Teorema *Jacobson Density*

Budi Santoso[1], Fitriani[2], Ahmad Faisol[3]

Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[1]
budi.klik@gmail.com
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[2]
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[3]

Abstrak. Misalkan R adalah ring (tidak harus komutatif) dan A adalah R-modul. R-modul A dikatakan sederhana jika modul tersebut hanya memiliki submodul $\{0\}$ dan A. Dengan demikian, R-modul A siklik, *indecomposable*, dan memiliki *length* tepat 1. Salah satu Teorema terkait dengan modul sederhana adalah Teorema *Jacobson Density* dimana misalkan R ring primitif dan R-modul A sederhana. Jika A adalah ruang vektor atas ring divisi $D = Hom_R(A, A)$, maka R isomorfis pada suatu *dense* endomorfisma D-ruang vektor A.

Kata Kunci : *Modul, Modul Sederhana, Siklik, Indecomposable,Chain, Teorema Jacobson Density*

PENDAHULUAN

Dalam aljabar abstrak, Modul merupakan dua himpunan (grup abel dan ring) yang memiliki satu operasi biner. Dengan demikian, modul atas lapangan adalah bentuk umum dari ruang vektor dimana operasi penjumlahan dipenuhi oleh grup abel dan perkalian skalar dipenuhi oleh perkalian antara grup abel dengan skalar dari lapangan. Layaknya struktur aljabar, modul memiliki submodul yang didasari dari himpunan bagian dari modul yang tertutup pada operasi biner yang sama.

Modul sederhana merupakan modul yang tidak memiliki submodul sejati yaitu dapat diartikan submodul dari modul sederhana adalah submodul trivial $\{0\}$ dan dirinya sendiri [1]. Sifat-sifat yang dikaji pada modul sederhana mengarah pada Teorema *Jacobson Density*.

Teorema *Jacobson Density* telah dibuktikan oleh Nathan Jacobson dalam karya tulisnya "*Structure theory of simple rings without finiteness assumptions*", Trans. Amer. Math. Soc., 1945. Dalam matematika, khususnya dalam teori ring non-komutatif, aljabar modern, dan teori modul, Teorema *Jacobson Density* adalah teorema yang dikonsentrasikan dalam pembahasan modul sederhana atas ring R primitif yang merupakan *dense* ring endmorfisma dari ruang vektor atas ring divisi.

Modul atas ring R merupakan suatu generalisasi dari ruang vektor atas suatu lapangan/field. Berikut definisi modul dan beberapa kajian terkait untuk Teorema *Jacobson Density*.

Misalkan R adalah ring (tidak harus komutatif) R-modul Kiri (atau Modul Kiri dari R) adalah sebuah grup abel M dengan sebuah peta perkalian skalar

$$\therefore R \times M \to M$$

yang memenuhi aksioma berikut (ditulis (a, m) untuk perkalian skalar dari $m \in M$ oleh $a \in R$). Dalam aksioma ini, a, b adalah elemen dar R dan m, n adalah elemen dari M.

1. $a(m + n) = am + an;$
2. $(a + b)m = am + bm;$
3. $(ab)m = a(bm);$
4. $1m = m$.

R-modul Kanan dinyatakan dengan perkalian skalar pada sisi kanan grup abel [1].

Contoh:

Grup abel $R^n = R \times \dots \times R$ sebanyak n pengulangan adalah R-modul kiri dengan

$$a(a_1, \dots, a_n) = (aa_1, \dots, aa_n)$$

Dimana $a, a_1, \dots, a_n \in R$, dengan demikian R adalah R-modul kiri.

Sebelum mengkaji tentang submodul dan beberapa bentuk modul, terlebih dahulu dikaji beberapa sifat fungsi pada modul, seperti homomorfisma dan endomorfisma yang terdefinisi sebagai berikut.

Diberikan ring R dan N, M adalah R-modul kiri. Fungsi $f: M \to N$ adalah homomorfisma dari R-modul jika memenuhi sifat berikut:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ untuk semua $m_1, m_2 \in M$, dan
2. $f(am) = af(m)$ untuk semua $m \in M$.

Himpunan semua homomorfisma dari R-modul M ke N dinotasikan dengan $Hom_R(M, N)$. Jika $M = N$, maka $Hom_R(M, N)$ dinotasikan dengan $End_R(M)$. Elemen dari $End_R(M)$ disebut endomorfisma. Jika

$f \in End_R(M)$ dapat diinverskan, maka disebut Automorfisma dari M. Grup dari semua Automorfisma M dari R-modul dinotasikan dengan $Aut_R(M)$ Jika $f \in Hom_R(M, N)$ maka dapat didefiniskan $Ker(f) \subseteq M$ dan $Im(f) \subseteq N$ sebagai kernel dan *image* dari f yang berlaku pada homomorfisma grup abel [1].

Contoh :

$\mathbb{R}$ = himpunan bilangan real. Fungsi $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah $\varphi(x) = 2x$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. merupakan homomorfisma.

Selanjutnya, untuk pembuktian Teorema *Jacobson Density* perlu diketahui tentang submodul yang dalam pemetaan natural dapat bersesuaian dengan annihilator.

Jika R adalah ring dan M adalah R-modul kiri, annihilator dari M adalah

$$
\begin{aligned}
Ann(M) &= Ann_R(M) \\
&= \{a \in R \mid am = 0, \forall\, m \in M\} \text{ [8].}
\end{aligned}
$$

Contoh:

Grup abel $R^n = R \times \dots \times R$ sebanyak n pengulangan adalah R-modul kiri dengan

$$a(a_1, \dots, a_n) = (aa_1, \dots, aa_n)$$

Dengan $a, a_1, \dots, a_n \in R$, dengan demikian R adalah R-modul kiri dan dapat dilihat $Ann(R) = \{0 \in R | 0r = 0, \forall r \in R\}$.

Diberikan M sebagai modul atas ring R. N dikatakan submodul (atas ring R) jika N adalah subgrup dari M sehingga $an \in N$ untuk semua $a \in R$ dan $n \in N$ [1].

Contoh:

Setiap ring dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri. Submodul dari R adalah ideal dari R.

Dalam pembahasan isomorfisma modul ditunjukan modul kuosien merupakan modul yang dihasilkan dari pemetaan natural. Oleh karena itu, diberikan kajian tentang modul kuosien dalam paparan berikut.

Jika N adalah submodul dari R-modul M, maka modul kuosien adalah grup kuosien M/N (perlu dingat bahwa M adalah grup abel dan N adalah subgrup) tertutup dengan perkalian skalar

$$r(m + N) = rm + N.$$

Pemetaan natural $\pi: M \to M/N$ diberikan dengan $m \longmapsto m + N$ adalah Homomorfisma R-modul [8].

Contoh :

Ring R dengan ideal I dapat memilki ring kuosien R/I. Karena ring dapat dilihat sebagai modul atas dirinya sendiri, dengan demikian R/I adalah modul kuosien.

Perlu diketahui bahwa setiap subgrup normal $K \lhd G$ adalah kernel dari suatu homomorfisma [8] yang akan digunakan dalam pemahaman Teorema Isomorfisma Modul.

Bukti:

Didefinisikan pemetaan natural $\pi: G \to G/K$ dengan $\pi(a) = aK$. Dengan definisi ini, bentuk $aKbK = abK$ dapat dituliskaan dengan $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab)$; dengan demikian π adalah homomorfisma (surjektif). Karena K adalah elemen identitas di G/K.

$$
\begin{aligned}
Ker(\pi) &= \{a \in G \mid \pi(a) = K\} \\
&= \{a \in G \mid aK = K\} = K,
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa Setiap subgrup normal $K \lhd G$ adalah kernel dari suatu homomorfisma. ■

Dari definisi modul kemudian dikembangkan modul sederhana yang menjadi dasar topik utama dalam penelitian ini, kajian terkait definisi modul sederhana diberikan dalam paparan berikut.

Jika R adalah ring (tidak harus komutatif) dan $M \neq \{0\}$ adalah R-Modul tidak nol, maka dapat dikatakan M adalah modul sederhana atau R-Modul tidak tereduksi jika submodulnya hanya $\{0\}$ dan M saja [1].

Contoh:

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ adalah modul sederhana karena $\mathbb{Z}_5$ tidak memilki subgrup selain $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}_5$ itu sendiri. Jadi $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ adalah modul sederhana.

R-modul M kiri disebut siklik jika dapat dibangun oleh satu elemen yaitu $M = \langle x \rangle = Rx = \{rx | r \in R\}$ untuk suatu $x \in M$. Demikian pula, R-modul N kanan disebut siklik jika $N = yR$ untuk suatu $y \in N$ [3].

Contoh:

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_3$ adalah modul siklik karena dapat dibangun oleh $1 \in \mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_3$.

Kemudian, definisi dari sifat modul sederhana berikutnya yaitu *length*, namun sebelum dikaji tentang *length* maka perlu diketahui kajian terkait *Chain* submodul sebagai dasar penentuan *length* suatu modul, berikut definisi *chain* dan *length*.

Jika R adalah ring (tidak harus komutatif) dan M adalah R-modul, maka *chain* dari submodul M adalah barisan $\{M_i\}_{i=0}^{n}$ dari submodul M sehingga terbentuk seperti berikut:

$$\langle 0 \rangle = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$$

Length dari *chain* adalah *n* [1].

Contoh:

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ memiliki submodul $\mathbb{Z}_5$ dan $\{0\}$ sehingga dapat dibentuk *chain* atau rantai sebagai berikut $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathbb{Z}_5$.

Diberikan M adalah modul (kanan atau kiri) atas ring R. Diberikan bentuk *chain* submodul sebagai berikut:

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n$$

maka dapat dikatakan bahwa *n* adalah *length* dari *chain*. *Length* dari *M* didefiniskan sebagai panjang terbesar dari setiap *chain*. Jika tidak ada panjang terbesarnya, maka dapat dikatakan bahwa *M* memiliki *length* tak terbatas [1].

Contoh:

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ memiliki submodul $\mathbb{Z}_5$ dan $\{0\}$ sehingga dapat dibentuk *chain* atau rantai sebagai berikut $\langle 0 \rangle \subsetneq \mathbb{Z}_5$. Jika dimisalkan submodul tersebut sebagai notasi $N_n, n \in \mathbb{N}$ submodul dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$, maka sepadan dengan bentuk $N_0 = \langle 0 \rangle \subset \mathbb{Z}_5 = N_1$ sehingga didapatkan n

terbesar bernilai 1. Jadi, *length* $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ adalah 1.

Kemudian sifat berikutnya tentang modul sederhana adalah *indecomposable* atau tidak dapat dibagi yang dipaparkan pada penjelasan definisi berikut.

Jika *R* adalah ring (tidak harus komutatif), maka *R*-modul *M* dikatakan menjadi *indecomposable* jika tidak mempunyai komplemen nontrivial submodul M_1. Yaitu, jika $M = M_1 \oplus M_2$ yang berimplikasi bahwa $M_1 = \langle 0 \rangle$ atau $M_1 = M$ [1].

Contoh :

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ memilki submodul $\mathbb{Z}_5$ dan $\{0\}$ sehingga $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 \oplus \{0\}$ mengartikan $\mathbb{Z}_5$ tidak memiliki nontrivial submodul.

Dalam pembahasan Teorema *Jacobson Density* dibahas tentang ring primitif yang isomorfis pada *dense* ring endomorfisma. Oleh karena itu, berikut ini adalah definisi pada istilah tersebut.

Suatu ring *R* disebut ring sederhana jika $R^2 = RR \neq 0$ dan *R* tidak memiliki ideal sejati [6].

Contoh :

Setiap ring divisi adalah ring sederhana dan D-modul sedehana.

Ideal kiri *I* dari *R* adalah ideal *regular* atau ideal *modular* jika terdapat $e \in R$ sehingga berlaku $r - re \in I$ untuk semua $r \in R$. Dengan sifat yang sama pada ideal kanan yaitu dengan sisi yang sebaliknya, maka disebut ideal kanan *regular* [6].

Contoh :

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ memilki

$$Ann(\mathbb{Z}_5) = \{a \in \mathbb{Z} |\ am = 0, \forall m \in M\} = \{0\}$$

adalah ideal kanan *regular*.dari $\mathbb{Z}$.

R-modul A dikatakan modul *faithfull* jika memiliki $Ann(A) = Ann_R(A) = \{0\}$. Ring R dikatakan ring primitif jika *R*-modul A adalah modul sederhana [6].

Contoh :

$\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ memiliki

$$Ann(\mathbb{Z}_5) = \{a \in \mathbb{Z} |\ am = 0, \forall\ m \in M\} = \{0\}$$

sehingga $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_5$ adalah modul *faithfull*. Dengan demikian, $\mathbb{Z}$ adalah ring primitif.

Diberikan ruang vektor V atas ring divisi D. Misalkan E dari ring endomorfisma $Hom_D(V, V)$ disebut *dense* ring endomorfisma V (atau disebut *dense* subring) jika untuk setiap bilangan bulat positif n sedemikian rupa sehingga setiap himpunan bebas linear $\{u_1, \dots, u_n\}$ dari V dan setiap sebarang himpunan bagian $\{v_1, \dots, v_n\}$ dari V terdapat $\theta \in E$ sedemikian rupa sehingga $\theta(u_i) = v_i$, dimana $i = 1,2,3, \dots, n$ [6].

Contoh :

$Hom_D(V, V)$ adalah *dense* subring atas dirinya sendiri. Karena, jika $\{u_1, \dots, u_n\}$ adalah bebas linear yang merupakan himpunan bagian dari V, maka terdapat basis U dari V yang mengandung $u_1, \dots, u_n$. Jika $v_1, \dots, v_n \in V$, maka pemetaan $\theta: V \to V$ dengan $\theta(u_i) = v_i$ dan $\theta(u) = 0$ untuk $u \in U - \{u_1, \dots, u_n\}$ adalah elemen *well-defined* dari $Hom_D(V, V)$. Dalam dimensi terbatas, $Hom_D(V, V)$ adalah *dense* subring.

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah studi literatur. Pada tahap pertama, akan ditunjukkan beberapa sifat modul sederhana berdasarkan definisinya. Kemudian, ditunjukkan beberapa sifat modul sederhana dengan pengembangan bersama struktur aljabar lain seperti ring, grup, dan ruang vektor. Selanjutnya, sifat-sifat tersebut mengarah pada suatu Teorema dan Lemma *Schur* yang diperlukan pada Teorema *Jacobson Density*. Pada Teorema *Jacobson Density*, misalkan *R* ring dan diberikan *U* adalah *R*-modul kanan sederhana. Jika *u* adalah elemen taknol *U*, $u \cdot R = U$ (di mana $u \cdot R$ adalah submodule siklik dari *U* yang dibangun oleh *u*). Oleh karena itu, jika *u* dan *v* adalah unsur taknol *U*, ada unsur *R* yang menginduksi endomorfisma *U* dan mentransformasi *u* ke *v*. Pembuktian selanjutnya, adalah apakah ini dapat digeneralisasi pada ruang vektor dengan dimensi terbatas. Lebih tepatnya, akan ditunjukan untuk menemukan kondisi perlu dan cukup di tupel $(x_1, \dots, x_n)$ dan $(y_1, \dots, y_n)$ secara terpisah, sehingga ada unsur *R* dengan sifat $x_i . r = y_i$ untuk semua *i*. Jika *D* adalah himpunan dari semua endomorfisma *R*-modul dari *U*, maka Lemma *Schur* ini menegaskan bahwa *D* adalah ring divisi, dan Teorema *Jacobson Density* menjawab pertanyaan pada ruang vektor dimensi terbatas dapat dibenarkan, asalkan *x* adalah bebas linear atas *D*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini dikaji beberapa sifat, Lemma, dan Teorema dari modul sederhana yang mengarah pada Teorema *Jacobson Density*.

Teorema 4.1
(Teorema Isomorfisma Modul I)

Misalkan M dan N adalah R-modul.

Jika $f: M \to N$ adalah homomorfisma R-modul, maka terdapat isomorfisma

$$\varphi: M\ /\ (Ker(f)) \to Im(f)$$

dengan $\varphi: m + Ker(f) \longmapsto f(m)$

[1].

Bukti :

Misalkan $Ker(f) = K$.

Pemetaan $\varphi: M\ /\ K \to Im(f)$

dengan $\varphi: m + K \longmapsto f(m)$ adalah isomorfis *well-defined* dari grup abel dengan

$Ker(\varphi) = \{0\}$ sehingga φ adalah monomorfisma. Kemudian, dibuktikan bahwa φ adalah homomorfsma modul dengan sebarang $(a + K)$,$(b + K) \in M/K$ dan $r \in R$ maka

(i). $\varphi\big((a + K) + (b + K)\big)$

$= \varphi(a + K) + \varphi(b + K)$

(ii). $\varphi\big(r(a + K)\big) = \varphi(ra + K)$

$= f(ra) = rf(a) = r\varphi(a + K)$

Selanjutnya, dengan $n \in N$ yaitu $n = f(m)$ dapat ditemukan $m \in M$ sehingga φ adalah epimorfisma. Jadi, terbukti bahwa $M\ /\ (Ker(f)) \cong Im(f)$ ■

Teorema 4.2
(Teorema Isomorfisma Modul II)

Jika N dan P adalah submodul dari M yang merupakan R-modul maka terdapat isomorfisma R-modul

$$((N + P))\ /\ P \to N\ /\ (N \cap P)$$

[1].

Bukti:

Misalkan $\pi: M \to M\ /\ P$ adalah pemetaan natural dan misalkan $\pi_0$adalah pembatasan π ke N dengan demikian

$$\pi_0: N \to ((N + P))\ /\ P$$

$\pi_0(n) = n + P$ untuk semua $n \in N$ dengan demikian $Ker(\pi_0) = N \cap P$ dan

$$Im(\pi_0) = (N + P)/P$$

Berdasarkan Teorema isomorfisma modul I, terbukti bahwa

$N/Ker(\pi_0) \cong Im(\pi_0)$ yaitu

$N\ /\ (N \cap P) \cong (N + P)/P$.

Jadi, terbukti bahwa

$((N + P))\ /\ P \cong N\ /\ (N \cap P)$. ■

Teorema 4.3
(Teorema Isomorfisma Modul III)

Diberikan R-modul M. Jika N dan P adalah submodul dari M dengan $P \subseteq N$, maka terdapat suatu isomorfisma

$$(M\ /\ P)\ /\ (N\ /\ P) \to M\ /\ N$$

[1].

Bukti:

Didefinisikan $f: M\ /\ P \to M\ /\ N$ dengan

$f: m + P \mapsto f(m + P) = m + N$

Dimana f *well-defined* dan memenuhi homomorfisma modul dengan

$Ker(f) = \{m + P | f(m + P) = e \in (M\ /\ N)\}$

$= \{m + P \big| m \in N\} = N/P$

Berdasarkan Teorema isomorfisma modul I, terbukti bahwa $(M/P)/Ker(f) \cong Im(f)$ yaitu $(M/N) \cong (M/P)/(N/P)$.

Jadi, terbukti bahwa $(M/N) \cong (M/P)/(N/P)$.■

Proposisi 4.4

Jika suatu R-modul M sederhana, maka R-modul M siklik [1].

Bukti:

Misalkan x adalah elemen tak nol dari N dan $N = \langle x \rangle$ adalah submodul siklik dibangun oleh x. Karena M adalah modul sederhana dan $N \neq \langle 0 \rangle$, sehingga $M = N$. Jadi, terbukti modul sederhana bersifat siklik. ■

Proposisi 4.5

Jika suatu R-modul M sederhana, maka memiliki *length* tepat 1 [1].

Bukti:

Modul sederhana hanya memiliki submodul $\{0\}$ atau dirinya sendiri sehingga dapat disusun rantai submodul sebagai berikut

$$\langle 0 \rangle = N_0 \subset N_1 = M$$

membentuk barisan $\{N_a\}_{a=0}^{1}$, $a \in \mathbb{N}$ dari submodul M dan ditunjukkan bahwa batas maksimal $a = 1$ adalah nilai terbesar. Jadi, terbukti bahwa modul sederhana memiliki *length* tepat 1. ■

Proposisi 4.6

Jika suatu R-modul M sederhana, maka R-modul M *indecomposable* [1].

Bukti:

R-modul M sederhana tidak memiliki submodul komplemen nontirivial tak sejati M_1. Yaitu jika

$$M = M_1 \oplus M_2$$

berimplikasi bahwa $M = \langle 0 \rangle$ atau $M_1 = M$. Jadi, terbukti bahwa modul sederhana *indecomposable*/tidak dapat dikomposisikan. ■

Proposisi 4.7

Jika R adalah ring dan $M = \langle m \rangle$ adalah R-modul siklik, maka

$$M \cong R/Ann(m)$$

[1].

Bukti :

Fungsi $f: R \to M$ didefinisikan dengan $f(a) = am$ adalah homomorfisma R-modul surjektif dimana untuk suatu $am \in M$ dapat ditemukan $a \in R$ sehingga $f(a) = am$. Kemudian dapat dinyatakan f merupakan injektif dengan $Ker(f) = Ann(m)$.

$Ker(f) = \{a \in R \big| f(a) = 0\}$

$= \{a \in R \big| f(a) = am = 0, m \in R\}$

terpenuhi dengan $a = 0$

$= Ann(m) = \{0\}$

Berdasarkan Teorema 4.1 (Teorema isomorfisma modul I) sehingga

$R/Ann(m) \cong M$. ■

Teorema berikut ini membantu dalam melengkapi pembuktian Proposisi 4.9 yang digunakan untuk memahami pembuktian Teorema *Jacobson Density*.

Teorema 4.8
(Teorema Korespondensi)

Misalkan M adalah R-modul, N adalah submodul dari N dan $\pi: M \to M/N$ adalah pemetaan natural. Maka fungsi $P \mapsto P/N$ mendefinisikan korespondensi satu-satu antara himpunan dari

semua submodul M yang mengandung N dengan semua submodul dari M/N [1].
Bukti:
Misalkan
$S_1 = \{P|P$ submodul M yang mengandung $N\}$
dan
$S_2 = \{$submodul dari $P/N\}$
didefiniskan $\alpha: S_1 \to S_2$ oleh
$\alpha(P) = P/N = Im(\pi|P)$.
Andaikan $P_1/N = P_2/N$ dimana $P_1, P_2 \in S_1$. Dapat dinyatakan $P_1 = P_2$. Diberikan $p_1 \in P_1$. Sehingga $p_1 N \in P_2/N$, dengan demikian $p_1 N = p_2 N$ dimana $p_2 \in P_2$. Oleh karena itu, $P_1 \subseteq P_2$ dan hal yang serupa juga dapat ditunjukkan sebaliknya dengan cara yang sama sehingga $P_2 \subseteq P_1$. Dengan demikian $P_1 = P_2$ sehingga α adalah satu-satu. Jika $K \in S_2$ maka $\pi^{-1}(K) \in S_1$dan
$\alpha(\pi^{-1}(K)) \in K$ sehingga α adalah surjektif. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa α adalah korespondensi satu-satu antara S_1 dan S_2. ■

Proposisi 4.9
Jika R adalah ring, maka sebuah R-modul M siklik $= \langle m \rangle$ adalah modul sederhana jika dan hanya jika $Ann(m)$ adalah ideal kiri maksimal [1].
Bukti:
Dapat dipahami dengan Proposisi 4.7 bahwa $M \cong R/Ann(m)$, dengan demikian jika $Ann(m)$ adalah ideal maksimal, maka Teorema Korespondensi menunjukan bahwa M tidak mempunyai submodul selain $M = \langle m \rangle$ dan $\langle 0 \rangle$ yang berarti M adalah modul sederhana. Kemudian arah pembuktian sebaliknya,
R-modul $M = \langle m \rangle$ siklik sederhana dengan demikian memiliki submodul $\langle m \rangle$ dan $\langle 0 \rangle$ dimana $Ann(m)$ terpenuhi untuk $r = 0 \in R$ sebagai ideal dari R dan juga berarti $Ann(m) = \{0\}$ adalah R-submodul M yang tidak mempunyai submodul (ideal) yang mengandung $Ann(m)$ selain daripada R dan $Ann(m)$. Dengan demikian menunjukan syarat bahwa $Ann(m)$ sebagai ideal kiri maksimal. ■

Proposisi 4.10
Ring sederhana R dengan elemen identitas 1_R adalah ring primitif [6].
Bukti:
$R/I \cong R$ dimana I haruslah ideal maksimal dari R berdasarkan Proposisi 4.9. Ideal maksimal dari R terpenuhi dengan $I = \{0\}$ karena tidak ada ideal lain selain I di R yang memuat I. Karena R memiliki elemen identitas maka I adalah ideal *reguler* yaitu jika terdapat $r \in R$, maka berlaku $r - re \in I$ yaitu $e = 1_R$. Karena $Ann(R/I)$ adalah sebuah ideal yang tidak mengandung 1_R, $Ann(R/I) = \{0\}$ berdasarkan Proposisi 4.9. Oleh karena itu, R/I *faithfull* yang selalu memuat ring primitif. Jadi, terbukti bahwa R adalah ring primitif. ■

Proposisi 4.11
Ring komutatif R adalah ring primitif jika dan hanya jika R adalah *field* [6].
Bukti:
Field merupakan ring dengan elemen identitas dan komutatif dengan demikian field adalah ring primitif berdasarkan Proposisi 4.10. Pembuktian pada arah sebaliknya, Diberikan R adalah ring primitif sehingga suatu R-modul A sederhana *faithfull* dan berdasarkan Proposisi 4.9 $A \cong R/I$ untuk suatu I ideal kiri maksimal yang regular dari R. Dengan demikian, R merupakan ring komutatif, ring primitif yang memiliki identitas serta memiliki I ideal maksimal dari R yaitu
$I \subset Ann(R/I) = Ann(A) = \{0\}$ berdasarkan Proposisi 4.9. Karena $I = 0$ adalah *regular*, terdapat $e \in R$ sehingga $r = re = er$ untuk semua $r \in R$ yaitu $e = 1_R$. Karena R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan, maka R/I juga merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Jika 0 merupakan elemen nol dan dan 1_R merupakan elemen satuan dari R, maka $(0 + I)$ merupakan elemen nol dan $(1_R + I)$ merupakan elemen satuan dari R/I. Akan ditunjukkan bahwa R/I merupakan lapangan. Dapat diambil sebarang elemen tak nol $(p + I)$ di dalam R/I. Karena $(p + I) = (0 + I)$ jika dan hanya jika $p = 0$, maka haruslah $p \neq 0$. Selanjutnya, misalkan P adalah ideal utama di dalam R yang dibangun oleh p, berarti

$$P = \langle p \rangle = \{rp | r \in R\}$$

karena jumlah ideal di dalam ring R merupakan ideal di dalam ring R, maka $I + P$ juga merupakan ideal di dalam R yang memuat I.
Sekarang, karena $p \notin I$ dan
$p = 0 + 1_R p \in (I + P)$, sehingga I merupakan subset sejati dari $I + P$. Dengan, I merupakan ideal maksimal di dalam R, maka $I + P = R$. Karena $1_R \in R$, maka $1_R \in I + P$. Akibatnya 1_R dapat dinyatakan dalam bentuk $1_R = b + rp$, untuk suatu $b \in I$ dan $r \in R$. Ini berarti $(1_R - rp) = b \in I$. Akibatnya
$(1_R + I) = (rp + b) + I = (r + I)(p + I)$
dan dengan sifat komutatif diperoleh

$$(1_R + I) = (r + I)(p + I) = (p + I)(r + I)$$

Ini berarti $(r + I) \in R/I$ merupakan elemen invers dari elemen $(p + I)$. Dengan demikian, setiap elemen tak nol di dalam R/I mempunyai elemen invers di R/I. Jadi R/I merupakan lapangan.
Karena $R/I = R/\{0\} = R$ sehingga R merupakan *field.* ■

Untuk membahas Teorema Jacobson Density dibutuhkan dua Lemma yaitu Schur's Lemma dan Lemma 4.13. Berikut ini pembahasan tentang Schur's Lemma dan Lemma 4.13.

Lemma 4.12
(Lemma *Schur)*
Misalkan M adalah R-modul sederhana dan diberikan N suatu R-modul.

1. Setiap homomorfisma R-modul taknol $f: M \to N$ adalah monomorfisma.
2. Setiap homomorfisma R-modul taknol $g: N \to M$ adalah epimorfisma.
3. Endomorfisma ring $D = End_R(M)$ adalah ring divisi [6].

Bukti:

1. $Ker(f)$ adalah submodul dari M dan $Ker(f) \neq M$ karena $f \neq 0$ berdasarkan definisi. Oleh karena itu, $Ker(f) = \{0\}$. Akibatnya, f adalah monomorfisma.
2. $Im(g)$ adalah submodul tak nol dari R-modul M karena $g \neq 0$ maka $Im(g) = M$. Dengan demikian, f adalah epimorfisma.
3. Jika $h \in D = End_R(M)$, maka $h \neq 0$ memenuhi sifat bijektif yang mengikuti pembuktian 1 dan 2. f memiliki invers $f^{-1} = g \in End_R(M) = D$ sehingga setiap elemen tak nol dari D adalah unit Hal ini mengartikan D adalah ring divisi. ∎

Lemma 4.13
Misalkan A adalah modul sederhana atas ring R. A adalah ruang vektor atas ring divisi D=$End_R(A)$. Jika V adalah D-subruang vektor dengan dimensi terbatas dari D-ruang vektor A dan $a \in A - V$, maka terdapat $r \in R$ sedemikian rupa sehingga $ra \neq 0$ dan $rV = 0$ [6].
Bukti:
Bukti diberikan dengan pembuktian induksi dimana $n = dim_D V$. Jika $n = 0$, maka $V = 0$ dan $a \neq 0$. Karena A adalah modul sederhana, $A = Ra = \langle a \rangle$ berdasarkan Proposisi 4.4. Akibatnya, terdapat $r \in R$ sedemikian rupa sehingga $ra = a \neq 0$ dan $rV = r0 = 0$.
Anggap $dim_D V = n > 0$ dan teorema bernilai benar untuk dimensi kurang dari n. Diberikan $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u\}$ adalah D-basis V dan W adalah D-subruang vektor dengan dimensi $(n-1)$ yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ ($W = 0$ jika $n = 1$). Dengan demikian, $V = W \oplus Du$ (jumlah langsung ruang vektor). Dapat dilihat bahwa W mungkin bukan R-submodul A karena submodul dari modul sederhana hanya ada dua berdasarkan Proposisi 4.6, tetapi dalam kaitan annihilator kiri $I = Ann(W)$ di R dari W adalah ideal kiri dari R. Maka dari itu, Iu adalah R-submodul dari A. Karena $u \in A - W$, hipotesis pembuktian induksi mengartikan bahwa terdapat $r \in R$ sehingga $ru \neq 0$ dan $rW = 0$ (maka berarti $r \in I = Ann(W)$). Akibatnya, $0 \neq ru \in Iu$ dimana $Iu \neq 0$. Dengan demikian, $A = Iu$ karena A adalah modul siklik dan juga modul sederhana.
(Catatan: kontraposisi dari pernyataan induksi tersebut menunjukan bahwa jika $v \in A$ dan $rv = 0$ untuk semua $r \in I$, maka $v \in W$).
Oleh karena itu, harus ditemukan $r \in R$ sehingga $ra \neq 0$ dan $rV = 0$. Jika tidak terdapat r yang memenuhi, maka dapat didefiniskan pemetaan $\theta: A \to A$ berdasarkan definisi Lemma dimana untuk
$ru \in Iu = A$ diberikan $\theta(ru) = ra \in A$ dan θ dapat dinyatakan well-defined. Yaitu jika
$r_1 u = r_2 u$ ($r_i \in I = Ann(W)$) , maka
$(r_1 - r_2)u = 0$, dimana
$$(r_1 - r_2)V = (r_1 - r_2)(W \oplus Du) = 0$$
berdasarkan hipotesis bahwa $(r_1 - r_2)a = 0$. Oleh karena itu, $\theta(r_1 u) = r_1 a = r_2 a = \theta(r_2 u)$. Akan ditunjukkan bahwa $a \in V$, dimana berdasarkan Schur's Lemma
$\theta \in End_R(A) = D$ maka untuk setiap $r \in I$.
$$0 = \theta(ru) - ra = r\theta(u) - ra = r(\theta(u) - a).$$
Oleh karena itu, $\theta(u) - a \in W$ berdasarkan catatan diatas dan berakibat
$$a = \theta u - (\theta u - a) \in Du + W = V,$$
Hal ini menimbulkan kontradiksi dengan fakta bahwa $a \notin V$. Oleh karena itu, terdapat $r \in R$ sehingga $ra \neq 0$ dan $rV = 0$. ∎

Berdasarkan Schur's Lemma dan Lemma 4.13 yang telah dibahas akan digunakan dalam pembahasan Teorema Jacobson Density sebagai berikut.

Teorema 4.14
(Teorema *Jacobson Density*)
Misalkan R ring primitif dan R-modul A sederhana. Jika A adalah ruang vektor atas ring divisi $D = End_R(A)$, maka R isomorfis pada suatu dense endomorfisma D-ruang vektor A [6].
Bukti:
Untuk suatu $r \in R$, didefinisikan pemetaan $\propto_r: A \to A$ yang diberikan oleh $\propto_r(a) = ra$ adalah suatu D-endomorfisma A sehingga $\propto_r \in End_R(A)$.
$\propto_r$ adalah suatu bentuk fungsi dalam $End_R(A)$ sehingga untuk semua $r, s \in R$ sebagai indeks fungsi dapat dibentuk
$\propto_{(r+s)} = \propto_r + \propto_s$ yaitu dimisalkan dengan pemetaan $x \in A$ sehingga berlaku
$$\begin{aligned} \propto_{(r+s)}(x) &= (r+s)x \\ &= rx + sx \\ &= \propto_{(r)}(x) + \propto_{(s)}(x) \end{aligned} \qquad (1)$$
dan
$\propto_{rs} = \propto_r \circ \propto_s$ yaitu dimisalkan dengan pemetaan $x \in A$ sehingga berlaku
$$\begin{aligned} \propto_{(rs)}(x) &= (rs)x \\ &= r(sx) = \propto_r(sx) \\ &= \propto_r(\propto_s(x)) = \propto_r \circ \propto_s \end{aligned} \qquad (2)$$
dengan demikian, suatu pemetaan
$\propto: R \to End_D(A)$ dapat didefinisikan dengan $\propto(r) = \propto_r$ yaitu merupakan homomorfisma ring

yang *well-defined*. Karena A adalah R-modul faithfull, maka $\propto_r = 0$ jika dan hanya jika $r \in Ann(A) = \{0\}$. Oleh karena itu, $\propto$ adalah monomorfisma dan kemudian R adalah isomorfis dengan $Im(\propto)$ sebagai subring dari $End_D(A)$ yang menunjukkan $\propto$ adalah epimorfisma.
Berikut pembuktiannya,
Ditunjukkan bahwa $\propto$ adalah *well-defined*.
Ambil sebarang $m, n \in R$ dan dinyatakan $m = n$. Sehingga berlaku

$$\begin{aligned} m = n &\Rightarrow m - n = 0 \in R \\ &\Rightarrow \propto (m-n) = \propto (0) \\ &\Rightarrow \propto_{(m-n)} = \propto_0 \\ &\Rightarrow \propto_m - \propto_n = 0 \\ &\Rightarrow \propto_m = \propto_n \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\propto$ well-defined.
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\propto$ adalah homomorfisma ring.

(i). Ambil sebarang $m, n \in R$. Mengacu kembali pada persamaan (1) sehingga berlaku $\propto (m+n) = \propto_{m+n} = \propto (m) + \propto (n)$
(ii). Ambil sebarang $m \in R$ dan $r \in \mathbb{R}$. Mengacu kembali pada persamaan (2) dengan $a \in A$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} \propto (rm) &= \propto_{rm} = \propto_r \circ \propto_s = \propto_r \left(\propto_m (a)\right) \\ &= \propto_r (ma) = rma = r.(ma) \\ &= r \propto_m (a) = r \propto (m) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\propto$ adalah homomorfisma ring.
Kemudian ditunjukkan $\propto$ adalah monomorfisma atau injektif yaitu $Ker(\propto) = \{0\}$. Karena R adalah ring primitif dan R-modul A sederhana dengan demikian R-modul A adalah faithfull yang memiliki $Ann(A) = \{0\}$ yang merupakan ideal maksimal dari R berdasarkan Proposisi 4.7 dan Proposisi 4.9.
Dengan demikian dapat ditemukan

$$Ker(\propto) = \{r \in R | \propto (r) = \propto_r = 0\}$$

terpenuhi jika dan hanya jika $r = 0$ yang juga merupakan elemen dari $Ann(A)$. Sehingga $Ker(\propto) = Ann(A) = \{0\}$. Hal ini menunjukan untuk setiap $r, s \in R$ dapat dipetakan satu-satu pada dense ring endomorfisma A, yaitu anggap $\propto (r) = \propto (s)$ sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} \propto (r) = \propto (s) &\Rightarrow \propto_r = \propto_s \\ &\Rightarrow \propto_r - \propto_s = 0 \\ &\Rightarrow \propto_{(r-s)} = 0 \\ &\Rightarrow (r-s) \in Ker(\propto) = \{0\} \\ &\Rightarrow r - s = 0 \\ &\Rightarrow r = s \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\propto$ adalah monomorfisma.
Untuk melengkapi bukti, harus dibuktikan bahwa $Im(\propto)$ adalah dense subring dari $End_D(A, A)$.
Diberikan suatu himpunan bagian D-bebas linear $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ dari A dan sebarang himpunan bagian $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dari A, maka harus ditemukan $\propto_r \in Im(\propto)$ sehingga $\propto_r (U_i) = V_i$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$. Untuk masing-masing i diberikan V_i adalah D-subruang vektor A yang direntang oleh $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$. Karena U adalah D-bebas linear, $u_i \notin V_i$. Akibatnya, oleh Lemma 4.13 terdapat $r_i \in R$ sehingga $r_i u_i \neq 0$ dan $r_i V_i = 0$. Pertama, sesuai Lemma 4.13 diterapkan pada subruang vektor nol dengan elemen taknol $r_i u_i$ sehingga terdapat $s_i \in R$ sehingga $s_i r_i u_i \neq 0$ dan $s_i.0 = 0$. Karena $s_i r_i u_i \neq 0$, R-submodul $R r_i u_i$ dari A adalah tidak nol, dengan demikian $R r_i u_i = A$. Kemudian, untuk subruang vektor yang lebih dari 0 terdapat $t_i \in R$ sedemikian rupa sehingga $t_i r_i u_i = v_i$. Yaitu diberikan
$r = t_1 r_1 + t_2 r_2 + \cdots + t_n r_n \in R$.
Mengingat bahwa untuk $i \neq k$, $u_i \in V_k$ dimana $t_k r_k u_i \in t_k (r_k V_k) = t_i.0 = 0$. Akibatnya untuk masing-masing $i = 1,2, \ldots n$.

$$\propto_r (u_i) = (t_1 r_1 + \cdots + t_n r_n) u_i = t_i r_i u_i = v_i$$

Oleh karena itu, $Im(\propto)$ adalah dense ring dari endomorfisma D-ruang vektor A.
Jadi, berdasarkan Teorema Isomorfisma Modul I, terbukti bahwa $Ker(\propto) = \{0\}$, dan $Im(\propto) =$ dense ring $End_D(A)$ sehingga $R/Ker(\propto) \cong Im(\propto)$ atau dengan kata lain $R \cong dense$ ring $End_D(A)$. ■

SIMPULAN

Jika R-modul A adalah modul sederhana, maka R-modul A siklik, *indecomposable*, memiliki *length* tepat 1. Teorema *Jacobson Density*, misalkan R ring primitif dan R-modul A sederhana. Jika A adalah ruang vektor atas ring divisi $D = End_R(A)$, maka R isomorfis pada suatu *dense* endomorfisma D-ruang vektor A.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins, W.A, Weintraub, S.H. 1992. *Algebra An Approach via Module Theory*. Springer Verlag, New York.
[2] Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kedua. PT. Gelora Aksara, Jakarta.
[3] Ash, R.B. 2007. *Basic Abstract Algebra For Graduate and Advanced Undergraduates*. Dover Publications Inc., Mineola, New York.
[4] Gazali, W. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
[5] Grillet, P.A. 1999. *Algebra*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
[6] Hungerford, T.W. 1974. *Graduate Texts in Mathematics Algebra*. Springer, New York
[7] Nicholson, W.K. 1995. *Linear Algebra With Application*. 3rd Edition. PWS Publishing Company, Boston.

[8] Rotman, J.J. 2007. *Advanced Modern Algebra*. 1st Edition. Prentice-Hall, New Jersey.