

ISSN : 2337-9057



PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

**SEMINAR HASIL PENELITIAN
SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI
15 DESEMBER 2012**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012**



DAFTAR ISI

	Halaman
Kelompok Matematika	
PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID Anggun Novita Sari, Muslim Ansori dan Agus Sutrisno	1-6
Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 Anwar Sidik, Muslim Ansori dan Amanto	7-14
PENERAPAN GRAF DEBRUIJN PADA KONSTRUKSI GRAF EULERIAN Fazrie Mulia , Wamiliana , dan Fitriani	15-21
REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN Herlisa Anggraini , Muslim Ansori, Amanto	22-27
ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL) Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno	28-33
Algoritma Untuk Mencari Grup Automorfisma Pada Graf Circulant Vebriyan Agung , Ahmad Faisol, Amanto	34-37
KEISOMORFISMAAN GEOMETRI AFFIN Pratiwi Handayani, Muslim Ansori, Dorrah Aziz	38-41
METODE PENGUKURAN SUDUT MES SEBAGAI KEBIJAKAN PENENTUAN 1 SYAWAL Mardiyah Hayati , Tiryono, dan Dorrah	42-44
KE-ISOMORFISMAAN GEOMETRI INSIDENSI Marlina , Muslim Ansori dan Dorrah Aziz	45-47
TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN \mathbb{P} Nur Rohmah, Muslim Ansori dan Amanto	48-53
KAJIAN ANALITIK GEOMETRI PADA GERAK MEKANIK POLISI TIDUR (POLDUR) UNTUK PENGGERAK DINAMO Nurul Hidayah Marfiatin, Tiryono Ruby dan Agus Sutrisno	54-56
<i>INTEGRAL RIEMANN FUNGSI BERNILAI VEKTOR</i> Pita Rini, Dorrah Aziz, dan Amanto	57-63
ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF <i>WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS</i> DAN GRAF <i>CYCLIC-CUBES</i> Ririn Septiana, Wamiliana, dan Fitriani	64-71
Ring Armendariz Tri Handono, Ahmad Faisol dan Fitriani	72-77

PERKALIAN DAN AKAR KUADRAT UNTUK OPERATOR *SELF-ADJOINT* 78-81
Yuli Kartika, Muslim Ansori, Fitriani

Kelompok Statistika

APROKSIMASI DISTRIBUSI *T-STUDENT* TERHADAP *GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION* (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA 82-85
Eflin Marsinta Uli, Warsono, dan Widiarti

ANALISIS CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN NEW JERSEY 86-93
Eva fitrilia, Rudi Ruswandi, dan Widiarti

PENDEKATAN DISTRIBUSI GAMMA TERHADAP *GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION* (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA 94-97
Jihan Trimita Sari T, Warsono, dan Widiarti

PERBANDINGAN ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOM 98-103
Latusiania Oktamia, Netti Herawati, Eri Setiawan

PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM (*EXPECTATION MAXIMIZATION*) 104-109
Nurashri Partasiwi, Dian Kurniasari dan Widiarti

KAJIAN CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN METODE KANADA 110-115
RozaZelvia, Rudi Ruswandi dan Widiarti

ANALISIS KOMPONEN RAGAM DATA HILANG PADA RANCANGAN *CROSS-OVER* 116-121
Sorta Sundry H. S, Mustofa Usman dan Dian Kurniasari

PENDEKATAN DISTRIBUSI GOMPERTZ PADA CADANGAN ASURANSI JIWA UNTUK METODE ZILLMER DAN ILLINOIS 122-126
Mahfuz Hudori, Rudi Ruswandi dan Widiarti

KAJIAN RELATIF BIAS METODE *ONE-STAGE* DAN *TWO-STAGE CLUSTER SAMPLING* 127-130
Rohman, Dian Kurniasari dan Widiarti

PERBANDINGAN UJI HOMOGENITAS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOMV 131-136
Tika Wahyuni, Netti Herawati dan Eri Setiawan

PENDEKATAN DISTRIBUSI KHI-KUADRAT TERHADAP *GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION* (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA 137-140
Tiyas Yulita, Warsono dan Dian Kurniasari

Kelompok Kimia

TRANSESTERIFIKASI MINYAK SAWIT DENGAN METANOL DAN KATALIS HETEROGEN BERBASIS SILIKA SEKAM PADI (MgO-SiO_2) EviRawati Sijabat, Wasinton Simanjuntak dan Kamisah D. Pandiangan	141-147
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT (CaCO_3) DENGAN METODE <i>UNSEEDED EXPERIMENT</i> Miftasani Suharso dan Buhani	148-153
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING WULUH SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT (CaCO_3) DENGAN METODE <i>SEEDED EXPERIMENT</i> PutriFebriani Puspita Suharso dan Buhani	154-160
IDENTIFIKASI SENYAWA AKTIF DARI KULIT BUAH ASAM KERANJI (<i>Dalium indum</i>) SEBAGAI INHIBITORKOROSIBAJA LUNAK Dewi Kartika Sari, Ilim Wasinton dan Simanjuntak	161-168
TransesterifikasiMinyakSawitdenganMetanoldanKatalisHeterogenBerbasis SilikaSekamPadi($\text{TiO}_2/\text{SiO}_2$) Wanti Simanjuntak, Kamisah D. Pandiangan dan Wasinton Simanjuntak	169-175
UJI PENDAHULUAN HIDROLISIS ONGGOK UNTUK MENGHASILKAN GULA REDUKSI DENGAN BANTUAN ULTRASONIKASI SEBAGAI PRAPERLAKUAN Juwita Ratna Sari dan Wasinton Simanjuntak	176-182
STUDI FORMULASI PATI SORGUM-GELATIN DAN KONSENTRASI <i>PLASTICIZER</i> DALAM SINTESA BIOPLASTIK SERTA UJI <i>BIODEGRADABLE</i> DENGAN METODE FISIK Yesti Harryzona dan Yuli Darni	183-190

Kelompok Fisika

Pengaruh Variasi Suhu Pemanasan Dengan Pendinginan Secara Lambat Terhadap Uji <i>Bending</i> Dan Struktur Mikro Pada Baja Pegas Daun AISI 5140 Adelina S.E Sianturi, Ediman Ginting dan Pulung Karo-Karo	191-195
PengaruhKadar CaCO_3 terhadapPembentukanFaseBahanSuperkonduktorBSCCO-2212 denganDopingPb (BPSCCO-2212) Ameilda Larasati, Suprihatin dan Ediman GintingSuka	196-201
Variasi Kadar CaCO_3 dalamPembentukanFaseBahanSuperkonduktor BSCCO-2223 dengan Doping Pb (BPSCCO-2223) Fitri Afriani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	202-207
Sintesis Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 Tanpa Doping Pb Pada Berbagai Kadar CaCO_3 208-212 Heni Handayani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	
Pengaruh Variasi Waktu Penarikan dalam Pembuatan Lapisan Tipis TiO_2 dengan Metode Pelapisan Celup Dian Yulia Sari dan Posman Manurung	213-218

Pengaruh Suhu Sintering terhadap Karakteristik Struktur dan Mikrostruktur Komposit Aluminosilikat $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ Berbahan Dasar Silika Sekam Padi Fissilla Venia Wiranti dan Simon Sembiring	219-225
Sintesis dan Karakterisasi Titania Silika dengan Metode Sol Gel Revy Susi Maryanti dan Posman Manurung	226-230
Uji Fotokatalis Bahan TiO_2 yang ditambahkan dengan SiO_2 pada Zat Warna Metilen Biru Violina Sitorus dan Posman Manurung	231- 236
KARAKTERISTIK STRUKTUR DAN MIKROSTRUKTUR KOMPOSIT $\text{B}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ BERBASIS SILIKA SEKAM PADI DENGAN VARIASI SUHU KALSINASI Nur Hasanah, Suprihatin, dan Simon Sembiring	237-241
RANCANG BANGUN DAN ANALISIS ALAT UKUR MASSA JENIS ZAT CAIR BERBASIS MIKROKONTROLER AT Mega 8535 Prawoto, Arif Surtono, dan Gurum Ahmad Pauzi	242-247
ANALISIS BAWAH PERMUKAAN KELURAHAN TRIKORA KABUPATEN NGADA NTT MENGGUNAKAN METODE GPR (<i>Ground Penetrating Radar</i>) DAN GEOLISTRIK R. Wulandari, Rustadi dan A. Zaenudin	248-250
Analisis Fungsionalitas Na_2CO_3 Berbasis CO_2 Hasil Pembakaran Tempurung Kelapa Rizky Sastia Ningrum, Simon Sembiring dan Wasinton Simanjuntak	251-256

REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN

Herlisa Anggraini¹, Muslim Ansori², Amanto²

Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia¹

Dosen Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia²

ABSTRAK

Operator Hilbert-Schmidt merupakan operator terbatas pada ruang Hilbert, yaitu suatu ruang perkalian dalam yang lengkap (setiap barisan *Cauchy* didalamnya konvergen). Suatu operator linier $A: H \rightarrow H$ dinamakan operator Hilbert-Schmidt disingkat operator-HS jika terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga $\|A\|_{HS} = (\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Pendefinisian tersebut tidak bergantung pada pemilihan basis ortonormal di H . Pada penelitian kali ini, akan menunjukkan representasi operator Hilbert-Schmidt pada ruang barisan diperoleh dengan mengubah $A: H \rightarrow H$ menjadi $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$. Hasil penelitian dan pembahasan menunjukkan $\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_{n,j} |a_{jn}|^2$, sehingga A terdefinisi sebagai operator Hilbert-Schmidt.

Kata kunci: Operator Hilbert-Schmidt, ruang barisan.

1. Pendahuluan

Salah satu cabang ilmu dalam matematika adalah analisis fungsional. Dalam analisis fungsional ada banyak topik yang mengacu pada ruang, misal ruang Hilbert, dalam ruang Hilbert ada beberapa konsep dasar yang perlu diketahui terlebih dahulu yaitu ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach dan ruang *pre-Hilbert*. Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norma. Ruang bernorma yang sudah lazim dibicarakan yaitu ruang bernorma yang dilengkapi *inner product* (hasil kali dalam). Ruang hasil kali dalam yang bersifat lengkap disebut sebagai ruang Hilbert \mathcal{H} .

Pembicaraan di dalam analisis fungsional ini tidak terlepas dari teori operator. Operator yang dimaksud yaitu operator linier. Misalkan X dan Y masing – masing adalah ruang bernorm. Suatu pemetaan T yang mengaitkan setiap unsur pada domain $D(T) \in X$ dengan unsur tunggal

Seperti telah diketahui, teori operator muncul setelah dikenal adanya ruang vektor (ruang linier). Operator linier merupakan fungsi linier dari ruang linier ke ruang linier. Jenis operator yang banyak dikaji saat ini antara lain operator Hilbert-Schmidt. Operator ini banyak diterapkan ilmu fisika terutama yang

berkaitan dengan mekanika kuantum [1]. dan statistika yang terkait dengan reproducing kernel [5]. Melihat sifat dan aplikasinya maka peneliti tertarik untuk mengetahui representasi operator Hilbert-Schmidt pada ruang barisan.

2. Ruang vektor

Berikut akan diberikan beberapa definisi dan teorema dasar yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1. [3] Diketahui $(\mathcal{V}, +)$ grup komutatif dan $(\mathcal{F}, \oplus, \cdot)$ lapangan dengan elemen identitas 1. \mathcal{V} disebut ruang vektor (*vector space*) atas \mathcal{F} jika ada operasi luar $*$ antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{V}$ dan $\alpha \in \mathcal{F}$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x \in \mathcal{V}$ yang memenuhi sifat – sifat :

- (i) $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$,
- (ii) $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$,
- (iii) $(\alpha \cdot \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$,
- (iv) $1 * x = x$,

untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

$y \in Y$ disebut oper

Fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang banyak digunakan dan mudah dalam memahaminya adalah fungsi linear, yaitu fungsi yang bersifat aditif dan homogen.

Definisi 2.2. [3] Diberikan dua ruang vektor \mathcal{V} dan \mathcal{W} , masing – masing atas lapangan \mathcal{F} yang sama. Fungsi $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ disebut fungsi linear jika

- (i) f fungsi aditif (*additive*)
 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$, dan
- (ii) f fungsi homogen (*homogeneous*)
 $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk setiap α dan vektor $x \in \mathcal{V}$.

Definisi 2.3. [3] Suatu pemetaan T dengan daerah asal $\mathcal{D}(T)$ dan daerah hasil $\mathcal{R}(T)$ adalah suatu operator linear jika memenuhi:

1. $\mathcal{D}(T)$ dan $\mathcal{R}(T)$ berada pada ruang vektor atas lapangan yang sama.
2. Untuk semua $x, y \in \mathcal{D}(T)$ dan skalar α berlaku $T(x + y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Teorema 2.4. [3] Diketahui \mathcal{V} dan \mathcal{W} , masing – masing ruang vektor (atas lapangan yang sama), $\dim(\mathcal{V}) = n$ dan $\dim(\mathcal{W}) = m$. Setiap fungsi linear $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ menentukan matriks A berukuran $m \times n$:

$$A = (\beta_{ik}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

sebaliknya juga berlaku.

Definisi 2.5. [3] Diberikan ruang linier \mathcal{K} . Fungsi $x \in \mathcal{K} \mapsto \|x\| \in \mathcal{R}$, yang mempunyai sifat-sifat:

- a. $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{K}$ $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \theta$, (θ vektor nol)
- b. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, untuk setiap skalar α dan $x \in \mathcal{K}$
- c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{K}$,

disebut norma (*norm*) pada \mathcal{K} dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x . Ruang linear \mathcal{K} yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ atau \mathcal{K} saja asalkan normanya telah diketahui.

Definisi 2.6. [3] Ruang Banach (*Banach Space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap).

Definisi 2.7. [3] Ruang Hilbert (*Hilbert Space*) adalah ruang *pre*-Hilbert yang lengkap.

Definisi 2.8. [3] Diketahui \mathcal{H} ruang linier

- (i) Fungsi $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan rumus
 $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$

yang memenuhi sifat-sifat

- (I1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- (I2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
- (I3) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

Untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{H}$ dan skalar α ,
 (I4) $\langle x, x \rangle > 0$ jika dan hanya jika $x \neq \theta$ (θ vektor nol), disebut *inner-product* atau *dot product*, atau *scalar product* pada \mathcal{H} .

- (ii) Ruang linier \mathcal{H} yang dilengkapi dengan suatu *inner-product* disebut ruang *pre*-Hilbert (*pre-Hilbert space*) atau ruang *inner-product* (*inner-product space*)

3. Operator Hilbert Schmidt

Di dalam subbab ini dikonstruksikan apa yang disebut operator Hilbert-Schmidt dari ruang Hilbert H ke ruang Hilbert H . Ruang Hilbert H dimaksudkan sebagai ruang Hilbert yang mempunyai basis dan elemen-elemen di dalam H yang dinamakan vektor.

Ruang dual H atau H^* merupakan ruang H itu sendiri. Ruang H^* merupakan koleksi semua fungsional linier kontinu pada H . Untuk sebarang $x^* \in H^* = H$ dan $x \in H$, $x^*(x)$ selanjutnya ditulis (x, x^*) . Hal ini dimaksudkan agar mempermudah dalam penulisan dan penjelasan sifat – sifat pada ruang H .

Barisan vektor $\{e_n\} \subset H$ dinamakan basis pada H jika untuk setiap vektor $x \in H$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{\alpha_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Barisan $\{e_n^*\} \subset H$ dengan $\|e_n^*\| = 1$ untuk setiap n dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset H$ jika

$$(e_m, e_n^*) = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$.

Selanjutnya, pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ disebut sistem biortonormal pada H . Jika $\{e_n\}$ basis pada H , maka untuk setiap $x \in H$ ada barisan skalar $\{\alpha_n\}$ sehingga

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Oleh karena itu, jika pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ merupakan sistem biortonormal pada H , maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n^*) e_n$$

dengan $(x, e_n^*) = \alpha_n$. Misalkan H ruang Hilbert dengan norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ diberikan operator linier $A : H \rightarrow H$.

Teorema 3.1 Diberikan dua basis ortonormal $\{e_n\}$ dan $\{d_n\}$ pada H . Jika operator linier $A : H \rightarrow H$ maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(d_n)\|^2$$

Bukti:

Karena $\|A(e_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A(e_n), d_m \rangle|^2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A(e_n), d_m \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, A^*(d_m) \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, A^*(d_m) \rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m)\|^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Persamaan di atas berlaku untuk sebarang $\{e_n\}$ dan $\{d_n\}$. Jadi, jika diambil $d_m = e_m$ maka untuk sebarang basis ortonormal $\{d_n\}$ berlaku juga

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|A(d_m)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m)\|^2 \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m)\|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \|A(d_m)\|^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat-sifat di atas selanjutnya didefinisikan pengertian operator Hilbert-Schmidt sebagai berikut.

Definisi 3.2 Suatu operator linier $A : H \rightarrow H$ dinamakan operator Hilbert-Schmidt disingkat operator-HS jika terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Berdasarkan uraian sebelumnya pendefinisian tersebut tidak bergantung pada pemilihan basis ortonormal di H .

Selanjutnya, notasi $\pi(H, H)$ menyatakan koleksi semua operator-HS dari H ke H . Berdasarkan Definisi 3.2 didapatkan beberapa teorema berikut ini

Teorema 3.3. Jika operator linier $A \in \pi(H, H)$ dan A^* operator pendamping A maka

$$\|A^*\|_{\pi} = \|A\|_{\pi}$$

Bukti: Sudah dibuktikan pada Teorema 3.1

Teorema 3.4. Jika operator linier $A \in \pi(H, H)$ dan α skalar maka $\|\alpha A\|_{\pi} = |\alpha| \|A\|_{\pi}$; α skalar

Bukti:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha A(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle \alpha A e_n, d_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha|^2 |\langle A e_n, d_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A e_n, d_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \|A\|_{\pi} \end{aligned}$$

Teorema 3.5. Jika $A, B \in \pi(H, H)$ maka berlaku

$$\|A + B\|_{\pi} \leq \|A\|_{\pi} + \|B\|_{\pi}$$

Bukti:

Diketahui $A, B \in \pi(H, H)$ operator H , maka terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga

$$\|A\|_{\pi} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

dan

$$\|B\|_{\pi} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|B(e_n)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Selanjutnya akan ditentukan

$$\begin{aligned} \|A + B\|_{\pi} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|(A + B)(e_n)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|(A(e_n) + B(e_n))\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dengan ketidaksamaan segitiga Minkowski diperoleh

$$\begin{aligned} &\leq \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|_H + \|B(e_n)\|_H \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|B(e_n)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|A\|_{\pi} + \|B\|_{\pi} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.6. Jika $A \in \pi(H, H)$ maka berlaku $\|A\| \leq \|A\|_{\pi}$

Bukti:

Karena $A \in \pi(H, H)$ maka

$$\begin{aligned} \|A(e_n)\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |A(e_n), e_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \|e_n\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \end{aligned}$$

atau

$$\|A\| \leq \|A\|_{\pi} \quad \blacksquare$$

4. Representasi Operator Hilbert Schmidt pada Ruang Barisan

Koleksi semua barisan bilangan dinotasikan dengan S ;

$$S = \{ \tilde{x} = \{x_k\} : x_k \in \mathbb{C} \}$$

Agar pembicaraan tentang barisan bilangan lebih terarah, maka diadakan skala pada S . Penskalaan pada S yang banyak dipakai adalah dengan cara dibawah ini. Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p \leq \infty$ dibentuk himpunan di dalam S sebagai berikut:

$$\ell^p = \left\{ \tilde{x} = \{x_k\} \in S : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

Perlu diingat bahwa S , yaitu koleksi semua barisan bilangan, merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Selanjutnya akan ditunjukkan representasi operator Hilbert Schmidt pada ruang barisan.

Ruang ℓ^2 merupakan koleksi barisan bilangan $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

Perkalian dalam atau *inner product* pada ℓ^2 didefinisikan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \langle e_k, e_n \rangle = a_{jn} \langle e_n, e_n \rangle$$

untuk setiap $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Misalkan

$$A: \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad \ell^2 = \{ \bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} x_k \\ \dots \end{bmatrix}$$

Maka

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} x_k \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x_k \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} x_k \right|^2 + \dots$$

Jadi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k \right|^2 < \infty$$

Teorema 4.2. Diberikan : $\ell^2 \rightarrow \ell^2$, Jika $\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 = C^2 < \infty$, maka operator A terdefinisi sebagai operator Hilbert-Schmidt, dan $\|A\| = C$.

Bukti

Untuk basis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \langle A, A \rangle \sum_n \|Ae_n\|^2 \\ &= \sum_n \left\| \sum_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \langle e_k, e_n \rangle e'_j \right) \right\|^2 \\ &= \sum_{n,j} |a_{jn}|^2 \\ &= C^2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, A adalah operator Hilbert Schmidt. Karena A rapat dan terbatas, diperoleh $D(A) = \overline{D(A)} = \ell^2$ dan jadi $A \in B(\ell^2, \ell^2)$. Karena itu A adalah sebuah operator Hilbert Schmidt, dan $\|A\| = C$. ■

Contoh 1

Jika $a_{jk} = b_{jk} c_{jk}$; maka

$$\sum_k |b_{jk}|^2 = C_1^2 < \infty \quad \text{untuk setiap } j \in \mathbb{N}$$

$$\sum_j |c_{jk}|^2 = C_2^2 < \infty \quad \text{untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

Maka operator A dari $B(\ell^2, \ell^2)$ dan $\|A\| \leq C_1 C_2$.

Bukti:

Untuk setiap $f \in \ell^2$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_j \left| \sum_k a_{jk} \langle e_k, f \rangle \right|^2 &= \sum_j \left| \sum_k b_{jk} c_{jk} \langle e_k, f \rangle \right|^2 \\ &\leq \sum_j \left\{ \sum_k |b_{jk}|^2 \sum_k |c_{jk} \langle e_k, f \rangle|^2 \right\} \\ &\leq C_1^2 \sum_{j,k} |c_{jk}|^2 |\langle e_k, f \rangle|^2 \\ &\leq C_1^2 C_2^2 \sum_k |\langle e_k, f \rangle|^2 \\ &= C_1^2 C_2^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\ell^2 = D(A)$ dan $\|Af\| \leq C_1 C_2 \|f\|$ untuk setiap $f \in D(A) = \ell^2$. ■

Contoh 2

Matriks

$$a_{jk} = \begin{cases} j^{-1} & \text{untuk } k \leq j \\ 0 & \text{untuk } k > j \end{cases}$$

Diberikan A operator terbatas dan diperoleh $\|A\| \leq \sqrt{6}$.

Bukti

Misalkan diambil $b_{jk} = c_{jk} = 0$ untuk $j < k$ dan untuk $k \leq j$

$$b_{jk} = j^{-\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{4}}, \quad c_{jk} = j^{-\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_k |b_{jk}|^2 &= \sum_k \left| j^{-\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{4}} \right|^2 = j^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^j k^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq j^{-\frac{1}{2}} \int_0^j x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= j^{-\frac{1}{2}} [2\sqrt{x}]_0^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j^{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{j} - 2\sqrt{0}) \\
&= j^{-\frac{1}{2}}(2\sqrt{j}) \\
&= \frac{2\sqrt{j}}{\sqrt{j}} = 2
\end{aligned}$$

$$\sum_k |b_{jk}|^2 \leq 2$$

Dan

$$\begin{aligned}
\sum_j |c_{jk}|^2 &= \sum_j \left| j^{-\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{4}} \right|^2 = k^{\frac{1}{2}} \sum_{j=k}^{\infty} j^{-\frac{3}{2}} \\
&\leq k^{\frac{1}{2}} \left\{ k^{-\frac{3}{2}} + \int_k^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx \right\} \\
&= k^{\frac{1}{2}} \left\{ k^{-\frac{3}{2}} + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_k^t x^{-\frac{3}{2}} dx \right\} \\
&= k^{\frac{1}{2}} \left\{ k^{-\frac{3}{2}} + (-2) \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_k^t \right\} \\
&= k^{\frac{1}{2}} \left\{ k^{-\frac{3}{2}} + (-2) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} + 2k^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
&= k^{\frac{1}{2}} \left\{ k^{-\frac{3}{2}} + 0 + 2k^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
&= k^{-\frac{2}{2}} + 2k^0 \\
&= k^{-1} + 2 \leq 3
\end{aligned}$$

$$\sum_j |c_{jk}|^2 \leq 3$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $j \in \mathbb{N}$. Maka diperoleh $C_1 \leq \sqrt{2}$ dan $C_2 \leq \sqrt{3}$. Jadi $\|A\| \leq \sqrt{6}$. ■

5. Kesimpulan

Representasi operator Hilbert-Schmidt pada ruang barisan diperoleh dengan mengubah $A: H \rightarrow H$ menjadi $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, dengan $\ell^2 = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in S: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \langle e_k, e_n \rangle = a_{jn}$ diperoleh

$$\|A\|^2 = \sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_{n,j} |a_{jn}|^2$$

sehingga A terdefinisi sebagai operator Hilbert-Schmidt.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Berkema. 2003. *Positive Operator Valued Measures and Phase-Space Representasion*. Thesis. Technische Universiteit Eindhoven.
- [2] Darmawijaya, Soeparna. 2006. *Pengantar Analisis Real*. UGM. Yogyakarta.
- [3] Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. UGM. Yogyakarta
- [4] Kreyszig, Erwin. 1989. *Introductory Funtional Analysis with Aplications*. John wiley and Sons. New York.
- [5] Vito. 2005. *Learning from Examples as Inverse Problem Journal of Machines Learning Research*. 6. 883-904.