Keterhubungan Suatu Graf Dipandang Dari Teorema Whitney dan Teorema Menger

Devi Octaria Siahaan, Wamiliana, dan Fitriani

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan
Universitas Lampung
devi_vio9@yahoo.com

Abstrak. *Connectivity* dalam graf terbagi menjadi 2, yaitu *vertex-connectivity* dan *edge-connectivity*. Penelitian ini bertujuan untuk membahas Teorema Whitney pada graf 2-*connected* dan Teorema Menger pada *connectivity*. Dari hasil penelitian ini didapat bahwa graf 2-*connected* minimal mempunyai tiga *vertex* dengan satu pasang *internally disjoint path*, sedangkan dalam teorema Menger yang akan didiskusikan kesetaraan jumlah maksimum dari pasangan *internally disjoint path* dengan jumlah minimum *vertex connectivity* dalam suatu graf *k-connected*.

Kata Kunci. *connectivity, internally disjoint path.*

PENDAHULUAN

Salah satu kajian penting dalam teori graf adalah mengenai *connectivity* atau keterhubungan. *Connectivity* dalam graf terbagi menjadi 2, yaitu *vertex-connectivity* dan *edge-connectivity*. *Vertex-connectivity* adalah jumlah minimum dari *vertex* yang akan dihilangkan untuk membuat suatu graf G menjadi *disconnected* (tidak terhubung). *Edge-connectivity* adalah jumlah minimum edge yang akan dihilangkan untuk membuat suatu graf menjadi *disconnected*. Beberapa tokoh yang membahas tentang *connectivity* yaitu Hassler Whitney, pada tahun 1932 melalui jurnal berjudul *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, memperkenalkan teorema 2-*connected* dalam *connectivity* graf. Perluasan dari teorema Whitney berupa gagasan bahwa jumlah dari *vertex-connectivity* akan sama dengan jumlah dari pasangan *path* yang terdapat dalam graf tersebut. Gagasan ini diperkenalkan oleh Karl Menger pada tahun 1927 melalui jurnal yang berjudul *Fundamenta Mathematicae*.

Suatu graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap pasangan *vertex* mempunyai suatu *edge* diantaranya. Karena setiap *vertex adjacent* dengan setiap *vertex* lain melalui satu *edge*, maka *degree* setiap *vertex* sejumlah n - 1 pada G graf lengkap sebanyak n *vertex*. Graf lengkap dinotasikan dengan K_n [1].

Graf G dikatakan *bipartite* jika himpunan *vertex* dapat dibagi dalam dua himpunan bagian, misalkan V_1 dan V_2, sedemikian sehingga $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dan $V_1 \cup V_2 = V$, serta setiap *edge* di G menghubungkan satu *vertex* di V_1 ke satu *vertex* di V_2 [5].

Clique dari suatu graf $G = (V, E)$ jika dalam graf tersebut terdapat subgraf yang berupa graf lengkap dengan semua *vertex* yang ada di G mempunyai *adjacent* ke *vertex* lainnya [2].

Suatu *matching* M di $G = (V, E)$ adalah suatu himpunan bagian dari $E(G)$ dimana pasangan-pasangan dari *edge* dalam graf tersebut tidak *adjacent*. *Perfect matching* atau *matching* sempurna adalah *matching* M yang memuat semua *vertex* dari graf G sehingga setiap *vertex* dari graf G *incident* tepat pada setiap edge dari *matching* tersebut. *Maximum matching* atau *matching* maksimum adalah jumlah maksimum suatu *matching* dari suatu graf [3].

Suatu *vertex cover* dari suatu graf G adalah suatu himpunan $S \subseteq V$, jika setiap *edge* dari G *incidence* dengan setiap *vertex* yang ada di S [2].

Connectivity dalam graf terbagi menjadi 2, yaitu *vertex-connectivity* dan *edge-connectivity*. *Vertex-connectivity*, $\kappa(G)$, adalah jumlah minimum dari vertex yang akan dihilangkan sehingga graf G menjadi tidak terhubung. *Edge-connectivity*, $\kappa'(G)$, adalah jumlah minimum *edge* yang akan dihilangkan sehingga graf menjadi tidak terhubung [4].

Suatu graf G dikatakan 2-*connected* jika graf tersebut terhubung (*connected*) dengan tidak memiliki *vertex-connectivity* (*disconnected* terjadi bila semua *vertex* dalam graf tersebut diambil atau tidak ada graf) dan bukan merupakan graf lengkap K_1 dan K_2 [4].

Path $P_1, P_2, \dots, P_k$ yang *incidence* di antara *vertex* u dan v dikatakan *internally disjoint path* jika tidak ada 2 *path* yang memiliki suatu *vertex* yang sama didalamnya, kecuali *vertex* awal u dan *vertex* akhir v. Jadi, $V(P_i) \cap V(P_j) = \{u, v\}$ dengan $i \neq j$ [3].

Misal G adalah graf terhubung, dengan x dan y adalah *vertex* di G. Sebuah himpunan bagian T di $G - \{x, y\}$ yang terdiri dari *vertex* dan *edge*, dikatakan *x,y-cut* atau *x,y-separator* jika $G - T$ tidak terdapat *path* yang menghubungkan antara x dan y [4].

Subdividing suatu *edge* dari suatu graf adalah operasi penghapusan *edge* tersebut dan kemudian digantikan dengan menambahkan suatu *path* dengan *vertex* baru didalamnya [4].

Line graf dari suatu graf G, dinotasikan *L(G)*, adalah graf yang *vertex*-nya adalah *edge* di G[4].

METODE PENELITIAN

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini antara lain sebagai berikut :

1. Membuktikan Teorema Whitney di 2-*connected* graf
2. Membuktikan Ekspansi Lemma
3. Membuktikan Teorema pendukung tentang ciri-ciri dari graf 2-*connected*.
4. *Corollary* bahwa graf G' yang diperoleh dengan *subdiving* suatu *edge* dari *G* adalah 2-*connected*.
5. Membuktikan Teorema Menger
6. Membuktikan teorema bahwa suatu *connectivity* dari G sama dengan maksimum sebesar k sehingga $\lambda(x, y) \geq k$ dimana $(x, y) \in V(G)$.
7. Membuktikan bahwa $\kappa'_G(x, y) = \lambda'_G(x, y)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 3.1 (Teorema Whitney)
Suatu graf *G* yang mempunyai paling sedikit 3 *vertex* dikatakan 2-*connected* jika dan hanya jika setiap pasangan *u* dan *v* di *V(G)* terhubung oleh sebuah pasangan *internally disjoint path* dari *u* ke *v* di *G*.

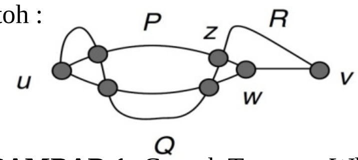
Bukti:

Jika setiap pasangan $u, v \in V(G)$ terhubung oleh suatu pasangan *internally disjoint path* dari *u* ke *v* di *G*, dengan asumsi bahwa dari *vertex u* ke *v* hanya terhubung oleh satu *edge*, maka pemisahan *u* dari *v* dengan menghapus satu *vertex* tidak dapat dilakukan. Dengan demikian, *G* adalah 2-*connected*.

Untuk pembuktian sebaliknya, digunakan induksi pada *d(u,v)* dengan *G* mempunyai dua *internally disjoint path* dari *u* ke *v*. Jika *d(u,v)* = 1, dimana *d(u,v)* adalah jarak atau *distance* dari *u* ke *v*, asumsikan $\kappa'(G) \geq \kappa(G) = 2$, dimana $\kappa'(G)$ notasi dari *edge-connectivity* dan $\kappa(G)$ notasi dari *vertex-connectivity*, maka $G - (u, v)$ terhubung. Akan terdapat dua *path* dari *u* ke *v* , P_1 di *G* dan *path* lainnya, yaitu P_2. Jelas, P_1 dan P_2 merupakan bentuk dua *internally disjoint path* dari *u* ke *v*.

Jika G mempunyai *internally disjoint path* dari *x* ke *y*, dengan *x* dan *y* merupakan *vertex* lain yang ada di G selain *u* dan *v*, maka $1 \leq d(u, v) < k$. Asumsikan *u* dan *v* adalah dua *vertex* dengan *d(u,v)* = *k*. Misal *w* adalah suatu *vertex* sebelum *v* pada *path* terpendek dari *u* ke *v*. Jadi, *d(u,w)* $= k - 1$. Dengan induksi, G mempunyai *internally disjoint path P* dan *Q* dari *u* ke *w*. Karena $G - w$ terhubung, $G - w$ berisi suatu *path R* dari *u* ke *v*. Misal *z* adalah *vertex* terakhir dari *R* termasuk dalam $P \cup Q$. Oleh karena simetris, dapat diasumsikan $z \in P$. Gabungkan *subpath* dari *u* ke *z* di *P* dengan *subpath* dari *z* ke *v* di *R* untuk mendapatkan suatu *path* dari *u* ke *v* yang *internally disjoint* dari $Q \cup \{(w, v)\}$.

Contoh :



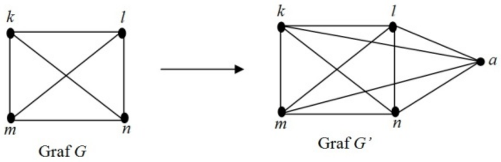
GAMBAR 1: Contoh Teorema Whitney

Lemma 3.1 (Ekspansi Lemma, Hsu and Lin, 2009)
Misalkan G adalah graf *k-connected*. Jika *G'* adalah suatu graf yang diperoleh dari G dengan menambah suatu *vertex* baru *y* yang *adjacent* dengan setidaknya *k vertex* dari G, maka *G'* adalah *k-connected*.

Bukti:

Misalkan S adalah suatu himpunan pemisah dari *G'*. Jika $y \in S$, maka $S - \{y\}$ akan memisahkan G. Dengan demikian, $|S| \geq k + 1$.
Sebaliknya, jika $y \notin S$ dan $N(y) \subseteq S$, maka, $|S| \geq k$.
Jika tidak, *S* memisahkan G.

Contoh :
Jika G adalah 3-*connected*, akan ditambahkan *vertex* a yang *adjacent* dengan keempat *vertex* yang ada di G, maka G' adalah 3-*connected* seperti terlihat pada gambar berikut.



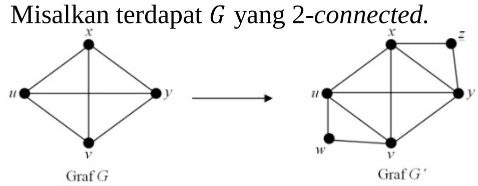
GAMBAR 2: Contoh Lemma 3.1

Teorema 3.2 (Hsu and Lin, 2009)
Misalkan bahwa G adalah suatu graf dengan paling sedikit tiga *vertex*, maka pernyataan berikut ekuivalen (ciri-ciri graf 2-*connected*):

a. G terhubung dan tidak mempunyai *vertex-connectivity*
b. Terdapat dua *internally disjoint path* antara dua *vertex x* dan *y* di G
c. Terdapat suatu sirkuit melalui *x* dan *y* di G
d. $\delta(G) \geq 1$, dimana $\delta(G)$ adalah jumlah *degree* minimum di suatu *vertex*, dan setiap pasangan dari *edge* di G terletak pada sirkuit yang sama.

Bukti:

1. $a = b$: Dengan menggunakan teorema Whitney, pernyataan a ekuivalen dengan pernyataan *b*. Jadi, terbukti bahwa suatu graf 2-*connected*, yaitu graf terhubung yang memiliki paling sedikit 3 *vertex* dan tidak mempunyai *vertex-connectivity*, mempunyai dua *internally disjoint path* antara vertex *x* dan *y* di G.
2. $b = c$: Adanya sirkuit antara *x* dan *y* ekuivalen dengan adanya dua *internally disjoit path* dari *x* ke *y*. Karena jika terdapat sirkuit diantara dua *vertex*, maka akan terdapat satu *path* dari *x* ke *y* dan satu *path* lainnya dari *y* ke *x*. Jadi, pernyataan *b* ekuivalen dengan pernyataan *c*.
3. $d \Rightarrow c$: Misalkan bahwa G adalah suatu graf sedemikian sehingga $\delta(G) \geq 1$ dan setiap pasangan dari *edge* di G terdapat pada sirkuit yang sama. Misalkan *x* dan *y* adalah dua *vertex* di G. Karena $\delta(G) \geq 1$, terdapat suatu *edge* e_1 yang *incident* dengan *x*. Demikian juga, terdapat suatu *edge* e_2 yang *incident* dengan *y*. Dengan asumsi bahwa e_1 dan e_2 terdapat di sirkuit yang sama. Jelas bahwa pernyataan *c* adalah sirkuit yang melalui *x* dan *y*.
4. $a, c \Longrightarrow d$: Misalkan G adalah suatu graf 2-*connected* dengan *(u,v)* dan *(x,y)* adalah dua *edge* dari G. Ditambahkan *vertex w* ke G yang *adjacent* {*u*,*v*} dan *z* yang *adjacent* {*x*,*y*}. Dengan Lemma sebelumnya, akan dihasilkan graf G' yang 2-*connected*. Oleh karena itu, *w* dan *z* terdapat pada sirkuit yang sama sesuai dengan pernyataan *c* di G'. Berdasarkan hal tersebut, maka jelas bahwa $deg_{G'}(w) = deg_{G'}(z) = 2$.
Sirkuit tersebut berisi *path* $\langle u, w, v\rangle$ dan $\langle x, z, y\rangle$ tetapi bukan $\langle u, v\rangle$ atau $\langle x, y\rangle$. Ganti *path* $\langle u, w, v\rangle$ dan $\langle x, z, y\rangle$ di *c* dengan *edge (u,v)* dan *(x,y)* untuk memperoleh sirkuit yang diinginkan di *c*.
Contoh :
Misalkan terdapat G yang 2-*connected*.



GAMBAR 3 : Contoh Teorema 3.2

1. Berdasarkan pernyataan $a = b$, dua *internally disjoint path* pada graf tersebut adalah $\langle u, x, y\rangle$ dan $\langle u, v, y\rangle$.
2. Berdasarkan penyataan $b = c$, lintasan sirkuit dalam graf tersebut adalah $u \to x \to y \to v \to u$. Sedangkan dua *path* yang menghubungkan dua *vertex* tersebut adalah $\langle u, x, y\rangle$ dan $\langle y, v, u\rangle$.
3. Berdasarkan pernyataan $d \Rightarrow c$, e_1 adalah *edge* yang *incidence* dengan *vertex x* dan *u*, sedangkan e_2 adalah *edge* yang *incidence* dengan *vertex y* dan *v*. Dengan demikian, e_1 dan e_2 akan terdapat pada sirkuit yang sama.
4. Graf G terdiri atas 4 *vertex* dan merupakan graf 2-*connected*.

Sirkuit yang ada di G adalah $u \to x \to y \to v \to u$, sedangkan sirkuit di G' adalah $u \to x \to z \to y \to v \to w \to u$.

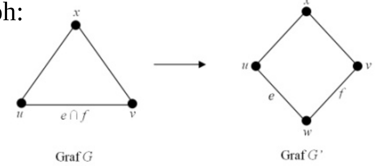
Corollary **3.1 (Hsu and Lin, 2009)**
Jika G adalah graf 2-*connected*, maka graf G' yang diperoleh melalui *subdividing* suatu *edge* dari G adalah 2-*connected*.

Bukti:

Misalkan G' adalah bentuk dari G yang ditambahkan *w* untuk memisahkan *edge (u,v)*. Dengan menggunakan pernyataan d dari teorema sebelumnya akan dibuktikan bahwa G' adalah graf 2-*connected*. Dengan demikian diperlukan suatu sirkuit yang melewati secara sembarang *edge e* dan f di G'.

Jika *e* dan f adalah *edge* di G, dengan menggunakan pernyataan d dari teorema sebelumnya, maka terdapat sirkuit, seperti pada pernyataan *c*, yang melewati *edge e* dan *f*. Jika sirkuit ini menggunakan *edge* (*u*,*v*), akan dimodifikasi sirkuit (*u*,*v*) agar dapat melewati *vertex w* yang ada diantara *u* dan *v*. Misalkan $e \in E(G)$ dan $f \in \{(u, w), (w, v)\}$. Dengan memodifikasi sirkuit yang melewati *e* dan (u,v). Misalkan $\{e, f\} = \{(u, w), (w, v)\}$, maka sirkuit yang dimodifikasi akan melewati (u,v).

Contoh:



GAMBAR 4: Contoh *Corrolary* 3.1

Teorema 3.3 (Teorema Menger)

Jika *x,y* adalah 2 *vertex* dari graf G dengan *(x,y)*$\notin$ *E(G)*, maka jumlah minimum dari *x,y*-cut sama dengan jumlah maksimum dari pasangan *internally disjoint paths* dari *x* ke *y*.

Bukti:

Hal ini mengamati bahwa setiap *x,y*-cut harus berisi suatu *internal vertex* (*vertex* yang ada di dalam *path*) dari setiap *path* dalam suatu himpunan pasangan *internally disjoint paths* dari *x* ke *y*. *Vertex-vertex* ini harus berbeda antara yang satu dengan yang lainnya. Dengan demikian, $\kappa(x, y) \geq \lambda(x, y)$, dengan $\lambda(x, y)$ notasi dari jumlah pasangan *internally disjoint path* dari *x* ke *y*.

Untuk membuktikan kesetaraan digunakan induksi dari $n(G)$, dimana $n(G)$ adalah notasi dari order suatu graf (yang dihitung melalui jumlah *vertex*). Jika *n* = 2, dengan *(x,y)*$\notin$ $E(G)$ akibatnya $\kappa(x, y) = \lambda(x, y) = 0$, sehingga teorema ini berlaku untuk *n* = 2. Asumsikan bahwa teorema ini juga berlaku untuk graf dengan jumlah *n vertex*, dimana $n > 2$. Misalkan G adalah setiap graf yang mengandung 2 *vertex* yaitu *x* dan *y* dengan $k = \kappa_G(x, y)$, dengan $\kappa_G(x, y)$ adalah *vertex-connectivity* di G dari *vertex x* ke *y*, maka akan dikonstruksikan pasangan *internally disjoint path* sebanyak *k* dari *x* ke *y*.

Kasus 1: G memiliki minimum *x,y*-cut di S sehingga $S - \big(N(x) \cup N(y)\big) \neq \emptyset$.

S merupakan sebuah himpunan bagian $V(G)$ – {*x,y*}. $N(x)$ adalah *vertex neighbour* dari *x*, sedangkan $N(y)$ adalah *vertev neighbour* dari *y*.

Misalkan V_1 adalah himpunan *vertex* dari *x* ke S dan misalkan V_2 adalah himpunan *vertex* dari S ke *y*.

Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa $S = V_1 \cap V_2$. Dengan S adalah jumlah minimum *x,y*-cut, sehingga setiap *vertex* dari S terletak pada sebuah *path* dari *x* ke *y*. Oleh karena itu, $S \subseteq V_1 \cap V_2$.

Misalkan $V_1 \cap V_2 \neq S$.

Akan ada suatu *vertex* $v \in (V_1 \cap V_2) - S$, sehingga bagian dari *x* ke *v* untuk *x,S-path* yang diikuti oleh bagian dari *v* ke *y* untuk *S,y-path* menghasilkan sebuah *path* dari *x* ke *y* dengan tidak melewati *x,y*-cut di *S*. Ini tidak dimungkinkan, dengan demikian $S = (V_1 \cap V_2)$.

Klaim bahwa $V_1 \cap (N(y) - S) \neq \emptyset$.

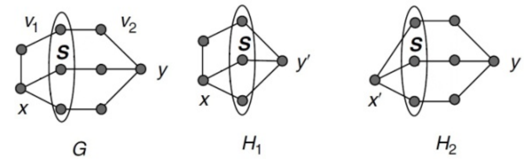
Misalkan terdapat suatu *vertex* $v \in V_1 \cap (N(y) - S)$, sehingga bagian dari *x* ke *v* untuk *x,S-path* yang diikuti oleh $\langle v, y \rangle$ menghasilkan sebuah *path* dari *x* ke *y* dengan tidak melewati *x,y*-cut *S*. Ini tidak dimungkinkan, dengan demikian $V_1 \cap (N(y) - S) = \emptyset$. Berlaku juga untuk $V_2 \cap (N(x) - S) = \emptyset$.

Kemudian pisahkan graf G menjadi H_1 dan H_2. H_1 dibentuk dengan menambahkan induksi subgraf $G[V_1]$ sebuah *vertex y'* dengan setiap *edge* dari dari *S*. H_2 dibentuk dengan menambahkan induksi subgraf $G[V_2]$ sebuah *vertex x'* dengan setiap *edge* dari *S*.

Setiap *path* dari *x* ke *y* di G akan dimulai dengan suatu *x,S*-path yang terkandung H_1. Dengan demikian, *x,y'*-cut di H_1 adalah juga *x,y*-cut di G. Oleh karena itu, $\kappa_{H_1}(x, y') = k$. Begitu juga dengan $\kappa_{H_2}(x', y) = k$. Dengan $V_1 \cap (N(y) - S) = \emptyset$ dan $V_2 \cap (N(x) - S) = \emptyset$, maka H_1 dan H_2 mempunyai lebih sedikit *vertex* dari pada G.

Dengan induksi, $\lambda_{H_1}(x, y') = k = \lambda_{H_2}(x', y)$. Karena $V_1 \cap V_2 = S$, menghilangkan *y'* dari *k*-path di H_1 dan menghilangkan *x'* dari *k*-path di H_2 menghasilkan *x,S*-path dan *S,y*-path di G. Penggabungan kedua *path* ini memperoleh *k* pasangan *internally disjoint path* dari *x* ke *y* di G.

Contoh Kasus 1:



GAMBAR 5: Contoh Kasus 1

Kasus 2: Setiap minimum *x,y*-cut S dari G memenuhi $S - \big(N(x) \cup N(y)\big) = \emptyset$.

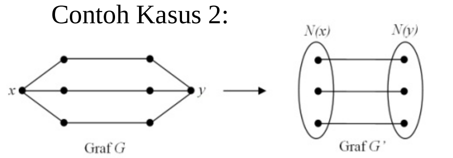
Dengan demikian, $S \subseteq \big(N(x) \cup N(y)\big)$. Akan dikonstruksikan pasangan *internally disjoint path* sebanyak *k* dari *x* ke *y* di G.

Jika G mempunyai suatu *vertex* $v \notin \{x, y\} \cup N(x) \cup N(y)$, maka *v* bukan termasuk dalam minimum *x,y*-cut. Oleh karena itu, *vertex – connectivity* di G-*v* dari *x* ke *y* sama dengan *k*, $\kappa_{G-v}(x, y) = k$. Dengan induksi, G-*v* mengandung *k internally disjoint path* dari *x* ke *y*.

Misal $\big(N(x) \cap N(y)\big) \neq \emptyset$. Misal *v* adalah suatu *vertex* di $\big(N(x) \cap N(y)\big)$. Jelas , *v* akan muncul di setiap *x,y*-cut. Oleh karena itu, $\kappa_{G-v}(x, y) = k - 1$. Dengan induksi, G-*v* berisi $(k - 1)$ *internally disjoint path* dari *x* ke *y*. Penambahan *path* $\langle x, v, y \rangle$, akan memperoleh sebanyak *k internally disjoint path* dari *x* ke *y* di G.

Dengan demikian, asumsikan bahwa *N(x)* dan *N(y)* adalah *disjoint* dan membuang $V(G)-\{x,y\}$. Misal *G'* adalah sebuah graf bipartit dengan bipartisi *N(x)*, *N(y)* dan himpunan *edge* [*N(x)*, *N(y)*]. Setiap *path* dari *x* ke *y* di G menggunakan beberapa *edge* dari *N(x)* ke *N(y)*. Oleh karena itu, *x*,*y*-cut di G adalah *vertex cover* di *G'*, yang menghasilkan $\beta(G')=k$, dimana $\beta(G')$ adalah jumlah minimum *vertex cover*. Dengan teorema Konig-Egerway, terdapat sebuah ukuran *matching* *k* dari *N(x)* ke *N(y)*. *Edge* ini menghasilkan *k* pasangan *internally disjoint path* dari *x* ke *y* dengan panjang 3.

Contoh Kasus 2:



GAMBAR 6: Contoh Kasus 2

Teorema 3.4 (Hsu and Lin, 2009)

Connectivity dari G setara dengan jumlah maksimum dari *k*, dimana jumlah *k* berasal dari graf k-*connected*, sehingga jumlah *internally disjoint path* lebih besar dari *k*, $\lambda(x,y)\geq k$ untuk semua $x,y\in V(G)$.

Bukti:

Dengan menggunakan Teorema Menger, $\kappa(x,y)=\lambda(x,y)$ ketika $(x,y)\not\subset E(G)$. Sesuai dengan definisi, $\kappa(G)=$ min $\{\kappa(x,y)|(x,y)\notin E(G)\}$. Dengan demikian, akan ditunjukkan bahwa $\lambda(x,y)\geq\kappa(G)$ jika $(x,y)\in E(G)$.

Klaim pertama bahwa $\kappa(G)\leq\kappa\big(G-(x,y)\big)+1$. Misalkan G adalah graf lengkap K_n. Jelas bahwa $\kappa\big(G-(x,y)\big)=n-2=\kappa(G)-1$. Jika graf G adalah graf lengkap dan tidak *clique*, maka $\kappa(G)\leq n-2$. Misalkan T adalah himpunan pemisah dari $G-(x,y)$. Jika T juga suatu himpunan *disconnecting* di G, maka $\kappa(G)=\kappa\big(G-(x,y)\big)=|T|$. Asumsikan T bukan suatu himpunan minimum *separate* dari G. Karena $G\neq K_n$, $|T|<n-2$, maka $G-(x,y)-T$ terdiri dari 2 komponen, yang satu berisi *x* yang satu berisi *y*. Maka, salah satu komponen mempunyai paling sedikit 2 *vertex*. Akan diasumsikan bahwa *x* adalah suatu komponen dengan paling sedikit 2 *vertex*. Jelas bahwa $T\cup\{x\}$ adalah himpunan pemisah dari G.

Maka, $\kappa(G)<\kappa\big(G-(x,y)\big)+1$.

Dengan definisi $\lambda_G(x,y)=1+\lambda_{G-(x,y)}(x,y)$. Maka,

$\lambda_G(x,y)=1+\lambda_{G-(x,y)}(x,y)=$
$1+\kappa_{G-(x,y)}(x,y)\geq 1+\kappa\big(G-(x,y)\big)\geq\kappa(G)$.

Teorema 3.5 (Hsu and Lin, 2009)

Jika *x* dan *y* adalah dua *vertex* yang berbeda di graf G, maka jumlah minimum dari suatu himpunan *x*,*y*-disconnecting dari *edge* sama dengan jumlah maksimum dari pasangan *edge* *disjoint path* dari *x* ke *y*, yaitu $\kappa'(x,y)=\lambda'(x,y)$.

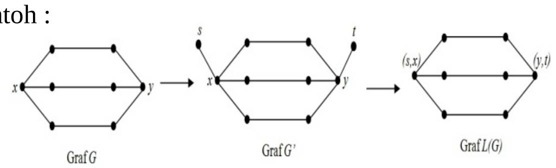
Bukti:

Akan dimodifikasi graf G dengan menambahkan 2 *vertex* baru *s*,*t* dan 2 *edge* baru *(s,x)* dan *(y,t)* untuk memperoleh *G'*. Akan terlihat bahwa $\kappa'(x,y)=\kappa'_G(x,y)$ dan $\lambda'(x,y)=\lambda'_G(x,y)$. Akan dilakukan perpanjangan pada setiap *path* dari *x* ke *y* yang dimulai dari *edge (s,x)*, dan diakhiri *edge (y,t)*. Himpunan *edge* dari *x* ke *y* di G akan *disconnected* , jika dan hanya jika *vertex* di *L(G')* berkorespondensi dengan suatu *(s,x),(y,t)*-cut. *Edge disjoint path* dari *x* ke *y* di G menjadi *internally disjoint path* dari *(s,x)* ke *(y,t)* di *L(G')* begitu juga sebaliknya.

Karena $x\neq y$, $\big((s,x),(y,t)\big)\notin\big(L(G')\big)$.

Dengan teorema Menger,
$\kappa'_G(x,y)=\kappa_{L(G')}\big((s,x),(y,t)\big)=$
$\lambda_{L(G')}\big((s,x),(y,t)\big)=\lambda'_G(x,y)$.

Contoh :



GAMBAR 7: Contoh Teorema 3.5

Berdasarkan gambar, dapat diketahui bahwa
$\kappa'_G(x,y)=3$, $\kappa_{L(G')}\big((s,x),(y,t)\big)=3$,
$\lambda_{L(G')}\big((s,x),(y,t)\big)=3$, $\lambda'_G(x,y)=3$.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan adalah graf *G* yang mempunyai paling sedikit 3 *vertex* adalah 2-*connected* jika dan hanya jika setiap pasangan *u* dan *v* di *V(G)* terhubung oleh sebuah pasangan *internally disjoint path* dari *u* ke *v* di *G*. Dan untuk Graf *G* sembarang, jumlah minimum dari *vertex-connectivity* sama dengan jumlah maksimum dari pasangan *internally disjoint path* dari *x* ke *y*.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada dosen pembimbing, orangtua ,dan teman-teman Jurusan Matematika yang telah mendukung terselesaikannya penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc, New York.

[2] Diestel, R. (2005). *Graph Theory*. Springer, Jerman.

[3] Gross, J.L., and Yellen, J. (2004). *Graph Teory and Interconnection Network*. CRC Press, New York.

[4] Hsu, L.H., and Lin, C.K. (2009). *Graph Theory and Interconnection Networks*. Taylor & Francis Group, LLC, New York.

[5] Lipschutz, S., and Lipson, M.L. (2002). *Matematika Diskrit jilid 2*. Diterjemahkan oleh Tim Editor Salemba Teknika. Salemba Teknika, Jakarta.