PENENTUAN INTERVAL SEIMBANG DARI HIMPUNAN TITIK TITIK DENGAN DUA WARNA

Attiya Yuliana dan Wamiliana

Jurusan Matematika FAKULTAS MIPA Universitas Lampung
Jl. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145

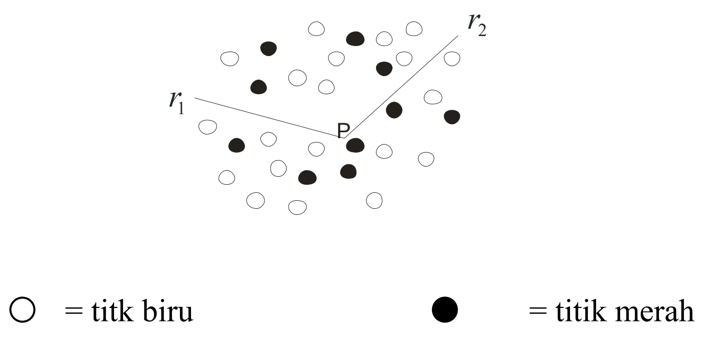
ABSTRAK

Misalkan *n,m* adalah jumlah titik merah dan biru pada bidang. Diberikan titik *P* pada bidang untuk setiap bilangan bulat $1 \leq k \leq n$, sehingga terdapat dua *rays* r_1 dan r_2 yang berasal dari titik, dimana kedua *rays* tersebut diasumsikan sebagai dua buah garis paralel sedemikian sehingga daerah yang terbentuk terdapat tepat *k* titik merah dan $\lfloor \lambda k \rfloor$ titik biru. Daerah yang terbentuk akan menjadi sebuah daerah konveks. Kemudian, titik-titik yang ada akan disusun untuk menentukan apakah ada interval seimbang dari suatu susunan *n* titik merah dan *m* titik biru pada garis dalam posisi umum. Penyusunan titik merah dan biru pada garis dasari oleh proyeksi orthogonal titik merah dan biru pada bidang kepada garis orthogonal.Untuk memperoleh interval tersebut maka harus memenuhi syarat perlu dan cukupnya. Dari hasil penelitian dan pembahasan syarat perlu dan cukup suatu susunan *n* titik merah dan *m* titik biru pada garis untuk kasus $m < n$ adalah kebalikan dari syarat perlu dan cukup untuk kasus $m \geq n$.

Kata kunci : interval seimbang, posisi umum, proyeksi ortogonal.

1. PENDAHULUAN

Diberikan himpuanan titik merah dan biru pada bidang. Jika diberikan sebuah titik P dan *rays* ℓ maka titik dan *rays* tersebut akan membagi bidang tersebut menjadi daerah-daerah yang seimbang maupun tak seimbang.



Gambar 1. Daerah yang dibentuk oleh 2 buah ray dengan P *finite*

Permasalahan ini didasari oleh sebuah teorema yaitu *Teorema Ham Sandwich*, yang ide awalnya berasal dari sebuah kasus dengan 3 buah objek yang merupakan bagian dari *sandwich* yaitu selembar keju , sebuah ham, dan 2 lembar roti yang dianggap menjadi 1 objek. 2 dari 3 buah objek tersebut yang akan direpresentasikan sebagai himpunan titik merah dan biru pada bidang yang kemudian dibagi menjadi beberapa bagian dengan ukuran yang sama.

Dalam diskusi ini akan dibahas permasalahan apabila diberikan dua buah himpunan titik yaitu sejumlah titik merah (n) dan titik biru (m) pada bidang, kemudian diberikan titik P pada bidang untuk setiap bilangan bulat $1 \le k \le n$, sehingga terdapat dua *rays* r_1 dan r_2 yang berasal dari titik P sedemikian sehingga daerah yang terbentuk dari r_1 dan r_2 terdapat tepat k titik merah dan $\lfloor \lambda k \rfloor$ titik biru. Kemudian pilih sebuah titik P, maka dua *rays* akan menjadi dua garis paralel dan dua buah daerah yang terbentuk akan menjadi sebuah daerah konveks baik terhubung maupun yang tak terhubung

Untuk mempermudah dalam menentukan apakah ada atau tidaknya sebuah daerah konveks terhubung yang telah diberikan oleh dua buah garis paralel pada bidang jika diketahui terdapat tepat k titik merah dan $\lfloor \lambda k \rfloor$ titik biru, dan dengan didasari oleh proyeksi orthogonal titik merah dan biru pada bidang kepada garis orthogonal, maka ada atau tidaknya daerah konveks terhubung tersebut dapat di ketahui dengan melakukan proses penentuan apakah ada interval seimbang dari suatu susunan n titik merah dan m titik biru pada garis dalam posisi umum.

Berikut ini pada Bagian 2 akan diuraikan hasil-hasil yang telah ada pada literature; pada Bagian 3 akan didiskusikan tentang Penentuan Nilai Rasio, Jumlah Titik Merah, dan Titik Biru (λ, *k,* dan *h*) pada Interval Seimbang, dan Syarat perlu dan cukup agar interval seimbang tersebut ada, dan pada Bagian 4 akan diberikan kesimpulan dari hasil penelitian ini.

2. HASIL DARI LITERATUR

Untuk sebuah susunan dari sejumlah titik merah dan biru pada sebuah garis akan dilambangkan dengan R dan B, dimana R dan B adalah himpunan titik merah dan titik biru . Sebuah susunan X dengan n titik merah dan m titik biru pada garis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_{m+n}\}$$

dimana setiap x_i dimisalkan sebagai sebuah titik merah atau biru yang disusun dari kiri ke kanan. Susunan X juga dapat di tulis sebagai berikut:

$$R(1) \cup B(1) \cup \cdots \cup R(s) \cup B(s)$$

dimana susunan tersebut harus dalam posisi umum. Posisi umum adalah suatu posisi dimana tidak ada dua buah titik atau lebih yang berada pada posisi yang sama secara vertikal pada suatu bidang, sehingga ketika titik-titik tersebut diproyeksikan ke garis, tidak ada dua buah titik atau lebih yang menempati posisi yang sama (Kaneko and Kano, 2005).

(a) (b)

Gambar 2. (a) titik pada posisi umum, (b) titik tidak pada posisi umum

Definisi Interval Seimbang (Kaneko and Kano, 2005), Interval yang terdapat sejumlah titik merah dan biru adalah interval seimbang dimana interval tersebut memiliki tepat *k* titik merah dan *h* titik biru.

Untuk kasus $n \le m$ syarat penting dan cukup interval seimbangnya akan diberikan oleh Teorema berikut:

Teorema 2.3 (Kaneko and Kano, 2005)

Misal *n, m, k, h* adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $1 \le n \le m$, $1 \le k \le n$ dan $1 \le h \le m$. Misalkan *n* titik merah dan *m* titik biru pada sebuah garis dalam posisi umum, maka terdapat sebuah interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru jika dan hanya jika

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1\right)(h-1) < m < \left(\left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor\right)(h+1) \qquad (2.1)$$

dimana untuk kondisi yang paling kanan hasilnya akan tak terbatas ketik $k = 1$.

Bukti:

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan 5 Lemma berikut

Lemma 2.1 (Kaneko and Kano, 2005)

Jika

$$m \leq \left(\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1 \right)(h-1) \qquad (2.2)$$

maka terdapat sebuah susunan dengan *n* titik merah dan *m* titik biru, sehingga susunan tersebut tidak memiliki interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru.

Bukti:

Misal $t = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$, maka $m \leq (t+1)(h-1)$. Berdasarkan susunan titik merah dan biru yang telah dijelaskan sebelumnya, maka dapat dibuat suatu susunan

$$B(1) \cup R(1) \cup B(2) \cup R(2) \cup \ldots \cup B(t+1) \cup R(t+1)$$

dimana $|B(i)| \leq h-1$ untuk $\forall\ 1 \leq i \leq t+1$ dan $|B(1) \cup \ldots \cup B(t+1)| = m$. Sedangkan $|R(i)| \leq k+1$ untuk $\forall\ 1 \leq i \leq t$ dan $|R(t+1)| = n-(k+1)t$ dengan $n-(k+1)t \geq 0$ dan $|R(1) \cup \ldots \cup R(t+1)| = n$

Maka susunan ini pasti tidak memiliki interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru. Selama susunan ini terdapat suatu interval yang memiliki *h* titik biru pasti terdapat *R (j)* untuk $\forall\ 1 \leq j \leq t$, sehingga secara tidak langsung interval tersebut terdapat paling sedikit *k+1* titik merah.

Lemma 2.2 (Kaneko and Kano, 2005)

Jika

$$m > \left(\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1 \right)(h-1) \qquad (2.3)$$

maka setiap susunan dengan *n* titik merah dan *m* titik biru memiliki sebuah interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan paling sedikit *h-1* titik biru.

Bukti :

Misal $t = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ dan dimisalkan X adalah sebuah susunan dengan *n* titik merah dan *m* titik biru dengan mengkontradiksikan Lemma 2.2 yaitu X dibuat tidak memilliki

ISBN : 978-979-1165-74-7

interval seimbang dan diasumsikan bahwa setiap interval terdapat tepat k titik merah dan memiliki paling banyak h-1 titik biru.

Misal $r_1, r_2,...,r_n$ adalah titik merah pada X yang disusun dari kiri ke kanan. Untuk $1 \le i < j \le n$ dengan i,j bilangan bulat, misal $I\ (i,j)$ dinotasikan sebagai sebuah interval terbuka (r_i, r_j) dan misalkan $B(\ i, j\ )$ dinotasikan sebagai himpunan titik biru pada $I\ (i,j)$. Selanjutnya $B(-\infty, i)$ dinotasikan sebagai titik biru yang terdapat dalam interval terbuka $(-\infty, i)$ dan begitu pula dengan $B(\ i,\infty)$, sehingga untuk setiap bilangan bulat $1 \le s \le t-1$. Maka, interval $I(s\ (k+1), (s+1)\ (k+1))$ terdapat tepat k titik merah dengan $\{r_j|\ s\ (k+1) + 1 \le j \le (s\ +1)\ (k\ +\ 1)\ -\ 1\}$. Dengan demikian, dari asumsi awal diperoleh $|B(s\ (k+1), (s+1)\ (k+1))| \le h - 1$. Demikian pula dengan interval $(-\infty, r_{k+1})$ yang terdapat tepat k titik merah, maka $|B(-\infty, k+1)| \le h - 1$. Selain itu, selama $n < (\ t\ +1)\ (\ k + 1)$, maka $I\ (\ t\ (\ k\ +\ 1),\infty)$ memiliki paling banyak k titik merah dan $|B(t\ (\ k\ +\ 1),\ \infty)| \le h - 1$. Sehingga,

$$|B| \le |B(-\infty, k+1) \cup B\ (k+1, 2\ (k+1) \cup \ldots \cup B\ (t\ (k+1), \infty\ )|$$
$$\le (\ t + 1)\ (\ h - 1)$$

Hal ini kontradiksi dari Persamaan 2.3.

Lemma 2.3 (Kaneko and Kano, 2005)

Jika $2 \le k$ dan

$$m \ge \left(\left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor\right)(h+1) \qquad (2.4)$$

maka terdapat sebuah interval dengan n titik merah dan m titik biru, yang mana susunan tersebut tidak memiliki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru.

Bukti:

Misalkan $t = \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor$ akibatnya $t\ (k+1)\ +\ 1 \le n \le (t\ +1)\ (k\ -\ 1\ )$ dan $m \ge t\ (h\ +\ 1)$ (diperoleh dari Persamaan 2.4), sehingga dapat dibuat susunan dengan n titik merah dan m titik biru

$$R(1) \cup B(1) \cup R(2) \cup B(2) \cup \ldots \cup R(t+1) \cup B(t+1)$$

dimana $|R(i)| \le k - 1$ untuk setiap $1 \le i \le t + 1$, maka $|R(1) \cup \ldots \cup R\ (\ t\ +\ 1)\ | = n$. Sedangkan $|B(i)| = h + 1$ untuk setiap $1 \le i \le t$ dan untuk $|B(t + 1)| = m - (h+1)t$ dengan

ISBN : 978-979-1165-74-7

$m-(h+1)t \geq 0$ dan $|B(1) \cup \ldots \cup B(t+1)| = m$. Dengan demikian susunan ini pasti tidak memiliki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru selama setiap interval terdpat k titik merah yang harus terdapat $B(j)$ untuk $\exists\ 1 \leq j \leq t$.

Lemma 2.4 (Kaneko and Kano, 2005)
Jika $2 \leq k$ dan

$$m < \left(\left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor\right)(h+1) \qquad (2.5)$$

maka setiap susunan dengan n titik merah dan m titik biru memiliki interval yang terdapat tepat k titik merah dan paling banyak h titik biru.

Bukti:

Misalkan $t = \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor$, kemudian $t(k-1)+1 \leq n$. Misal X adalah susunan dengan n titik merah dan m titik biru dan dimisalkan bahwa X dibuat tidak memiliki interval seimbang, yakni dengan mengasumsikan bahwa setiap interval terdapat tepat k titik merah dan memiliki paling sedikit $h+1$ titik biru.

Misalkan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ adalah titik merah pada X yang di susun dari kiri ke kanan. Untuk bilangan bulat yang terdapat pada $1 \leq i < j \leq n$, misalkan bahwa $\mathrm{I}[i,j]$ adalah interval tertutup $[\ R_i, R_j\ ]$, dan misalkan $B'(i,j)$ dinotasikan sebagai himpunan titik biru yang terdapat pada $\mathrm{I}[i,j]$.

Jika terdapat bilangan bulat $0 \leq s \leq t-2$, maka $\mathrm{I}[k+s(k-1), k+(s+1)(k-1)]$ terdapat tepat k titik merah dengan $\{r_j |\ k+s\ (k-1) \leq j \leq k+(s+1)\ (k+1)\}$. Dengan demikian dari asumsi diperoleh $|B'(s\ k+s(k-1),\ k+(s+1)\ (k-1))| \geq \quad h+1$. Begitu pula apabila dengan $|B'(1,k)| \geq h+1$. Sehingga,

$$\begin{aligned}|B'| &\geq |B(1,k) \cup B'(k, k+(k-1) \cup \ldots \\ &\cup B'(k+(t-2)(k-1), k+(t-1)(k-1))| \\ &\geq t(h+1)\end{aligned}$$

ISBN : 978-979-1165-74-7

Hal ini kontradiksi dari Persamaan 2.5.

Lemma 2.5 (Kaneko and Kano, 2005)
Dengan mempertimbangkan sebuah susunan dengan n titik merah dan m titik biru pada sebuah garis. Maka andaikan jika terdapat dua buah interval I dan J sedemikian sehingga I dan J secara berturut – turut terdapat tepat k titik merah, I terdapat paling banyak h titik biru. Jika J terdapat paling sedikit h titik biru, maka terdapat sebuah interval yang memiliki tepat k titik merah dan h titik biru.

Bukti:
Jika himpunan titik merah yang terdapat dalam I dan J memiliki jumlah yang sama, maka Lemma 2.5 akan disesuaikan. Asumsikan bahwa $I \cap R \neq J \cap R$, dimana R dinotasikan sebagai himpunan n titik merah, dan asumsikan pula bahwa titik merah yang paling kiri pada I berada pada kiri J.

Akan ditunjukkan bahwa I dapat dipindahkan ke J langkah per langkah sedemikian sehingga jumlah titik merah tetap yaitu k dan jumlah titik biru akan berubah berkurang atau bertambah 1 pada setiap langkah. Berikut adalah langkah-langkah pemindahan I ke J:

1. Hapus titik biru sebelah kiri dan yang berada paling kiri titik merah pada interval I satu per satu.
2. Kemudian tambahkan dan susun secara berurutan titik biru yang dihapus tadi satu per satu ke sebelah kanan titik merah dengan menghapus titik biru yang berada paling kanan I dan notasikan hasil susunan tadi dengan $I_{1.}$
3. Selanjutnya, secara bersamaan hapus titik merah yang paling kiri pada I_1.
4. Tambahkan titik merah yang dihapus tadi ke sebelah kanan dari I_1, dan diperoleh I_2, yang juga terdapat tepat k titik merah dan jumlah titik biru yang sama dengan $I_{1.}$

Dengan mengulang langkah-langkah ini, maka dapat diperoleh sebuah interval yang himpunan titik merah yang sama dengan J. Untuk itu, pemindahan I ke J dapat dilakukan pada cara yang diinginkan. Akibatnya, dapat ditemukan interval yang dibutuhkan yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru.

ISBN : 978-979-1165-74-7

3. Penentuan Nilai Rasio, Jumlah Titik Merah, dan Titik Biru (λ, *k,* dan *h*) pada Interval Seimbang

Sesuai dengan definisi dan metodologi penelitian untuk menentukan interval seimbang dari dua himpunan titik pada garis, maka akan terlebih dahulu dicari nilai λ untuk menentukan jumlah *h*. λ merupakan rasio atau perbandingan dari jumlah titik merah (n) dan titik biru (m). Pada dasarnya, nilai λ untuk kasus $m \geq n$ dan $m < n$ adalah sama, tetapi nilai λ pada kasus $m < n$ digunakan untuk menentukan jumlah *k*. Sehingga, nilai dari λ diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{m}{n} & ; untuk\ m \geq n \\ \dfrac{n}{m} & ; untuk\ m < n \end{cases}$$

Setelah nilai λ diketahui maka nilai h dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$h = \lfloor \lambda k \rfloor$$

Tetapi hal ini tidak berlaku untuk kondisi $m < n$ karena $\lambda = \dfrac{n}{m}$ dan yang akan diduga terlebih dahulu adalah nilai h, sehingga λ digunakan untuk menentukan nilai k. Maka cara untuk mencari nilai k adalah

$$k = \lfloor \lambda h \rfloor$$

Setelah nilai k dan h diperoleh maka kita dapat mengetahui apakah interval tersebut merupakan interval seimbang atau bukan, dengan cara memeriksa apakah interval tersebut terdapat tepat k titik merah dan h titik biru. Banyaknya susunan yang dapat dibuat dapat diketahui dengan mengunakan kombinasi.

Dengan didasari pada Teorema 2.3 maka berikut ini di berikan syarat penting dan syarat cukup untuk suatu interval seimbang bila diberikan n titik merah dan m titik biru pada sebuah garis.

Contoh 1 (Kasus ***m*** > ***n)***

Diberikan sebuah susunan yang terdapat 10 titik merah dan 15 titik biru pada sebuah garis dalam posisi umum. Apakah ada interval seimbang yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru?

Penyelesaian:

Karena $n \leq m$, maka nilai λ diperoleh dengan cara

$$\lambda = \frac{m}{n} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

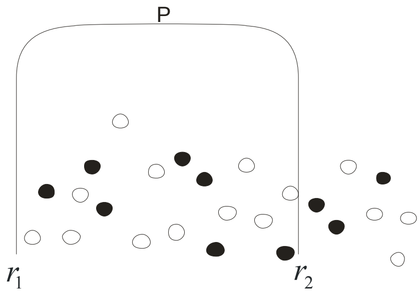
Setelah nilai λ telah diperoleh, maka nilai *h* dapat diperoleh yaitu sebagai berikut:

$$k = 1 \rightarrow h = \lfloor 1{,}5(1) \rfloor = 1$$
$$k = 2 \rightarrow h = \lfloor 1{,}5(2) \rfloor = 3$$
$$k = 3 \rightarrow h = \lfloor 1{,}5(3) \rfloor = 4$$
$$k = 4 \rightarrow h = \lfloor 1{,}5(4) \rfloor = 6$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$k = 10 \rightarrow h = \lfloor 1{,}5(10) \rfloor = 15$$

Susunan ini akan memiliki interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru jika *k* = {1, 2, 3, 4, 5,10}, sedangkan untuk yang lainnya ({*k* = 6, 7, 8, 9}) tidak memiliki interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru. Hasil ini diperoleh berdasarkan Teorema 2.3.

Berikut adalah sebuah susunan yang memilki interval yang terdapat tepat *k* titik merah dan *h* titik biru berdasarkan hasil di atas:

Gambar 3. Salah satu contoh interval yang terdapat tepat 3 titik merah dan 4 titik biru



Gambar 4. Daerah konveks yang terhubung yang terdapat 3 titik merah dan 4 titik biru

Contoh 2 (Kasus $m = n$)

Diberikan suatu susunan titik merah dan biru pada posisi umum, dengan 10 titik merah dan 10 titik biru. Apakah ada interval seimbang yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru?

Penyelesaian:

Karena $n \le m$, maka nilai λ diperoleh dengan cara

$$\lambda = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1$$

Setelah nilai λ telah diperoleh, maka nilai h dapat diperoleh yaitu sebagai berikut:

$k = 1 \rightarrow h = \lfloor 1(1) \rfloor = 1$

$k = 2 \rightarrow h = \lfloor 1(2) \rfloor = 2$

$k = 3 \rightarrow h = \lfloor 1(3) \rfloor = 3$

$k = 4 \rightarrow h = \lfloor 1(4) \rfloor = 4$

$\vdots$

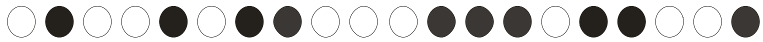
$\vdots$

$k = 10 \rightarrow h = \lfloor 1(10) \rfloor = 10$

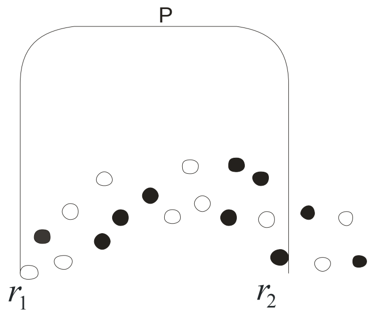
Susunan ini akan memi2□□□ interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru jika k = {1, 2, 3, 4, 5,10}, sedangkan untuk yang lainnya ({k = 6, 7, 8, 9}) tidak memiliki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru. Hasil ini diperoleh berdasarkan Teorema 2.3.

ISBN : 978-979-1165-74-7

Berikut adalah sebuah susunan yang memilki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru berdasarkan hasil di atas:



Gambar 5. Salah satu contoh interval yang terdapat tepat 2 titik merah dan 4 titik biru



Gambar 6. Daerah konveks yang terhubung dengan 4 titik merah dan 2 titik biru

Contoh 3 (Kasus $\boldsymbol{m < n}$)

Syarat Cukup dan Perlu

Untuk kondisi $m < n$ yang merupakan keterbalikan dari kondisi 1, maka syarat lengkap dan cukupnya adalah berikut:

$$\left(\left\lfloor \frac{m}{h+1} \right\rfloor + 1\right)(k-1) < n < \left(\left\lfloor \frac{m-1}{h-1} \right\rfloor\right)(k+1) \qquad (4.1)$$

Karena kondisi ini keterbalikan dari kondisi 1 maka syarat lengkap dan cukupnya pun merupakan keterbalikan dari kondisi 1. Hal ini dapat diperkuat dengan ketika mencari nilai λ dan penggunaan nilai λ. Pada kondisi 1 digunakan untuk mencari nilai h dan ditentukan dengan persamaan $\lambda = \frac{n}{m}$ sedangkan pada kondisi 2 digunakan untuk menentukan nilai k dan ditentukan dengan persamaan $\lambda = \frac{m}{n}$.

Contoh Untuk Kasus $\boldsymbol{m < n}$

Contoh :

Misalkan diberikan sebuah susunan yang terdapat 20 titik merah dan 10 titik biru pada sebuah garis dalam posisi umum. Apakah ada interval seimbang yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru?

Penyelesaian:

Karena $n > m$, maka nilai λ diperoleh dengan cara

$$\lambda = \frac{n}{m} = \frac{20}{10} = 2$$

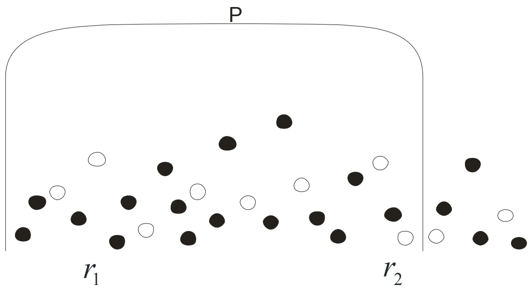
Setelah nilai λ telah diperoleh, maka nilai k dapat diperoleh yaitu sebagai berikut:

$$h = 1 \rightarrow k = \lfloor 2(1) \rfloor = 2$$
$$h = 2 \rightarrow k = \lfloor 2(2) \rfloor = 4$$
$$h = 3 \rightarrow k = \lfloor 2(3) \rfloor = 6$$
$$h = 4 \rightarrow k = \lfloor 2(4) \rfloor = 8$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$h = 10 \rightarrow k = \lfloor 2(10) \rfloor = 20$$

Maka, susunan ini akan memiliki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru jika h = {1, 2, 3, 5, 10}, sedangkan untuk yang lainnya ({h = 4,6,7,8,9}) tidak memiliki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru. Hal ini diperoleh karena untuk kasus $n > m$ syarat lengkap dan cukupnya merupakan kebalikan dari syarat lengkap dan cukup untuk kasus $n \leq m$.

Berikut adalah sebuah susunan yang memilki interval yang terdapat tepat k titik merah dan h titik biru berdasarkan hasil tersebut:

Gambar 7. Salah satu contoh interval seimbang yang terdapat tepat 2 titik merah dan 4 titik biru



Gambar 8. Suatu daerah konveks yang terhubung dengan 4 titik merah dan 2 titik biru

3. KESIMPULAN

Jika syarat cukup dan perlu untuk sebuah interval yang terdapat *n* titik merah dan *m* titik biru dipenuhi, maka akan terdapat interval seimbang yang memiliki tepat k titik merah dan h titik biru, yang berarti bila terdapat interval seimbang pada garis maka akan terdapat daerah terhubung yang konveks pada R^2.

DAFTAR PUSTAKA

Kaneko, Atsushi *and* Kano, M. 2005. *A Balance Interval of Two Sets of points on a line,Combinatorial Geometry and Graph Theory (Spinger)*. 108-112.

Lipschutz, Seymour. 1998. *Schaum's Outlines, Edisi ke 2.* Mc Graw-Hill International Edisition. U. S. A, United State

Grimaldi, Ralph p. 1999. *Discrite and Combinatorial Mathematics*. Addison Wesley Logman, Inc. Unetid States of America.

Kaneko, Atsushi *and* Kano, M. 2003. Discrete geometry on red and blue points in the plane-Asurvey, *Discrete and computational Geometry The Goodman-Pollack Festchrift (springer)*. 551-570.

Bárány, I., *and* Mataušek, J. 2001. *Simultaneous Partitions of Measure by k-fans*. Diakses pada tanggal 28 April 2008 *http//citeseer. Ist. Psu. Edv /216655.html.*