

ISSN : 2337-9057



PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

**SEMINAR HASIL PENELITIAN
SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI
15 DESEMBER 2012**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012**



DAFTAR ISI

	Halaman
Kelompok Matematika	
PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID Anggun Novita Sari, Muslim Ansori dan Agus Sutrisno	1-6
Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 Anwar Sidik, Muslim Ansori dan Amanto	7-14
PENERAPAN GRAF DEBRUIJN PADA KONSTRUKSI GRAF EULERIAN 21 Fazrie Mulia, Wamiliana, dan Fitriani	15-
REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN 27 Herlisa Anggraini, Muslim Ansori, Amanto	22-
ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG 33 HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL) Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno	28-
Algoritma Untuk Mencari Grup Automorfisma Pada Graf Circulant 37 Vebriyan Agung, Ahmad Faisol, Amanto	34-
KEISOMORFISMAAN GEOMETRI AFFIN 41 Pratiwi Handayani, Muslim Ansori, Dorrah Aziz	38-
METODE PENGUKURAN SUDUT MES SEBAGAI KEBIJAKAN PENENTUAN 1 SYAWAL 44 Mardiyah Hayati, Tiryono, dan Dorrah	42-
KE-ISOMORFISMAAN GEOMETRI INSIDENSI 47 Marlina, Muslim Ansori dan Dorrah Aziz	45-
TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN \mathbb{F} 53 Nur Rohmah, Muslim Ansori dan Amanto	48-
KAJIAN ANALITIK GEOMETRI PADA GERAK MEKANIK POLISI TIDUR (POLDUR) UNTUK 56 PENGGERAK DINAMO Nurul Hidayah Marfiatin, Tiryono Ruby dan Agus Sutrisno	54-
<i>INTEGRAL RIEMANN FUNGSI BERNILAI VEKTOR</i> 63 Pita Rini, Dorrah Aziz, dan Amanto	57-

ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF <i>WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS</i> DAN GRAF <i>CYCLIC-CUBES</i> Ririn Septiana, Wamiliana, dan Fitriani	64-71
Ring Armendariz 77 Tri Handono, Ahmad Faisol dan Fitriani	72-
PERKALIAN DAN AKAR KUADRAT UNTUK OPERATOR <i>SELF-ADJOINT</i> 81 Yuli Kartika, Muslim Ansori, Fitriani	78-

Kelompok Statistika

APROKSIMASI DISTRIBUSI <i>STUDENT</i> TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Eflin Marsinta Uli, Warsono, dan Widiarti	82-85
ANALISIS CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN NEW JERSEY Eva fitrilia, Rudi Ruswandi, dan Widiarti	86-93
PENDEKATAN DIDISTRIBUSI GAMMA TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Jihan Trimita Sari T, Warsono, dan Widiarti	94-97
PERBANDINGAN ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOM Latusiania Oktamia, Netti Herawati, Eri Setiawan	98-103
PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM (<i>EXPECTATION MAXIMIZATION</i>) Nurashri Partasiwi, Dian Kurniasari dan Widiarti	104-109
KAJIAN CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN METODE KANADA RozaZelvia, Rudi Ruswandi dan Widiarti	110-115
ANALISIS KOMPONEN RAGAM DATA HILANG PADA RANCANGAN <i>CROSS-OVER</i> 121 Sorta Sundry H. S, Mustofa Usman dan Dian Kurniasari	116-
PENDEKATAN DISTRIBUSI GOMPERTZ PADA CADANGAN ASURANSI JIWA UNTUK METODE 126 ZILLMER DAN ILLINOIS Mahfuz Hudori, Rudi Ruswandi dan Widiarti	122-
KAJIAN RELATIF BIAS METODE <i>ONE-STAGE</i> DAN <i>TWO-STAGE CLUSTER SAMPLING</i> Rohman, Dian Kurniasari dan Widiarti	127-130
PERBANDINGAN UJI HOMOGENITAS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOMV Tika Wahyuni, Netti Herawati dan Eri Setiawan	131-136

PENDEKATAN DISTRIBUSI KHI-KUADRAT TERHADAP *GENERALIZED LAMBDA* 137-
140
DISTRIBUTION (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA
Tiyas Yulita , Warsono dan Dian Kurniasari

Kelompok Kimia

TRANSESTERIFIKASI MINYAK SAWIT DENGAN METANOL DAN KATALIS HETEROGEN 141-
147
BERBASIS SILIKA SEKAM PADI ($MgO-SiO_2$)
EviRawati Sijabat, Wasinton Simanjuntak dan Kamisah D. Pandiangan

EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING SEBAGAI INHIBITOR KERAK 148-
153
KALSIUM KARBONAT ($CaCO_3$) DENGAN METODE *UNSEEDED EXPERIMENT*
Miftasani, Suharso dan Buhani

EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING WULUH SEBAGAI INHIBITOR 154-
160
KERAK KALSIUM KARBONAT ($CaCO_3$) DENGAN METODE *SEEDED EXPERIMENT*
PutriFebriani Puspita, Suharso dan Buhani

IDENTIFIKASI SENYAWA AKTIF DARI KULIT BUAH ASAM KERANJI (*Dalium indum*) 161-
168
SEBAGAI INHIBITORKOROSIBAJA LUNAK
Dewi Kartika Sari, Ilim Wasinton dan Simanjuntak

TransesterifikasiMinyakSawitdenganMetanoldanKatalisHeterogenBerbasis 169-
175
SilikaSekamPadi(TiO_2/SiO_2)
Wanti Simanjuntak, Kamisah D. Pandiangan dan Wasinton Simanjuntak

UJI PENDAHULUAN HIDROLISIS ONGGOK UNTUK MENGHASILKAN GULA REDUKSI 176-
182
DENGAN BANTUAN ULTRASONIKASI SEBAGAI PRAPERLAKUAN
Juwita Ratna Sari dan Wasinton Simanjuntak

STUDI FORMULASI PATI SORGUM-GELATIN DAN KONSENTRASI *PLASTICIZER* DALAM 183-
190
SINTESA BIOPLASTIK SERTA UJI *BIODEGRADABLE* DENGAN METODE FISIK
Yesti Harryzona dan Yuli Darni

Kelompok Fisika

Pengaruh Variasi Suhu Pemanasan Dengan Pendinginan Secara Lambat Terhadap Uji 191-
195
Bending Dan Struktur Mikro Pada Baja Pegas Daun AISI 5140
Adelina S.E Sianturi, Ediman Ginting dan Pulung Karo-Karo

Pengaruh Kadar CaCO_3 terhadap Pembentukan Fase Bahan Superkonduktor BSCCO-2212 201 dengan Doping Pb (BPSCCO-2212) Ameilda Larasati, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	196-
Variasi Kadar CaCO_3 dalam Pembentukan Fase Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 dengan 207 Doping Pb (BPSCCO-2223) Fitri Afriani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	202-
Sintesis Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 Tanpa Doping Pb Pada Berbagai Kadar CaCO_3 212 Heni Handayani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	208-
Pengaruh Variasi Waktu Penarikan dalam Pembuatan Lapisan Tipis TiO_2 dengan Metode 218 Pelapisan Celup Dian Yulia Sari dan Posman Manurung	213-
Pengaruh Suhu Sintering terhadap Karakteristik Struktur dan Mikrostruktur Komposit 225 Aluminosilikat $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ Berbahan Dasar Silika Sekam Padi Fissilla Venia Wiranti dan Simon Sembiring	219-
Sintesis dan Karakterisasi Titania Silika dengan Metode Sol Gel 230 Revy Susi Maryanti dan Posman Manurung	226-
Uji Fotokatalis Bahan TiO_2 yang ditambahkan dengan SiO_2 pada Zat Warna Metilen Biru 236 Violina Sitorus dan Posman Manurung	231-
KARAKTERISTIK STRUKTUR DAN MIKROSTRUKTUR KOMPOSIT B_2O_3 - SiO_2 BERBASIS 241 SILIKA SEKAM PADI DENGAN VARIASI SUHU KALSINASI Nur Hasanah, Suprihatin, dan Simon Sembiring	237-
RANCANG BANGUN DAN ANALISIS ALAT UKUR MASSA JENIS ZAT CAIR BERBASIS 247 MIKROKONTROLER ATmega8535 Prawoto, Arif Surtoto, dan Gurum Ahmad Pauzi	242-
ANALISIS BAWAH PERMUKAAN KELURAHAN TRIKORA KABUPATEN NGADA NTT 250 MENGGUNAKAN METODE GPR (<i>Ground Penetrating Radar</i>) DAN GEOLISTRIK R. Wulandari, Rustadi dan A. Zaenudin	248-
Analisis Fungsionalitas Na_2CO_3 Berbasis CO_2 Hasil Pembakara Tempurung Kelapa RizkySastia Ningrum, Simon Sembiring dan Wasinton Simanjuntak	251-256

Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4

Anwar Sidik¹, Muslim Ansori², Amanto³

Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia¹

anwarsdk45@gmail.com

Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia²

Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia³

Abstrak

Dalam ruang topologi terdapat sifat yang mengekspresikan seberapa banyak element himpunan yang terlingkupi dalam sebuah himpunan terbuka. Atau dengan lebih khusus lagi, sifat ini menggambarkan seberapa rapat sebuah himpunan bagian tertutup dapat terlingkupi dalam sebuah himpunan terbuka. Ukuran kerapatan inilah yang akan menjadi pemisah antara himpunan bagian satu dengan himpunan bagian yang lain yang disebut aksioma separasi. Yang bila diurutkan berdasarkan angka 0 sampai 4 menunjukkan kenaikan derajat separasinya. Setiap ruang topologi yang memenuhi ke lima aksioma ini akan dibedakan berdasarkan derajat separasinya yaitu T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 yang kemudian memiliki sifat-sifat baru dan terdapat hubungan *hereditary* dalam tiap tingkatan separasinya.

Kata kunci: topologi, ruang topologi, aksioma separasi.

1. Pendahuluan

Konsep ruang topologi dibangun berdasarkan konsep kekonvergenan pada bidang Euclidean yang diperluas menjadi ruang metrik. Dari konsep ruang metrik ini kemudian dikembangkan definisi ruang topologi. Walaupun didasarkan pada konsep kekonvergenan, ruang topologi secara praktis didefinisikan berdasarkan konsep himpunan terbuka, persekitaran dan *closure*, yang secara mendasar mewakili sifat kekonvergenan.

Dalam penelitian ini penulis akan memaparkan definisi dan teorema-teorema yang membangun ruang topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 dan sifat-sifat yang saling mempengaruhi masing-masing tingkatan separasinya.

2. Landasan Teori

2.1 Ruang Metrik

Diberikan X sebuah himpunan. Fungsi

$$d(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

dikatakan sebagai metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ jika hanya jika $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Himpunan X dengan metrik d disebut ruang metrik dan dinotasikan dengan (X, d) . Fungsi $d(x, y)$ disebut jarak antara x dan y .

2.2 Persekitaran Bola

Himpunan convex

$$B_d(a, r) = \{x: d(x, a) < r\}$$

disebut bola terbuka dengan jari-jari r dan titik pusat a .

2.3 Himpunan Terbuka

Diberikan (X, d) merupakan ruang metrik.

Himpunan bagian $A \subset X$ dikatakan terbuka, jika setiap $x \in A$, terdapat bola $B(x, r)$ sedemikian hingga

$$x \in B(x, r) \subset A.$$

2.4 Himpunan Tertutup

Diberikan (X, d) ruang metrik. Himpunan bagian B dari X dikatakan tertutup di (X, d) ketika komplemen $X - B$ adalah himpunan terbuka di (X, d) .

2.5 Topologi

Diberikan X merupakan himpunan tak-nol dan \mathcal{T} adalah topologi di X , jika dan hanya jika

1. $\mathcal{T} \subset P(X)$
2. $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $X \in \mathcal{T}$

- Jika $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, maka $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$, atau setiap anggota irisan terbatas dari \mathcal{T} juga merupakan anggota dari \mathcal{T} .
- Setiap gabungan dari anggota \mathcal{T} juga merupakan anggota \mathcal{T} .

Sifat-Sifat Topologi

- Irisan dari sebarang kumpulan topologi dari X adalah juga merupakan topologi di X .
- Gabungan dari topologi belum tentu sebuah topologi.

Bukti :

- Diberikan $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ merupakan kumpulan topologi di X .

$$\forall \omega \in \Omega : \emptyset, X \in T_\omega$$

Karena itu $\emptyset, X \in \bigcap_\omega T_\omega$

Misalkan $A, B \in \bigcap_\omega T_\omega$,

$$\begin{aligned} (A, B \in \bigcap_\omega T_\omega) &\Rightarrow (\forall \omega : A, B \in T_\omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall \omega : A \cap B \in T_\omega) \Rightarrow (A \cap B \in \bigcap_\omega T_\omega) \end{aligned}$$

Andaikan $\{A_i\}$ adalah kumpulan dari himpunan sedemikian hingga

$$\begin{aligned} (\forall i : A_i \in \bigcap_\omega T_\omega) &\Rightarrow (\forall i : A_i \in T_\omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall \omega : \bigcup_i A_i \in T_\omega) \Rightarrow (\bigcup_i A_i \in \bigcap_\omega T_\omega) \end{aligned}$$

Oleh karena itu jika $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ adalah kumpulan dari topologi pada X maka $\bigcap_\omega T_\omega$ adalah topologi di X .

- Diberikan himpunan

$$X = \{a, b, c\}$$

dan dua topologi di X

$$T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

dan

$$T_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$$

kemudian

$$T_1 \cup T_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$$

bukan topologi karena

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin T_1 \cup T_2$$

2.6 Ruang Topologi

Diberikan (X, \mathcal{T}) berisi himpunan X dan topologi \mathcal{T} di X disebut ruang topologi.

2.7 Titik Adherent

Diberikan $A \subset X$. Titik $x \in X$ adherent ke A , jika untuk setiap $N_0(x)$

$$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$$

2.8 Closure Himpunan

Closure A , dinotasikan dengan \bar{A} , adalah himpunan dari semua titik di X adherent ke A .

$$\bar{A} = \{x \in X : \forall N_0(x) : N_0(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

2.9 Himpunan Tertutup

Himpunan $A \subset X$ dikatakan tertutup jika $X - A$ adalah himpunan terbuka.

- Jika $x \in A$, maka

$$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in \bar{A} \quad \bar{A} \subset A$$

- $(A \text{ tertutup}) \Rightarrow (A = \bar{A})$

Jika A tertutup, maka $X - A$ terbuka. Setiap $x \in A$ memiliki persekitaran $N_0(x)$,

sedemikian hingga

$$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in \bar{A} \text{ dan } \bar{A} \subset A$$

Dari persamaan (4) dan (2), diperoleh $\bar{A} = A$.

$$(A - \bar{A}) \Rightarrow (A \text{ tertutup})$$

Karena $\bar{A} = A$, setiap $x \in \bar{A}$ memiliki $N_0(x)$, sedemikian hingga

$$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$$

Karena itu, $X - A$ terbuka untuk A tertutup.

3. Hasil dan Pembahasan

4.1. Ruang- T_0

Definisi 4.1.1 Ruang- T_0 (Milewski)

Ruang (X, \mathcal{T}) dikatakan sebagai ruang T_0 , jika untuk dua element berbeda $a, b \in X$, terdapat persekitaran paling sedikit satu. Yang tidak berisi yang lainnya.

Contoh 4.1.1

Diberikan $X = \{0, 1\}$. Tunjukkan bahwa X merupakan ruang- T_0 menggunakan konsep topologi indiskrit.

Solusi:

Dalam topologi indiskrit, $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ tidak dapat membagi 0 dari 1 atau 1 dari 0.

Diketahui himpunan $X = \{0, 1\}$ dengan topologi $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Sehingga, untuk dua titik 0 dan 1, terdapat himpunan terbuka $\{0\}$, sedemikian hingga

$$0 \in \{0\} \text{ tetapi } 1 \notin \{0\}$$

Oleh karena itu, (X, T) adalah ruang- T_0 . Perlu dicatat bahwa setiap ruang metrik (X, d) adalah ruang- T_0 .

Contoh 4.1.2

Tunjukkan bahwa ruang pseudometrik bukan merupakan ruang- T_0 ?

Solusi:

Pseudometrik di X adalah fungsi $D: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, sedemikian hingga

1. $D(x, y) = D(y, x)$
2. $D(x, y) \leq D(x, z) + D(z, y)$

Untuk setiap $x, y, z \in X$.

Jadi, memungkinkan untuk dua titik yang tak sama $a, b \in X$.

$$D(a, b) = 0$$

Sebarang persekitaran a memuat b dan sebarang persekitaran b memuat a .

Oleh karena itu, ruang pseudometrik bukan ruang- T_0 . Titik $a, b \in X$ saling unik, namun karena itu, $D(a, b) = 0$ tidak dapat dipisahkan.

4.2 Ruang- T_1

Definisi 4.2.1 Ruang- T_1

Ruang topologi X disebut sebagai ruang- T_1 jika untuk setiap dua titik berbeda $p, q \in X$, masing-masing termuat dalam himpunan terbuka yang tidak saling memuat satu sama lain. Atau dengan kata lain, terdapat persekitaran U dari p dan V dari q sedemikian hingga $p \in U, q \notin U$ dan $q \in V, p \notin V$. Himpunan terbuka U dan V tidak selalu saling lepas.

Contoh:

Setiap ruang metrik X merupakan ruang- T_1 , dengan membuktikan bahwa setiap himpunan bagian terbatasnya tertutup.

Diketahui bahwa, dalam ruang metrik (X, d) , kondisi dari sebuah himpunan A tertutup. Dapat di ditampilkan oleh implikasi

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right) \Rightarrow (x \in \bar{A})$$

$$\bar{\{a\}} = \{a\}$$

Jadi, setiap ruang metrik adalah ruang- T_1

Ada juga ruang topologi yang bukan merupakan ruang- T_1 . Sebagai contoh ruang X , memuat dua titik $X = \{a, b\}$ dengan topologi $T = \{\emptyset, X\}$, bukan merupakan ruang- T_1 . Telah diperlihatkan sebelumnya bahwa setiap ruang metrik dapat dinilai sebagai ruang topologi.

Berdasarkan definisi, jelas bahwa sebarang ruang- T_1 juga merupakan ruang- T_0 .

Teorema 4.2.2 Ruang topologi (X, T) disebut ruang- T_1 . Jika dan hanya jika setiap element tunggal himpunan bagian X tertutup.

Bukti:

Misalkan X merupakan ruang- T_1 dan $p \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $\{p\}^c$ terbuka.

Misalkan $x \in \{p\}^c$ maka $x \neq p$, berdasarkan aksioma T_1

\exists himpunan terbuka G_x sedemikian hingga $x \in G_x$ dan $p \notin G_x$

Karena itu $x \in G_x \subset \{p\}^c$, maka

$$\{p\}^c = \bigcup \{G_x : x \in \{p\}^c\}.$$

Oleh karena itu maka $\{p\}^c$ terbuka dan $\{p\}$ tertutup.

Sebaliknya, andaikan $\{p\}$ tertutup untuk setiap $p \in X$. Misalkan $a, b \in X$ dengan $a \neq b$.

$$a \neq b \Rightarrow b \in \{a\}^c$$

Karena $\{a\}^c$ himpunan terbuka memuat b namun tidak memuat a . Dengan cara yang sama $\{b\}^c$ adalah himpunan terbuka yang memuat a namun tidak memuat b . Oleh karena itu, X adalah ruang- T_1 .

Dengan jelas diketahui bahwa setiap ruang- T_1 adalah ruang- T_0 . Namun, himpunan $X = \{a, b\}$ dengan topologi yang mengandung himpunan terbuka $\emptyset, \{a\}$ dan X adalah ruang- T_0 yang bukan ruang- T_1 .

Teorema 4.2.2 Setiap himpunan bagian dari ruang- T_1 juga merupakan ruang- T_1 .

Bukti:

Diberikan (X, T) ruang- T_1 dan (Y, T_Y) adalah himpunan bagian dari (X, T) . Akan ditunjukkan bahwa setiap himpunan bagian singleton $\{p\}$ dari Y adalah himpunan tertutup T_Y atau dengan cara lain, bahwa $Y - \{p\}$ adalah himpunan terbuka T_Y .

Karena (X, T) adalah ruang- T_1 , $X - \{p\}$ adalah T -terbuka. Namun $p \in Y \subset X \Rightarrow Y \cap (X - \{p\}) = Y - \{p\}$

Karena itu dengan definisi himpunan bagian, $Y - \{p\}$ adalah himpunan terbuka T_Y . Karena itu (Y, T_Y) juga merupakan ruang- T_1 .

Teorema 4.2.3 Setiap ruang- T_1 terbatas adalah ruang diskrit.

Bukti:

Diberikan X merupakan sebarang himpunan terbatas dan \mathcal{T} adalah topologi di X . Sedemikian hingga (X, \mathcal{T}) adalah ruang- T_1 . Ruang (X, \mathcal{T}) adalah t_1 , jika dan hanya jika setiap satu titik himpunan bagian dari X tertutup. Karena gabungan dua himpunan bagian tertutup adalah tertutup. Dapat disimpulkan bahwa seluruh himpunan bagian dari X tertutup. Untuk itu, seluruh himpunan bagian X terbuka dan \mathcal{T} merupakan topologi diskrit.

Teorema 4.2.4 (X, \mathcal{T}) merupakan ruang- T_1 . Sedemikian hingga dua sifat di bawah ini ekuivalen.

- $a \in X$ adalah titik akumulasi dari A .
- Setiap himpunan terbuka yang memuat a memuat takterbatas titik di A .

Bukti:

1. \Rightarrow 2

Misalkan $a \in X$ adalah titik akumulasi A , dan G adalah himpunan terbuka $a \in G$, memuat hanya nilai terbatas dari titik A yang berbeda dari a .

Kemudian

$$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A \cap [G - \{a\}]$$

B adalah himpunan bagian terbatas dari ruang- T_1 , karena itu, himpunan ini tertutup dan $X - B$ terbuka. Diberikan

$$H = (X - B) \cap G.$$

Maka H terbuka, $a \in H$ dan H tidak memuat titik A yang berbeda dari a .

Karena itu, a bukan merupakan titik akumulasi dari A .

2. \Rightarrow 1

Berdasarkan pada definisi titik akumulasi.

4.3 Ruang- T_2

Definisi 4.3.1 Ruang- T_2

Ruang topologi X disebut ruang- T_2 atau ruang Hausdorff jika untuk setiap dua titik berbeda $p, q \in X$. Terdapat persekitaran U dari p dan V dari q sedemikian hingga $U \cap V = \emptyset$.

Contoh:

Setiap ruang metrik X merupakan ruang- T_2 .

Diberikan $a, b \in X$, diketahui bahwa $d(a, b) = \epsilon > 0$.

Diketahui bola terbuka $G = S(a, \frac{1}{3}\epsilon)$ dan $H = S(b, \frac{1}{3}\epsilon)$, berpusat di a dan b . Akan ditunjukkan bahwa G dan H saling lepas.

Jika $p \in G \cap H$, maka $d(a, p) < \frac{1}{3}\epsilon$ dan

$d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon$; karena itu menggunakan pertaksamaan segitiga diperoleh

$$d(a, b) \leq d(a, p) + d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$$

Namun hasil ini kontradiktif dengan pernyataan bahwa $d(a, b) = \epsilon$. Karena itu G dan H saling lepas. Contoh a dan b termuat secara berurutan pada bola terbuka G dan H yang saling lepas.

Jadi, X merupakan ruang- T_2 .

Teorema 4.3.1 Setiap ruang- T_2 adalah ruang- T_1 .

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa ruang- T_2 adalah ruang- T_1 . Misalkan (X, \mathcal{T}) adalah ruang- T_2 . Diberikan $a \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, $x \neq a$

Terdapat himpunan terbuka A_x , sedemikian hingga $x \in A_x$ dan $a \notin A_x$, jadi

$$X - \{a\} = \bigcup_{x \in X} A_x$$

dan $X - \{a\}$ adalah himpunan terbuka sebagai sebuah gabungan kumpulan dari himpunan terbuka A_x .

Karena itu, $\{a\}$ tertutup dan X adalah ruang- T_1 .

Akan ditunjukkan juga bahwa terdapat ruang- T_1 yang bukan merupakan ruang- T_2 .

Diberikan himpunan X , memuat 0 dan seluruh titik $\frac{1}{n}$, untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

$$X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

Didefinisikan topologi \mathcal{T} pada X : himpunan yang memuat 1 terbuka, jika dan hanya jika merupakan komplement dari himpunan terbatas. Himpunan yang tidak memuat titik 1 terbuka, jika merka terbuka dalam hal topologi bilangan real. Karena itu, setiap himpunan yang memuat 0 adalah tak terbatas.

Oleh karena itu, titik 0 dan 1 tidak dapat dipisahkan oleh dua himpunan terbuka yang saling bebas. Maka merupakan ruang- T_1 namun bukan ruang- T_2 .

Teorema 4.3.2 Himpunan X dengan order topologi merupakan ruang- T_2 .

Bukti:

Diberikan X mewakili sebarang himpunan terurut oleh $\langle, (X, \langle)$. Diberikan S mewakili kumpulan himpunan bagian X dalam bentuk

$$\{x: x \langle a\} \text{ atau } \{x: a \langle x\}$$

Untuk semua $a \in X$.

S membentuk subbasis untuk topologi \mathcal{T} di X , disebut topologi terurut terinduksi oleh \langle . Akan ditunjukkan bahwa (X, \mathcal{T}) adalah ruang- T_2 .

Diberikan $a, b \in X$ mewakili dua titik berbeda. Karena X terurut sempurna, dari dapa $a \langle b$ atau $b \langle a$. Misalkan $a \langle b$. Maka terdapat dua kemungkinan:

1. Sebuah element $c \in X$ ada, sedemikian hingga

$$a \langle c \langle b$$

maka

$$\{x: x \langle c\} \text{ dan } \{x: c \langle x\}$$

Secara berurutan merupakan persekitaran saling bebas dari a dan b .

2. Tidak ada $c \in X$, sedemikian hingga

$$a \langle c \langle b$$

maka

$$\{x: x \langle b\} \text{ dan } \{x: a \langle x\}$$

Secara berurutan merupakan persekitaran saling bebas dari a dan b .

Teorema 4.3.3 jika (X, \mathcal{T}) ruang- T_2 dengan A himpunan bagian terbatas dari X maka A tertutup.

Bukti:

Diberikan $x \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $\{x\}$ tertutup. Diberikan

$$y \in X - \{x\}$$

Kemudian terdapat persekitaran U dari y , sedemikian hingga

$$x \in U$$

Karena itu,

$$U \subset X - \{x\}$$

dan himpunan $X - \{x\}$ terbuka. Jadi, $\{x\}$ tertutup.

Sebarang himpunan bagian $\{x_1, \dots, x_n\}$ ruang Hausdorff tertutup.

Teorema 4.3.4 Jika (X, \mathcal{T}) ruang- T_2 , terdapat $A \subset X$, dengan x titik *cluster* A dan U adalah persekitaran di X maka $U \cap A$ tak terbatas.

Bukti:

Misalkan, kebalikannya bahwa $U \cap A$ terbatas. Maka

$$U \cap [A - \{x\}]$$

tertutup. Karena itu

$$U - [U \cap (A - \{x\})]$$

terbuka, tetapi

$$x \in U - [U \cap (A - \{x\})] = U - (A - \{x\})$$

Maka $U - (A - \{x\})$ adalah persekitaran dari x .

Karena x adalah titik *cluster* dari A , maka

$$[[U - (A - \{x\})] - \{x\}] \cap A \neq \emptyset$$

dan merupakan kontradiksi.

Teorema 4.3.5 Jika (X, \mathcal{T}) merupakan ruang- T_2 maka setiap deret konvergen di X memiliki limit unik.

Bukti:

Diberikan (x_n) merupakan deret konvergen dengan dua limit a, b , dimana $a \neq b$.

Karena (X, \mathcal{T}) ruang- T_2 , terdapat himpunan terbuka U_1 dan U_2 , sedemikian hingga

$$a \in U_1, b \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

(x_n) konvergen ke a . Maka

$$\exists k_1 \quad \forall n > k_1 \quad x_n \in U_1.$$

demikian juga dengan

$$\exists k_2 \quad \forall n > k_2 \quad x_n \in U_2.$$

Dimana himpunan U_1 dan U_2 saling bebas.

Maka kontradiksi. Oleh karena itu, $a = b$.

4.4 Ruang Regular

Definisi 4.4.1 Ruang Regular

Ruang topologi (X, \mathcal{T}) dikatakan regular jika terdapat himpunan bagian tertutup $F \subset X$ dan sebarang titik $x \in X$, sedemikian hingga $x \notin F$, terdapat himpunan terbuka U dan V , sedemikian hingga

$$F \subset U, x \in V, \text{ dan } U \cap V = \emptyset$$

Contoh 4.4.1:

Diberikan topologi $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ pada himpunan $X = \{a, b, c\}$. Diketahui himpunan bagian tertutup dari X adalah $X, \emptyset, \{a\}$ dan $\{b, c\}$ maka (X, \mathcal{T}) memenuhi definisi ruang regular. Disisi lain, (X, \mathcal{T}) bukan merupakan ruang- T_2 hingga terdapat himpunan terbatas misalnya $\{b\}$ yang tidak tertutup.

Teorema 4.4.1 Setiap himpunan bagian ruang regular juga merupakan ruang regular.

Bukti:

Diberikan (X, \mathcal{T}) ruang regular dengan (A, \mathcal{T}_A) sebagai himpunan bagiannya. Diberikan $y \in A$ dan F mewakili himpunan tertutup T_F dari A , sedemikian hingga $y \notin F$. Diketahui bahwa jika

y tidak termuat di *closure* T_y dari A maka y tidak termuat di *closure* T dari A . Sehingga

$$y \in \bar{F}$$

Dimana \bar{F} adalah *closure* T dari F . Ruang (X, T) regular. Terdapat dua himpunan terbuka G dan H , sedemikian hingga

$$\bar{F} \subset G, y \in H, G \cap H = \emptyset.$$

Namun

$G \cap A$ dan $H \cap A$ adalah himpunan terbuka T_A dari A .

$y \in A \cap H$ karena $y \in A$ dan $y \in H$. Himpunan $A \cap G$ dan $A \cap H$ saling lepas karena $G \cap H = \emptyset$.

Juga karena

$$F \subset A \text{ dan } F \subset \bar{F} \subset G \Rightarrow F \subset A \cap G.$$

Maka, (A, T_A) juga regular.

Teorema 4.4.2 Ruang- T_1 X regular jika dan hanya jika untuk setiap persekitaran terbuka W dari setia titik p pada X , terdapat himpunan terbuka U sedemikian hingga

$$p \in U \subset \bar{U} \subset W$$

Bukti:

Diberikan X adalah ruang- T_1 . Diketahui titik p dan himpunan tertutup F sedemikian hingga $p \in F$, maka $W = X - F$ adalah persekitaran terbuka dari p .

Oleh karena itu dapat dipilih sebuah himpunan terbuka U sedemikian hingga

$$p \in U \subset \bar{U} \subset W$$

Maka U dan $V = X - \bar{U}$ adalah himpunan terbuka yang memenuhi definisi 4.5, karena itu X regular.

Dan sebaliknya, diberikan X regular dan W adalah persekitaran terbuka dari titik p dari X . Maka terdapat himpunan terbuka U dan V sedemikian hingga

$$p \in U, X - W \subset V, U \cap V = \emptyset$$

Karena itu $U \subset X - V$, yang berimplikasi

$$\bar{U} \subset \overline{X - V} = X - V \subset W$$

Karena $X - V$ tertutup. Maka U memenuhi kondisi yang diinginkan.

4.5 Definisi Ruang- T_3

Ruang- T_1 yang bersifat regular disebut ruang- T_3 .

Bukti:

Diberikan (X, T) menotasikan sebuah ruang- T_3 . Akan ditunjukkan bahwa (X, T) juga merupakan ruang Hausdorff.

Diberikan $a, b \in X$. Ruang (X, T) adalah ruang- T_1 , oleh karena itu, himpunan $\{a\}$ tertutup.

Karena a dan b saling beda

$$b \in \{a\}$$

Karena (X, T) adalah ruang regular, terdapat dua himpunan terbuka disjoint G dan H , sedemikian hingga

$$b \in G \text{ dan } \{a\} \subset H$$

Karena itu, a dan b termasuk dalam dua himpunan terbuka disjoint G dan H . Sehingga (X, T) adalah ruang Hausdorff (ruang- T_2).

Berikut ini beberapa sifat ruang- T_3 :

Teorema 4.5.1 Sebarang ruang metrik (X, d) adalah ruang- T_3 .

Bukti:

Diberikan (X, d) dinotasikan sebagai ruang metrik dan U mewakili sebarang persekitaran $x \in X$. Terdapat persekitaran bola $B(x, r)$, sedemikian hingga

$$x \in B(x, r) \subset U$$

digunakan sebarang nilai r'

$$0 < r' < r$$

maka

$$B(x, r') \subset B(x, r)$$

dan

$$\overline{B(x, r')} = \{y : d(x, y) \leq r'\} \subset B(x, r) \subset U$$

Karena itu, untuk sebarang $x \in X$ dan sebarang persekitaran U dari x , terdapat persekitaran $B(x, r')$ dari x . Sedemikian hingga

$$\overline{B(x, r')} \subset U$$

Dapat disimpulkan bahwa (X, d) regular. Karena (X, d) juga merupakan T_1 , sehingga sebarang ruang metrik juga merupakan ruang- T_3 .

Teorema 4.5.2 Setiap himpunan bagian dari ruang- T_3 juga merupakan ruang- T_3 .

Bukti:

Diberikan Y menotasikan himpunan bagian dari ruang- T_3 (X, T) . Diberikan F tertutup di Y dan $x \in Y$ dan $x \notin F$

Karena F tertutup di Y .

$$F = Y \cap F'$$

Dimana F' adalah himpunan bagian tertutup dari X . Maka $x \notin F'$. Ruang X bersifat regular, karena itu, terdapat himpunan terbuka U dan V , sedemikian sehingga

$$x \in U, F' \subset V, U \cap V = \emptyset$$

Himpunan $Y \cap U$ dan $Y \cap V$ terbuka di Y dan

$$x \in Y \cap U, \quad F \subset Y \cap V, \quad (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \emptyset$$

Karena itu, ruang (Y, \mathcal{T}_Y) regular. Karena (Y, \mathcal{T}_Y) adalah himpunan bagian dari ruang- $\mathcal{T}_1(X, \mathcal{T})$, juga merupakan \mathcal{T}_1 . Oleh karena itu, (Y, \mathcal{T}_Y) adalah regular dan merupakan ruang- \mathcal{T}_1 , contohnya ruang- \mathcal{T}_2 .

4.6 Ruang Normal

Definisi 4.6.1 Ruang Normal

Ruang topologi (X, \mathcal{T}) dikatakan normal jika, diberikan sebarang dua himpunan disjoint tertutup F_1 dan F_2 dari X , terdapat himpunan terbuka disjoint U dan V , sedemikian hingga

$$F_1 \subset U \text{ dan } F_2 \subset V$$

Contoh 4.6.1:

Sebarang ruang (X, \mathcal{T}) , memuat lebih dari satu titik pada topologi indiskrit adalah ruang normal.

Dalam topologi indiskrit terdapat dua himpunan X dan \emptyset .

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$$

Karena itu, hanya terdapat himpunan tertutup X dan \emptyset karena $X - \emptyset = X$ dan $X - X = \emptyset$.

Sehingga, tidak ada himpunan bagian disjoint tak-kosong dari X . Maka ruang ini normal.

Teorema 4.6.1 Sebuah ruang topologi (X, \mathcal{T})

normal jika dan hanya jika, untuk setiap himpunan tertutup F dan setiap himpunan terbuka H memuat F , terdapat himpunan terbuka U , sedemikian hingga

$$F \subset U \subset \bar{U} \subset H$$

Bukti:

\Rightarrow Diberikan (X, \mathcal{T}) dinotasikan sebagai ruang normal. F mewakili sebuah himpunan tertutup dan H sebuah himpunan terbuka, sedemikian hingga

$$F \subset H$$

Himpunan $X - H$ tertutup dan

$$F \cap (X - H) = \emptyset$$

F dan $X - H$ adalah dua himpunan tertutup disjoint. Karena itu, himpunan terbuka U dan U' ada, sedemikian hingga

$$F \subset U, \quad X - H \subset U', \quad U \cap U' = \emptyset$$

Maka

$$U \cap U' = \emptyset, \text{ diperoleh } U \subset X - U'$$

dan karena itu,

$$X - H \subset U', \text{ diperoleh } X - U' \subset H$$

Himpunan $X - U'$ tertutup, karena itu, dapat disimpulkan

$$F \subset U \subset \bar{U} \subset X - U' \subset H$$

\Leftarrow diberikan F_1 dan F_2 menotasikan himpunan tertutup. Maka

$$F_1 \subset X - F_2$$

dan $X - F_2$ terbuka. Terdapat himpunan terbuka, sedemikian hingga

$$F_1 \subset U \subset \bar{U} \subset X \subset F_2$$

Tetapi, karena $\bar{U} \subset X - F_2$, akan diperoleh

$$F_2 \subset X - \bar{U}. \text{ Juga karena } U \subset \bar{U}, \text{ diperoleh}$$

$$U \cap (X - \bar{U}) = \emptyset$$

Jadi, karena $X - \bar{U}$ terbuka $F_1 \subset U, F_2 \subset X - \bar{U}$

dan $U \cap (X - \bar{U}) = \emptyset$ dimana U dan $X - \bar{U}$

adalah himpunan terbuka.

4.7 Ruang- \mathcal{T}_4

Definisi 4.7.1 Ruang- \mathcal{T}_4

Ruang normal yang juga merupakan ruang- \mathcal{T}_1 disebut ruang- \mathcal{T}_4 .

Teorema 4.7.1 Setiap ruang- \mathcal{T}_4 juga merupakan ruang- \mathcal{T}_2 .

Bukti:

Diberikan (X, \mathcal{T}) menotasikan ruang- \mathcal{T}_4 .

Berdasarkan definisi, (X, \mathcal{T}) normal dan \mathcal{T}_1 .

Misalkan F himpunan bagian tertutup dari X dan $\alpha \in F$. Karena (X, \mathcal{T}) adalah \mathcal{T}_1 , himpunan singleton $\{\alpha\}$ tertutup. Himpunan F dan $\{\alpha\}$ tertutup dan disjoint. Karena (X, \mathcal{T}) adalah normal, himpunan terbuka U_1 dan U_2 ada, sedemikian hingga

$$\{\alpha\} \subset U_1, \quad F \subset U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Untuk itu (X, \mathcal{T}) regular dan \mathcal{T}_2 .

Teorema 4.7.2 Jika Y adalah himpunan tertutup dari ruang- $\mathcal{T}_4(X, \mathcal{T})$, maka sub ruang (Y, \mathcal{T}_Y) juga merupakan ruang- \mathcal{T}_4 .

Bukti:

Setiap sub ruang dari ruang- \mathcal{T}_1 adalah \mathcal{T}_1 dan (X, \mathcal{T}) juga \mathcal{T}_1 , maka Y juga merupakan ruang- \mathcal{T}_1 .

Karena Y tertutup, himpunan bagian F pada Y tertutup di Y , jika dan hanya jika F tertutup di X . Karena itu, jika F_1 dan F_2 himpunan bagian Y yang tertutup dan saling lepas, maka juga akan tertutup dan saling lepas di X .

Sehingga terdapat himpunan terbuka U_1 dan U_2 , sedemikian hingga

$$F_1 \subset U_1, \quad F_2 \subset U_2 \text{ dan } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Maka

$$F_1 \subset U_1 \cap Y, \quad F_2 \subset U_2 \cap Y,$$

Dan $U_1 \cap Y$ dan $U_2 \cap Y$ himpunan bagian saling lepas dari Y , terbuka di Y . Karena (Y, T_1) memenuhi T_1 dan normal, maka juga merupakan ruang- T_4 .

Sifat Hereditary Ruang- T_4

Jika Y merupakan himpunan bagian tertutup dari ruang- $T_4 (X, T)$, Maka himpunan bagian (Y, T_1) juga merupakan ruang- T_4 .

Bukti:

Karena setiap himpunan bagian dari ruang- T_4 adalah T_1 dan (X, T) juga merupakan T_1 , Y adalah ruang- T_1 . Karena Y tertutup, himpunan bagian F dari Y tertutup di Y , jika dan hanya jika F tertutup di X . Karena itu, jika F_1 dan F_2 himpunan bagian disjoint tertutup, maka juga merupakan himpunan tertutup disjoint dari X . Jadi, himpunan terbuka dari U_1 dan U_2 ada, sedemikian hingga

$$F_1 \subset U_1, F_2 \subset U_2 \text{ dan } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Jadi

$$F_1 \subset U_1 \cap Y, F_2 \subset U_2 \cap Y,$$

dan $U_1 \cap Y$ dan $U_2 \cap Y$ himpunan bagian disjoint dari Y , terbuka di Y . Karena (Y, T_1) adalah T_1 dan normal, dan merupakan T_4 .

4. Simpulan

Berdasarkan pada pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Setiap ruang metrik merupakan ruang- T_0 .
2. Setiap ruang metrik merupakan ruang- T_1 sehingga ruang- T_1 juga merupakan ruang- T_0 .
3. Setiap ruang- T_2 merupakan ruang- T_1 .
4. Jika diketahui (X, T) ruang- T_2 dan A himpunan bagian terbatas dari X maka A tertutup.
5. Jika diketahui (X, T) ruang- T_2 , $A \subset X$, x adalah titik *cluster* dari A , U adalah persekitaran dari x maka $U \cap A$ takterbatas.
6. Setiap ruang- T_3 merupakan ruang- T_2 sehingga ruang- T_3 juga merupakan ruang- T_2 , T_1 dan T_0 .

7. Setiap ruang- T_4 juga merupakan ruang- T_3 .

5. Saran

Oleh karena prosiding ini hanya membahas hingga topologi ruang- T_4 maka perlu ada pembahasan untuk ruang-ruang topologi lain seperti ruang Tychonoff yang merupakan pengembangan dari ruang regular dan regular lengkap.

6. Daftar Pustaka

- Milewski, Emil G. 1994. *The Topology Problem Solver*. Research and Education Association. New jersey.
- Munkres, J. 2000. *Topology Second Edition*. Prentice Hall. New Jersey
- Nagata, Jun-Iti. 1968. *Modern General Topology*. Elsevier Science Publishers. Netherlands.
- Willard, S. 1970. *General Topology*. Addison-Wesley. Alberta.