PEMBENTUKAN *HAMILTONIAN* CYCLE PADA *DOUBLE LOOP NETWORKS*

Dina Fitri Aliana, Wamiliana dan Fitriani

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung
Jl. Prof Dr. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Email : adinafitri07@yahoo.com

Abstrak

Graf Hamiltonian merupakan salah satu jenis graf dimana graf tersebut mengandung graf sirkuit yang tiap *vertex*-nya berderajat dua. *Loop Networks* adalah jaringan yang memiliki paling sedikit satu struktur *Ring* (*cycle* atau sirkuit). *Double Loop Network*, dinotasikan G ($n; s_1, s_2$) yaitu *digraph* atau graf berarah dengan *n vertex* { 0, 1, 2, …, $n-1$} dan 2*n edge* dengan arah $i \rightarrow i + s_1 \ (mod\ n)$ dan $i \rightarrow i + s_2 \ (mod\ n)$ dan dimana s_1 dan s_2 *vertex* yang dipilih. Pada penelitian ini akan didiskusikan tentang pembentukan dua sifat *Hamiltonian cycle* pada *Double Loop Network*

Kata kunci : *Hamiltonian cycle, Loop Networks, Double Loop Networks.*

1. PENDAHULUAN

Graf G dinyatakan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi G = (V, E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari *vertex*, dan E adalah himpunan *edges* yang menghubungkan sepasang *vertex*. Himpunan *vertex* dari graf G ditulis dengan V(G), sedangkan himpunan *edges* dari graf G dinyatakan dengan E(G). *Vertex* pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti *a*, *b*, *c*, *d*, ..., dengan bilangan asli 1, 2, 3, ... *Edge* yang menghubungkan *vertex u* dengan *vertex v* dinyatakan dengan pasangan e_{uv} atau dengan lambang e_1, e_2, e_3, ... Suatu *edge* dikatakan *loop* jika *edge* tersebut menghubungkan *vertex* yang sama. Dengan kata lain, *e* adalah *loop* jika *e* = (*v*,*v*). Jika dua *edge* atau lebih menghubungkan dua *vertex* yang sama, maka *edges* tersebut dikatakan *edges* ganda (*multiple edges* atau *paralel edges*). *Degree* atau derajat dari suatu *vertex* v pada graf G dinotasikan dengan *deg*(v), adalah jumlah dari *edge* yang menempel pada *vertex* v dimana *self-loop* dihitung dua kali. Bila semua *vertex* berbeda disebut lintasan, dimana lintasan yang tertutup disebut sirkuit. *Ring* merupakan salah satu contoh dari sirkuit.[1]

Graf Hamiltonian merupakan salah satu jenis graf dimana graf tersebut merupakan graf sirkuit yang berderajat genap. *Loop Networks* adalah jaringan yang memiliki paling sedikit satu struktur *Ring*. *Double Loop Networks* adalah ekstensi *Ring Networks* yang secara luas digunakan dalam desain dan implementasi LAN (*Local Area Networks*). Pada penelitian ini akan ditunjukkan tentang tentang pembentukan dua sifat *Hamiltonian cycle* pada *Double Loop Network*

Graf *G (V,E)* adalah pasangan himpunan *V* dan *E* dengan *V* adalah Himpunan berhingga dan tidak kosong dari titik-titik (*vertex*). Istilah lain untuk menyatakan titik adalah *vertex* atau *node*. *E* merupakan himpunan dari *edge* yang menghubungkan sepasang *vertex*.[1]

Berdasarkan orientasi arah pada *edge*, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)
   Graf yang *edge*-nya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah
2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)
   Graf yang setiap *edge*-nya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.[4]

Degree atau derajat dari suatu *vertex* v pada graf *G*, dinotasikan dengan *deg*(v), adalah jumlah dari *edge* yang menempel pada *vertex* v dimana *self-loop* dihitung dua kali.[2]

Jika *e* = {*u*,*v*} adalah suatu *edges* yang menghubungkan *vertex u* dan *v* pada graf G, maka *vertex u* dikatakan tetangga (*adjacent*) terhadap *vertex v* dan *edges* e_{uv} dikatakan terhubung (*incidence*) pada *u* dan *v*.[3]

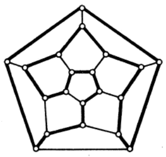
Graf tak berarah *G* disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang *vertex u* dan *v* di dalam himpunan *V* terdapat lintasan dari *u* ke *v* (yang juga harus berarti ada lintasan dari *u* ke *v*).[4]

Graf yang setiap *vertex*-nya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur atau regular. Apabila derajat setiap *vertex* adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat *r*[4].

Sirkuit *Hamiltonian* (*Hamiltonian circuits/cycle*) dalam graf terhubung didefinisikan pada *walk* tertutup dengan *edge* lintas setiap *vertex* dari *G* tepat satu kali, kecuali *vertex* awal. Lintasan *Hamiltonian* (*Hamiltonian paths*) dalam graf *G* melintasi setiap *vertex* dari *G*. *Hamiltonian* path adalah subgraf dari sirkuit *Hamiltonian*[1]. Contoh sirkuit *Hamiltonian* dan *Hamiltonian path* terlihat pada gambar berikut:

Gambar 2.1 Contoh : (a) *Hamiltonian Circuits* dan (b) *Hamiltonian Paths*

Gambar 2.1 merupakan contoh dari *Hamiltonian circuits*, *edge* yang dicetak tebal merupakan lintasan yang berbentuk sirkuit yaitu:1–2–4–3– 1, sedangkan Gambar 2.7(b) merupakan contoh dari *Hamiltonian path*, *edge* tebal merupakan lintasan *Hamiltonian* yaitu 3 – 1 – 2 – 4. Berikut adalah contoh graf *Hamiltonian* :

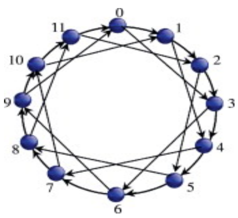


Gambar 2.2 Contoh Graf Hamiltonian

Hamiltonian Cycle atau sirkuit merupakan contoh dari *Loop Networks.*

Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* jika $G \setminus \{e\}$adalah Hamiltonian untuk setiap $e \in E$, dan suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-vertex fault- tolerant Hamiltonian* jika $G \setminus \{v\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $v \in V$. Suatu graf $G = (V,E)$ adalah *1-fault-tolerant Hamiltonian* jika $G \setminus \{f\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $f \in E \cup V$ *Graph* [5].

Double Loop Network, dinotasikan G ($n;\ s_1,\ s_2$) yaitu digraph atau graf berarah dengan n *vertex* { 0, 1, 2, …, $n-1$} dan 2n *edges* dengan arah $i \to i + s_1\ (mod\ n)$ dan $i \to i + s_2\ (mod\ n)$ dan dimana s_1 dan s_2 *vertex* yang dipilih.[6]



Gambar 2.3 Contoh *Double Loop Network* G(12;1,3)

2. METODE PENELITIAN

Langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Tentukan *Double Loop Network* G ($n;\ s_1,\ s_2$) yang akan didiskusikan.
2. Tentukan nilai n (banyaknya *vertex*), s_1 (*vertex* kesatu yang dipilih), s_2 (*vertex* kedua yang dipilih), d (panjang periodik) pada G ($n;\ s_1, s_2$).
3. Gambarkan G ($n;\ s_1,\ s_2$) dengan software CorelDRAW X4 dengan arah tiap *vertex* ke *vertex* lainnya ditentukkan oleh $i \to i + s_1\ (mod\ n)$ dan $i \to i + s_2\ (mod\ n)$.
4. Tentukan apakah di G ($n;\ s_1, s_2$) mengandung *cycle*
5. Menentukan *Hamiltonian* di G ($n;s_1,\ s_2$) dengan membentuk barisan *vertex* yang jarak periodik tiap *vertex*-nya ditentukkan oleh $s_1$dan s_2.
6. Definisikan fungsi dari Hamiltonian cycle di G ($n;\ s_1, s_2$).
7. Tarik kesimpulan.

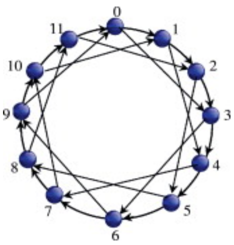
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mengkonstruksikan *n-vertex Double Loop Networks*, pemilihan s_1, dan s_2 adalah hal terpenting karena akan berkaitan dengan besar kecilnya rata-rata jarak diameter topologi *ring*.

Pada penelitian ini akan didiskusikan tiga jenis *Double Loop Network* yaitu $G\ (12; 1, 3)$, $G\ (12; 2, 5)$, dan $G\ (12; 1, 5)$

1. G (12; 1, 3)

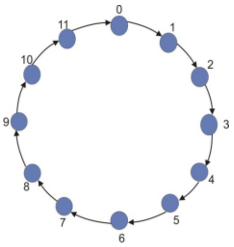
$G\ (12; 1, 3)$ dengan: n=12, yang memiliki arah dari $s_1 = 1$ arah *vertex* $i \to i + 1\ (mod\ 12)$ dan $s_2 = 3$ arah *vertex* $i \to i + 3\ (mod\ 12)$. Pada Gambar 3.1 *Double Loop Networks* $G\ (12; 1, 3)$ memiliki bentuk melingkar (*loop*) terdapat 12 *vertex* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dan 24 *edge* yang menghubungkan dari *vertex* 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-0 dan *vertex* 0-3-6-9-0 , 1-4-7-10-1 serta 2-5-8-11-2.



Gambar 3.1 *Double Loop Network* $G\ (12; 1, 3)$

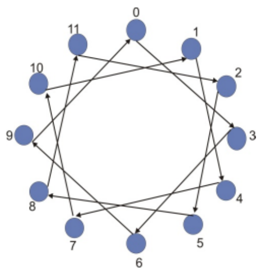
Berikut subbagian *Double Loop Networks* $G\ (12; 1, 3)$ dengan $s_1 = 1$ arah *vertex* $i \to i + 1\ (mod\ 12)$ dapat dilihat pada Gambar 3.2 $G\ (12; 1, 3)$ menghasilkan arah dari *vertex* 0-

1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-0 dan memilki sebanyak 12 *edge* serta terbentuk *Hamiltonian cycle* dimana terdapat *walk* tertutup dengan *edge* lintas setiap *vertex* dari $G\ (12;1,3)$ tepat satu kali, kecuali *vertex* awal.



Gambar 3.2 $G\ (12;1,3)$ dengan $s_1 = 1$ arah $i \to i + 1\ (mod\ 12)$

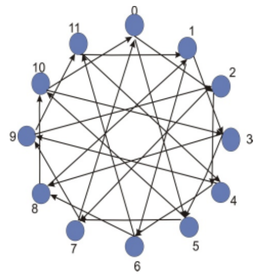
Double Loop Networks $G\ (12;1,3)$ berikut ini dengan $s_2 = 3$ arah *vertex* $i \to i + 3\ (mod\ 12)$ dapat dilihat pada Gambar 3.3 $G\ (12;1,3)$ menghasilkan arah dari *vertex* 0-3-6-9-0 , 1-4-7-10-1 dan 2-5-8-11-2 masing-masing sebanyak 4 *edge* akan berulang dengan arah yang sama di *vertex* 3, 4, 5, ..., 11. sehingga berjumlah 12 *edge*. Pada arah ini hanya terbentuk tiga *cycle* dengan urutan arah *vertex* yang disebutkan sebelumnya 0-3-6-9-0 , 1-4-7-10-1 dan 2-5-8-11-2 berakibat terputus dan *vertex* tidak saling terhubung. Sehinggga, tidak terbentuk *Hamiltonian cycle* karena tidak semua *vertex* dilewati oleh lintasan *Hamiltonian*. Pada Gambar 4.3 $G\ (12;1,3)$ dengan $s_2 = 3$ arah *vertex* $i \to i + 3\ (mod\ 12)$ bukan *Hamiltonian cycle*.



Gambar 3.3 $G\ (12;1,3)$ dengan $s_2 = 3$ arah $i \to i + 3\ (mod\ 12)$

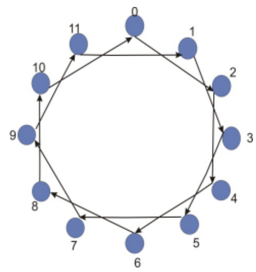
b. G (12; 2,5)

Pada $G\ (12;2,5)$ dengan n = 12, yang memiliki arah dari $s_1 = 2$ arah *vertex* $i \to i + 2\ (mod\ 12)$ dan $s_2 = 5$ arah *vertex* $i \to i + 5\ (mod\ 12)$. Pada Gambar 4.4 *Double Loop Network* dapat dilihat G $(12;2,5)$ terdapat 12 *vertex* 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11 dimana ada 12 *edge* menghubungkan *vertex* 0-2-4-6-8-10-0 dan 1-3-5-7-9-11-1 masing-masing sebanyak 6 *edges* akan berulang dengan arah yang sama di *vertex* 3, 4, 5, ..., 11 dan 12 *edge* yang menghubungkan *vertex* 1-6-11-4-9-2-7-0-5-10-3-8-1.



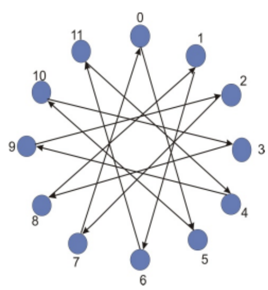
Gambar 3.4 *Double Loop Network* $G\ (12;2,5)$

Gambar 3.5 merupakan subbagian dari *Double Loop Network* $G\ (12;2,5)$ dengan $s_1 = 2$ arah $i \to i + 2\ (mod\ 12)$ dimana ada *edge* menghubungkan *vertex* 0-2-4-6-8-10-0 dan 1-3-5-7-9-11-1 masing-masing sebanyak 6 *edge* akan berulang dengan arah yang sama di *vertex* 3, 4, 5, ..., 11. Pada arah ini terbentuk dua *cycle* yaitu dari arah vertex 0-2-4-6-8-10-0 dan 1-3-5-7-9-11-1 serta semua *vertex* tidak saling terhubung. Sehinggga, tidak terbentuk *Hamiltonian cycle* karena tidak semua *vertex* dilewati oleh lintasan *Hamiltonian*. Pada Gambar 4.5 $G\ (12;2,5)$ dengan $s_1 = 2$ arah *vertex* $i \to i + 2\ (mod\ 12)$ bukan *Hamiltonian cycle*.



Gambar 3.5 $G\ (12;2,5)$ dengan $s_1 = 2$ arah $i \to i + 2\ (mod\ 12)$

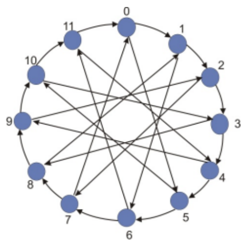
Gambar 3.6 merupakan subbagian dari *Double Loop Network* $G\ (12;2,5)$ dengan $s_2 = 5$ dan arah *vertex* $i \to i + 5\ (mod\ 12)$ dengan melewati setiap *vertex*-nya tepat sekali terbentuk *Hamiltonian cycle* yang berawal dan berakhir di *vertex* yang sama yaitu dari *vertex* 0-5-10-3-8-1-6-11-4-9-2-7-0 dengan 12 *edge*.



Gambar 3.6 $G\ (12;2,5)$ dengan $s_2 = 5$ arah $i \to i + 5\ (mod\ 12)$

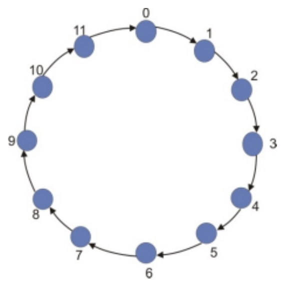
Sebelumnya telah dijelaskan dua contoh *Double Loop Networks* yang mengandung *Hamilonian* *cycle* yang dibentuk salah satu dari arah *vertex* s_1 dan s_2 .Selanjutnya, diberikan contoh G (*n; s_1, s_2*) dimana pemilihan *vertex* s_1 dan s_2 serta arah yang dibentuk keduanya berakibat G (*n; s_1, s_2*) mengandung *Hamilonian cycle*.

c. G (12; 1, 5)



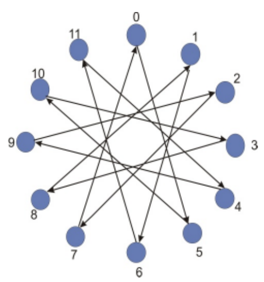
Gambar 3.7 *Double Loop Network* $G\ (12;1,5)$

Gambar 3.7 *Double Loop Network* $G\ (12;1,5)$ bentuk melingkar (*loop*) terdapat *n* = 12 yaitu *vertex* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dan 24 *edge*. Pemilihan $s_1 = 2$ yang memiliki arah *vertex* $i \rightarrow i + 2\ (mod\ 12)$ dan $s_2 = 5$ arah *vertex* $i \rightarrow i + 5\ (mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-0-1 berjumlah 12 *edge*.



Gambar 3.8 $G\ (12;1,5)$ dengan $s_1 = 1$ arah $i \rightarrow i + 1\ (mod\ 12)$

Gambar 3.8 *Double Loop Network* $G\ (12;1,5)$ dimana $s_2 = 5$ dan arah *vertex* $i \rightarrow i + 5(mod\ 12)$ menghasilkan lintasan *Hamiltonian cycle* yang dimulai dari *vertex* 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-0-1 dengan jumlah 12 *edge*.



Gambar 3.9 $G\ (12;1,5)$ dengan $s_2 = 5$ arah $i \rightarrow i + 5\ (mod\ 12)$

Gambar 3.9 merupakan subbagian dari $G\ (12;1,5)$ dengan *n* = 12 dari *vertex* 0,1, 2, 3, 4,5,6,7,8,9,10,11 dan Pemilihan $s_2 = 5$ arah *vertex* $i \rightarrow i + 5\ (mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* *vertex* 1-6-11-4-9-2-7-0-5-10-3-8-1 dengan jumlah 12 *edge*.

Dari ketiga contoh yang telah diberikan ada kondisi-kondisi yang dapat menyebabakan G (*n; s_1, s_2*) mengandung *Hamiltonian Cycle* . Berikut langkah untuk menentukan cycle di G (*n; s_1, s_2*).

Misal, C adalah *cycle* di G (*n; s_1, s_2*) dengan setiap *e* C , *edge* yang ada di C. Notasikan :

$$s = s_1 - s_2\ (\mathrm{mod}\ n)$$
$$d = gcd(n, s)$$
$$T_i = \{ j \mid 0 \le j < n \text{ dan } j = i\ (\mathrm{mod}\ d)\} \text{ untuk } 0 \le i < d$$
$$[m] = m\ (\mathrm{mod}\ d) \text{ untuk } 0 \le m < n$$

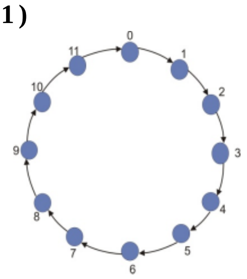
dapat diamati pada *vertex m* di $T_{[m]}$, untuk setiap T_i dimana $0 \le i < d$ bentuk partisi dari $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ dan setiap T_i terdiri dari n/d anggota.

Pada pembentukan *Hamiltonioan* ada 2 kasus yang akan ditemui yaitu:

Kasus 1: Untuk $s_1 = s_2(\mathrm{mod}\ n)$
Untuk *Double Loop Networks* G (*n; s_1, s_2*) dengan $s_1 = s_2(\mathrm{mod}\ n)$ jelas dapat disimpulkan G (*n; s_1, s_2*) *Hamiltonian* karena hal ini menunjukkan nilai s_1 **sama dengan** s_2 yang relatif prima dengan *n* sehingga gcd (*n*, s_1) = 1 dan gcd (*n*, s_2) = 1.

Berikut diberikan contoh *Double Loop Networks* G (*n; s_1, s_2*) untuk kasus 1 yaitu G(12; 1, 1) , G(12; 5, 5) , G (12; 7, 7) dan G(12;11,11) dengan *n* = 12 dan s_1=s_2={1, 5, 7, 11} merupakan himpunan bilangan relatif prima yang kurang dari 12.

1.a G **(12; 1, 1)**



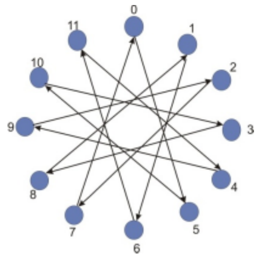
Gambar 3.10 $G\ (12;1,1)$ dengan $s_1 = s_2 = 1$ arah $i \rightarrow i + 1\ (mod\ 12)$

Double Loop Network $G\ (12;1,1)$ bentuk melingkar (*loop*) terdapat *n* = 12 yaitu *vertex*

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11. Pemilihan $s_1 = s_2 = 1$ yang memiliki arah *vertex* $i \to i + 1\,(mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-0-1 berjumlah 12 *edge*, dimana gcd (12, 1) = 1 , jadi $G\ (12; 1, 1)$ membentuk *Hamiltonian cycle.*

1.b G (12; 5, 5)

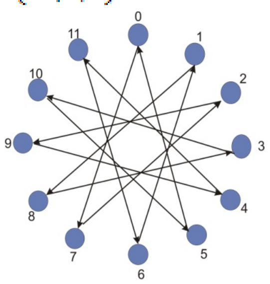
Pada *Double Loop Network* $G\ (12; 5, 5)$ terdapat *n* = 12 yaitu *vertex* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Pemilihan $s_1 = s_2 = 5$ yang memiliki arah *vertex* $i \to i + 5\,(mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* 1-6-11-4-9-2-7-0-5-10-3-8-1 berjumlah 12 *edge*. Karena gcd (12, 5) = 1, jadi $G\ (12; 1, 1)$ *Hamiltonian.*



Gambar 3.11 $G\ (12; 5, 5)$ dengan $s_1 = s_2 = 5$ arah $i \to i + 5\,(mod\ 12)$

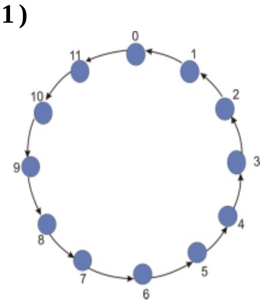
1.c G (12; 7, 7)

Pada *Double Loop Network* $G\ (12; 7, 7)$ terdapat *n*= 12 yaitu *vertex* 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11. Pemilihan $s_1 = s_2 = 7$ yang memiliki arah *vertex* $i \to i + 7\,(mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* 0-7-2-9-4-11-6-1-8-3-10-5-0 berjumlah 12 *edge*. Karena gcd (12, 7) = 1 , sehingga $G\ (12; 1, 1)$ *Hamiltonian*.



Gambar 3.12 $G\ (12; 7, 7)$ dengan $s_1 = s_2 = 7$ arah $i \to i + 7\,(mod\ 12)$

1.d G (12; 11, 11)



Gambar 3.13 $G\ (12; 11, 11)$ dengan $s_1 = s_2 = 11$ arah $i \to i + 11\,(mod\ 12)$

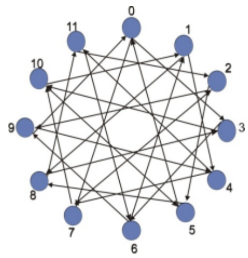
Pada Gambar 3.13 *Double Loop Network* $G\ (12; 11, 11)$ bentuk melingkar (*loop*) terdapat *n* = 12 yaitu *vertex* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Pemilihan $s_1 = s_2 = 11$ yang memiliki arah *vertex* $i \to i + 11\,(mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* 0-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1-0 berjumlah 12 *edge*. Karena gcd (12, 11) = 1, sehingga $G\ (12; 11, 11)$ membentuk *Hamiltonian*.

Dari Gambar 3.10−Gambar 3.13 bahwa *Double Loop Networks* G (*n; s_1, s_2*) yaitu G (12; 1, 1) , G (12; 5, 5) , G (12; 7, 7) dan G (12; 11, 11) mengandung *Hamiltonian cycle*. $G\ (12; 1, 1)$ saling berkebalikan arah atau disebut saling invers arah dengan G (12; 11, 11) dan G (12; 5, 5) berkebalikan arah dengan G (12; 7, 7).

Kasus 2: Untuk $s_1 \neq s_2\,(\bmod n)$

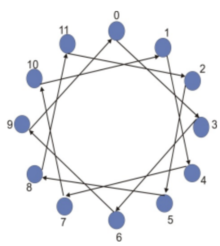
Untuk memudahkan memahami penyelesaian dari kasus ini dan juga pembentukkan *Hamiltonian cycle*. Berikut diberikan salah satu contoh dari *Double Loop Network* G (12; 3, 7), dengan: *n*=12, s_1=3, s_2=7 yang akan ditunjukkan pada langkah-langkah berikut ini:

Tahap 1: Gambarkan *Double Loop Network* G (12; 3, 7)



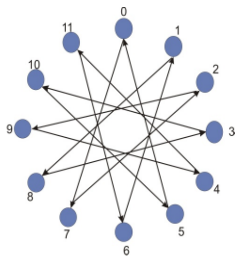
Gambar 3.14 *Double Loop Network* $G\ (12; 3, 7)$

Pada *Double Loop Network* $G\ (12; 3, 7)$ terdapat *n* = 12 yaitu *vertex* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dan 24 *edge*. Dimana $s_1 = 3$ arah *vertex* $i \to i + 3\,(mod\ 12)$ dimana ada 12 *edge* menghubungkan *vertex* 0-3-6-9-0, 1-4-7-10-1, dan 2-5-8-11-2 masing-masing sebanyak 4 *edge* akan berulang dengan arah yang sama di *vertex* 3, 4, 5, ..., 11 dan $s_2 = 7$ arah *vertex* $i \to i + 7\,(mod\ 12)$. 12 *edge* yang menghubungkan *vertex* 0-7-2-9-4-11-6-1-8-3-10-5-0.



Gambar 3.15 $G\ (12;3,7)$ dengan $s_1 = 3$ arah $i \rightarrow i + 3\ (mod\ 12)$

Pada Subbagian *Double Loop Networks* $G\ (12;3,7)$ berikut ini dengan $s_1 = 3$ arah *vertex* $i \rightarrow i + 3\ (mod\ 12)$ dapat dilihat pada Gambar 3.15 $G\ (12;1,3)$ menghasilkan arah dari *vertex* 0-3-6-9-0 , 1-4-7-10-1 dan 2-5-8-11-2 berjumlah 12 *edge*. Pada arah ini hanya terbentuk tiga *cycle* dengan urutan arah *vertex* yang disebutkan sebelumnya 0-3-6-9-0 , 1-4-7-10-1 dan 2-5-8-11-2 berakibat terputus dan *vertex* tidak saling terhubung. Sehinggga, tidak terbentuk *Hamiltonian cycle* karena tidak semua *vertex* dilewati oleh lintasan *Hamiltonian*. Pada Gambar 3.3 $G\ (12;3,7)$ dengan $s_1 = 3$ arah *vertex* $i \rightarrow i + 3\ (mod\ 12)$ bukan *Hamiltonian cycle*.



Gambar 3.16 $G\ (12;3,7)$ dengan $s_2 = 7$ arah $i \rightarrow i + 7\ (mod\ 12)$

Pada Subbagian *Double Loop Networks* $G\ (12;3,7)$ terdapat $n = 12$ yaitu *vertex* 0,1,2,3, 4,5,6,7,8,9,10,11.Pemilihan$s_2 = 7$ yang memiliki arah *vertex* $i \rightarrow i + 7\ (mod\ 12)$ mengandung *Hamiltonian cycle* dihasilkan arah dari *vertex* 0-7-2-9-4-11-6-1-8-3-10-5-0 berjumlah 12 *edge*. Selanjutnya, dicari nilai *d* (Panjang periodik) untuk membentuk *Hamiltonian cycle* lainnya pada $G\ (12;3,7)$.

Tahap 2 : Tentukan *d* (Panjang Periodik)

Diketahui :

$G\ (12;3,7)$; $n = 12$, $s_1 = 3$, dan $s_2 = 7$

$s = s_1 - s_2\ (\mathrm{mod}\ n)$ $\quad d = gcd(n, s)$

$s = 3 - 7\ (\mathrm{mod}\ 12)$ $\quad d = gcd(12,\ 8)$

$s = -4\ (\mathrm{mod}\ 12)$ $\quad d = 4$

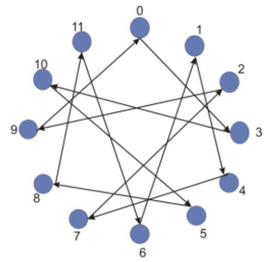
$s = 8$

Didapat nilai untuk (Panjang periodik) $d = 4$ menentukkan *Hamiltonian Cycle* lainnya pada $G\ (12;3,7)$.

Tahap 3 : Tentukan *Hamiltonian Cycle* di G (*n; s*$_1$*, s*$_2$)

Misal, C^* salah satu *Hamiltonian Cycle* yang dapat dibentuk di G (12; 3, 7). *Hamiltonian Cycle* ini memiliki lintasan yang panjang tiap *vertex* satu ke *vertex* lainnya berdasarkan dengan s_1= 3 dan , s_2= 7 sehingga didapat lintasan yang melewati *vertex* {0-3-10-5-8-11-6-1-4-7-2-9-0}.

Pembentukan ini ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 3.17 *Hamiltonian Cycle* di $G\ (12;3,7)$

Dari Gambar 3.17 terlihat pola yang dibentuk yaitu jarak/panjang periodiknya 3-link, 7-link, 7-link, dan 3-link dari satu *vertex* ke *vertex* lainnya secara berulang di C^*. Sehingga, setiap *edge* di C^*. dapat direpresentasikan dengan barisan periodik yang panjangnya 4$(= d)$ yaitu 3,7,7,3. Pada penelitian ini akan ditunjukkan setiap *Hamiltonian Cycle* dari G(*n; s*$_1$*, s*$_2$) memilki barisan periodik. Misal C^*.adalah *Hamiltonian Cycle* di G(*n; s*$_1$*, s*$_2$). Untuk setiap *vertex i* di G(*n; s*$_1$*, s*$_2$) dapat didefinisikan f_C dimana :

$$f_C(i) = \begin{cases} s_1 & ;\text{Jika } (i, i + s_1(mod\ n)) \in C \\ s_2 & ;\text{Selainnya} \end{cases} \qquad (4.1)$$

Lemma 1 (Hsu, L.H., and Lin, C.K. 2009)

Jika C^* *Hamiltonian Cycle* di *G* (*n; s*$_1$*, s*$_2$) $\forall\, j, k \in T_i$ adalah dua *vertex* di T_i, dengan $0 \le i < d$, maka $f_C(j) = f_C(k)$.[3]

Bukti :

Tanpa menghilangkan bentuk keumumannya. Diketahui bahwa C^* *Hamiltonian Cycle* di G (*n; s*$_1$*, s*$_2$).

Asumsikan,

$f_C(i) = s_1$;dimana $(i,\ i + s_1(mod\ n)) \in C$

Misalkan,$m = i + s\ (mod\ n)$; $s = s_1 - s_2$

$m = i + (s_1 - s_2)\ (mod\ n)$,

Dari persamaan (4.1), didapat $f_C(m) = s_2$ dengan $(m,\ m + s_2(mod\ n)) \in C$

sehingga, $f_C(m) - s_2$ memilki pasangan berurut $(m,\ i + s_1(mod\ n)) \in C$ semula *vertex* menuju di $(m,\ m + s_2(mod\ n)) \in C$. Hal ini berakibat, kedua *vertex i* dan *m* menuju ke arah *vertex* yang sama yaitu $i + s_1(mod\ n)$. Sehingga, pemisalan $f_C(m) = s_2$ salah. Kontradiksi dengan C *Hamiltonian Cycle* dengan demikian,

$$f_C(i) = f_C(m) = s_1$$

Akan ditunjukkan, $\forall\, k \in T_i$,

$k = i + ts \pmod n$, untuk beberapa bilangan bulat t yang memenuhi $f_C(k) = s_1$

Sebaliknya,

T_i dengan $0 \le i < d\}$.

Jadi, Jika C^* *Hamiltonian Cycle* di G (n; s_1, s_2) $\forall\, j,k \in T_i$ adalah dua *vertex* di T_i, dengan $0 \le i < d$, maka $f_C(j) = f_C(k)$. ■

Untuk sebarang *Hamiltonian cycle C*, didefinisikan suatu fungsi g_C dari {0,1,2,…,n − 1} ke $\{T_i \mid 0 \le i < d\}$ sebagai berikut:

$$g_C(m) = T_{[m+ f_C(m)]};\ m=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

Sehingga, $g_C(m)$ dinotasikan sebagai himpunan T_i yang *vertex* m di *C*.

Berdasarkan Lemma 1 maka dapat dibentuk:

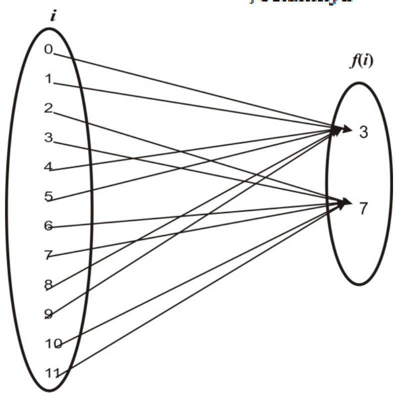
$$g_C(T_i) = T_{[i+ f_C(i)]};\ 0 \le i < d$$

Selanjutnya, Misalkan H adalah graf berarah atau *digraph* dengan himpunan *vertex* $\{T_i \mid 0 \le i < d\}$ dan himpunan *edges* $\{(T_i, g_C(T_i)) \mid T_i;\ 0 \le i < d\}$. Maka, H graf *Hamiltonian cycle*.

Berikut contoh penerapan Lemma 1:

Diberikan $G\,(12;3,7)$ dari gambar 4.14 bahwa *Hamiltonian Cycle* yang terbentuk melewati *vertex* 0-3-10-5-8-11-6-1-4-7-2-9-0 dengan barisan periodik yang panjangnya 4($= d$) yaitu 3,7,7,3.

$$f_C(i) = \begin{cases} 3 & ;\text{Jika } (i, i+3 \pmod{12}) \in C \\ 7 & ;\text{Selainnya} \end{cases}$$



Gambar 3.18 Pemetaan *vertex*- i ke $f(i)$ pada $G\,(12;3,7)$

Dihasilkan pemetaan yang terlihat pada Gambar 3.18 dimana,

$$f_C(i) = \begin{cases} 3 & ;\ i = \{0,1,4,5,8,9\} \\ 7 & ;\ i = \{2,3,6,7,10,11\} \end{cases}$$

Bentuk *Hamiltonian cycle* g_C dari m = {0,1,2,…,11} ke $\{T_i \mid 0 \le i < 4\}$ sebagai berikut:

$$g_C(m) = T_{[m+ f_C(m)]};\ m=\{0,1,2,\ldots,11\}$$

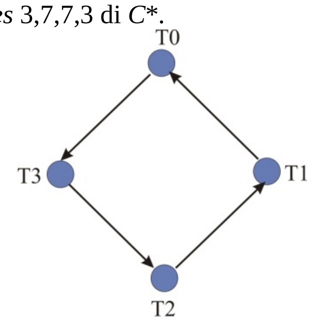
membentuk barisan periodik yang berulang dengan panjang 4($= d$) yaitu 3,7,7,3 di *C*.

Selanjutnya, $g_c(m)$ dinotasikan sebagai himpunan T_i dengan *vertex* m di *C*.

Berdasarkan Lemma 1 dapat dibentuk:

$g_c(T_i) = T_{[i+ f_C(i)]}$ dengan T_i ; i={1,2,3,4}

Dari contoh $G\,(12;3,7)$ didapat $g_{c*}(T_0) = T_3$, $g_{c*}(T_1) = T_0$, $g_{c*}(T_2) = T_1$, $g_{c*}(T_3) = T_2$ dan dapat dibentuk graf H = $\{(T_0,T_3),(T_3,T_2),(T_2,T_1),(T_1,T_0)\}$ yang korespondensi dengan barisan *edges* 3,7,7,3 di *C**.



Gambar 4.19 Graf H *Hamiltonian cycle*

Lemma 2(Hsu, L.H., and Lin, C.K. 2009)

Jika G (n; s_1, s_2) *Hamiltonian*, maka gcd (d,s_1) = 1 dan gcd (d,s_2) = 1.[3]

Bukti :

Diketahui G (n; s_1, s_2) mempunyai *Hamiltonian cycle* yaitu *C* akan ditunjukkan bahwa gcd (d,s_1) = 1 dan gcd (d,s_2) = 1.

Misalkan, r= gcd(d,s_1) jelas r merupakan gcd(d,s_2) di G (n; s_1, s_2) . karena *Hamiltonian cycle* dimana *edge* yang masuk tiap *vertex* tepat sekali dan semua *vertex* terhubung oleh *edge* serta berderajat dua .

Jika $r > 1$, Dari definisi yang menyatakan H adalah graf berarah atau *digraph* dengan himpunan *vertex* $\{T_i \mid 0 \le i < d\}$ dan himpunan *edges/link* $\{(T_i, g_c(T_i)) \mid T_i;\ 0 < i < d\}$. Maka, H graf *Hamiltonian cycle*. Sehingga, H graf *cycle* terhubung berarah. Namun, g_c memetakan himpunan $\{T_i \mid i \text{ kelipatan dari } r\}$ satu-satu/onto ke dirinya sendiri. Berakibat H menjadi graf yang tidak terhubung dan ini kontradiksi dengan *Hamiltonian*. Jadi, haruslah $r = 1$.

Jadi, Jika G (n; s_1, s_2) *Hamiltonian*, maka gcd (d,s_1) = 1 dan gcd (d,s_2) = 1 ■

Berikut contoh penerapan Lemma 2:

Dari contoh $G\,(12;3,7)$ sudah dibuktikan sebelumnya membentuk *Hamiltonian cycle* dengan n=12, s_1=3, s_2=7, dimana nilai:

$$\begin{aligned} s &= s_1 - s_2 \pmod n \\ &= 3 - 7 \pmod{12} \\ &= -4 \pmod{12} \\ &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d &= gcd(n,s) \\ d &= gcd(12,8) \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Maka, gcd (4,3) = 1 dan gcd (4,7) = 1.
Jadi, Jika G (12,3,7) *Hamiltonian*, maka gcd (4,3) = 1 dan gcd (4,7) = 1. ■

4. KESIMPULAN

Dari penelitian yang tel;ah dilakukan didapat pembentukan cycle dari dua sifat berikut:

1.) Jika *C Hamiltonian Cycle* di *G* (n; s_1, s_2) $\forall j, k \in T_i$ adalah dua *vertex* T_i. dengan $0 \leq i < d$.Maka, $f_C(j) = f_C(k)$.

2.) Jika *G* (n; s_1, s_2) *Hamiltonian*, maka gcd (d,s_1) = 1 dan gcd (d, s_2) = 1.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]Deo, N.1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc, New York.
[2]Hsu, L.H., and Lin, C.K. 2009. *Graph Theory and Interconnection Networks*. Taylor & Francis Group, LLC, New York.
[3]Lipschutz, S., and Lipson, M.L. 2002. *Matematika Diskrit jilid 2*. Diterjemahkan oleh Tim Editor Salemba Teknika. Salemba Teknika, Jakarta.
[4]Munir, R. 2010.*Matematik Diskrit Revisi Keempat.* Informatika Bandung, Bandung.
[5]Teng, Y.H., Tan, J.J.M., and Hsu, L.H. 2007. The Globally Bi-3*-Connected Property of The Honeycomb Rectangular Torus. *Information Sciences*, www.elsevier.com.
[7]Sung, T.Y., Lin, C.Y., and Hsu, L.H. 1998. Fault Tolerant Ring Embedding in Double Loop Networks. *Information Sciences*, www.elsevier.com.