Aplikasi Homotopy Analysis Method (HAM) pada PDB Sederhana

Dorrah Azis
Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

Abstrak

Ide dasar teknik analitik HAM didasarkan pada deret Taylor. Validitas HAM tidak bergantung pada ada tidaknya parameter kecil pada persamaan diferensial taklinear. Karena itu teknik analitik ini lebih baik bila digunakan untuk menyelesaikan masalah–masalah tak linear.

Keywords: HAM, PDB taklinear, parameter kecil, deret Taylor.

PENDAHULUAN

Meskipun perkembangan komputer digital membuat penyelesaian numeric masalah taklinear makin mudah, namun masih sulit untuk memberikan aproksimasi analitik. Saat ini kebanyakan teknik analitik taklinear adalah tak memuaskan. Contohnya, meskipun teknik perturbasi telah banyak diterapkan untuk menganalisis masalah taklinear dalam sains dan rekayasa, semuanya sangat bergantung kepada parameter kecil yang muncul dalam persamaan yang akan diselesaikan yang dibatasi hanya untuk masalah taklinear sederhana. Untuk masalah taklinear yang runit, yang tidak memuat parameter kecil, teknik perturbasi adalah tak valid. Jadi tampak perlu memperkenalkan sebuah teknik analisis baru yang bebas dari parameter kecil ini.

TINJAUAN PUSTAKA

Liao [1] telah membuat penemuan baru terkalit masalah ini. Ia mengusulkan suatu teknik analisis yang disebut Homotopy Analysis Method (HAM). Berdasarkan homotopy topologi, validitas dari HAM adalah bebas dari ada tidaknya parameter kecil dalam persamaan yang sedang diselesaikan. Liao berhasil menerapkan HAM untuk menyelesaikan masalah- masalah taklinear.

Pandang persamaan diferensial

$$N[z(x,t)] = 0, \tag{1}$$

Di mana *N* adalah operator taklinear, *x* dan *t* melambangkan peubah bebas, dan *z*(*x,t*) adalah fungsi tak diketahui. Singkatnya, kita abaikan syarat batas dan syarat awal. Dengan menggeneralisasi metode homotopy, Liao [1] mengkonstruksi persamaan deformasi orde-nol

$$(1-p)L[\phi(x,t;p)-z_0(x,t)] = px\,N[\phi(x,t;p)], \tag{2}$$

di mana

$p \in [0,1]$ adalah embedding parameter, $x \neq 0$ adalah parameter semu taknol, *L* adalah operator linear semu, $z_0(x,t)$ adalah nilai penduga awal dari *z*(*x,t*) dan $\phi(x,t;p)$ adalah fungsi tak diketahui. Penting di sini kita bebas memilih *x* dan *L*. Bilamana $p = 0$ dan $p = 1$, maka masing – masing berlaku

$$\phi(x,t;0) = z_0(x,t) \text{ dan } \phi(x,t;1) = z(x,t)\,. \tag{3}$$

Dengan demikian bilamana *p* bertambah dari 0 ke 1, solusi $\phi(x,t;p)$ bergerak dari nilai awal $z_0(x,t)$ ke solusi *z*(*x,t*). Bila $\phi(x,t;p)$ diperluas dalam deret Taylor terhadap *p*, maka diperoleh

$$\phi(x,t;p) = z_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} z_m(x,t)\,p^m, \tag{4}$$

di mana

$$z_m(x,t) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(x,t;p)}{\partial p^m}\Big|_{p=0}\,.$$

Jika operator linear semu, nilai penduga awal, dan parameter semu x dipilih dengan benar, deret (4) konvergen pada *p*=1, sehingga diperoleh

$$z(x,t) = z_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} z_m(x,t)\,,$$

yang harus merupakan solusi dari persamaan taklinear awal [1].

Bila *x* = -1, maka (2) menjadi

$$(1-p)L[\phi(x,t;p)-z_0(x,t)] + pN[\phi(x,t;p)] = 0,$$

yang banyak digunakan pada metode perturbasi homotopi.

Diferensialkan (2) *m* kali terhadap parameter *p* dan setting *p* = 0, lalu bagi dengan *m*!, sehingga diperoleh

$$L[z_m(x,t) - \chi_m z_{m-1}(x,t)] = x\,R_m(z^{-}_{m-1})\,,$$

di mana

$$R_m(\vec{z}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\phi(x,t;p)}{\partial p^{m-1}}\Big|_{p=0},$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \le 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan diferensial

$$u'(t) + 2tu^2(t) = 0. \quad u(0) = 1. \tag{5}$$

PEMBAHASAN

Pertama, konstruksi pemetaan kontinu

$$u(x,t;p) : \Re_0 \times [0,+\infty) \times [0,1] \to \Re \tag{6}$$

Yang dibentuk oleh

$$(1-p)\frac{\partial u(x,t;p)}{\partial t} = px\left\{\frac{\partial u(x,t;p)}{\partial t} + 2tu^2(x,t;p)\right\} \tag{7}$$

$$t \ge 0,\ p \in [0,1],\ x \ne 0 \tag{8}$$

Dengan syarat batas $u(x,0;p) = 1,\ p \in [0,1],\ x \ne 0$ sehingga

$$u(x,t;0) = 1,\ u(x,t;1) = u(t) \tag{9}$$

di mana

$$\Re = (-\infty,+\infty) \text{ dan } \Re_0 = (-\infty,0) \cup (0,+\infty). \tag{10}$$

Jelaslah bahwa apabila p bergerak dari 0 ke 1, $u(x,t;p)$ bergerak dari $u(x,t;0) = 1$ ke solusi eksak $u(t)$. Jenis variasi kontinu ini disebut deformasi dalam topologi sehingga persamaan (7) disebut persamaan deformasi orde nol..

Kedua, asumsikan bahwa $u(x,t;p)$ fungsi mulus sehingga

$$u_0^{(k)}(x,t) = \frac{\partial^k u(x,t;p)}{\partial p^k}\bigg|_{p=0} \quad (k \ge 1) \tag{11}$$

yang disebut turunan deformasi orde-k , ada, dan karena itu sesuai dengan deret MacLaurin dari $u(x,t;p)$ pada p=0, sebut

$$u(x,t;0)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{u_0^{(k)}(x,t)}{k!}\right]p^k \tag{12}$$

konvergen untuk *p*=1.

Kemudian, dengan syarat (9),

$$u(t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{u_0^{(k)}(x,t)}{k!}\right] \tag{13}$$

Di sini, $u_0^{(k)}(x,t)\ (k\geq 1)$ dibentuk oleh persamaan deformasi orde-*k*

$$\frac{\partial u_0^{(k)}(x,t)}{\partial t}\begin{cases}2xt & (k=1)\\ k\left[(1+x)\dfrac{\partial u_0^{(k-1)}(x,t)}{\partial t}+2tx\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}u_0^{(m)}(x,t)u_0^{(k-1-m)}(x,t)\right] & (k\geq 2)\end{cases} \tag{14}$$

Dengan syarat batas

$$u_0^{(k)}(x,0)=0,\quad x\neq 0,\ (k\geq 1) \tag{15}$$

Persamaan (14) dan (15) diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan defrormasi orde-nol (7) sebanyak *k* kali, $k\geq 1$ terhadap *p*, kemudian setting *p*=0. Persamaan diferensial linear orde 1 di atas dapat diselesaikan dengan mudah, khususnya dengan software *Mathematica* atau *Maple*. Kemudian substitusikan solusi ini ke dalam persamaan (13) sehingga diperoleh

$$u(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left[(-1)^k t^{2k}\right]\phi_{m,k}(x) \tag{16}$$

Di mana $\phi_{m,n}(x)$ didefinisikan oleh

$$\phi_{m,n}(x)=\begin{cases}0 & (n>m)\\ (-x)^m\displaystyle\sum_{k=0}^{m-n}\binom{m}{m-n-k}\binom{n+k-1}{k}x^k & (1\leq n\leq m)\\ 1 & (n\leq 0)\end{cases} \tag{17}$$

KESIMPULAN

Telah diperoleh solusi analitik persamaan diferensial (5) adalah berbentuk (16). Dapat ditunjukkan bahwa solusi ini konvergen ke solusi eksak $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. J. Liao, Homotopy Analysis Method: A New Analytic Method for nonlinear Problems. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition, Vol. 19, No. 10. Oct. 1998)

[2] S. J. Liao, Homotopy Analysis method and its Application in Mathematics, Journal of Basic Science and Engineering, 5, 2 (1997), 111 – 125.