elemen nilpoten. Hal ini kontradiksi dengan *ba* ≠ 0*.* Sehingga haruslah *ba* = 0*.*

(⇐) Diberikan *R* ring *reduced*. Diambil sebarang *a,b* ∈ *R* dengan *ba* = 0*.* Akan ditunjukkan *ab* = 0. Andaikan *ab* ≠ 0*,* karena *R* ring *reduced* maka *ab* bukan elemen nilpoten yang artinya $(ab)^n$ ≠ 0 untuk suatu *n.* Ambil *n = 2* sehingga diperoleh $(ab)^2$= *abab* ≠ 0. Diketahui bahwa *ba* = 0 sehingga $(ab)^2$ = *abab* = *a0b* = 0 yang berarti *ab* merupakan elemen nilpoten. Hal ini kontradiksi dengan *ab* ≠ 0*.* Sehingga haruslah *ab* = 0*.* ■

4.5 Lemma

Jika *R* suatu ring *reduced* maka *R* ring Armendariz.

Bukti :
Diketahui *R* ring *reduced*. Diberikan *f*(*x*) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, *g*(*x*) = $\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ ∈ *R*[*x*], dimana a_i, b_j ∈ *R* untuk setiap *i* dan *j*. Akan ditunjukkan jika *f*(*x*)*g*(*x*) = 0 maka $a_i b_j$= 0*.*

Diasumsikan *f*(*x*)*g*(*x*) = 0
$(a_0 + a_1 x + a_2\ x^2 + \cdots + a_n\ x^n)(b_0 + b_1 x + b_2\ x^2 + \cdots + b_m\ x^m) = 0$
$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_n b_0)\ x^{n+m} = 0.$

Akibatnya

$$a_0 b_0 = 0 \qquad (4.6)$$
$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \qquad (4.7)$$
⋮
dan seterusnya.

Dari persamaan (4.6) didapat bahwa $a_0 b_0 = 0$*.* Karena *R* merupakan ring *reduced* maka $b_0 a_0$ = 0. Selanjutnya perhatikan persamaan (4.7)

$a_0 b_1 + a_1 b_0$	= 0	(dikali b_0)
$b_0 a_0 b_1 + b_0 a_1 b_0$	= 0	($b_0 a_0$ = 0)
$0 + b_0 a_1 b_0$	= 0	
$b_0 a_1 b_0$	= 0.	

Karena $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = a_1 0 = 0$, artinya $a_1 b_0$ adalah elemen nilpoten. Karena *R* ring *reduced* maka $a_1 b_0$ = 0. Selanjutnya subtitusikan $a_1 b_0$ = 0 ke persamaan (4.7) sehingga diperoleh $a_0 b_1$ = 0. Untuk persamaan selanjutnya dengan langkah yang serupa sehingga didapat $a_i b_j$ = 0 untuk setiap *i* dan *j.* Oleh karena itu *R* merupakan ring Armendariz. ■

Pada lemma 4.5 diatas tidak berlaku sebaliknya, dengan kata lain jika diketahui *R* ring Armendariz maka belum tentu *R* ring *reduced.* Ring *Z/nZ* merupakan contoh ring Armendariz tetapi bukan ring *reduced.*

4.6 Lemma

Jika *R* ring *reduced* maka *R*[*x*] ring *reduced*.

Bukti :
Diketahui *R* ring *reduced* dengan kata lain berlaku $a^n = 0$ untuk suatu *n* ∈ Z^+ maka *a* = 0. Diberikan sebarang $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *R*[*x*] dimana a_i ∈ *R* untuk setiap *i.*
Akan ditunjukkan jika $\{f(x)\}^n = 0$ maka $f(x)$ = 0 dengan kata lain a_i = 0.

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^n &\Leftrightarrow \left\{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right\}^n\\ &\Leftrightarrow \{a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m\}^n\\ &\Leftrightarrow {a_0}^n + (m a_0 a_1)x + \cdots + {a_m}^n x^{m+m}\\ &\Leftrightarrow 0^n + 0x + \cdots + 0x^{m+m}\\ &\Leftrightarrow 0.\end{aligned}$$

Karena *R* ring *reduced* maka ${a_0}^n = {a_1}^{n-1} = \cdots = {a_m}^n = 0$ untuk suatu *n* ∈ Z^+ sehingga berakibat $a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0$ dengan kata lain terbukti a_i = 0. ■

4.7 Teorema

Diketahui *R* ring *reduced* dengan *A* ideal di *R* dan ring faktor *R/A* juga ring *reduced.* Akan ditunjukkan ring *R* ⊕ *R/A* merupakan Armendariz.

Bukti :
Diberikan sebarang dua polinomial $f(x)$ = $\sum_{i=0}^{n}(a_i,\bar{u}_i)x^i$, $g(x)$=$\sum_{j=0}^{m}(b_j,\bar{v}_j)x^j$ ∈(*R*⊕*R/A*)[*x*] , dimana koefisiennya merupakan elemen ring *R* ⊕ *R/A*. Akan ditunjukkan jika $f(x)g(x) = 0$ maka $(a_ib_j,\overline{a_\iota v_j + u_\iota b_j}) = 0$.
Selanjutnya untuk mempermudah pembuktian, digunakan notasi sebagai berikut : $f(x) = (f_0(x),\overline{f_1}(x))$ dan $g(x) = (g_0(x),\overline{g_1}(x))$.
Diasumsikan $f(x)g(x) = 0$

$\Leftrightarrow((a_0,\bar{u}_0) + (a_1,\bar{u}_1)x + (a_2,\bar{u}_2)x^2 + \cdots + (a_n,\bar{u}_n)x^n)((b_0,\bar{v}_0) + (b_1,\bar{v}_1) + (b_2,\bar{v}_2)x^2 + \cdots + (b_m,\bar{v}_m)\, x^m) = 0$

$\Leftrightarrow((a_0,\bar{u}_0)(b_0,\bar{v}_0)) + ((a_0,\bar{u}_0)(b_1,\bar{v}_1) + (a_1,\bar{u}_1)(b_0,\bar{v}_0))x + \cdots + ((a_0,\bar{u}_0)(b_m,\bar{v}_m + (a_1,\bar{u}_1)(b_{m-1},\bar{v}_{m-1}) + \cdots + (a_n,\bar{u}_n)(b_0,\bar{v}_0))\, x^{n+m} = 0$

$\Leftrightarrow(a_0b_0,\overline{a_0v_0 + u_0b_0}) + ((a_0b_1,\overline{a_0v_1 + u_0b_1}) + (a_1b_0,\overline{a_1v_0 + u_1b_0}))x....... = 0$

$\Leftrightarrow(a_0b_0,\overline{a_0v_0 + u_0b_0}) + (a_0b_1 + a_1b_0,\overline{a_0v_1 + u_0b_1 + a_1v_0 + u_1b_0})x........ = 0$

$\Leftrightarrow a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots,\ \overline{a_0v_0 + u_0b_0} + (\overline{a_1v_0 + u_1b_0 + a_1v_0 + u_1b_0})x + \cdots = 0$

$\Leftrightarrow f_0(x)g_0(x),\ \overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0.$

Akibatnya

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \quad (4.8)$$
$$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}. \quad (4.9)$$

Karena *R* ring *reduced* maka persamaan (4.8) berakibat $g_0(x)f_0(x)$= 0.Pada persamaan (4.9)

$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0$ (dikali $\overline{g_0(x)}$)
$\overline{g_0(x)f_0(x)g_1(x) + g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$
$\bar{0} + \overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$ $(g_0(x)f_0(x) = 0)$
$\overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$

Karena$(\overline{f_1(x)g_0(x)})^2 = \overline{f_1(x)g_0(x)f_1(x)g_0(x)}$

$= \overline{f_1(x)}.\,\bar{0}$ $((\overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \bar{0})$
$= \bar{0}$,
artinya $\overline{f_1(x)g_0(x)}$ elemen nilpoten dan *R/A*[*x*] ring *reduced* maka diperoleh $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$. Selanjutnya subtitusikan $\overline{f_1(x)g_0(x)} = \bar{0}$ ke persamaan (4.9) sehingga diperoleh $\overline{f_0(x)g_1(x)} = \bar{0}$. Karena *R* Armendariz maka persamaan (4.8) dan (4.9) menghasilkan $(a_i,\bar{u}_i)(b_j,\bar{v}_j) = (a_ib_j,\overline{a_\iota v_j + u_\iota b_j}) = 0$. Oleh karena itu terbukti bahwa *R* ⊕ *R/A* merupakan ring Armendariz. ■

Dari teorema 4.7 di atas, berakibat bahwa struktur ring *R* ⊕ *R* merupakan ring Armendariz dengan diberikan ideal *A* sama dengan {0}. Berikut ini diberikan akibatnya secara lengkap.

4.8 Akibat

Diketahui *R* ring *reduced*. Diberikan sebarang dua polinomial yang koefisiennya merupakan elemen ring *R* ⊕ *R* = {(*a*,*u*) | *a*,*u* ∈ *R* } maka struktur ring *R* ⊕ *R* merupakan Armendariz.

5. SIMPULAN

Jika diketahui *R* daerah ideal utama dan *A* ideal di *R* maka ring faktor *R/A* merupakan ring Armendariz. Jika diketahui *R* daerah integral dengan *A* ideal di *R* dan ring faktor *R/A* Armendariz maka struktur ring *R* ⊕ *R/A* dengan diberikan definisi *direct sum* khusus merupakan ring Armendariz. Dapat juga diperoleh sifat struktur ring *R* ⊕ *R/A* merupakan ring Armendariz terkait sifat *R* ring *reduced.*

6. DAFTAR PUSTAKA

Dummit, D.S.,Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. 3rd Edition. John Wiley and Son inc, 111 River Street, Hoboken.

Gilbert, W.C.,Nicholson, W.K. 2004. *Modern Algebra With Applications*. 2nd Edition. John Wiley and Son inc., Hoboken, New Jersey.

Herstein, I.N. 1996. *Abstract Algebra*. 3rd Edition. Prentice-Hall, Upper Saddle river, New Jersey.

Rege, M.B., Chhawchharia, S. 1997. Armendariz Rings. *Proc*. *Japan Acad*. *Ser*. *A Math*. *Sci*. **73**, 14 -17.