

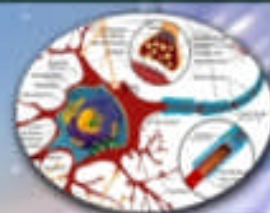
ISSN : 2337-9057



PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

**SEMINAR HASIL PENELITIAN
SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI
15 DESEMBER 2012**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012**



DAFTAR ISI

	Halaman
Kelompok Matematika	
PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID Anggun Novita Sari, Muslim Ansori dan Agus Sutrisno	1-6
Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 Anwar Sidik, Muslim Ansori dan Amanto	7-14
PENERAPAN GRAF DEBRUIJN PADA KONSTRUKSI GRAF EULERIAN Fazrie Mulia, Wamiliana, dan Fitriani	15-21
REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN Herlisa Anggraini, Muslim Ansori, Amanto	22-27
ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL) Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno	28-33
Algoritma Untuk Mencari Grup Automorfisma Pada Graf Circulant Vebriyan Agung, Ahmad Faisol, Amanto	34-37
KEISOMORFISMAAN GEOMETRI AFFIN Pratiwi Handayani, Muslim Ansori, Dorrah Aziz	38-41
METODE PENGUKURAN SUDUT MES SEBAGAI KEBIJAKAN PENENTUAN 1 SYAWAL Mardiyah Hayati, Tiryono, dan Dorrah	42-44
KE-ISOMORFISMAAN GEOMETRI INSIDENSI Marlina, Muslim Ansori dan Dorrah Aziz	45-47
TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN \mathbb{R}^2 Nur Rohmah, Muslim Ansori dan Amanto	48-53
KAJIAN ANALITIK GEOMETRI PADA GERAK MEKANIK POLISI TIDUR (POLDUR) UNTUK PENGGERAK DINAMO Nurul Hidayah Marfiatin, Tiryono Ruby dan Agus Sutrisno	54-56
<i>INTEGRAL RIEMANN FUNGSI BERNILAI VEKTOR</i> Pita Rini, Dorrah Aziz, dan Amanto	57-63
ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF <i>WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS</i> DAN <i>GRAF CYCLIC-CUBES</i> Ririn Septiana, Wamiliana, dan Fitriani	64-71
Ring Armendariz Tri Handono, Ahmad Faisol dan Fitriani	72-77
PERKALIAN DAN AKAR KUADRAT UNTUK OPERATOR <i>SELF-ADJOINT</i> Yuli Kartika, Muslim Ansori, Fitriani	78-81

Kelompok Statistika

APROKSIMASI DISTRIBUSI <i>STUDENT</i> TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Eflin Marsinta Uli, Warsono, dan Widiarti	82-85
ANALISIS CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN NEW JERSEY Eva fitrilia, Rudi Ruswandi, dan Widiarti	86-93
PENDEKATAN DISTRIBUSI GAMMA TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Jihan Trimita Sari T, Warsono, dan Widiarti	94-97
PERBANDINGAN ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOM Latusiania Oktamia, Netti Herawati, Eri Setiawan	98-103
PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM (<i>EXPECTATION MAXIMIZATION</i>) Nurashri Partasiwi, Dian Kurniasari dan Widiarti	104-109
KAJIAN CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN METODE KANADA RozaZelvia, Rudi Ruswandi dan Widiarti	110-115
ANALISIS KOMPONEN RAGAM DATA HILANG PADA RANCANGAN <i>CROSS-OVER</i> Sorta Sundry H. S, Mustofa Usman dan Dian Kurniasari	116-121
PENDEKATAN DISTRIBUSI GOMPERTZ PADA CADANGAN ASURANSI JIWA UNTUK METODE ZILLMER DAN ILLINOIS Mahfuz Hudori, Rudi Ruswandi dan Widiarti	122-126
KAJIAN RELATIF BIAS METODE <i>ONE-STAGE</i> DAN <i>TWO-STAGE CLUSTER SAMPLING</i> Rohman, Dian Kurniasari dan Widiarti	127-130
PERBANDINGAN UJI HOMOGENITAS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOMV Tika Wahyuni, Netti Herawati dan Eri Setiawan	131-136
PENDEKATAN DISTRIBUSI KHI-KUADRAT TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Tiyas Yulita, Warsono dan Dian Kurniasari	137-140

Kelompok Kimia

TRANSESTERIFIKASI MINYAK SAWIT DENGAN METANOL DAN KATALIS HETEROGEN BERBASIS SILIKA SEKAM PADI ($MgO-SiO_2$) EviRawati Sijabat, Wasinton Simanjuntak dan Kamisah D. Pandiangan	141-147
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT ($CaCO_3$) DENGAN METODE <i>UNSEEDED EXPERIMENT</i> Miftasani, Suharso dan Buhani	148-153
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING WULUH SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT ($CaCO_3$) DENGAN METODE <i>SEEDED EXPERIMENT</i> PutriFebriani Puspita, Suharso dan Buhani	154-160

IDENTIFIKASI SENYAWA AKTIF DARI KULIT BUAH ASAM KERANJI (<i>Dalium indum</i>) SEBAGAI INHIBITORKOROSIBAJA LUNAK Dewi Kartika Sari, Ilim Wasinton dan Simanjuntak	161-168
TransesterifikasiMinyakSawitdenganMetanoldanKatalisHeterogenBerbasis SilikaSekamPadi(TiO_2/SiO_2) Wanti Simanjuntak, Kamisah D. Pandiangan dan Wasinton Simanjuntak	169-175
UJI PENDAHULUAN HIDROLISIS ONGGOK UNTUK MENGHASILKAN GULA REDUKSI DENGAN BANTUAN ULTRASONIKASI SEBAGAI PRAPERLAKUAN Juwita Ratna Sari dan Wasinton Simanjuntak	176-182
STUDI FORMULASI PATI SORGUM-GELATIN DAN KONSENTRASI <i>PLASTICIZER</i> DALAM SINTESA BIOPLASTIK SERTA UJI <i>BIODEGRADABLE</i> DENGAN METODE FISIK Yesti Harryzona dan Yuli Darni	183-190
Kelompok Fisika	
Pengaruh Variasi Suhu Pemanasan Dengan Pendinginan Secara Lambat Terhadap Uji <i>Bending</i> Dan Struktur Mikro Pada Baja Pegas Daun AISI 5140 Adelina S.E Sianturi, Ediman Ginting dan Pulung Karo-Karo	191-195
PengaruhKadar $CaCO_3$ terhadapPembentukanFaseBahanSuperkonduktorBSCCO-2212 denganDopingPb (BPSCCO-2212) Ameilda Larasati, Suprihatin dan Ediman GintingSuka	196-201
Variasi Kadar $CaCO_3$ dalamPembentukanFaseBahanSuperkonduktor BSCCO-2223 dengan Doping Pb (BPSCCO-2223) Fitri Afriani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	202-207
Sintesis Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 Tanpa Doping Pb Pada Berbagai Kadar $CaCO_3$ Heni Handayani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	208-212
Pengaruh Variasi Waktu Penarikan dalam Pembuatan Lapisan Tipis TiO_2 dengan Metode Pelapisan Celup Dian Yulia Sari dan Posman Manurung	213-218
Pengaruh Suhu Sintering terhadap Karakteristik Struktur dan Mikrostruktur Komposit Aluminosilikat $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ Berbahan Dasar Silika Sekam Padi Fissilla Venia Wiranti dan Simon Sembiring	219-225
Sintesisdan KarakterisasiTitaniaSilikadenganMetode Sol Gel Revy Susi Maryanti dan Posman Manurung	226-230
Uji Fotokatalis Bahan TiO_2 yang ditambahdengan SiO_2 padaZatWarnaMetilenBiru Violina Sitorus dan Posman Manurung	231- 236
KARAKTERISTIK STRUKTUR DAN MIKROSTRUKTUR KOMPOSIT $B_2O_3-SiO_2$ BERBASIS SILIKA SEKAM PADI DENGAN VARIASI SUHU KALSINASI Nur Hasanah, Suprihatin, dan Simon Sembiring	237-241
RANCANG BANGUN DAN ANALISIS ALAT UKUR MASSA JENIS ZAT CAIR BERBASIS MIKROKONTROLER ATMega8535 Prawoto, Arif Surtono, dan Gurum Ahmad Pauzi	242-247

ANALISIS BAWAH PERMUKAAN KELURAHAN TRIKORA KABUPATEN NGADA NTT MENGUNAKAN METODE GPR (<i>Ground Penetrating Radar</i>) DAN GEOLISTRIK R. Wulandari, Rustadi dan A. Zaenudin	248-250
Analisis Fungsionalitas Na ₂ CO ₃ Berbasis CO ₂ Hasil Pembakara Tempurung Kelapa RizkySastia Ningrum, Simon Sembiring dan Wasinton Simanjuntak	251-256

ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS DAN GRAF CYCLIC-CUBES

Ririn Septiana¹, Wamiliana², dan Fitriani³

Jurusan Matematika, FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia¹
Septa2014@yahoo.co.id

Jurusan Matematika, FMIPA, Unila, Bandar Lampung Indonesia²
Jurusan Matematika, FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia³

ABSTRAK

Isomorfis merupakan konsep kekongruenan yang dapat diterapkan diberbagai bidang ilmu, termasuk graf. Graf *Wrapped Butterfly Networks* dan *Cyclic-Cubes* merupakan dua graf yang memiliki definisi yang berbeda. Kesamaan dari kedua graf ini adalah memiliki jumlah *vertex* yang sama dengan rumus jumlah *vertexnya* nk^n . Dari teorema Has dan Lin [2], kedua graf *Wrapped Butterfly Networks* dan *Cyclic-Cubes* merupakan dua graf yang saling isomorfis. Dalam tulisan ini akan didiskusikan bentuk-bentuk graf *Wrapped Butterfly Networks* yang isomorfis dengan graf *Cyclic-Cubes* dan penggambaran kedua graf tersebut.

Kata Kunci : *Wrapped Butterfly Networks*, *Cyclic-Cubes*, Isomorfis, Bentuk-bentuk.

1. Pendahuluan

Graf merupakan salah satu ilmu yang menarik untuk digali dan dikembangkan, salah satunya tentang isomorfisme graf. Dalam mempelajari graf sering ditemukan dua bentuk graf yang berbeda yang cukup rumit dengan banyaknya *vertex* dan *edge*. Namun, ternyata setelah direpresentasikan ternyata graf tersebut isomorfis. Tidak jarang juga ditemukan dua graf yang sederhana dan memiliki kemiripan secara visual. Namun, setelah dilakukan representasi terhadap graf tersebut ternyata kedua graf tersebut tidak isomorfis. *Cyclic-Cubes* dan *Wrapped Butterfly Networks* (WB) merupakan dua graf yang berbeda dan masih asing ditelinga banyak orang termasuk bentuk dari kedua graf tersebut. Hsu dan Lin [2] menyatakan bahwa graf *Cyclic-Cubes* dan *Wrapped Butterfly Networks* (WB) merupakan dua graf yang saling isomorfis. Dalam hal ini penulis ingin mendiskusikan keisomorfisan kedua graf tersebut secara visual dengan menggambar bentuk-bentuk dari kedua graf tersebut.

Tulisan ini akan dibagi menjadi lima bagian yaitu: pendahuluan yang berisi tentang latar belakang, landasan teori, metode penelitian, pembahasan dan kesimpulan.

2. Landasan Teori

Deo [1] mendefinisikan graf $G = (V, E)$ terdiri dari objek $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut *vertex* (titik) yang tidak kosong, dan objek $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang unsur-unsurnya disebut *edge* (garis) yang boleh kosong, sehingga setiap *edge* e_{ij} diidentifikasi dengan pasangan (v_i, v_j) dari *vertex*. *Vertex* v_i, v_j berhubungan dengan *edge* e_{ij} disebut *vertex* akhir dari e_{ij} . Representasi paling umum dari graf adalah dengan cara diagram, dimana *vertex* direpresentasikan sebagai titik dan setiap *edge* sebagai garis yang menghubungkan *vertex*.

Isomorfisme graf G ke H oleh Hsu dan Lin [2] didefinisikan sebagai fungsi bijeksi $f : V(G) \rightarrow V(H)$ dimana $(u, v) \in E(G)$ jika dan hanya jika $f(u), f(v) \in E(H)$. Graf G isomorfis dengan graf H dilambangkan dengan $G \cong H$. Jika G isomorfis dengan H dan H isomorfis dengan G , maka G dan H dikatakan saling isomorfis.

Selain itu, Hsu dan Lin [2] mendefinisikan graf *Wrapped Butterfly Networks* (WB) (n, k) sebagai graf yang mempunyai *vertex* $n \cdot k^n$ dan setiap *vertexnya* direpresentasikan dengan $(n-1)$ -bit factor $a_0 a_1 \dots a_{n-1} i$ dimana $0 \leq i \leq n-1$ dan $0 \leq a_j \leq k$ untuk semua $0 \leq j \leq n-1$. Dua *vertex* $a_0 a_1 \dots a_{n-1} i$ dan $b_0 b_1 \dots b_{n-1} j$ dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada WB (n, k) jika dan hanya jika $j-i=1 \pmod{n}$ dan $a_t = b_t$ untuk semua $0 \leq t \neq j \leq n-1$.

Graf *Cyclic-Cubes* didefinisikan Hsu dan Lin [2] bahwa G_n^k , misalkan $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, dengan n disimbolkan dengan $t_1 > t_2 > t_3 \dots > t_n$. Setiap simbol t_j menempatkan suatu *rank* i untuk $1 \leq i \leq k$, dan dinotasikan dengan t_j^i . Graf G_n^k memiliki nk^n *vertex*, dan setiap *vertex* dari G_n^k

direpresentasikan dengan n -bit factor, yang merupakan permutasi siklik dari $t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_n^{i_n}$ untuk $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k$, dengan kata lain, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(G_n^k) = \left\{ t_j^{i_j} t_{j+1}^{i_{j+1}} \dots t_n^{i_n} t_1^{i_1} \dots t_{j-1}^{i_{j-1}} \mid 1 \leq j \leq n \text{ dan } 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k \right\}$$

Untuk mendefinisikan *edge* pada graf G_n^k , pertama akan kita definisikan fungsi f_s untuk setiap $1 \leq s \leq k$, pemetaan $V(G_n^k)$ onto kepada dirinya sendiri, sesuai dengan definisi berikut ini:

$$f_s \left(t_j^{i_j} t_{j+1}^{i_{j+1}} \dots t_n^{i_n} t_1^{i_1} \dots t_{j-1}^{i_{j-1}} \right) = t_{j+1}^{i_{j+1}} \dots t_n^{i_n} t_1^{i_1} \dots t_{j-1}^{i_{j-1}} t_j^s \text{ untuk } 1 \leq s \leq k$$

Setiap f_j adalah fungsi bijektif. Setiap vertex $x \in V(G_n^k)$ mempunyai pasangan $2k$ vertex $f_s(x)$ dan $f_j^{-1}(x)$ untuk semua $1 \leq j \leq k$. Dalam Hsu dan Lin [2], disebutkan bahwa G_n^k isomorfis dengan WB (n, k) .

3. Metode Penelitian

1. Mengumpulkan literatur yang sesuai dengan pokok bahasan.
2. Menjelaskan definisi, teorema dan istilah yang digunakan dalam pembahasan.
3. Merepresentasikan bentuk-bentuk graf *Cyclic-Cubes* dan *Wrapped Butterfly Networks (WB)* dengan membatasi nilai $k = 2$ dan $1 \leq n \leq 4$.
4. Mendiskusikan bentuk graf *Wrapped Butterfly Networks (WB)* (n, k) yang isomorfis dengan graf *Cyclic-Cubes* dengan menggunakan teorema Hsu dan Lin [2].

4. Pembahasan

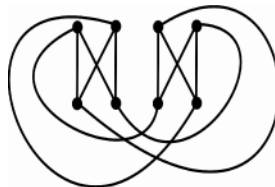
4.1 Bentuk-bentuk Graf *Wrapped Butterfly Networks*

Untuk $n=1$ dan $k=2$ yang kemudian dapat dituliskan sebagai graf WB(1,2), graf tersebut memiliki jumlah *vertex* 2 dan dapat digambarkan sebagai berikut:



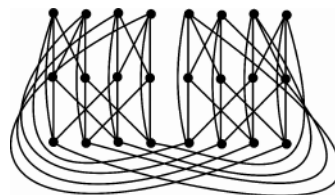
Gambar 12. Graf WB (1,2)

Untuk $n = 2$ dan $k = 2$ yang kemudian dapat dituliskan sebagai graf WB(2,2), graf tersebut memiliki jumlah *vertex* 8 dan dapat digambarkan sebagai berikut:



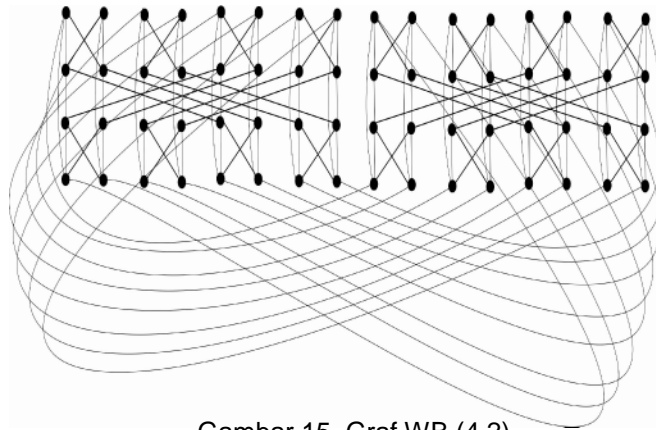
Gambar 13. Graf WB (2,2)

Untuk $n = 3$ dan $k = 2$ yang kemudian dapat dituliskan sebagai graf WB(3,2), graf tersebut memiliki jumlah *vertex* 24 dan dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 14. Graf WB (3,2)

Untuk $n = 4$ dan $k = 2$ yang kemudian dapat dituliskan sebagai graf WB(4,2), graf tersebut memiliki jumlah *vertex* 64 dan dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 15. Graf WB (4,2)

4.2 Bentuk-bentuk Graf *Cyclic-Cubes*

Untuk nilai $n = 1$ dan $k = 2$

Sesuai dengan definisi, jumlah *vertex* pada graf *Cyclic-cubes* dapat dihitung dengan ketentuan $n.k^n$, sehingga diperoleh jumlah *vertex* untuk graf *Cyclic-cubes* G_1^2 adalah 2 *vertex*.

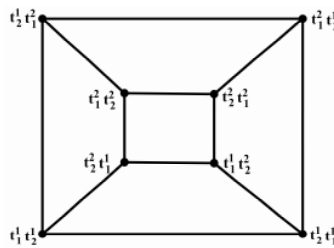
Untuk menentukan pasangan setiap *vertex* pada graf G_1^2 dapat dilakukan langsung karena hanya terdiri dari dua *vertex*, sehingga diperoleh bentuk graf sebagai berikut:



Gambar 16. Graf G_1^2

Untuk nilai $n = 2$ dan $k = 2$

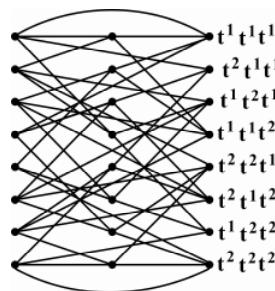
Jumlah *vertex* untuk G_2^2 adalah 8, sesuai dengan definisi akan digambarkan graf G_2^2 dengan *vertex* $t_1^1 t_1^1, t_1^1 t_2^1, t_1^1 t_2^2, t_2^1 t_1^1, t_2^1 t_2^1, t_2^1 t_2^2, t_2^2 t_1^1, t_2^2 t_2^1$ sebagai berikut:



Gambar 17. Graf G_2^2

Untuk nilai $n = 3$ dan $k = 2$

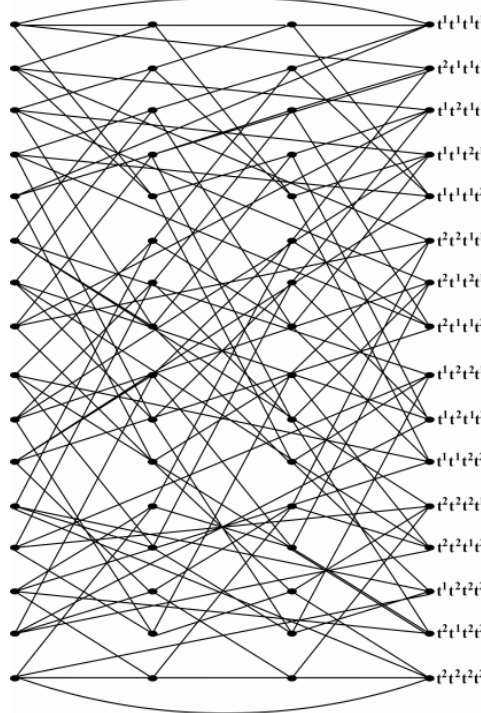
Jumlah *vertex* untuk G_3^2 adalah 24, sesuai dengan definisi akan digambarkan graf G_3^2 dengan *vertex* $t_1^1 t_2^1 t_3^1, t_1^2 t_2^1 t_3^1, t_1^1 t_2^2 t_3^1, t_1^1 t_2^1 t_3^2, t_1^2 t_2^2 t_3^1, t_1^2 t_2^1 t_3^2, t_1^1 t_2^2 t_3^2, t_1^2 t_2^2 t_3^2, t_2^1 t_3^1 t_1^1, t_2^2 t_3^1 t_1^1, t_2^1 t_3^2 t_1^1, t_2^2 t_3^2 t_1^1, t_2^1 t_3^1 t_2^1, t_2^2 t_3^1 t_2^1, t_2^1 t_3^2 t_2^1, t_2^2 t_3^2 t_2^1, t_3^1 t_2^1 t_1^1, t_3^2 t_2^1 t_1^1, t_3^1 t_2^2 t_1^1, t_3^2 t_2^2 t_1^1, t_3^1 t_2^1 t_2^1, t_3^2 t_2^1 t_2^1, t_3^1 t_2^2 t_2^1, t_3^2 t_2^2 t_2^1$ sebagai berikut:



Gambar 18. Graf G_3^2

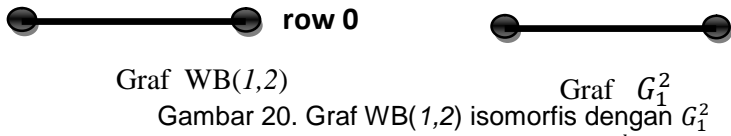
Untuk nilai $n = 4$ dan $k = 2$

Jumlah *vertex* untuk G_4^2 adalah 64, sesuai dengan definisi akan digambarkan graf G_4^2 dengan *vertex* $t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^1, t_1^2 t_2^1 t_3^1 t_4^1, t_1^1 t_2^2 t_3^1 t_4^1, t_1^1 t_2^1 t_3^2 t_4^1, t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^2, t_1^2 t_2^2 t_3^1 t_4^1, t_1^2 t_2^1 t_3^2 t_4^1, t_1^1 t_2^2 t_3^2 t_4^1, t_1^1 t_2^2 t_3^1 t_4^2, t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^1, t_1^2 t_2^1 t_3^1 t_4^2, t_1^1 t_2^2 t_3^2 t_4^2, t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2, t_1^2 t_3^1 t_4^1 t_1^1, t_1^2 t_3^2 t_4^1 t_1^1, t_1^2 t_3^1 t_4^2 t_1^1, t_1^2 t_3^2 t_4^2 t_1^1, t_1^1 t_3^1 t_4^1 t_2^1, t_1^1 t_3^2 t_4^1 t_2^1, t_1^1 t_3^1 t_4^2 t_2^1, t_1^1 t_3^2 t_4^2 t_2^1, t_1^2 t_3^1 t_4^1 t_2^2, t_1^2 t_3^2 t_4^1 t_2^2, t_1^2 t_3^1 t_4^2 t_2^2, t_1^2 t_3^2 t_4^2 t_2^2, t_1^3 t_4^1 t_1^1 t_2^1, t_1^3 t_4^2 t_1^1 t_2^1, t_1^3 t_4^1 t_1^2 t_2^1, t_1^3 t_4^2 t_1^2 t_2^1, t_1^3 t_4^1 t_1^1 t_2^2, t_1^3 t_4^2 t_1^1 t_2^2, t_1^3 t_4^1 t_1^2 t_2^2, t_1^3 t_4^2 t_1^2 t_2^2, t_1^4 t_1^1 t_2^1 t_3^1, t_1^4 t_1^2 t_2^1 t_3^1, t_1^4 t_1^1 t_2^2 t_3^1, t_1^4 t_1^2 t_2^2 t_3^1, t_1^4 t_1^1 t_2^1 t_3^2, t_1^4 t_1^2 t_2^1 t_3^2, t_1^4 t_1^1 t_2^2 t_3^2, t_1^4 t_1^2 t_2^2 t_3^2, t_1^4 t_1^1 t_2^1 t_3^3, t_1^4 t_1^2 t_2^1 t_3^3, t_1^4 t_1^1 t_2^2 t_3^3, t_1^4 t_1^2 t_2^2 t_3^3, t_1^4 t_1^1 t_2^1 t_3^4, t_1^4 t_1^2 t_2^1 t_3^4, t_1^4 t_1^1 t_2^2 t_3^4, t_1^4 t_1^2 t_2^2 t_3^4$ sebagai berikut:



Gambar 19. Graf G_4^2

4.3 Bentuk-bentuk Graf *Wrapped Butterfly Networks* dan *Cyclic-Cubes* yang Isomorfis
 Asumsi kesamaan jumlah *vertex* pada graf $WB(n,k)$ dan G_n^k dengan nilai $n = 1$ dan $k = 2$, sudah terpenuhi yaitu sama-sama memiliki dua *vertex*. Untuk ketetanggaan setiap *vertex* juga terpenuhi, dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 20. Graf $WB(1,2)$ isomorfis dengan G_1^2

Asumsi kesamaan jumlah *vertex* pada graf $WB(n,k)$ dan G_n^k dengan nilai $n = 2$ dan $k = 2$, dapat diperlihatkan dengan rumus penentuan jumlah *vertex* kedua graf tersebut yaitu nk^n dengan jumlah *vertex* 8 dan *edge* 12. Untuk ketetanggaan setiap *vertex* yang dimiliki dapat diperiksa menggunakan teorema Hsu dan Lin [2] yang didefinisikan fungsi π pemetaan $V(WB(2,2))$ pada $V(G_2^2)$ diperoleh pemetaan sebagai berikut: $\pi(000) = t_1^1 t_2^1, \pi(001) = t_2^1 t_1^1, \pi(010) = t_1^1 t_2^2, \pi(011) = t_2^1 t_1^2, \pi(100) = t_1^2 t_2^1, \pi(101) = t_2^2 t_1^1, \pi(110) = t_1^2 t_2^2, \pi(111) = t_2^2 t_1^2$. Dari hasil pemetaan tersebut, dapat dilihat bahwa π adalah fungsi bijektif. Misalkan untuk $u = 000$ dan $v = 001$ *vertex* pada graf $WB(2,2)$. Kemudian, $\pi(000)$ dan $\pi(001)$ adalah dua *vertex* yang berbeda pada graf G_2^2 dengan mengikuti aturan pemetaan di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \pi(000) &= t_1^1 t_2^1 \\ \pi(001) &= t_2^1 t_1^1 \end{aligned}$$

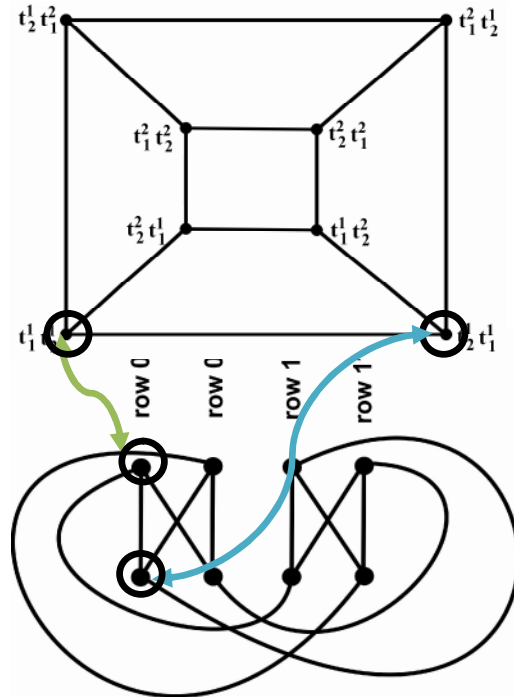
u dan v *adjacent* pada graf $WB(2,2)$. Sehingga,
 $\pi(000) = t_1^1 t_2^1 = f(\pi(u)) = 000$
 Maka, $\pi(000)$ dan $\pi(001)$ *adjacent* pada G_2^2 .

Sebaliknya, jika $\pi(u) = t_1^1 t_2^1$ dan $\pi(v) = t_2^1 t_1^1$ adjacent pada G_2^2 . Kemudian $t_1^1 t_2^1$ dapat menjadi $f_s(\pi(u)) = t_2^1 t_1^1$ atau $f_s^{-1}(\pi(u)) = t_2^1 t_1^1$ untuk beberapa $1 \leq s \leq 2$. Kemudian jika $t_2^1 t_1^1 = f_s(\pi(u)) = t_2^1 t_1^1$ untuk beberapa $1 \leq s \leq 2$. Kemudian, $\pi(v) = t_2^1 t_1^1$ dan $v = 001$. Sehingga, $(000,001) \in E(WB(2,2))$. Sama dengan, $\pi(v) = f_s^{-1}(\pi(u)) = t_2^1 t_1^1$ juga berimplikasi $(000,001) \in E(WB(2,2))$.

Hal yang sama juga dapat dilakukan untuk setiap *vertex* yang ada pada graf.

Dengan demikian terbukti bahwa graf $WB(2,2)$ isomorfis dengan graf G_2^2 .

Untuk lebih jelas melihat ketetanggaan setiap *vertex* yang ada pada kedua graf tersebut sehingga dikatakan isomorfis, perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 21. Graf $WB(2,2)$ isomorfis dengan G_2^2

Asumsi kesamaan jumlah *vertex* pada graf $WB(n,k)$ dan G_n^k dengan nilai $n=3$ dan $k=2$, dapat diperlihatkan dengan rumus penentuan jumlah *vertex* kedua graf tersebut yaitu nk^n dengan jumlah *vertex* 24 dan *edge* 48. Untuk ketetanggaan setiap *vertex* yang dimiliki dapat diperiksa menggunakan teorema Hsu dan Lin [2] yang didefinisikan fungsi π pemetaan $V(WB(3,2))$ pada $V(G_3^2)$. Sehingga diperoleh hasil pemetaan untuk setiap *vertex* pada $WB(3,2)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \pi(0000) &= t_1^1 t_2^1 t_3^1; & \pi(0001) &= t_2^1 t_3^1 t_1^1; & \pi(0002) &= t_3^1 t_2^1 t_1^1; & \pi(0010) &= t_1^1 t_2^1 t_3^2; \\ \pi(0011) &= t_2^1 t_3^1 t_1^2; & \pi(0012) &= t_3^1 t_2^1 t_1^2; & \pi(0100) &= t_1^1 t_2^2 t_3^1; & \pi(0101) &= t_2^1 t_3^2 t_1^1; \\ \pi(0102) &= t_3^1 t_2^2 t_1^1; & \pi(0110) &= t_1^1 t_2^2 t_3^2; & \pi(0111) &= t_2^1 t_3^2 t_1^2; & \pi(0102) &= t_3^1 t_2^2 t_1^2; \\ \pi(1000) &= t_1^2 t_2^1 t_3^1; & \pi(1001) &= t_2^2 t_3^1 t_1^1; & \pi(1002) &= t_3^2 t_2^1 t_1^1; & \pi(1010) &= t_1^1 t_2^2 t_3^2; \\ \pi(1011) &= t_2^2 t_3^1 t_1^2; & \pi(1012) &= t_3^2 t_2^1 t_1^2; & \pi(1100) &= t_1^2 t_2^2 t_3^1; & \pi(1101) &= t_2^2 t_3^2 t_1^1; \\ \pi(1102) &= t_3^2 t_2^2 t_1^1; & \pi(1110) &= t_1^2 t_2^2 t_3^2; & \pi(1111) &= t_2^2 t_3^2 t_1^2; & \pi(1112) &= t_3^2 t_2^2 t_1^2 \end{aligned}$$

Dari hasil pemetaan tersebut, terbukti bahwa π adalah fungsi bijektif.

Untuk $u = 0000$ dan $v = 0001$ *vertex* pada graf $WB(3,2)$. Kemudian, $\pi(0000)$ dan $\pi(0001)$ adalah dua *vertex* yang berbeda pada graf G_3^2 dengan mengikuti aturan pemetaan di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \pi(0000) &= t_1^1 t_2^1 t_3^1 \\ \pi(0001) &= t_2^1 t_3^1 t_1^1 \end{aligned}$$

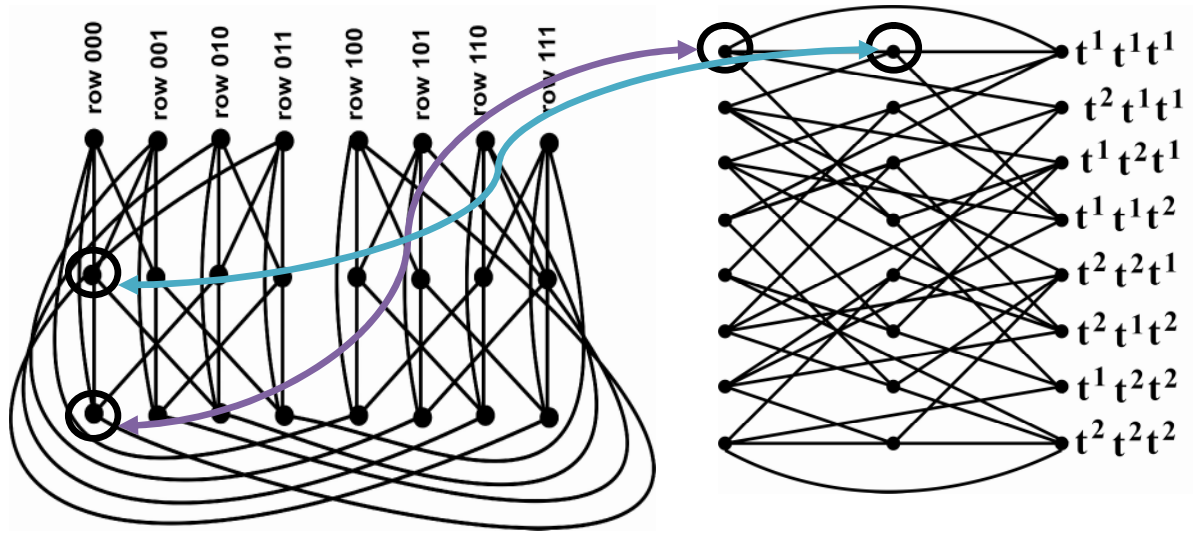
u dan v adjacent pada graf $WB(3,2)$. Sehingga,

$$\pi(0000) = t_1^1 t_2^1 t_3^1 = f(\pi(u)) = 0000$$

Maka, $\pi(0000)$ dan $\pi(0001)$ adjacent pada G_3^2

Sebaliknya, jika $\pi(u) = t_1^1 t_2^1 t_3^1$ dan $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ adjacent pada G_3^2 . Kemudian $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ dapat menjadi $f_s(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ atau $f_s^{-1}(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ untuk beberapa $1 \leq s \leq 2$.

Kemudian jika $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_1^1 = f_s(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ untuk beberapa $1 \leq s \leq 2$. Kemudian, $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ dan $v = 0001$. Sehingga, $(0000, 0001) \in E(WB(3,2))$. Sama dengan, $\pi(v) = f_s^{-1}(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_1^1$ juga berimplikasi $(0000, 0001) \in E(WB(3,2))$. Dengan demikian terbukti bahwa graf $WB(3,2)$ isomorfis dengan graf G_3^2 . Hal yang sama juga dapat dilakukan untuk setiap $vertex$ yang ada pada graf. Dengan demikian terbukti bahwa graf $WB(3,2)$ isomorfis dengan graf G_3^2 . Untuk lebih jelas melihat ketetanggaan setiap $vertex$ yang ada pada kedua graf tersebut sehingga dikatakan isomorfis, perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 22. Graf $WB(3,2)$ isomorfis dengan G_3^2

Asumsi kesamaan jumlah $vertex$ pada graf $WB(n,k)$ dan G_n^k dengan nilai $n = 4$ dan $k = 2$, dapat diperlihatkan dengan rumus penentuan jumlah $vertex$ kedua graf tersebut yaitu nk^n dengan jumlah $vertex$ 64 dan $edge$ 128. Untuk ketetanggaan setiap $vertex$ yang dimiliki dapat diperiksa menggunakan teorema Hsu dan Lin [2] yang didefinisikan fungsi π pemetaan $V(WB(4,2))$ pada $V(G_4^2)$. Sehingga diperoleh hasil pemetaan untuk setiap $vertex$ pada $WB(4,2)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \pi(00000) &= t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^1; \pi(00001) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1; \pi(00002) = t_3^1 t_4^1 t_1^1 t_2^1; \pi(00003) = t_4^1 t_1^1 t_2^1 t_3^1; \\
 \pi(00010) &= t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^2; \pi(00011) = t_2^1 t_3^1 t_4^2 t_1^1; \pi(00012) = t_3^1 t_4^2 t_1^1 t_2^1; \pi(00013) = t_4^2 t_1^1 t_2^1 t_3^1; \\
 \pi(00100) &= t_1^1 t_2^2 t_3^1 t_4^1; \pi(00101) = t_2^2 t_3^1 t_4^1 t_1^1; \pi(00102) = t_3^1 t_4^1 t_1^1 t_2^2; \pi(00103) = t_4^1 t_1^1 t_2^2 t_3^1; \\
 \pi(00110) &= t_1^1 t_2^2 t_3^2 t_4^1; \pi(00111) = t_2^2 t_3^2 t_4^1 t_1^1; \pi(00112) = t_3^2 t_4^1 t_1^1 t_2^2; \pi(00113) = t_4^1 t_1^1 t_2^2 t_3^2; \\
 \pi(01000) &= t_1^1 t_2^2 t_3^1 t_4^2; \pi(01001) = t_2^2 t_3^1 t_4^2 t_1^1; \pi(01002) = t_3^1 t_4^2 t_1^1 t_2^2; \pi(01003) = t_4^2 t_1^1 t_2^2 t_3^1; \\
 \pi(01010) &= t_1^1 t_2^2 t_3^2 t_4^2; \pi(01011) = t_2^2 t_3^2 t_4^2 t_1^1; \pi(01012) = t_3^2 t_4^2 t_1^1 t_2^2; \pi(01013) = t_4^2 t_1^1 t_2^2 t_3^2; \\
 \pi(01100) &= t_1^1 t_2^2 t_3^2 t_4^1; \pi(01101) = t_2^2 t_3^2 t_4^1 t_1^1; \pi(01102) = t_3^2 t_4^1 t_1^1 t_2^2; \pi(01103) = t_4^1 t_1^1 t_2^2 t_3^2; \\
 \pi(01110) &= t_1^1 t_2^2 t_3^2 t_4^2; \pi(01111) = t_2^2 t_3^2 t_4^2 t_1^1; \pi(01112) = t_3^2 t_4^2 t_1^1 t_2^2; \pi(01113) = t_4^2 t_1^1 t_2^2 t_3^2; \\
 \pi(10000) &= t_2^1 t_2^1 t_3^1 t_4^1; \pi(10001) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1; \pi(10002) = t_3^1 t_4^1 t_1^1 t_2^1; \pi(10003) = t_4^1 t_1^1 t_2^1 t_3^1; \\
 \pi(10010) &= t_2^1 t_2^1 t_3^2 t_4^1; \pi(10011) = t_2^1 t_3^2 t_4^1 t_1^1; \pi(10012) = t_3^2 t_4^1 t_1^1 t_2^1; \pi(10013) = t_4^1 t_1^1 t_2^1 t_3^2; \\
 \pi(10100) &= t_2^1 t_2^1 t_3^1 t_4^2; \pi(10101) = t_2^1 t_3^1 t_4^2 t_1^1; \pi(10102) = t_3^1 t_4^2 t_1^1 t_2^1; \pi(10103) = t_4^2 t_1^1 t_2^1 t_3^1; \\
 \pi(10110) &= t_2^1 t_2^1 t_3^2 t_4^2; \pi(10111) = t_2^1 t_3^2 t_4^2 t_1^1; \pi(10112) = t_3^2 t_4^2 t_1^1 t_2^1; \pi(10113) = t_4^2 t_1^1 t_2^1 t_3^2; \\
 \pi(11000) &= t_2^2 t_2^1 t_3^1 t_4^1; \pi(11001) = t_2^2 t_3^1 t_4^1 t_1^1; \pi(11002) = t_3^1 t_4^1 t_1^1 t_2^2; \pi(11003) = t_4^1 t_1^1 t_2^2 t_3^1; \\
 \pi(11010) &= t_2^2 t_2^1 t_3^2 t_4^1; \pi(11011) = t_2^2 t_3^2 t_4^1 t_1^1; \pi(11012) = t_3^2 t_4^1 t_1^1 t_2^2; \pi(11013) = t_4^1 t_1^1 t_2^2 t_3^2; \\
 \pi(11100) &= t_2^2 t_2^1 t_3^1 t_4^2; \pi(11101) = t_2^2 t_3^1 t_4^2 t_1^1; \pi(11102) = t_3^1 t_4^2 t_1^1 t_2^2; \pi(11103) = t_4^2 t_1^1 t_2^2 t_3^1; \\
 \pi(11110) &= t_2^2 t_2^1 t_3^2 t_4^2; \pi(11111) = t_2^2 t_3^2 t_4^2 t_1^1; \pi(11112) = t_3^2 t_4^2 t_1^1 t_2^2; \pi(11113) = t_4^2 t_1^1 t_2^2 t_3^2.
 \end{aligned}$$

Dari hasil pemetaan tersebut, terbukti bahwa π adalah fungsi bijektif.

Untuk $u = 00000$ dan $v = 00001$ $vertex$ pada graf $WB(4,2)$. Kemudian, $\pi(00000)$ dan $\pi(00001)$ adalah dua $vertex$ yang berbeda pada graf G_4^2 dengan mengikuti aturan pemetaan di atas, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \pi(00000) &= t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^1 \\
 \pi(00001) &= t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1
 \end{aligned}$$

u dan v adjacent pada graf $WB(4,2)$. Sehingga,

$$\pi(00000) = t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^1 = f(\pi(u)) = 00000$$

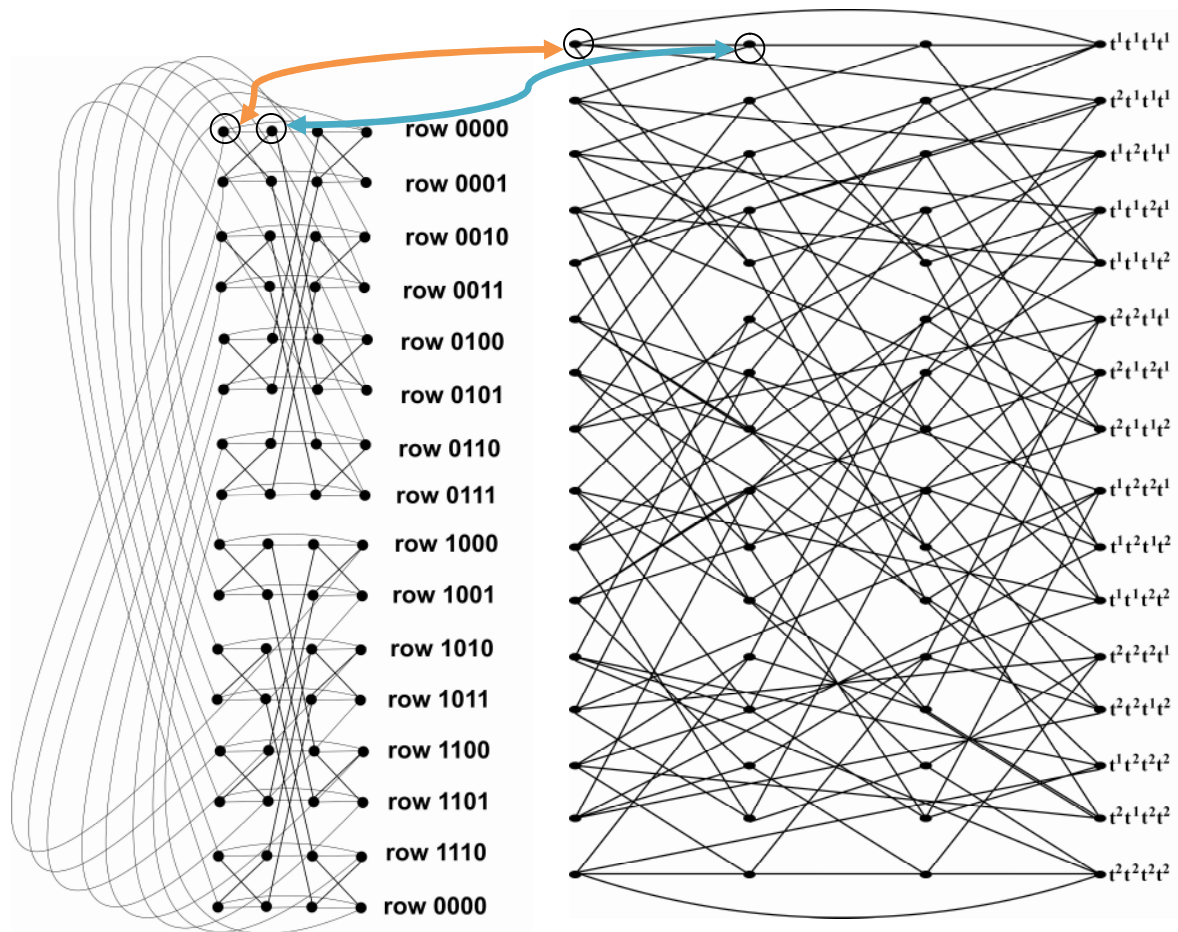
Maka, $\pi(00000)$ dan $\pi(00001)$ adjacent pada G_4^2

Sebaliknya, jika $\pi(u) = t_1^1 t_2^1 t_3^1 t_4^1$ dan $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ adjacent pada G_4^2 . Kemudian $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ dapat menjadi $f_s(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ atau $f_s^{-1}(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ untuk beberapa $1 \leq s \leq 2$. Kemudian jika $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1 = f_s(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ untuk beberapa $1 \leq s \leq 2$. Kemudian, $\pi(v) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ dan $v = 00001$. Sehingga, $(00000, 00001) \in E(WB(4,2))$. Sama dengan, $\pi(v) = f_s^{-1}(\pi(u)) = t_2^1 t_3^1 t_4^1 t_1^1$ juga berimplikasi $(0000, 0001) \in E(WB(3,2))$.

Hal yang sama juga dapat dilakukan untuk setiap $vertex$ yang ada pada graf.

Dengan demikian terbukti bahwa graf $WB(4,2)$ isomorfis dengan graf G_4^2 .

Untuk lebih jelas melihat ketetangaan setiap $vertex$ yang ada pada kedua graf tersebut sehingga dikatakan isomorfis, perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 23. Graf $WB(4,2)$ isomorfis dengan G_4^2

5. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Keisomorfisan graf *Wrapped Butterfly Networks* (WB) (n,k) dan graf *cyclic-cubes* dapat ditunjukkan dengan menggunakan gambar.
2. Pasangan graf *Wrapped Butterfly Networks* (WB) (n,k) dan graf *cyclic-cubes* yang isomorfis adalah $WB(1,2) \cong G_1^2$, $WB(2,2) \cong G_2^2$, $WB(3,2) \cong G_3^2$, dan $WB(4,2) \cong G_4^2$.
3. Bentuk graf *cyclic-cubes* (G_n^k) adalah graf Bipartite.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Deo, Narsing. 1989. *Graph Theory With applications to engineering and computer science*. Prentice Hall of India Private Limited. New Delhi.
- [2] Hsu, Lih-Hsing and Lin, Cheng-Kuan. 2009. *Graph Theory and Interconnection Networks*. Taylor & Francis Group. New York.