# Representasi Turnamen *Round-Robin* Dengan Menggunakan Graf Hamiltonian dan Matriks

Novenza Harisman, Wamiliana, dan Fitriani

*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung*
*Jl. Prof Dr. Sumantri Brojonegoro No. 10 Bandar Lampung 35145*
*Email : novenzaharisman@yahoo.com*

**Abstrak.** Turnamen *Round-Robin* adalah turnamen yang memiliki sistem pertandingan dimana setiap tim dalam turnamen akan bertanding dengan tim lainnya sebanyak satu kali. Turnamen *Round-Robin* akan direpresentasikan ke dalam bentuk graf lengkap berarah dengan orde 10 dan11 dengan menggunakan dua metode, yaitu untuk turnamen dengan jumlah *vertex* genap digunakan Metode Penjadwalan dengan menggunakan Kongruen Modulo, dan turnamen dengan jumlah *vertex* ganjil digunakan Metode *Rotational Turnament*. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji aplikasi graf Hamiltonian dan merepresentasikan turnamen *Round-Robin* dalam bentuk matriks turnamen. Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa bentuk graf turnamen yang diperoleh dengan jumlah *vertex* genap yaitu 10 *vertex*, sirkuit Hamiltonian yang terbentuk sebanyak 3 buah, sedangkan untuk turnamen dengan jumlah *vertex* ganjil yaitu 11 *vertex*, sirkuit Hamiltonian yang terbentuk sebanyak 5 buah.

**Kata kunci** : Turnamen *Round-Robin*, *Rotational turnament,* Kongruen modulo.

## PENDAHULUAN

Sistem pertandingan yang dipakai dalam suatu turnamen olahraga, mempertemukan setiap peserta dengan peserta lainnya secara lengkap. Salah satu sistem kompetisi yang paling umum dipakai adalah “Sistem Setengah Kompetisi”. Dalam sistem setengah kompetisi (*round-robin*), setiap peserta akan bertemu dengan semua peserta lainnya satu kali. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*) adalah graf yang setiap *edge* diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Sisi berarah disebut busur (*arc*). Graf dengan orientasi arah dipakai untuk merepresentasikan turnamen *Round- Robin* ke bentuk graf turnamen. Turnamen *Round-Robin* direpresentasikan ke dalam bentuk graf dengan cara setiap tim dalam turnamen dinotasikan oleh *vertex* dan untuk tim yang akan bertanding dan mendominasi lawan tandingnya dinotasikan dengan *arc*, sehingga akan terbentuk graf lengkap berarah (turnamen). Sedangkan graf berarah (*digraf*) yang diperoleh dengan menetapkan arah untuk setiap *edge* dalam graf lengkap tidak berarah, di mana setiap pasangan dari *vertex* dihubungkan oleh *edge* berarah tunggal disebut Graf Turnamen [2].

Menurut Deo [2], suatu graf G merupakan himpunan dari $V = (v_1, v_2, v_3, \dots)$ yang disebut dengan *vertex* (atau titik) yang tidak boleh kosong dan himpunan dari $E = (e_1, e_2, e_3, \dots)$ yang disebut dengan *edge* (atau garis) yang boleh kosong dan dapat dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Jika $e = \{u,v\}$ adalah suatu garis yang menghubungkan titik $u$ dan $v$ pada graf $G$, maka titik $u$ dikatakan tetangga (*adjacent*) terhadap titik $v$ dan garis $e_{uv}$ dikatakan terhubung (*incidence*) pada $u$ dan $v$ [6].

Terdapat beberapa istilah dalam teori graf, salah satunya adalah lintasan (*path*), yang didefinisikan sebagai berikut. Lintasan yang panjangnya $n$ dari *vertex* awal $v_0$ ke *vertex* tujuan $v_n$ di dalam graf G ialah barisan yang berselang-selang, *vertex* - *vertex* dan *edge-edge* yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2), \dots$, $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah *edge-edge* dari graf $G$ [7].

Graf Hamiltonian adalah graf yang semua *vertex-vertex*nya dapat dilalui masing-masing sekali dan mempunyai lintasan tertutup, artinya *vertex* awal sama dengan *vertex* akhir [9]. Pada graf Hamiltonian terdapat lintasan yang melalui tiap *vertex* di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan itu kembali ke *vertex* asal membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup itu dinamakan sirkuit Hamiltonian [7].

*Matching M* pada graf *G* adalah 1-reguler subgraf dari *G*, yang mana subgraf merupakan kumpulan *edge* yang *non adjacent*. Setiap *matching* dari graf dengan *p vertex* memiliki paling banyak p/2 *edge* [3]. Sedangkan *matching* M yang memuat semua *vertex* dari graf G. Sehingga, setiap *vertex* dari graf *incident* (menempel) tepat pada setiap *edge* dari *matching* tersebut disebut *Matching* sempurna [1].

Turnamen dapat direpresentasikan dalam bentuk lain, misalnya dalam bentuk turnamen matriks, dimana matriks persegi $M = (m_{ij})$ yang entri-entrinya terdiri dari 0 dan 1, dengan 0 pada diagonal utama dan $m_{ij} + m_{ji} = 1$, untuk *i* dan *j* yang berbeda. Untuk pemberian sebuah orde dari *vertex*, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dari sebuah turnamen *T*, matriks ketetanggaan $M = [m_{ij}]$ dari T adalah matriks yang didefinisikan sebagai berikut.

$$(m_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ ; jika terdapat } edge \text{ berarah dari } v_i \text{ ke } v_j \text{ di } digraf\ D \\ o \text{ ; jika selainnya} \end{cases}$$

Dengan demikian, matriks turnamen adalah matriks ketetanggaan dari beberapa turnamen untuk memberi orde pada *vertex* [4].

Dalam kompetisi suatu turnamen olahraga dikenal sistem yang paling umum dipakai yaitu sistem setengah kompetisi (*Round-Robin*), setiap peserta akan bertemu dengan semua peserta lainnya satu kali [8]. Dalam pelaksanaan suatu turnamen, diperlukan penjadwalan bagi tiap-tiap tim yang akan bertanding, dimana tiap tim akan melewan tim lainnya hanya sekali. Metode yang dapat dipakai dalam penyelesain masalah penjadwalan turnamen ini salah satunya adalah dengan kongruen modulo. Berikut ini adalah definisi kongruen modulo.

Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan yang lebih besar dari nol, maka $a \equiv b \ (mod\ m)$ jika $a - b$ habis dibagi *m* [7].

Pada turnamen yang direpresentasikan dengan graf, *arc* merupakan hal penting yang dapat menunjukan bahwa tim tersebut mendominasi lawannya jika arah diberikan pada *vertex* yang dipasangkan dengan *vertex* lainnya. Dalam menentukan arah *arc* digunakan definisi *Rotational Tournament* dengan konsep grup sebagai dasarnya. Berikut definisi dari grup dan grup Abelian. Grup $\langle G, * \rangle$ adalah himpunan G yang tertutup terhadap operasi biner * yang memenuhi aksioma-aksioma berikut :

(i) $\forall\, a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$ ;

(ii) $\exists\, e \in G \ni \forall\, a \in G, a * e = e * a = a$ ;

(iii) $\forall\ a \in G,\ \exists\, a^{-1} \in G,\ \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Suatu grup disebut Grup Abelian jika operasi binernya bersifat komutatif [5].

Diberikan *G* grup abelian dengan orde ganjil $n = 2m + 1$ dengan identitas 0. Misalkan *S* adalah suatu himpunan bagian dari *G* dengan *m* elemen dari $G - \{0\}$ sehingga untuk setiap $x,y \in S$, $x + y \neq 0$. Bentuk suatu digraph *D* dengan himpunan *vertex* $V(D) = G$ dan himpunan *arc* $A(D)$ didefinisikan dengan : *arc* $(x,y) \in A(D)$ jika dan hanya jika $y - x \in S$. Graf *D* disebut *Rotational Tournament* dengan simbol himpunan *S* dan dinotasikan dengan $R_G(S)$, atau lebih sederhana lagi $R(S)$ [8].

## METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah sebagai berikut.

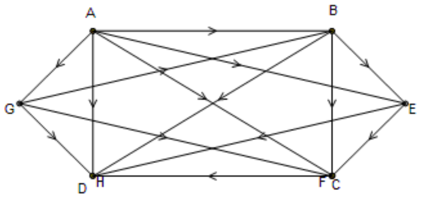
1. Definisikan turnamen.
2. Penentuan solusi turnamen.
3. Penentuan solusi turnamen dengan Metode Penjadwalan Kongruen Modulo.
4. Penentuan solusi turnamen dengan Metode *Rotational Tournament.*
5. Penentuan Hamiltonian dari turnamen.
6. Definisikan matriks turnamen.
7. Aplikasikan ke dalam bentuk matriks.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Graf Turnamen dan Turnamen *Round-Robin*

Turnamen adalah graf berarah (digraf) yang diperoleh dengan menetapkan arah untuk setiap *edge* dalam graf lengkap tidak berarah, di mana setiap pasangan dari *vertex* dihubungkan oleh *edge* berarah tunggal.

Turnamen yang setiap tim bertanding dengan tim lainnya hanya sekali disebut Turnamen *Round-Robin* dan turnamen ini merupakan bentuk khusus dari turnamen reguler. *Round-Robin* sendiri banyak digunakan dalam suatu kompetisi dengan jumlah peserta yang banyak agar dapat langsung tersisih separuh dari jumlah peserta yang ada. Hal ini dilakukan untuk meminimalkan jumlah pertandingan yang akan dilaksanakan. Turnamen *Round-Robin* ini dimodelkan dengan graf lengkap berarah, yang dalam hal ini *vertex* menyatakan tiap tim yang bertanding, dan *edge* menyatakan pertandingan. *Edge* (*a*, *b*) berarti tim *a* berhasil mengalahkan tim *b*. Berikut adalah gambar graf lengkap berarah yang mempresentasikan turnamen *Round-Robin* :



Gambar 1 Graf lengkap berarah (*Round-robin*).

Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa tim A yang direpresetasikan oleh *vertex* mendominasi semua pertandingan, sedangkan tim D selalu kalah dalam setiap pertandingan , hal ini dapat terlihat dari banyaknya *in-degree* pada *vertex* D.

Pada penyelesaian masalah graf turnamen terdapat beberapa metode yaitu dengan menggunakan metode penjadwalan dengan menggunakan Kongruen Modulo untuk graf yang jumlah *vertex*nya genap dan menggunakan metode *Rotational Tournament* untuk graf yang jumlah *vertex*nya ganjil. Kedua metode ini dapat digunakan untuk merepresentasikan *Round-Robin* ke dalam bentuk graf dan mencari solusi turnamen.

## 4.2 Metode Penjadwalan Dengan Menggunakan Kongruen Modulo.

Metode penjadwalan Kongruen Modulo digunakan untuk graf yang jumlah *vertex*nya genap. Modulo sendiri digunakan untuk mengatasi jumlah $n$ besar / peserta turnamen yang sangat banyak. Dengan metode ini dapat dicari solusi graf turnamennya dengan membuat penjadwalan dari turnamen tersebut yang nantinya akan digambarkan dengan graf berarah dan *matching*.

Untuk mencari solusi turnamen dengan menerapkan motode penjadwalan kongruen modulo untuk $n$ *vertex* genap, akan dijelaskan sebagai berikut:

Diketahui sebanyak $n$ tim yang bertanding, dengan $n$ genap. Pada *Round* ke- $r$, tim $i$ akan melawan tim $j$, dan berlaku ketentuan sebagai berikut.

$$i + j \equiv r \; mod \; (n - 1)$$

Dalam penggunaan Kongruen Modulo memiliki beberapa ketentuan sebagai berikut :

1. Ketentuan di atas tidak berlaku jika $i = j$ (karena tidak ada tim yang melawan dirinya sendiri).
2. Jika terdapat 2 nilai $j$ yang memenuhi, maka ambil nilai terkecil.
3. Jika hasil penjumlahan modulo menghasilkan jumlah yang sama (nilai $j$ sama dengan nilai $j$ sebelumnya untuk tim yang berbeda) maka kosongkan penjadwalan pada perhitungan tersebut agar tidak terjadi bentrok.
4. Hanya dapat diterapkan pada turnamen *Round-Robin* dengan jumlah peserta genap.

Banyaknya tim bertanding dinyatakan dengan $n$ *vertex* , ronde yang dibutuhkan dalam turnamen ($n$-1), maksimal pertandingan dalam 1 ronde ($n$/2), dan jumlah keseluruhan pertandingan $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Contoh :
Akan ditentukan penjadwalan turnamen dengan 10 tim yang akan bertanding.
$n$ = 10 tim bertanding.
Ronde yang dibutuhkan sebanyak $n$ – 1 = 10 – 1 = 9 ronde.
Jumlah maksimal pertandingan dalam satu ronde adalah $n$/2 = 10/2 = 5 pertandingan.
Sedangkan, jumlah keseluruhan pertandingan yang akan digelar $\left(\frac{10(10-1)}{2}\right) = 45$ pertandingan.
Dengan penggunaan kongruen modulo dan ketentuan tersebut, diperoleh hasil penjadwalan sebagai berikut.

Tabel 1 Tabel setengah jadi penjadwalan turnamen *round-robin* dengan menggunakan kongruen modulo.

| r/i | Tim 1 | Tim 2 | Tim 3 | Tim 4 | Tim 5 | Tim 6 | Tim 7 | Tim 8 | Tim 9 | Tim 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Round 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| Round 2 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Round 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 7 | | 5 | 4 | 3 | |
| Round 4 | 3 | | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | |
| Round 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | | 6 | 5 | |
| Round 6 | 5 | 4 | | 2 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | |
| Round 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | | 7 | |
| Round 8 | 7 | 6 | 5 | | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | |
| Round 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | |

*Note* : Warna pada Tabel 1 sebagai pelengkap penjelasan di bawah.

1. Lihat kotak dengan angka 9.
   $r$ = 1 dan $i$ = 1,
   maka (1 + $j$ ) ≡ 1 *mod* (10 – 1).
   Nilai yang memenuhi $j$ adalah 9. Sehingga, pada kotak ronde 1, tim 1 diisi dengan 9.

2. Lihat kotak dengan angka 6.
   $r$ = 1 dan $i$ = 4,
   maka (4 + $j$ ) ≡ 1 *mod* (10 – 1).

Nilai yang memenuhi $j$ adalah 6. Sehingga pada kotak ronde 1, tim 4 diisi dengan 6.

3. Pada kotak dengan angka 2 pada ronde ke 3 dengan i = 1
   $r$ = 3 dan $i$ = 1,
   maka $(1 + j) \equiv 3 \ mod \ (10 - 1)$.
   Nilai yang memenuhi $j$ adalah 2 dan 11. Ambil nilai terkecil, karena jumlah *vertex*nya hanya 10. Sehingga pada kotak ronde 3, tim 1 diisi dengan 2.

4. Lihat kotak kosong pada tabel dengan *background* merah
   Pada ronde ke-4 dengan $i$ = tim 2
   $r$ = 4 dan $i$ = 2,
   maka $(2 + j) \equiv 4 \ mod \ (10 - 1)$
   Nilai $j$ yang memenuhi adalah 2, karena $i = j$ maka kotak dikosongkan.

5. Lihat kotak kosong pada tabel dengan *background* biru
   Pada ronde ke-4 dengan $i$ = tim 10
   $r$ = 4 dan $i$ = 10, maka $(10 + j) \equiv 4 \ mod \ (10 - 1)$

Nilai j yang memenuhi adalah 3. Namun karena 3 sudah dipakai pada kotak sebelumnya ($r$ =4, i=1), maka 3 tidak dapat digunakan lagi, maka kosongkan kotak.

Untuk melengkapi tabel jadwal pertandingan turnamen, maka kolom kosong pada tabel yang berwana biru dan merah pada tiap ronde dipasangkan sebagai lawan tanding sehingga didapat tabel jadwal pertandingan turnamen lengkap sebagai berikut.

Tabel 2 Jadwal turnamen *Round-Robin* dari kongruen modulo.

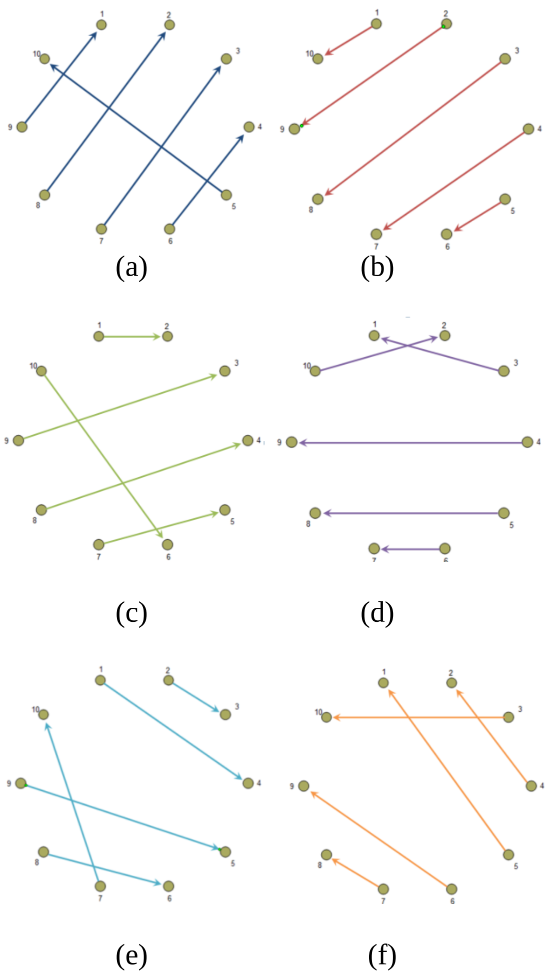
| r/i | Tim 1 | Tim 2 | Tim 3 | Tim 4 | Tim 5 | Tim 6 | Tim 7 | Tim 8 | Tim 9 | Tim 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Round 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 10 | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 |
| Round 2 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Round 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 7 | 10 | 5 | 4 | 3 | 6 |
| Round 4 | 3 | 10 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| Round 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 10 | 6 | 5 | 7 |
| Round 6 | 5 | 4 | 10 | 2 | 1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 3 |
| Round 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 9 | 10 | 7 | 8 |
| Round 8 | 7 | 6 | 5 | 10 | 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 4 |
| Round 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 10 | 9 |

Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat susunan jadwal pertandingan. Pada ronde 1 jadwal yang ditetapkan untuk pertandingan pertama adalah, antara Tim 1 melawan Tim 9, pertandingan ke-2 antara Tim 2 melawan Tim8, pertandingan ke-3 antara Tim 3 melawan Tim 7, pertandingan ke-4 antara Tim 4 melawan Tim 6, dan pertandingan ke-5 antara Tim 5 melawan Tim 10.

Pada ronde 1 ini telah ditetapkan bahwa dalam 1 ronde, maksimal hanya 5 pertandingan yang dapat digelar, oleh karena itu pertandingan ke-6 antara Tim 6 melawan Tim 4 tidak dilaksanakan, karena jika Tim 6 melawan Tim 4 sama saja dengan Tim 4 melawan Tim 6, begitu seterusnya hingga pertandingan terakhir pada ronde ke-9 pertandingan antara Tim 5 melawan Tim 4.

Misalkan Tim $i$ vs Tim $j$. Jika $i + j$ ganjil, *home* ditempati oleh $i$ atau $j$ yang lebih kecil. Jika $i + j$ genap, *home* ditempati oleh $i$ atau $j$ yang lebih besar. Anggap *home* merupakan tim yang mendominasi pertandingan.

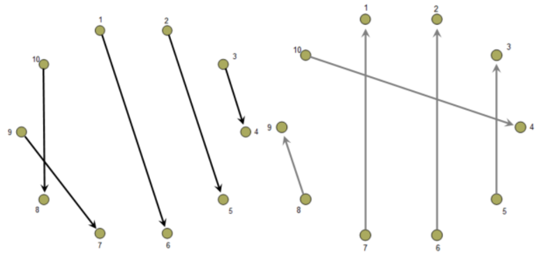
Dari jadwal pertandingan yang ada dapat langsung dibuat dalam bentuk grafnya, dimana tiap ronde pertandingan (Ronde 1 sampai 9) akan direpresentasikan kedalam graf berarah, dan *matching* sempurna sebagai berikut.



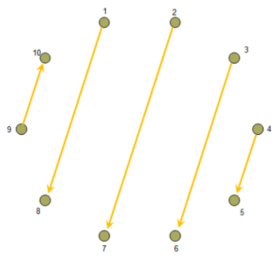
(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)



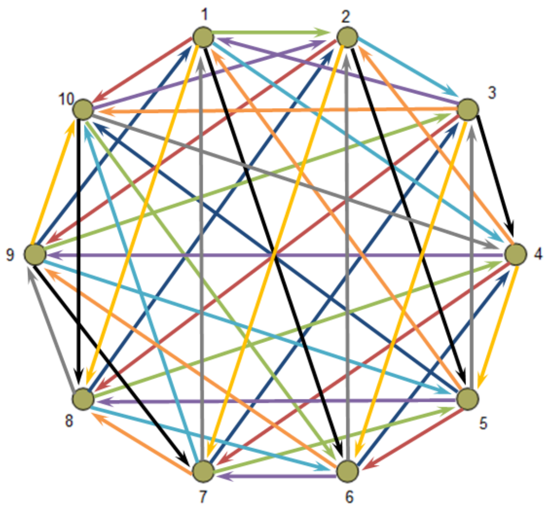
(g) (h)



(i)

Gambar 2. (a) Ronde ke-1, (b) Ronde ke-2, (c) Ronde ke-3, (d) Ronde ke-4, (e) Ronde ke-5, (f) Ronde ke-6, (g) Ronde ke-7, (h) Ronde ke-8, (i) Ronde ke-9.

Dari 9 ronde jadwal pertandingan didapat *matching* graf, jika *matching* graf pada tiap ronde digabungkan akan akan terbentuk graf lengkap berarah (turnamen) dengan rotasi di dalamnya. Berikut ini adalah gambar penggabungan *matching* graf yang dihasilkan dari ke 9 ronde :




Gambar 3 Graf lengkap berarah (turnamen) dengan jumlah 10 *vertex*.

**4.3 Metode *Rotational Tournament***

Metode *Rotational Tournament* digunakan untuk graf yang jumlah *vertex*nya ganjil. Berdasarkan Definisi *rotational tournament*, diketahui bahwa $x \to y$ ada jika $y - x \in S$ dan $S$ tidak memuat elemen identitas 0 dan operasi penjumlahan $x + y \neq 0$ da $n = 2m + 1$, maka :
Turnamen dengan jumlah 11 *vertex* merupakan turnamen regular karena setiap *vertex* mempunyai skor 5 (derajat keluar pada *vertex* sebanyak 5) dan tidak dapat diperkecil lagi. Akan dibentuk *rotational tournament* $R_G(S)$, dengan $G = Z_{11}$ dan $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Berikut tabel hasil perhitungan dari turnamen dengan *vertex* 11 menggunakandefinisi *Rotational Turnament* denan konsep grup sebagai dasarnya.

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 0 → 1 | 1 - 0 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 0 → 2 | 2 - 0 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 0 → 3 | 3 - 0 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 0 → 4 | 4 - 0 = 4 ≡ 4 (mod 11)∈ S |
| 0 → 5 | 5 - 0 = 5 ≡ 5 (mod 11) |
| 0 → 6 | 6 - 0 = 6 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 0 → 7 | 7 - 0 = 7 ≡ 7 (mod 11) |
| 0 → 8 | 8 - 0 = 8 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 0 → 9 | 9 - 0 = 9 ≡ 9 (mod 11) |
| 0 → 10 | 10 - 0 = 10 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |

(a)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 1 → 0 | 0 - 1 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 1 → 2 | 2 - 1 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 1 → 3 | 3 - 1 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 1 → 4 | 4 - 1 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 1 → 5 | 5 - 1 = 4 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 1 → 6 | 6 - 1 = 5 ≡ 5 (mod 11) |
| 1 → 7 | 7 - 1 = 6 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 1 → 8 | 8 - 1 = 7 ≡ 7 (mod 11) |
| 1 → 9 | 9 - 1 = 8 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 1 → 10 | 10 - 1 = 9 ≡ 9 (mod 11) |

(b)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 2 → 0 | 0 - 2 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 2 → 1 | 1 - 2 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 2 → 3 | 3 - 2 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 2 → 4 | 4 - 2 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 2 → 5 | 5 - 2 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 2 → 6 | 6 - 2 = 4 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 2 → 7 | 7 - 2 = 5 ≡ 5 (mod 11) |
| 2 → 8 | 8 - 2 = 6 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 2 → 9 | 9 - 2 = 7 ≡ 7 (mod 11) |
| 2 → 10 | 10 - 2 = 8 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |

(c)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 3 → 0 | 0 - 3 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 3 → 1 | 1 - 3 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 3 → 2 | 2 - 3 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 3 → 4 | 4 - 3 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 3 → 5 | 5 - 3 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 3 → 6 | 6 - 3 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 3 → 7 | 7 - 3 = 4 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 3 → 8 | 8 - 3 = 5 ≡ 5 (mod 11) |
| 3 → 9 | 9 - 3 = 6 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 3 → 10 | 10 - 3 = 7 ≡ 7 (mod 11) |

(d)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 4 → 0 | 0 - 4 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 4 → 1 | 1 - 4 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 4 → 2 | 2 - 4 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 4 → 3 | 3 - 4 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 4 → 5 | 5 - 4 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 4 → 6 | 6 - 4 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 4 → 7 | 7 - 4 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 4 → 8 | 8 - 4 = 4 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 4 → 9 | 9 - 4 = 5 ≡ 5 (mod 11) |
| 4 → 10 | 10 - 4 = 6 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |

(e)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 5 → 0 | 0 - 5 = -5 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 5 → 1 | 1 - 5 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 5 → 2 | 2 - 5 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 5 → 3 | 3 - 5 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 5 → 4 | 4 - 5 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 5 → 6 | 6 - 5 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 5 → 7 | 7 - 5 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 5 → 8 | 8 - 5 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 5 → 9 | 9 - 5 = 4 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 5 → 10 | 10 - 5 = 5 ≡ 5 (mod 11) |

(f)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 6 → 0 | 0 - 6 = -6 ≡ 5 (mod 11) |
| 6 → 1 | 1 - 6 = -5 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 6 → 2 | 2 - 6 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 6 → 3 | 3 - 6 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 6 → 4 | 4 - 6 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 6 → 5 | 5 - 6 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 6 → 7 | 7 - 6 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 6 → 8 | 8 - 6 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 6 → 9 | 9 - 6 = 3 ≡ 3 (mod 11) |
| 6 → 10 | 10 - 6 = 4 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |

(g)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 7 → 0 | 0 - 7 = -7 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 7 → 1 | 1 - 7 = -6 ≡ 5 (mod 11) |
| 7 → 2 | 2 - 7 = -5 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 7 → 3 | 3 - 7 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 7 → 4 | 4 - 7 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 7 → 5 | 5 - 7 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 7 → 6 | 6 - 7 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 7 → 8 | 8 - 7 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 7 → 9 | 9 - 7 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 7 → 10 | 10 - 7 = 3 ≡ 3 (mod 11) |

(h)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 8 → 0 | 0 - 8 = -8 ≡ 3 (mod 11) |
| 8 → 1 | 1 - 8 = -7 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 8 → 2 | 2 - 8 = -6 ≡ 5 (mod 11) |
| 8 → 3 | 3 - 8 = -5 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 8 → 4 | 4 - 8 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 8 → 5 | 5 - 8 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 8 → 6 | 6 - 8 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 8 → 7 | 7 - 8 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 8 → 9 | 9 - 8 = 1 ≡ 1 (mod 11) |
| 8 → 10 | 10 - 8 = 2 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |

(i)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 9 → 0 | 0 - 9 = -9 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 9 → 1 | 1 - 9 = -8 ≡ 3 (mod 11) |
| 9 → 2 | 2 - 9 = -7 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 9 → 3 | 3 - 9 = -6 ≡ 5 (mod 11) |
| 9 → 4 | 4 - 9 = -5 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 9 → 5 | 5 - 9 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 9 → 6 | 6 - 9 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 9 → 7 | 7 - 9 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 9 → 8 | 8 - 9 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |
| 9 → 10 | 10 - 9 = 1 ≡ 1 (mod 11) |

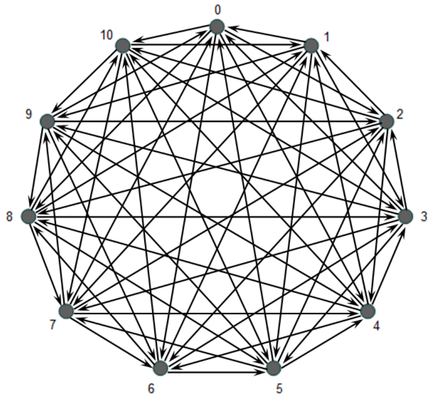
(j)

| $x \to y$ | (y - x) |
|---|---|
| 10 → 0 | 0 - 10 = -10 ≡ 1 (mod 11) |
| 10 → 1 | 1 - 10 = -9 ≡ 2 (mod 11) ∈ S |
| 10 → 2 | 2 - 10 = -8 ≡ 3 (mod 11) |
| 10 → 3 | 3 - 10 = -7 ≡ 4 (mod 11) ∈ S |
| 10 → 4 | 4 - 10 = -6 ≡ 5 (mod 11) |
| 10 → 5 | 5 - 10 = -5 ≡ 6 (mod 11) ∈ S |
| 10 → 6 | 6 - 10 = -4 ≡ 7 (mod 11) |
| 10 → 7 | 7 - 10 = -3 ≡ 8 (mod 11) ∈ S |
| 10 → 8 | 8 - 10 = -2 ≡ 9 (mod 11) |
| 10 → 9 | 9 - 10 = -1 ≡ 10 (mod 11) ∈ S |

(k)

Tabel 3. (a) *Vertex* 0 mendominasi, (b) *Vertex* 1 mendominasi, (c) *Vertex* 2 mendominasi, (d) *Vertex* 3 mendominasi, (e) Vertex 4 mendominasi, (f) *Vertex* 5 mendominasi, (g) *Vertex* 6 mendominasi, (h) *Vertex* 7 mendominasi, (i) *Vertex* 8 mendominasi, (j) *Vertex* 9 mendominasi, (k) *Vertex* 10 mendominasi.

Warna biru pada tabel merupakan hasil operasi penjumlahan yang dapat dipakai karena memenuhi ketentuan, yaitu x → y ada, jika y – x ∈ *S*. Berikut ini merupakan gambar graf lengkap berarah yang diperoleh dari hasil ke 10 tabel :




Gambar 4. Graf lengkap berarah (turnamen) dengan jumlah 11 *vertex*.

### 4.4 Graf Hamiltonian

Bentuk Hamiltonian sirkuit dan jumlah Hamiltonian dari turnamen dengan jumlah *vertex* genap dan turnamen dengan jumlah *vertex* ganjil akan berbeda. Hal ini disebabkan karena perbedaan jumlah *vertex* pada turnamen serta orientasi arah dari *edge* yang berbeda pula yang nantinya akan berpengaruh pada banyaknya bentuk Hamiltonian yang dapat diperoleh untuk masing masing turnamen. Berikut ini merupakan bentuk sirkuit Hamiltonian yang dapat diperoleh untuk masing-masing turnamen dengan *vertex* genap dan ganjil.

#### 4.4.1 Bentuk sirkuit Hamiltonian dari Turnamen dengan jumlah *vertex* 10.

Graf lengkap dengan *n* jumlah *vertex* genap dan $n \geq 4$, maka dalam graf *G* terdapat $(n\text{-}2)/2$ sirkuit Hamiltonian yang saling lepas. Karena turnamen (Gambar 3) merupakan graf lengkap dengan jumlah *vertex* 10, maka jumlah maksimal sirkuit Hamiltonian yang dapat terbentuk adalah (10-2)/2 = 4 sirkuit Hamiltonian.

Berikut bentuk sirkuit Hamiltonian yang diperoleh untuk Gambar 3.

1. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   1 → 2 → 5 → 3 → 10 → 8 → 6 → 4 → 9 → 7 → 1.
2. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   1 → 10 → 6 → 2 → 9 → 3 → 8 → 4 → 7 → 5 → 1.
3. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   1 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 2 → 3 → 1.

Jumlah sirkuit Hamiltonian yang dapat terbentuk dari turnamen (Gambar 3) adalah sebanyak 3 buah sirkuit dan tidak dapat terbentuk maksimal yaitu sebanyak 4 buah sirkuit dikarenakan *arc* atau arah dari *vertex* yang tidak memungkinkan terbentuknya sirkuit Hamiltonian pada turnamen (Gambar 3) secara maksimal.

**4.4.2 Bentuk sirkuit Hamiltonian dari Turnamen dengan jumlah *vertex* 11**

Untuk graf lengkap dengan jumlah *vertex* ganjil dapat diketatuhi bayaknya sirkuit Hamiltonian yang dapat terbentuk adalah sebanyak (n-1)/2.Pada Gambar 4 terdapat sebanyak 11 *vertex*, yang artinya sirkuit Hamiltonian yang dapat terbentuk adalah sebanyak (11-1)/2 = 5 sirkuit Hamiltonian.

Berikut bentuk sirkuit Hamiltonian yang diperoleh untuk Gambar 4.

1. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 0$.
2. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 0$.
3. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   $0 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 0$.
4. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   $0 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 0$.
5. Sirkuit Hamiltonian dengan lintasan
   $0 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 10 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 0$.

**4.5 Turnamen Matriks**

Turnamen matriks merupakan bentuk representasi bentuk awal dari graf lengkap berarah (turnamen) yang akan ditampilkan dalam bentuk berbeda yaitu matriks. Bilangan angka 0 (nol) merepresentasikan *vertex* yang tidak terhubung oleh *edge* ke *vertex* lainnya, dan bilangan angka 1 (satu) menyatakan *vertex* terhubung dengan *vertex* lainnya oleh *edge*, dan dengan Definisi Matriks Turnamen akan direpresentasikan turnamen dengan jumlah *vertex* genap dan turnamen dengan *vertex* ganjil kedalam bentuk matriks. Berikut merupakan representasi dari graf turnamen dalam bentuk matriks.

## 4.5.1 Turnamen dengan *vertex* 10.

Berikut bentuk matriks A dari Gambar 3

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks yang diperoleh dari Gambar 3 merupakan matriks berukuran 10 x 10 yang merepresentasikan bentuk turnamen dengan 10 *vertex*, dimana jika terdapat *vertex* $i$ mendominasi *vertex* $j$ dalam turnamen, maka dinotasikan sebagai 1 dan selainnya adalah 0. Dari matrik A dapat dilihat bahwa $i = 1$ yang berpasangan dengan $j = 2$ dinotasikan dengan angka 1 (pada baris ke 1 kolom ke 2), karena *vertex* 1 mendominasi *vertex* 2, sedangkan pada $i = 1$ dengan pasangan $j = 3$ dinotasikan dengan angka 0 (pada baris ke 1 kolom ke 3), karena *vertex* 1 tidak mendominasi *vertex* 3 melainkan sebaliknya. Pada $i = 2$ yang di pasangkan dengan $j = 3$ dinotasikan dengan angka 1 (pada baris ke 2 kolom ke 3), karena pada turnamen *vertex* 2 mendominasi *vertex* 3, dan pada $i = 2$ yang berpasangan dengan $j = 4$ dinotasikan dengan angka 0 (pada baris ke 2 kolom ke 4), karena *vertex* 2 tidak mendominasi *vertex* 4, melainkan sebaliknya, dan seterusnya untuk membaca representasi turnamen dalam bentuk matriks.

Matriks A dari turnamen dengan jumlah *vertex* genap (Gambar 3) merupakan matriks tidak simetri, karena pada matriks turnamen $A \neq A^t$.

## 4.5.2 Turnamen dengan vertex 11.

Berikut bentuk matriks B dari Gambar 4.

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pada matriks turnamen B dapat dilihat bahwa $i = 0$ yang berpasangan dengan $j = 2$ dinotasikan dengan angka 1 (pada baris ke 1 kolom ke 3), karena pada turnamen (Gambar 4) *vertex* 0 mendominasi *vertex* 2. Untuk $i = 0$ yang berpasangan dengan $j = 3$ dinotasikan dengan angka 0 (pada baris ke 1 kolom ke 4), karena pada turnamen (Gambar 4) *vertex* 0 tidak mendominasi *vertex* 3 melainkan sebaliknya. Pada $i = 3$ yang dipasangkan dengan $j = 5$ dinotasikan dengan angka 1 (pada baris ke 4 kolom ke 6), karena pada turnamen (Gambar 4) *vertex* 3 mendominasi *vertex* 5, dan $i = 3$ yang berpasangan dengan $j = 6$ dinotasikan dengan angka 0 (pada baris ke 4 kolom ke 7), karena *vertex* 3 tidak mendominasi *vertex* 6, melainkan sebaliknya, demikian seterusnya.

Matriks B dari turnamen dengan jumlah *vertex* ganjil (Gambar 4) merupakan matriks tidak simetri, karena pada matriks turnamen $B \neq B^t$.

## KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian ini antara lain :

Turnamen *Round-Robin* memiliki 2 solusi berbeda, solusi untuk turnamen dengan jumlah *vertex* genap adalah dengan Kongruen Modulo, sedangkan solusi untuk turnamen dengan jumlah *vertex* ganjil adalah dengan menggunakan *Rotational Tournament.* Jumlah maksimal sirkuit Hamiltonian pada turnamen dengan jumlah 10 *vertex* adalah sebanyak 3 sirkuit Hamiltonian, dan untuk turnamen dengan jumlah 11 *vertex* adalah sebanyak 5 sirkuit Hamiltonian. Matriks turnamen yang diperoleh dari representasi turnamen dengan jumlah *vertex* genap dan *vertex* ganjil merupakan matriks yang tidak simetri.

[1] Caccetta, L. (1994). *Dicrete Mathematics*. Technic Modul, Department of Mathematics and statistic Curtin University of Technology. Perth, Australia.

[2] Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc, New York.

[3] Gary and Ortud. (1993). *Applied and algorithmic Graph Theory*. McGraw Hill, Inc. United States of America.

[4] Graham, R. L. Spencer, J. H. (1971), "*A constructive solution to a tournament problem*", Canadian Mathematical Bulletin. New York.

[5] Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. Springer. New York.

[6] Lipschutz, S. dan Lipson, M.L. (2002). *Solved Problems in Discrete Mathematics.* Salemba Teknika, Jakarta. Diterjemahkan oleh Tim Editor Penerbit Salemba Teknika.

[7] Munir, R., (2010). *Matematik Diskrit Revisi Keempat.* Informatika Bandung, Bandung.

[8] Rosen, K. H. (2004). *Discrete Mathematics And Its Spplications*. CRC Press.

[9] Wibisono, S. (2008). *Matematika Diskrit*. Graha Ilmu, Yogyakarta.