ISSN : 2337-9057

PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

SEMINAR HASIL PENELITIAN

SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

2012

DAFTAR ISI

Kelompok Statistika

Kelompok Kimia

KelompokFisika

REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN

Herlisa Anggraini[1], Muslim Ansori[2], Amanto[2]

Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia[1]
Dosen Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia[2]

ABSTRAK

Operator Hilbert-Schmidt merupakan operator terbatas pada ruang Hilbert, yaitu suatu ruang perkalian dalam yang lengkap (setiap barisan *Cauchy* didalamnya konvergen). Suatu operator linier $A: H \to H$ dinamakan operator Hilbert-Schmidt disingkat operator-HS jika terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga $\|A\|_{HS} = (\sum_{n=1}^{\infty}\|A(e_n)\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$. Pendefinisian tersebut tidak bergantung pada pemilihan basis ortonormal di H. Pada penelitian kali ini, akan menunjukkan representasi operator Hilbert-Schmidt pada ruang barisan diperoleh dengan mengubah $A: H \to H$ menjadi $A: \ell^2 \to \ell^2$. Hasil penelitian dan pembahasan menunjukkan $\sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_{n,j} |a_{jn}|^2$, sehingga A terdefinisi sebagai operator Hilbert-Schmidt.
Kata kunci: Operator Hilbert-Schmidt, ruang barisan.

1. Pendahuluan

Salah satu cabang ilmu dalam matematika adalah analisis fungsional. Dalam analisis fungsional ada banyak topik yang mengacu pada ruang, misal ruang Hilbert, dalam ruang Hilbert ada beberapa konsep dasar yang perlu diketahui terlebih dahulu yaitu ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach dan ruang *pre-Hilbert*. Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norma. Ruang bernorma yang sudah lazim dibicarakan yaitu ruang bernorma yang dilengkapi *inner product* (hasil kali dalam). Ruang hasil kali dalam yang bersifat lengkap disebut sebagai ruang Hilbert $\mathcal{H}$.

Pembicaraan di dalam analisis fungsional ini tidak terlepas dari teori operator. Operator yang dimaksud yaitu operator linier. Misalkan *X* dan Y masing – masing adalah ruang bernorm. Suatu pemetaan T yang mengaitkan setiap unsur pada domain *D*(*T*) ∈ *X* dengan unsur tunggal

Seperti telah diketahui, teori operator muncul setelah dikenal adanya ruang vektor (ruang linier). Operator linier merupakan fungsi linier dari ruang linier ke ruang linier. Jenis operator yang banyak dikaji saat ini antara lain operator Hilbert-Schmidt. Operator ini banyak diterapkan ilmu fisika terutama yang berkaitan dengan mekanika kuantum [1]. dan statistika yang terkait dengan reproducing kernel [5]. Melihat sifat dan aplikasinya maka peneliti tertarik untuk mengetahui representasi operator Hilbert-Schmidt pada ruang barisan.

2. Ruang vektor

Berikut akan diberikan beberapa definisi dan teorema dasar yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1. [3] Diketahui $(\mathcal{V}, +)$ grup komutatif dan $(\mathcal{F}, \oplus, .)$ lapangan dengan elemen identitas 1. $\mathcal{V}$ disebut ruang vektor (*vector space*) atas $\mathcal{F}$ jika ada operasi luar * antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{V}$dan $\alpha \in \mathcal{F}$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x \in \mathcal{V}$ yang memenuhi sifat – sifat :

(i) $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$,
(ii) $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$,
(iii) $(\alpha . \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$,
(iv) $1 * x = x$,

untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$ dan $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$. *y* ∈ *Y* *d*isebut opera

Fungsi dari suatu ruang vektor ke ruang vektor lain yang banyak digunakan dan mudah dalam memahaminya adalah fungsi linear, yaitu fungsi yang bersifat aditif dan homogen.

Definisi 2.2. [3] Diberikan dua ruang vektor $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing atas lapangan $\mathcal{F}$ yang sama. Fungsi $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ disebut fungsi linear jika

(i) f fungsi aditif (*additive*) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathcal{V}$, dan

(ii) f fungsi homogen (*homogeneous*) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ untuk setiap α dan vektor $x \in \mathcal{V}$.

Definisi 2.3. [3] Suatu pemetaan T dengan daerah asal $\mathfrak{D}(T)$ dan daerah hasil $\mathfrak{R}(T)$ adalah suatu operator linear jika memenuhi:

1. $\mathfrak{D}(T)$ dan $\mathfrak{R}(T)$ berada pada ruang vektor atas lapangan yang sama.
2. Untuk semua $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ dan skalar α berlaku $T(x+y) = T(x) + T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Teorema 2.4. [3] Diketahui $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{W}$, masing – masing ruang vektor (atas lapangan yang sama), $\dim(\mathcal{V}) = n$ dan $\dim(\mathcal{W}) = m$. Setiap fungsi linear $f: \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ menentukan matriks *A* berukuran $m \times n$:

$$A = (\beta_{ik}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

sebaliknya juga berlaku.

Definisi 2.5. [3] Diberikan ruang linier $\mathcal{K}$. Fungsi $x \in \mathcal{K} \mapsto \|x\| \in \mathcal{R}$, yang mempunyai sifat-sifat:

a. $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{K}$ $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \boldsymbol{\theta}$, ($\boldsymbol{\theta}$ vektor nol)

b. $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$, untuk setiap skalar α dan $x \in \mathcal{K}$

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{K}$,

disebut norma (*norm*) pada $\mathcal{K}$ dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear $\mathcal{K}$ yang dilengkapi dengan suatu norma $\|.\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $(\mathcal{K}, \|.\|)$ atau $\mathcal{K}$ saja asalkan normanya telah diketahui.

Definisi 2.6. [3] Ruang Banach (*Banach Space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap).

Definisi 2.7. [3] Ruang Hilbert (*Hilbert Space*) adalah ruang *pre*-Hilbert yang lengkap.

Definisi 2.8. [3] Diketahui $\mathcal{H}$ ruang linier

(i) Fungsi $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dengan rumus
$$(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$$
yang memenuhi sifat-sifat
(I1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
(I2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
(I3) $\langle x, y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
Untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{H}$ dan skalar α,
(I4) $\langle x, x \rangle > 0$ jika dan hanya jika $x \neq \boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta}$ vektor nol), disebut *inner-product* atau *dot product*, atau *scalar product* pada $\mathcal{H}$.

(ii) Ruang linier $\mathcal{H}$ yang dilengkapi dengan suatu *inner-product* disebut ruang *pre*-Hilbert *(pre-Hilbert space)* atau ruang *inner-product (inner-product space)*

3. Operator Hilbert Schmidt

Di dalam subbab ini dikonstruksikan apa yang disebut operator Hilbert-Schmidt dari ruang Hilbert H ke ruang Hilbert H. Ruang Hilbert *H* dimaksudkan sebagai ruang Hilbert yang mempunyai basis dan elemen-elemen di dalam H yang dinamakan vektor.

Ruang dual H atau H^* merupakan ruang H itu sendiri. Ruang H^* merupakan koleksi semua fungsional linier kontinu pada H. Untuk sebarang $x^* \in H^* = H$ dan $x \in H$, $x^*(x)$ selanjutnya ditulis (x, x^*). Hal ini dimaksudkan agar mempermudah dalam penulisan dan penjelasan sifat – sifat pada ruang *H*.

Barisan vektor $\{e_n\} \subset H$ dinamakan basis pada H jika untuk setiap vektor $x \in H$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{\alpha_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Barisan $\{e_n{}^*\} \subset H$ dengan $\|e_n{}^*\| = 1$ untuk setiap *n* dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset H$ jika

$$(e_m, e_n{}^*) = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$.

Selanjutnya, pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n{}^*\}\}$ disebut sistem biortonormal pada *H*. Jika $\{e_n\}$ basis pada *H*, maka untuk setiap $x \in H$ ada barisan skalar $\{\alpha_n\}$ sehingga

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Oleh karena itu, jika pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ merupakan sistem biortonormal pada *H*, maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n^*) e_n$$

dengan $(x, e_n^*) = \alpha_n$. Misalkan H ruang Hilbert dengan norma $\|.\| = \sqrt{<\cdot,\cdot>}$ diberikan operator linier $\mathrm{A} : H \to H$.

Teorema 3.1 Diberikan dua basis ortonormal $\{e_n\}$ dan $\{d_n\}$ pada *H*. Jika operator linier $\mathrm{A} : H \to H$ maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(d_n)\|^2$$

Bukti:

Karena $\|A(e_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A(e_n), d_m \rangle|^2$, maka diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A(e_n), d_m \rangle|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, A^*(d_m) \rangle|^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, A^*(d_m) \rangle|^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \|\langle A^*(d_m) \rangle\|^2 \qquad (3.1)$$

Persamaan di atas berlaku untuk sebarang $\{e_n\}$ dan $\{d_n\}$. Jadi, jika diambil $d_m = e_m$ maka untuk sebarang basis ortonormal $\{d_n\}$ berlaku juga

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\langle A(d_m) \rangle\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|\langle A^*(d_m) \rangle\|^2 \qquad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|\langle A^*(d_m) \rangle\|^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \|\langle A(d_m) \rangle\|^2$$

Berdasarkan sifat-sifat di atas selanjutnya didefinisikan pengertian operator Hilbert-Schmidt sebagai berikut.

Definisi 3.2 Suatu operator linier $A: H \to H$ dinamakan operator Hilbert-Schmidt disingkat operator-HS jika terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga

$$\|A\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Berdasarkan uraian sebelumnya pendefinisian tersebut tidak bergantung pada pemilihan basis ortonormal di H.

Selanjutnya, notasi $\pi(H, H)$ menyatakan koleksi semua operator-HS dari H ke H. Berdasarkan Definisi 3.2 didapatkan beberapa teorema berikut ini

Teorema 3.3. Jika operator linier $A \in \pi(H, H)$ dan A^* operator pendamping *A* maka

$$\|A^*\|_\pi = \|A\|_\pi$$

Bukti: Sudah dibuktikan pada Teorema 3.1

Teorema 3.4. Jika operator linier $A \in \pi(H, H)$ dan α skalar maka$\|\alpha A\|_\pi = |\alpha| \|A\|_\pi$; α skalar

Bukti:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha A(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle \alpha A e_n, d_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha|^2 |\langle A e_n, d_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle A e_n, d_m \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \|A\|_\pi$$

Teorema 3.5. Jika $A, B \in \pi\,(H, H)$ maka berlaku

$$\|A + B\|_\pi \leq \|A\|_\pi + \|B\|_\pi$$

Bukti:

Diketahui $A, B \in \pi\,(H, H)$ operator H, maka terdapat basis ortonormal $\{e_n\}$ pada H sehingga

$$\|A\|_\pi = \left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

dan

$$\|B\|_\pi = \left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \|B(e_n)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Selanjutnya akan ditentukan

$$\|A + B\|_\pi = \left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \|(A + B)(e_n)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \|(A(e_n) + B(e_n)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan ketidaksamaan segitiga Minkowski diperoleh

$$\leq ((\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|_H + \|B(e_n)\|_H)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (\textstyle\sum \|A(e_n)\|_H^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum \|B(e_n)\|_H^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|A\|_\pi + \|B\|_\pi \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.6. Jika $A \in \pi\,(H, H)$ maka berlaku $\|A\| \leq \|A\|_\pi$

Bukti:

Karena $A \in \pi\,(H, H)$ maka

$$\|A(e_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |A(e_n), e_n|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \|e_n\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2$$

atau

$$\|A\| \leq \|A\|_\pi \qquad \blacksquare$$

4. Representasi Operator Hilbert Schmidt pada Ruang Barisan

Koleksi semua barisan bilangan dinotasikan dengan *S*;

$$S = \{\tilde{x} = \{x_k\} : x_k \in \mathbb{C}\}$$

Agar pembicaraan tentang barisan bilangan lebih terarah, maka diadakan skala pada S. Penskalaan pada S yang banyak dipakai adalah dengan cara dibawah ini. Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p \leq \infty$ dibentuk himpunan di dalam S sebagai berikut:

$$\ell^p = \left\{\tilde{x} = \{x_k\} \in S : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}.$$

Perlu diingat bahwa S, yaitu koleksi semua barisan bilangan, merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan dan perkalian scalar. Selanjutnya akan ditunjukkan representasi operator Hilbert Schmidt pada ruang barisan.

Ruang ℓ^2 merupakan koleksi barisan bilangan $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

Perkalian dalam atau *inner product* pada ℓ^2 didefinisikan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \langle e_k , e_n \rangle = a_{jn} \langle e_n , e_n \rangle$$

untuk setiap $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Misalkan

$A : \ell^2 \to \ell^2$,
$\ell^2 = \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}x_k \\ \cdots \end{bmatrix}$$

Maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}x_k\right|^2 + \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x_k\right|^2 + \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}x_k\right|^2 + \cdots$$

Jadi

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k\right|^2 < \infty$$

Teorema 4.2. Diberikan $:\ell^2 \to \ell^2$, Jika $\sum_{j,k}^{\infty}|a_{jk}|^2 = C^2 < \infty$, maka operator A terdefinisi sebagai operator Hilbert-Schmidt, dan $|\|A\|| = C$.

Bukti

Untuk basis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ diperoleh

$$\|A\|^2 = \langle A, A\rangle \sum_n \|Ae_n\|^2$$

$$= \sum_n \left\|\sum_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\langle e_k, e_n\rangle\, e'_j\right)\right\|^2$$

$$= \sum_{n,j} |a_{jn}|^2$$

$$= C^2$$

Oleh karena itu, A adalah operator Hilbert Schmidt. Karena A rapat dan terbatas, diperoleh $D(A) = \overline{D(A)} = \ell^2$ dan jadi $A \in B(\ell^2, \ell^2)$. Karena itu A adalah sebuah operator Hilbert Schmidt, dan $|\|A\|| = C$. ∎

Contoh 1

Jika $a_{jk} = b_{jk}c_{jk}$; maka

$$\sum_k |b_{jk}|^2 = C_1^2 < \infty \qquad \text{untuk setiap } j \in \mathbb{N}$$

$$\sum_j |c_{jk}|^2 = C_2^2 < \infty \qquad \text{untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

Maka operator A dari $B(\ell^2, \ell^2)$ dan $\|A\| \le C_1C_2$.

Bukti:

Untuk setiap $f \in \ell^2$ diperoleh

$$\sum_j \left|\sum_k a_{jk}\langle e_k, f\rangle\right|^2 = \sum_j \left|\sum_k b_{jk}c_{jk}\langle e_k, f\rangle\right|^2$$

$$\le \sum_j \left\{\sum_k |b_{jk}|^2 \sum_k |c_{jk}\langle e_k, f\rangle|^2\right\}$$

$$\le C_1^2 \sum_{j,k} |c_{jk}|^2 |\langle e_k, f\rangle|^2$$

$$\le C_1^2 C_2^2 \sum_k |\langle e_k, f\rangle|^2$$

$$= C_1^2 C_2^2 \|f\|^2.$$

Oleh karena itu, $\ell^2 = D(A)$ dan $\|Af\| \le C_1C_2$ $\|f\|$ untuk setiap $f \in D(A) = \ell^2$. ∎

Contoh 2

Matriks

$$a_{jk} = \begin{cases} j^{-1} & \text{untuk } k \le j \\ 0 & \text{untuk } k > j \end{cases}$$

Diberikan A operator terbatas dan diperoleh $\|A\| \le \sqrt{6}$.

Bukti

Misalkan diambil $b_{jk} = c_{jk} = 0$ untuk $j < k$ dan untuk $k \le j$

$$b_{jk} = j^{\frac{-1}{4}} k^{\frac{-1}{4}} \ , \qquad c_{jk} = j^{\frac{-3}{4}} k^{\frac{1}{4}}$$

Maka diperoleh

$$\sum_k |b_{jk}|^2 = \sum_k \left|j^{\frac{-1}{4}} k^{\frac{-1}{4}}\right|^2 = j^{\frac{-1}{2}} \sum_{k=1}^{j} k^{-\frac{1}{2}}$$

$$\le j^{\frac{-1}{2}} \int_0^j x^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= j^{\frac{-1}{2}} \left[2\sqrt{x}\right]_0^j$$

$$= j^{\frac{-1}{2}}\left(2\sqrt{j} - 2\sqrt{0}\right)$$

$$= j^{\frac{-1}{2}}(2\sqrt{j})$$

$$= \frac{2\sqrt{j}}{\sqrt{j}} = 2$$

$$\sum_k \left|b_{jk}\right|^2 \leq 2$$

Dan

$$\sum_j \left|c_{jk}\right|^2 = \sum_j \left|j^{\frac{-3}{4}} k^{\frac{1}{4}}\right|^2 = k^{\frac{1}{2}} \sum_{j=k}^{\infty} j^{\frac{-3}{2}}$$

$$\leq k^{\frac{1}{2}}\left\{k^{\frac{-3}{2}} + \int_k^{\infty} x^{\frac{-3}{2}} dx\right\}$$

$$= k^{\frac{1}{2}}\left\{k^{\frac{-3}{2}} + \lim_{t\to\infty}\int_k^{\infty} x^{\frac{-3}{2}} dx\right\}$$

$$= k^{\frac{1}{2}}\left\{k^{\frac{-3}{2}} + (-2)\left[\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_k^t\right\}$$

$$= k^{\frac{1}{2}}\left\{k^{\frac{-3}{2}} + (-2)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}} + 2k^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= k^{\frac{1}{2}}\left\{k^{\frac{-3}{2}} + 0 + 2k^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= k^{\frac{-2}{2}} + 2k^0$$

$$= k^{-1} + 2 \leq 3$$

$$\sum_j \left|c_{jk}\right|^2 \leq 3$$

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $j \in \mathbb{N}$. Maka diperoleh $C_1 \leq \sqrt{2}$ dan $C_2 \leq \sqrt{3}$. Jadi $\|A\| \leq \sqrt{6}$. ■

5. Kesimpulan

Representasi operator Hilbert-Schmidt pada ruang barisan diperoleh dengan mengubah $A: H \to H$ menjadi $A: \ell^2 \to \ell^2$, dengan $\ell^2 = \left\{\tilde{x} = \{x_k\} \in S: \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 < \infty\right\}$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\langle e_k, e_n\rangle = a_{jn}$ diperoleh

$$\|A\|^2 = \sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_{n,j}\left|a_{jn}\right|^2$$

sehingga A terdefinisi sebagai operator Hilbert-Schmidt.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Berkema. 2003. *Positive Operator Valued Measures and Phase-Space Representasion*. Thesis. Technische Universiteit Eindhoven.

[2] Darmawijaya, Soeparna. 2006. *Pengantar Analisis Real*. UGM. Yogyakarta.

[3] Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. UGM. Yogyakarta

[4] Kreyszig, Erwin. 1989. *Introductory Funtional Analysis with Aplications*. John wiley and Sons. New York.

[5] Vito. 2005. *Learning from Examples as Inverse Problem Journal of Machines Learning Research.* 6. 883-904.