

Operator 3-Join pada Dua Graf yang Masing-masing adalah 1-edge fault-tolerant Hamiltonian graf

Perti susanti, Wamiliana, dan Fitriani

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung
 Jl. Prof Dr. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
 Email : perti_s@yahoo.com

Abstrak : Hamiltonian graf merupakan salah satu jenis graf yang banyak diobservasi, dimana Hamiltonian graf merupakan graf yang memuat Hamiltonian sirkuit. Jika salah satu vertex atau edge di Hamiltonian graf tersebut dibuang dan graf tersebut masih memuat Hamiltonian sirkuit, maka graf tersebut adalah 1-fault-tolerant Hamiltonian. Pada penelitian ini akan didiskusikan tentang operator 3-join pada dua graf yang masing-masing graf adalah 1-edge-fault tolerant Hamiltonian graf, teorema-teorema, bukti-bukti, serta contoh-contoh yang berkaitan dengan sifat operator tersebut.

Kata Kunci : 1-fault-tolerant Hamiltonian graphs, operator 3-join, Hamiltonian sirkuit.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Graf Hamiltonian adalah graf yang mengandung sirkuit Hamiltonian. Sirkuit Hamiltonian adalah graf sirkuit yang setiap vertex tepat dilewati satu kali kecuali titik asal.

Salah satu bagian dari graf Hamiltonian adalah 1-fault-tolerant Hamiltonian Graph. Pada penelitian ini akan didiskusikan tentang dua sifat operator 3-join yang merupakan salah satu bagian dari 1-fault-tolerant Hamiltonian Graph tersebut. Seperti yang telah diketahui, Hamiltonian Graph merupakan salah satu jenis graf dimana graf tersebut merupakan graf sirkuit yang berderajat genap dan setiap vertex pada Hamiltonian Graph hanya dapat dilewati satu kali (kecuali vertex awal dan vertex akhir). 1-fault-tolerant Hamiltonian Graph adalah graf Hamiltonian yang jika salah satu edge atau vertex dihapus pada graf tersebut $(G - \{f\})$ maka graf tersebut tetap Hamiltonian, dengan f merupakan anggota dari edge atau vertex ($f \in E \cup V$).

LANDASAN TEORI

Graf $G = (V, E)$ terdiri dari $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut vertex (titik) yang tidak kosong, dan objek $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang unsur – unsurnya disebut edge (garis) yang boleh kosong, sehingga setiap edge e_{ij} diidentifikasi dengan pasangan (v_i, v_j) dari vertex [2].

Derajat (degree) adalah jumlah edge yang menempel pada sebuah vertex v_i , dengan loop dihitung dua kali, dan ditulis dengan $d(v_i)$ [2].

Walk adalah barisan berhingga dari titik (vertex) dan garis (edge), dimulai dan diakhiri dengan vertex, sedemikian sehingga setiap edge menempel dengan vertex sebelum dan sesudahnya. Tidak ada edge yang muncul lebih dari sekali dalam suatu walk [2].

Lintasan (path) adalah walk yang semua titik (vertex) nya berbeda [7].

Sirkuit adalah walk yang diawali dan diakhiri dengan vertex yang sama [2].

Graf yang setiap vertexnya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur atau regular. Apabila derajat setiap vertex adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r [5].

Graf kubik (Cubic Graphs)

Graf kubik adalah suatu graf teratur dimana setiap vertexnya memiliki derajat 3 atau sering disebut graf teratur derajat 3 (3 regular graph) [1].

Neighbours

Dalam teori graf, suatu vertex u dan v adalah neighbours, jika $u, v \in G$, dan vertex u dan v dihubungkan oleh edge yang sama [3].

1-Fault Tolerant Hamiltonian Graphs

Suatu graf $G=(V, E)$ adalah 1-edge fault tolerant Hamiltonian jika $G-\{e\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $e \in E$ dan suatu graf $G = (V, E)$ adalah 1-vertex fault tolerant Hamiltonian jika $G-\{v\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $v \in V$. Setiap graf 1-edge

fault tolerant Hamiltonian adalah Hamiltonian. Suatu graf $G = (V, E)$ adalah *1-fault tolerant Hamiltonian* jika $G - \{f\}$ adalah Hamiltonian untuk setiap $f \in E \cup V$ [6].

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan didiskusikan tentang sifat operator 3-join pada *1-fault-tolerant Hamiltonian graph* yang merupakan salah satu bagian dari graf Hamiltonian. Sebelum mendiskusikan sifat operator 3-join, terlebih dahulu akan dijelaskan definisi dari operator 3-join sebagai berikut.

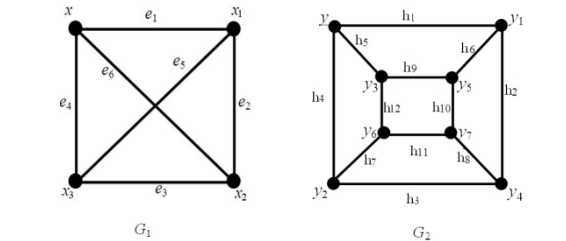
Misal G_1 dan G_2 adalah 2 graf. Diasumsikan bahwa $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Misalkan x adalah vertex berderajat 3 pada G_1 dan y adalah vertex berderajat 3 pada G_2 . Selibhnya, diasumsikan bahwa $N(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan $N(y) = \{y_1, y_2, y_3\}$, $N(x)$ merupakan semua neighbors dari x dan $N(y)$ merupakan semua neighbors dari y . Operator 3-join dari G_1 dan G_2 pada x dan y menghasilkan graf K yang disajikan sebagai berikut.

$$V(K) = (V(G_1) - \{x\}) \cup (V(G_2) - \{y\})$$

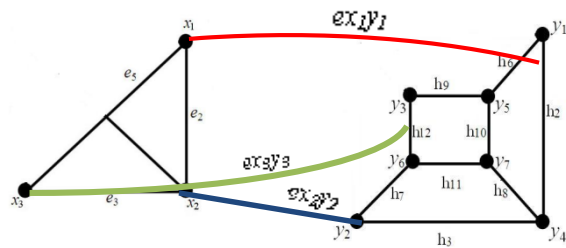
$$E(K) = (E(G_1) - \{(x, x_i) \mid 1 \leq i \leq 3\}) \cup (E(G_2) - \{(y, y_i) \mid 1 \leq i \leq 3\}) \cup \{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq 3\}$$

[4].

Contoh.



(a) Graf G_1 dan G_2



(b) Graf G_k dihubungkan dengan operator 3-join

Gambar 1. Contoh operator 3-join

Lemma 3.1 (Hsu and Lin, 2009)

$G = J(G_1, N(x); G_2, N(y))$ adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* jika dan hanya jika kedua G_1 dan G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*.

Bukti:

Misalkan G adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Klaim bahwa kedua G_1 dan G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Dengan simetri, cukup dibuktikan bahwa G_1 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Misalkan e adalah salah satu edge di G_1 . Maka e adalah salah satu edge yang menempel pada x atau tidak.

Asumsikan bahwa e tidak menempel pada x

Jika e tidak menempel pada x maka e adalah edge di G . Karena G adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*, maka ada *Hamiltonian cycle* C di $G - \{e\}$. Karena tepat ada 3 edge di G gabungan dari $V(G_1) - \{x\}$ sampai $V(G_2) - \{y\}$, C dapat ditulis dengan $\langle x_i, P, x_j, y_j, Q, y_i, x_i \rangle$ untuk beberapa $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ dengan $i \neq j$, dimana P adalah *Hamiltonian path* dari $G_1 - \{x\}$ gabungan x_i sampai x_j . Jelas bahwa $\langle x, x_i, P, Q, x_j, x \rangle$ bentuk suatu *Hamiltonian cycle* dari $G - \{e\}$.

Asumsikan bahwa e menempel pada x

Tanpa menghilangkan bentuk umumnya, asumsikan bahwa $e = (x, x_1)$. Karena G adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*, sehingga ada *Hamiltonian cycle* C dari $G - \{x_1, y_1\}$. Oleh karena itu tepat ada tiga edge gabungan dari $V(G_1) - \{x\}$ sampai $V(G_2) - \{y\}$, C dapat ditulis dengan $\langle x_2, P, x_3, Q, y_2, x_2 \rangle$, dimana P adalah *Hamiltonian path* dari $G_1 - \{x\}$. Jelas $\langle x, x_2, P, x_3, x \rangle$ bentuk *Hamiltonian cycle* dari $G - \{x, x_1\}$. Maka G_1 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*.

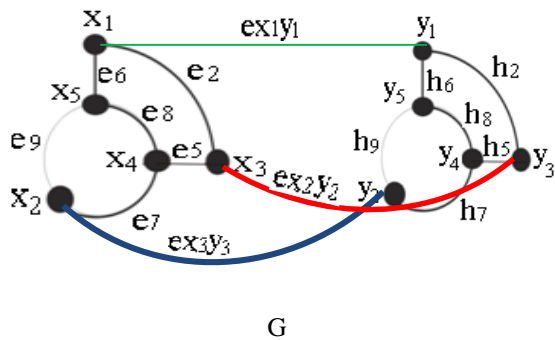
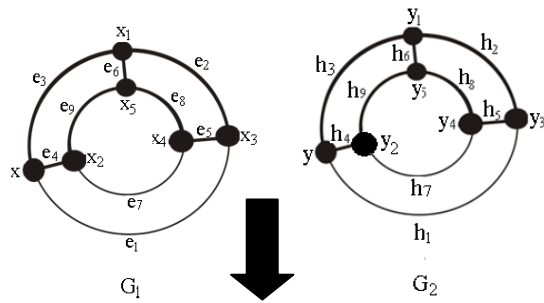
Asumsikan bahwa kedua G_1 dan G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Misal e adalah suatu edge di G . Seandainya $e \in \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, 3\}$. Maka e adalah salah satu di $E(G_1)$ atau di $E(G_2)$. Tanpa menghilangkan bentuk umumnya, asumsikan bahwa e ada di $E(G_1)$. Karena G_1 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*, sehingga ada *Hamiltonian cycle* C_1 di $G_1 - \{e\}$. Sehingga C_1 dapat ditulis dengan $\langle x, x_i, P, x_j, x \rangle$ untuk beberapa $i, j \in \{1, 2, 3\}$ dengan $i \neq j$. Misalkan k adalah satu elemen di $\{1, 2, 3\} - \{i, j\}$. Karena G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*, sehingga ada *Hamiltonian cycle* C_2 dari $G_2 - \{y_k\}$. Maka C_2 dapat ditulis dengan $\langle y, y_j, Q, y_i, y \rangle$. Jelas bahwa, $\langle x_i, P, x_j, y_j, Q, y_i, x_i \rangle$ bentuk *Hamiltonian cycle* dari $G - \{e\}$.

Asumsikan bahwa $e \in \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, 3\}$. Tanpa menghilangkan bentuk umumnya, asumsikan bahwa $e = (x, y_1)$. Karena G_1 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*, maka ada *Hamiltonian cycle*

C_1 di $G_1 - \{x, x_1\}$. Karena G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*, maka ada *Hamiltonian cycle* C_2 di $G_2 - \{y, y_1\}$. Sehingga C_2 dapat ditulis dengan $\langle y, y_3, Q, y_2, y \rangle$. Jelas $\langle x_2, P, x_3, y_3, Q, y_2, x_2 \rangle$ bentuk *Hamiltonian cycle* dari $G - \{e\}$. Jadi G adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*.

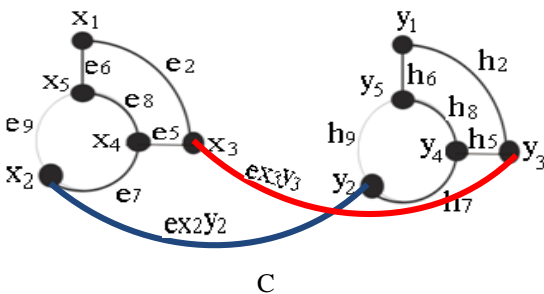
Berikut beberapa contoh dari Lemma 3.1.

Contoh 1 Lemma 3.1.



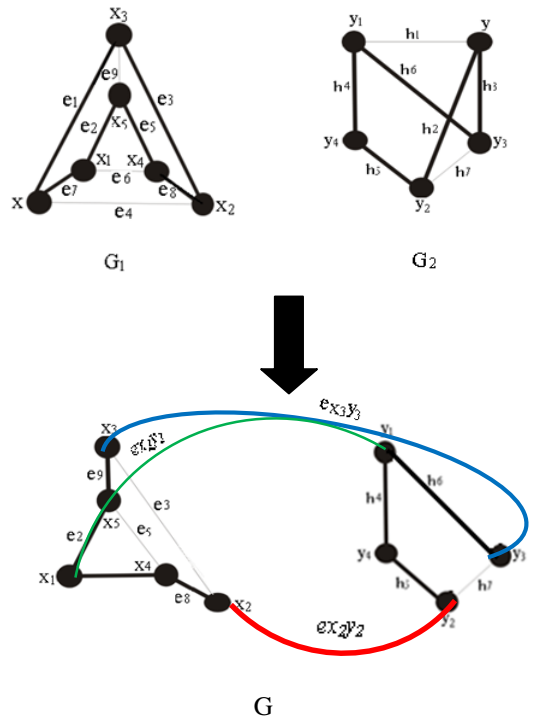
Gambar 2. Graf *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*

Gambar G_1 dan G_2 merupakan gambar graf *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* (terlihat pada edge yang ditebalkan). Berdasarkan Lemma 3.1, jika G_1 dan G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* maka graf G juga merupakan *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Salah satu *Hamiltonian cycle* C pada graf G yaitu $\langle x_2, e_7, x_4, e_8, x_5, e_6, x_1, e_2, x_3, ex_3y_3, y_3, h_2, y_1, h_5, y_5, h_8, y_4, h_7, y_2, ex_2y_2, x_2 \rangle$ sehingga jika ex_1y_1 dihapus terbentuk graf Hamiltonian. *Hamiltonian cycle* pada graf G ditunjukkan pada gambar berikut.



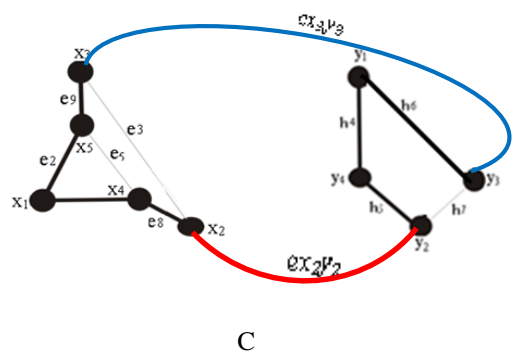
Gambar 3. *Hamiltonian Cycle* pada graf G

Contoh 2 Lemma 3.1 :



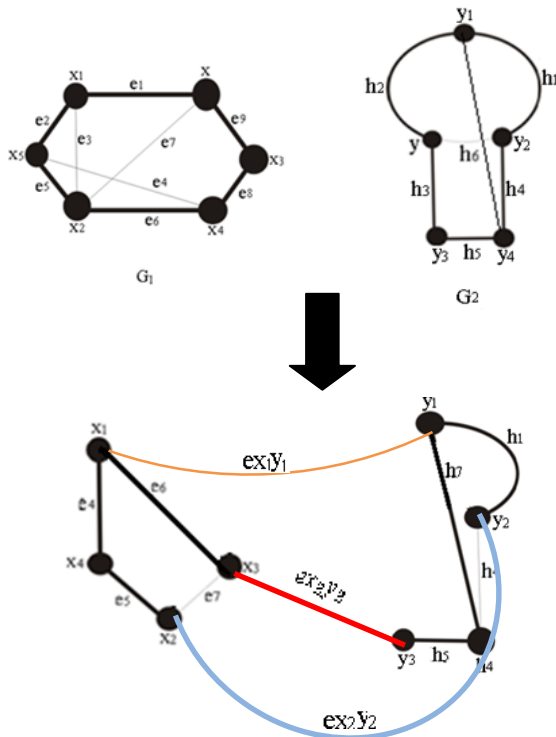
Gambar 4. Graf *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*

Gambar G_1 dan G_2 merupakan gambar graf *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* (terlihat pada edge yang ditebalkan). Berdasarkan Lemma 3.1, jika G_1 dan G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* maka graf G juga merupakan *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Salah satu *Hamiltonian cycle* C pada graf G $\langle x_2, e_8, x_4, e_6, x_1, e_2, x_5, e_9, x_3, x_3y_3, y_3, h_6, y_1, h_4, y_4, h_5, y_2, ex_2y_2, x_2 \rangle$ sehingga jika ex_1y_1 dihapus terbentuk graf Hamiltonian. *Hamiltonian cycle* pada graf G ditunjukkan pada gambar berikut.



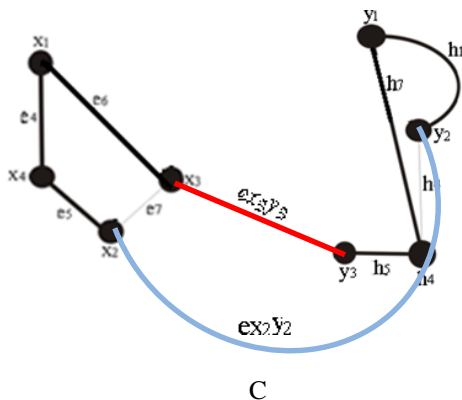
Gambar 5. *Hamiltonian cycle* pada graf G

Contoh 3 Lemma 3.1 :



Gambar 6. Graf *1-edge fault-tolerant* Hamiltonian

Gambar G_1 dan G_2 merupakan gambar graf *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* (terlihat pada *edge* yang ditebalkan). Berdasarkan Lemma 3.1, jika G_1 dan G_2 adalah *1-edge fault-tolerant Hamiltonian* maka graf G juga merupakan *1-edge fault-tolerant Hamiltonian*. Salah satu Hamiltonian cycle C pada graf G yaitu $(x_2, e_5, x_4, e_4, x_1, e_6, x_3, ex_3y_3, y_3, h_5, y_4, h_7, y_1, h_1, y_2, ex_2y_2, x_2)$ sehingga jika *edge* ex_1y_1 dihapus terbentuk graf Hamiltonian. Hamiltonian cycle pada graf G ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 7. Hamiltonian cycle pada graf G

KESIMPULAN

“ $G = J(G_1, N(x); G_2, N(y))$ adalah *1-edge-fault-tolerant Hamiltonian Graph* jika dan hanya jika kedua graf G_1 dan G_2 adalah *1-edge-fault-tolerant Hamiltonian Graph*”.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Brinkmann, G., Goedgebeur, J., and McKay, B.D., 2011. Generation of Cubic Graphs: *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 69 – 80.
- [2]. Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc, New York.
- [3]. Harju, T. 2011. *Lecture Notes on Graph Theory*. Departemen of Mathematics, University of Turku.
- [4]. Hsu, L.H., and Lin, C.K. 2009. *Graph Theory and interconnection network*. Taylor and Francis Group, LLC, New York.
- [5]. Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit Revisi Keempat*. Informatika Bandung.
- [6]. Teng, Y.H., Tan, J.J.M., Hsu, L.H. 2005. Honeycomb Rectangular Disks. *Parallel Computing* **31**.
- [7]. Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit*. Graha Ilmu, Yogyakarta.