ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 15

Representasi Matriks Graf *Cut-Set* Dan Sirkuit

Pandri Ferdias[1], Wamiliana[2]
[1] Mahasiswa S2 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UGM
Dosen Universitas PGRI Yogyakarta
email : pferdias@gmail.com
[2]Dosen Jurusan Matematika Universitas Lampung
email : wamil@unila.ac.id

ABSTRAK

Representasi matriks pada beberapa kelas graf, khususnya graf *cut-set* dan sirkuit pada dasarnya dilakukan dalam rangka untuk mengkaji salah satu bagian dari ilmu tentang graf, dimana graf sangat banyak kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari. Representasi ini dilakukan dengan cara mengobservasi suatu graf *cut-set* dan sirkuit yang dipilih sesuai dengan kebutuhannya, dalam hal ini adalah jenis graf lengkap. Sehingga dengan beberapa contoh graf yang diobservasi, sudah dapat diteliti informasi yang diberikan oleh matriks yang dihasilkan. Observasi ini memperlihatkan bahwa, representasi graf *cut-set* dan sirkuit dalam bentuk matriks memiliki pola khusus.
Kata Kunci : Graf, Cut-Set, Sirkuit

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika yang memiliki pokok bahasan yang banyak penerapannya pada masa kini. Pemakaian teori graf telah banyak dirasakan dalam berbagai ilmu, antara lain : optimalisasi jaringan, ekonomi, psikologi, genetika, riset operasi (OR) dan lain-lain. Teori graf ini pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika asal Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai Teori graf.

Salah satu topik menarik dalam teori graf adalah melihat hubungan antara graf dengan suatu matriks. Pada dasarnya hubungan antara graf dengan suatu matriks adalah terletak pada informasi yang dapat diberikan, dengan kata lain kita akan merepresentasikan graf dalam suatu matriks sehingga kita dapat melihat hal-hal yang mungkin dapat dengan mudah kita ketahui.

1.2. Tujuan Penelitian

Penulisan paper ini bertujuan untuk merepresentasikan beberapa kelas graf dalam bentuk matriks khususnya pada kelas-kelas graf *cut-set* dan sirkuit.

1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Memperdalam pengetahuan tentang graf, khususnya mengenai representasinya dalam suatu matriks.
2. Untuk dapat mengambil beberapa informasi yang diberikan oleh suatu graf.
3. Untuk membuat program komputer yang berhubungan dengan graf.
4. Memberikan motivasi bagi pembaca agar dapat mengkaji lebih jauh permasalahan yang berhubungan dengan graf.

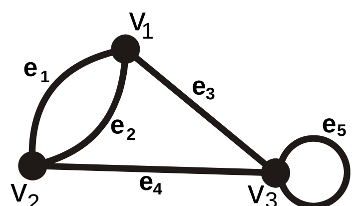
2. GRAF *CUT-SET* DAN SIRKUIT

2.1. Terminologi Graf

Berikut ini diberikan beberapa definisi dari jenis-jenis graf

Definisi 2.1.1 Garis Paralel dan *Loop* (Deo, 1989)

Garis paralel adalah dua buah garis atau lebih yang memiliki dua titik ujung yang sama. *Loop* adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama.



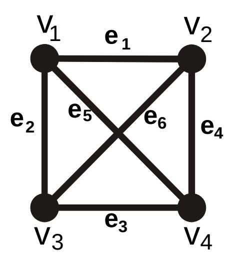
Gambar 1. Contoh graf yang memuat garis paralel dan *loop*

Definisi 2.1.2. Graf Sederhana (Siang, 2002)

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung garis paralel dan *loop* (contoh pada Gambar 1).

Definisi 2.1.3. Graf Lengkap (Siang, 2002)

Graf lengkap (*Complete Graph*) dengan n titik (simbol K_n) adalah graf sederhana dengan n titik, dimana setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan satu garis.



Gambar 2. Contoh graf lengkap dengan 4 titik dan 6 garis

Teorema 2.1.1 (Deo, 1989)

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Banyaknya garis dalam suatu graf lengkap dengan *n* titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ garis.

Bukti :

Misalkan G adalah suatu graf lengkap dengan *n* titik $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Ambil sembarang titik (sebutlah v_1). Karena G merupakan graf lengkap, maka v_1 dihubungkan dengan (n-1) titik lainnya ($v_2, v_3, \cdots, v_n$). Jadi ada (n-1) buah garis.

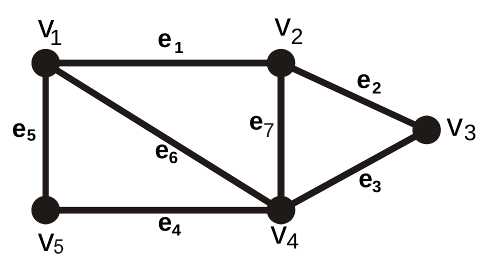
Selanjutnya, ambil sembarang titik kedua (sebutlah v_2). Karena G adalah graf lengkap, maka v_2 juga dihubungkan semua titik sisanya ($v_1, v_3, \cdots, v_n$), sehingga ada (n-1) buah garis yang berhubungan dengan v_2. Salah satu garis tersebut menghubungkan v_2 dengan v_1. Garis ini sudah diperhitungkan pada waktu menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan v_1. Jadi, ada (n-2) garis yang belum diperhitungkan.

Proses dilanjutkan dengan menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan $v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}$ dan yang belum diperhitungkan sebelumnya. Banyak garis yang didapat berturut-turut adalah $(n-3),(n-4),\cdots,3,2,1$. Jadi secara keseluruhan terdapat $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ buah garis.

Definisi 2.1.4. Perjalanan (*Walk)* (Deo, 1989)

Perjalanan (*walk*) pada graf G adalah barisan berhingga dari *vertex* dan *edge*, dimulai dan diakhiri oleh *vertex*, sedemikian sehingga setiap *edge* menempel (*incident*) dengan *vertex* sebelum dan sesudahnya. Tak ada *edge* yang muncul lebih dari sekali dalam sebuah *walk*.

Contoh :



Gambar 3.Contoh *walk* dari graf G di atas adalah $v_1, e_1, v_2, e_7, v_4, e_6, v_1, e_5, v_5, e_4, v_4$

Definisi 2.1.5. Lintasan (*Path*) (Siang, 2002)

Lintasan (p*ath*) adalah suatu *walk* yang semua *vertex*nya berbeda.

Definisi 2.1.6. Sirkuit (Siang,2002)

Sirkuit adalah lintasan (*path*) yang dimulai dan diakhiri dengan titik yang sama.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Dari Gambar 3 salah satu *path* nya adalah $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$ dan salah satu sirkuitnya adalah $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1$.

Definisi 2.1.7. Derajat (*Degree*) (Wilson and Watkins, 1990)

Derajat (*degree*) d(*v*) dari suatu vertex / titik *v* adalah jumlah *edge* yang menempel (*incident*) dengan vertex *v*.

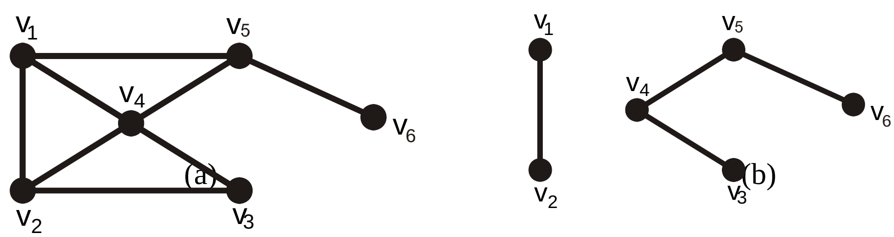
Pada Gambar 3 $d(v_1)=d(v_2)=3, d(v_3)=d(v_5)=2, d(v_4)=4$

Definisi 2.1.8. Bertetangga (*Adjacent*) dan Menempel (*Incident*) (Siang, 2002)

Dua titik dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika ada garis yang menghubungkan keduanya. Suatu garis dikatakan menempel (*incident*) dengan suatu titik *u*, jika titik *u* merupakan salah satu ujung dari garis tersebut.

Definisi 2.1.9. Cut-Set (Deo, 1989)

Cut-set dari suatu graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang jika dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung.

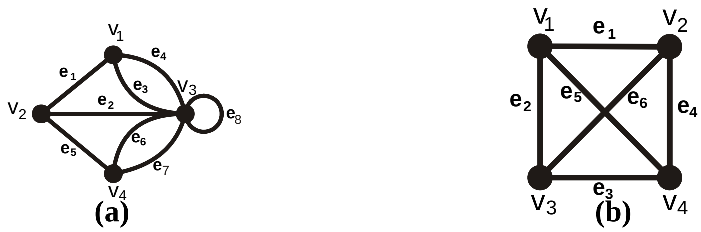


Gambar 4. Graf terhubung (a) dan salah satu *cut-set* nya (b)

Pada graf tersebut, $\{(v_1,v_4), (v_1,v_5), (v_2,v_3), (v_2,v_4)\}$ adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung. Himpunan $\{(v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$ juga adalah *cut-set*, $\{(v_1,v_4), (v_1,v_5), (v_1,v_2)\}$ adalah *cut-set*, $\{(v_5,v_6)\}$ juga *cut-set*,

Definisi 2.1.10. Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)(Siang, 2002)

Misalkan graf G adalah graf tak berarah dengan titik-titik v_1 v_2 …v_n (n berhingga). Matriks ketetanggaan yang sesuai dengan graf G adalah matriks $A=(a_{ij})$ dengan a_{ij} = jumlah garis yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j ; i,j = 1,2,…,n. Karena jumlah garis yang menghubungkan titik v_i dengan v_j selalu sama dengan jumlah garis yang menghubungkan titik v_j dengan titik v_i, maka jelas bahwa matriks ketetanggaan selalu merupakan matriks yang simetris ($a_{ij} = a_{ji}$ untuk setiap i dan j).



Gambar 5. Contoh graf direpresentasi ke dalam matriks

Untuk mempermudah pemahaman, tiap-tiap baris dan kolom matriks diberi indeks v_i yang sesuai dengan titik grafnya. Sel perpotongan baris v_i dan kolom v_j menyatakan garis yang menghubungkan v_i dan v_j.

Sehingga didapat matriks sebagai berikut :

a.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ada beberapa hal yang bisa dicatat dalam merepresentasikan graf dengan matriks ketetanggaan :

1. Graf tidak mempunyai loop jika dan hanya jika semua elemen diagonal utamanya = 0.
2. Matriks tetangga *(Adjacency)* dapat dipakai untuk mendeteksi graf yang tidak terhubung secara mudah. Suatu graf tidak terhubung terdiri dari k komponen jika dan hanya jika matriksnya berbentuk

$$\begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ 0 & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

   Dengan O adalah matriks yang semua elemennya = 0 dan A_i adalah matriks bujur sangkar yang merupakan matriks dari graf terhubung yang merupakan komponen ke-i dari graf.

3. Derajat (*degree*) titik v_i adalah jumlah semua komponen matriks baris / kolom ke-i

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d(v_j)$$

Derajat graf G adalah jumlah semua komponen matriks = $\sum_i \sum_j a_{ij}$

4. Graf G adalah graf bipartite ($K_{m,n}$) jika dan hanya jika matriks dari graf terhubung berbentuk $\begin{bmatrix} O & I_m \\ I_n & O \end{bmatrix}$ dengan

   O = matriks yang semua elemennya = 0

   I_m = matriks berukuran m x n yang semua elemennya = 1

   I_n = matriks berukuran n x m yang semua elemennya = 1

5. Graf G adalah graf lengkap jika dan hanya jika semua elemen dalam diagonal utama = 0 dan semua elemen diluar diagonal utama = 1.

Definisi 2.1.11. Matriks Bersisian *(Incidency Matrix))*(Siang, 2002)

Misalkan G adalah graf tanpa loop dengan n titik v_1, v_2,..., vn dan k garis e_1, e_2,…,e_k . Matriks bersisian (*Incidency Matrix)* yang sesuai dengan graf G adalah matriks A berukuran n x k yang elemennya adalah :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika ada edge yang menghubungkan titik } v_i \text{ dengan titik } v_j \text{ dan} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Dari Gambar 5 kita dapat merepresentasikan kedalam matriks bersisian sebagai berikut :

a.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ada beberapa hal yang bisa dicatat sehubungan dengan penggunaan matriks bersisian untuk menyatakan suatu graf :

1. Setiap garis berhubungan dengan 2 titik (karena G tidak mempunyai loop), maka dalam matriks binernya, setiap kolom mempunyai tepat 2 buah elemen 1 dan sisanya adalah elemen 0.
2. Jumlah elemen pada baris ke-i adalah derajat titik v_i sedangkan derajat total graf G adalah jumlah semua elemen dalam matriks binernya.

3. Jika semua elemen pada baris ke-i adalah 0, maka titik v_i merupakan titik terasing.
4. Dua kolom yang semua elemennya sama menyatakan garis yang parallel.

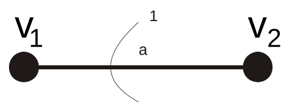
2.2. Representasi Graf *cut-set* dan Sirkuit

2.2.1. Kelas *cut-set* graf lengkap K_n

Seperti diketahui bahwa *cut-set* adalah himpunan sisi yang jika dibuang atau dipotong dari graf G menyebabkan graf G tersebut tidak terhubung. Sedangkan matriks *cut-set* adalah matriks yang merepresentasikan hubungan antara himpunan *cut-set* dengan edge pada suatu graf.

Cut-set hanya dapat dilakukan jika titik yang dimiliki suatu graf berjumlah minimal 2 ($n \geq 2$). Dalam penelitian ini dimulai dengan titik (n) = 2 sampai dengan n = 8.

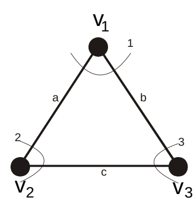
Untuk n = 2



Gambar 6. *Cut-set* graf lengkap dengan n = 2

Matriks *cut-set* nya adalah $\begin{array}{cc} & a \\ 1 & [1] \end{array}$

untuk n = 3



Gambar 7. *Cut-set* graf lengkap dengan n = 3

Matriks *cut-set* nya adalah

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jumlah angka 1 tiap baris adalah 2,2,2. Hal ini menunjukkan bahwa *cut-set* hanya mengisolasi 1 titik.

Berdasarkan matriks yang terbentuk pada observasi di atas, maka dapat dilihat bahwa setiap baris pada matriks terdapat angka 1 yang merepresentasikan hubungan himpunan *cut-set* dengan edge dari graf lengkap tersebut. Sehingga, didapat data sebagai berikut :

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Tabel 1.Conjecture jumlah angka 1 pada tiap himpunan *cut-set*

Jumlah angka 1 pada n\e / Himpunan *cut-set*	3\3	4\6	5\10	6\15	7\21	8\28
1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7
3	2	3	4	5	6	7
4		3	4	5	6	7
5		**4**	4	5	6	7
6		**4**	**6**	5	6	7
7			**6**	**8**	6	7
8			**6**	**8**	**10**	7
9			**6**	**8**	**10**	**12**
10			**6**	**8**	**10**	**12**
11				**8**	**10**	**12**
12				**8**	**10**	**12**
13				9	**10**	**12**
14				9	**10**	**12**
15				9	12	**12**
16					12	**12**
17					12	15
18					12	15
19					12	15
20					12	15
21					12	15
22						15
23						15
24						15
25						**16**
26						**16**
27						**16**
28						**16**

Berdasarkan penelitian yang dilakukan sampai n = 8 dapat dilihat pola penyebaran jumlah angka 1 pada tiap-tiap baris yang merepresentasikan graf ke dalam suatu matriks, dan memberikan informasi bahwa banyaknya himpunan *cut-set* yang dibentuk oleh tiap graf lengkap bersesuaian dengan jumlah *edge*-nya. Sebagai contoh, kita dapat melihat pada tabel untuk n = 3, e = 3 graf memiliki 3 himpunan *cut-set*, begitu juga untuk jumlah titik lainnya. Proses pemotongan (*cut-set)* ini dilakukan secara bertahap mulai dari 1,2,3,…,$\lfloor n/2 \rfloor$ titik. Ada beberapa hal yang membedakan antara *cut-set* graf lengkap dengan n ganjil dan *cut-set* graf lengkap dengan n genap dilihat dari banyaknya jumlah angka 1 yang muncul pada tiap baris himpunan matriks *cut-set* :

1. Untuk n ganjil

Pada n baris pertama dari matriks *cut-set* akan memiliki jumlah angka 1 yang sama yaitu sebesar n-1. Kelipatan n baris berikutnya memiliki jumlah angka 1 yang sama pula yaitu sebesar jumlah angka satu pada kelipatan sebelumnya ditambah dengan bilangan

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

genap yang tepat berada dibawah kelipatan n tersebut. Untuk n berikutnya, jumlah angka 1 pada kelipatan sebelumnya ditambah bilangan genap yang tepat berada di bawah selisih sebelumnya, dan ini berlaku sampai bilangan genap yang ada di bawah selisih yang menjadi selisih antar kelipatan habis.

2. Untuk n genap

Pada n baris pertama dari matriks *cut-set* akan memiliki jumlah angka 1 yang sama yaitu sebesar n-1. Kelipatan n baris berikutnya memiliki jumlah angka 1 yang sama pula yaitu sebesar jumlah angka satu pada kelipatan sebelumnya ditambah dengan bilangan ganjil yang tepat berada dibawah kelipatan n tersebut. Untuk n berikutnya, jumlah angka 1 pada kelipatan sebelumnya ditambah bilangan ganjil yang tepat berada di bawah selisih sebelumnya, dan ini berlaku sampai bilangan ganjil yang ada di bawah selisih yang menjadi selisih antar kelipatan habis. Pada umumnya, untuk titik ganjil jumlah himpunan *cut-set* melebihi jumlah kelipatan titiknya, hal ini menunjukkan bahwa jumlah himpunan sisa tersebut adalah isolasi titik oleh *cut-set*.

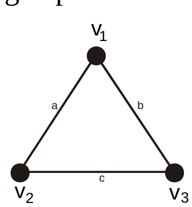
2.2.2. Kelas sirkuit graf lengkap K_n

Seperti diketahui bahwa sirkuit adalah lintasan (*path*) yang dimulai dan diakhiri dengan titik yang sama. Suatu graf dapat ditentukan sirkuitnya jika suatu graf tersebut memiliki titik lebih besar dari 2. Penelitian ini akan dilakukan pada graf lengkap dengan titik 3,4 dan 5 dan sirkuit yang akan dibentuk juga akan dimulai dari titik 3,4 dan 5.

1. Sirkuit dengan 3 titik

Untuk n = 3, banyaknya sirkuit yang dapat dibentuk oleh n = 3 sebanyak 1 sirkuit.

Untuk n = 3,



Gambar 8. Graf lengkap dengan n = 3

Banyaknya sirkuit yang dapat dibentuk ada 1 : v1 a v_2 c v_3 b v_1

Bentuk matriksnya sebagai berikut :

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Tabel 2. Conjecture untuk menentukan jumlah s-sirkuit dari graf lengkap K_n

Graf lengkap orde n / Bentuk sirkuit (s)	3	4	5	6	7	…	n
3 titik	1	4	10	20	35	…	$\frac{P_3^n}{3.2}$
4 titik	0	3	15	45	105	…	$\frac{P_4^n}{4.2}$
5 titik	0	0	12	72	252	…	$\frac{P_5^n}{5.2}$
6 titik	0	0	0	60	420	…	$\frac{P_6^n}{6.2}$
7 titik	0	0	0	0	360	…	$\frac{P_7^n}{7.2}$
…	…	…	…	…	…	…	…
S titik	0	0	0	0	0	…	$\frac{P_s^n}{s.2}$

3. DAFTAR PUSTAKA

[1.] Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc, New York.

[2.] Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Andi, Yogyakarta.

[3.] Wilson, J.R. and John J. Watkins. 1990. *Graph an Introducting Approach*. John Wiley and Sons, Inc., New York.