ISSN : 2337-9057

PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

SEMINAR HASIL PENELITIAN

SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

2012

DAFTAR ISI

Halaman

KelompokMatematika

Kelompok Statistika

Kelompok Kimia

KelompokFisika

Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4

Anwar Sidik[1], Muslim Ansori[2], Amanto[3]

Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[1]
anwarsdk45@gmail.com
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[2]
Jurusan Matematika FMIPA, Unila, Bandar Lampung, Indonesia[3]

Abstrak

Dalam ruang topologi terdapat sifat yang mengekspresikan seberapa banyak element himpunan yang terlingkupi dalam sebuah himpunan terbuka. Atau dengan lebih khusus lagi, sifat ini menggambarkan seberapa rapat sebuah himpunan bagian tertutup dapat terlingkupi dalam sebuah himpunan terbuka. Ukuran kerapatan inilah yang akan menjadi pemisah antara himpunan bagian satu dengan himpunan bagian yang lain yang disebut aksioma separasi. Yang bila diurutkan berdasarkan angka 0 sampai 4 menunjukkan kenaikan derajat separasinya. Setiap ruang topologi yang memenuhi ke lima aksioma ini akan dibedakan berdasarkan derajat separasinya yaitu T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 yang kemudian memiliki sifat-sifat baru dan terdapat hubungan *hereditary* dalam tiap tingkatan separasinya.

Kata kunci: topologi, ruang topologi, aksioma separasi.

1. Pendahuluan

Konsep ruang topologi dibangun berdasarkan konsep kekonvergenan pada bidang Euclidean yang diperluas menjadi ruang metrik. Dari konsep ruang metrik ini kemudian dikembangkan definisi ruang topologi. Walaupun didasarkan pada konsep kekonvergenan, ruang topologi secara praktis didefinisikan berdasarkan konsep himpunan terbuka, persekitaran dan *closure*, yang secara mendasar mewakili sifat kekonvergenan.

Dalam penelitian ini penulis akan memaparkan definisi dan teorema-teorema yang membangun ruang topologi T_0,T_1, T_2, T_3, T_4 dan sifat-sifat yang saling mempengaruhi masing-masing tingkatan separasinya.

2. Landasan Teori

2.1 Ruang Metrik

Diberikan X sebuah himpunan. Fungsi
$d(x,y) \in R$
$d : X \times X \to R$
dikatakan sebagai metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$

1. $d(x,y) \geq 0$.
2. $d(x,y) = 0$ jika hanya jika $x = y$.
3. $d(x,y) = d(y,x)$.
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Himpunan X dengan metrik d disebut ruang metrik dan dinotasikan dengan (X,d). Fungsi $d(x,y)$ disebut jarak antara x dan y.

2.2 Persekitaran Bola

Himpunan convex
$B_d(a,r) = \{x: d(x,a) < r\}$
disebut bola terbuka dengan jari-jari r dan titik pusat a.

2.3 Himpunan Terbuka

Diberikan (X,d) merupakan ruang metrik. Himpunan bagian $A \subset X$ dikatakan terbuka, jika setiap $x \in A$, terdapat bola $B(x,r)$ sedemikian hingga

$$x \in B(x,r) \subset A.$$

2.4 Himpunan Tertutup

Diberikan (X,d) ruang metrik. Himpunan bagian B dari X dikatakan tertutup di (X,d) ketika komplemen $X - B$ adalah himpunan terbuka di (X,d).

2.5 Topologi

Diberikan X merupakan himpunan tak-nol dan T adalah topologi di X, jika dan hanya jika

1. $T \subseteq P(X)$
2. $\emptyset \in T$ dan $X \in T$

3. Jika $A_1, A_2 \in T$, maka $A_1 \cap A_2 \in T$, atau setiap anggota irisan terbatas dari T juga merupakan anggota dari T.
4. Setiap gabungan dari anggota T juga merupakan anggota T.

Sifat-Sifat Topologi

1. Irisan dari sebarang kumpulan topologi dari X adalah juga merupakan topologi di X.
2. Gabungan dari topologi belum tentu sebuah topologi.

Bukti :

1. Diberikan $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ merupaka kumpulan topologi di X.

$$\forall \omega \in \Omega: \emptyset, X \in T_\omega$$

Karena itu $\emptyset, x \in \bigcap_\omega T_\omega$

Misalkan $A, B \in \bigcap_\omega T_\omega$,

$$\left(A, B \bigcap_\omega T_\omega\right) \Rightarrow (\forall \omega: A, B \in T_\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall: A \cap B \in T_\omega) \Rightarrow \left(A \cap B \in \bigcap_\omega T_\omega\right)$$

Andaikan $\{A_i\}$ adalah kumpulan dari himpunan sedemikian hingga

$$\left(\forall i: A_i \in \bigcap_\omega T_\omega\right) \Rightarrow (\forall i: A_i \in T_\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\forall \omega : \bigcup_i A_i \in T_\omega\right) \Rightarrow \left(\bigcup_i A_i \in \bigcap_\omega T_\omega\right)$$

Oleh karena itu jika $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ adalah kumpulan dari topologi pada X maka $\bigcap_\omega T_\omega$ adalah topologi di X.

2. Diberikan himpunan

$$X = \{a, b, c\}$$

dan dua topologi di X

$$T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

dan

$$T_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$$

kemudian

$$T_1 \cup T_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$$

bukan topologi karena

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin T_1 \cup T_2$$

2.6 Ruang Topologi

Diberikan (X, T) berisi himpunan X dan topologi T di X disebut ruang topologi.

2.7 Titik Adherent

Diberikan $A \subset X$. Titik $x \in X$ adherent ke A, jika untuk setiap $N_0(x)$

$$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$$

2.8 Closure Himpunan

Closure A, dinotasikan dengan $\bar{A}$, adalah himpunan dari semua titik di X adherent ke A.

$\bar{A} = \{x \in X : \forall N_0(x) : N_0(x) \cap A \neq \emptyset\}$

2.9 Himpunan Tertutup

Himpunan $A \subset X$ dikatakan tertutup jika $X - A$ adalah himpunan terbuka.

1. Jika $x \in A$, maka

$$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in \bar{A} \quad \bar{A} \subset A$$

2. $(A \text{ tertutup}) \Rightarrow (A = \bar{A})$

Jika A tertutup, maka $X - A$ terbuka. Setiap $x \notin A$ memiliki persekitaran $N_0(x)$, sedemikian hingga

$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$

$$x \notin \bar{A} \text{ dan } \bar{A} \subset A$$

Dari persamaan (4) dan (2), diperoleh $\bar{A} = A$.

$(A - \bar{A}) \Rightarrow (A \text{ tertutup})$

Karena $= \bar{A}$, setiap $x \notin \bar{A}$ memiliki $N_0(x)$, sedemikian hingga

$N_0(x) \cap A \neq \emptyset$

Karena itu, $X - A$ terbuka untuk A tertutup.

3. Hasil dan Pembahasan

4.1. Ruang-T_0

Definisi 4.1.1 Ruang-T_0 (Milewski)

Ruang (X, T) dikatakan sebagai ruang T_0, jika untuk dua element berbeda $a, b \in X$, terdapat persekitaran paling sedikit satu. Yang tidak berisi yang lainnya.

Contoh 4.1.1

Diberikan $X = \{0,1\}$. Tunjukkan bahwa X merupakan ruang-T_0 menggunakan konsep topologi indiskrit.

Solusi:

Dalam topologi indiskrit, $\emptyset, X \in T$, $T = \{\emptyset, X\}$ tidak dapat membagi 0 dari 1 atau 1 dari 0. Diketahui himpunan $X = \{0,1\}$ dengan topologi $T = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Sehingga, untuk dua titik 0 dan 1, terdapat himpunan terbuka {0}, sedemikian hingga

$$0 \in \{0\} \text{ tetapi } 1 \notin \{0\}$$

Oleh karena itu, (X, T) adalah ruang-T_0. Perlu dicatat bahwa setiap ruang metrik (X, d) adalah ruang-T_0.

Contoh 4.1.2
Tunjukkan bahwa ruang pseudometrik bukan merupakan ruang-T_0?

Solusi:
Pseudometrik di X adalah fungsi $: X\ X \to R_+$, sedemikian hingga
1. $D(x,y) = D(y,x)$
2. $D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y)$

Untuk setiap $x, y, z \in X$.
Jadi, memungkinkan untuk dua titik yang tak sama $a, b \in X$.
$D(a,b) = 0$
Sebarang persekitaran a memuat b dan sebarang persekitaran b memuat a.
Oleh karena itu, ruang pseudometrik bukan ruang-T_0. Titik $a, b \in X$ saling unik, namun karena itu, $D(a,b) = 0$ tidak dapat dipisahkan.

4.2 Ruang-T_1

Definisi 4.2.1 Ruang-T_1
Ruang topologi X disebut sebagai ruang-T_1 jika untuk setiap dua titik berbeda $p, q \in X$, masing-masing termuat dalam himpunan terbuka yang tidak saling memuat satu sama lain. Atau dengan kata lain, terdapat persekitaran U dari p dan V dari q sedemikian hinga $p \in U, q \notin U$ dan $q \in V, p \notin V$. Himpunan terbuka U dan V tidak selalu saling lepas.

Contoh:
Setiap ruang metrik X merupakan ruang-T_1, dengan membuktikan bahwa setiap himpunan bagian terbatasnya tertutup.

Diketahui bahwa, dalam ruang metrik (X, d), kondisi dari sebuah himpunan A tertutup. Dapat di ditampilkan oleh implikasi
$$\begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} x_n = x \\ x_n \in A \end{pmatrix} \Rightarrow (x \in \bar{A})$$
$\overline{\{a\}} = \{a\}$
Jadi, setiap ruang metrik adalah ruang-T_1
Ada juga ruang topologi yang bukan merupakan ruang-T_1. Sebagai contoh ruang X, memuat dua titik $X = \{a, b\}$ dengan topologi $T = \{\emptyset, X\}$, bukan merupakan ruang-T_1. Telah diperlihatkan sebelumnya bahwa setiap ruang metrik dapat dinilai sebagai ruang topologi.

Berdasarkan definisi, jelas bahwa sebarang ruang-T_1 juga merupakan ruang-T_0.
Teorema 4.2.2 Ruang topologi (X, T) disebut ruang-T_1. Jika dan hanya jika setiap element tunggal himpunan bagian X tertutup.

Bukti:
Misalkan X merupakan ruang-T_1 dan $p \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $\{p\}^c$ terbuka.
Misalkan $x \in \{p\}^c$ maka $x \neq p$, berdasarkan axioma T_1
$\exists$ himpunan terbuka G_x sedemikian hingga $x \in G_x$ dan $p \notin G_x$
Karena itu $x \in G_x \subset \{p\}^c$, maka $\{p\}^c = \cup \{G_x : x \in \{p\}^c\}$.
Oleh karena itu maka $\{p\}^c$ terbuka dan $\{p\}$ tertutup.

Sebaliknya, andaikan $\{p\}$ tertutup untuk setiap $p \in X$. Misalkan $a, b \in X$ dengan $a \neq b$.
$a \neq b \Rightarrow b \in \{a\}^c$
Karena $\{a\}^c$ himpunan terbuka memuat b namun tidak memuat a. Dengan cara yang sama $\{b\}^c$ adalah himpunan terbuka yang memuat a namun tidak memuat b. Oleh karena itu, X adalah ruang-T_1.

Dengan jelas diketahui bahwa setiap ruang-T_1 adalah ruang-T_0. Namun, himpunan $X = \{a, b\}$ dengan topologi yang mengandung himpunan terbuka $\emptyset$, $\{a\}$ dan X adalah ruang-T_0 yang bukan ruang-T_1.

Teorema 4.2.2 Setiap himpunan bagian dari ruang-T_1 juga merupakan ruang-T_1.

Bukti:
Diberikan (X, T) ruang-T_1 dan (Y, T_Y) adalah himpunan bagian dari (X, T). Akan ditunjukkan bahwa setiap himpunan bagian *singleton* $\{p\}$ dari Y adalah himpunan tertutup T_Y atau dengan cara lain, bahwa $Y - \{p\}$ adalah himpunan terbuka T_Y. Karena (X, T) adalah ruang-T_1, $X - \{p\}$ adalah T- terbuka. Namun $p \in Y \subset X \Rightarrow Y \cap (X - \{p\}) = Y - \{p\}$
Karena itu dengan definisi himpunan bagian, $Y - \{p\}$ adalah himpunan terbuka T_Y. Karena itu (Y, T_Y) juga merupakan ruang-T_1.

Teorema 4.2.3 Setiap ruang-T_1 terbatas adalah ruang diskrit.

Bukti:

Diberikan X merupakan sebarang himpunan terbatas dan T adalah topologi di X. Sedemikian hingga (X,T) adalah ruang-T_1.
Ruang (X,T) adalah t_1, jika dan hanya jika setiap satu titik himpunan bagian dari X tertutup. Karena gabungan dua himpunan bagian tertutup adalah tertutup. Dapat disimpulkan bahwa seluruh himpunan bagian dari X tertutup.
Untuk itu, seluruh himpunan bagian X terbuka dan T merupakan topologi diskrit.

Teorema 4.2.4 (X,T) merupakan ruang-T_1. Sedemikian hingga dua sifat di bawah ini ekuivalen.

1. $a \in X$ adalah titik akumulasi dari A.
2. Setiap himpunan terbuka yang memuat a memuat takterbatas titik di A.

Bukti:
1. $\Rightarrow$ 2

Misalkan $a \in X$ adalah titik akumulasi A, dan G adalah himpunan terbuka $a \in G$, memuat hanya nilai terbatas dari titik A yang berbeda dari a. Kemudian
$B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A \cap [G - \{a\}]$
B adalah himpunan bagian terbatas dari ruang-T_1, karena itu, himpunan ini tertutup dan $X - B$ terbuka. Diberikan

$$H = (X - B) \cap G.$$

Maka H terbuka, $a \in H$ dan H tidak memuat titik A yang berbeda dari a.
Karena itu, a bukan merupakan titik akumulasi dari A.

2. $\Rightarrow$ 1

Berdasarkan pada definisi titik akumulasi.

4.3 Ruang-T_2

Definisi 4.3.1 Ruang-T_2

Ruang topologi X disebut ruang-T_2 atau ruang Hausdorff jika untuk setiap dua titik berbeda $p, q \in X$. Terdapat persekitaran U dari p dan V dari q sedemikian hingga $U \cap V = \emptyset$.

Contoh:
Setiap ruang metrik X merupakan ruang-T_2.

Diberikan $a, b \in X$, diketahui bahwa $d(a,b) = \epsilon > 0$.

Diketahui bola terbuka $G = S(a, \frac{1}{3}\epsilon)$ dan $H = S(b, \frac{1}{3}\epsilon)$, berpusat di a dan b. Akan ditunjukkan bahwa G dan H saling lepas.
Jika $p \in G \cap H$, maka $d(a,p) < \frac{1}{3}\epsilon$ dan $d(p,b) < \frac{1}{3}\epsilon$; karena itu menggunakan pertaksamaan segitiga diperoleh
$d(a,b) \leq d(a,p) + d(a,b) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$
Namun hasil ini kontradiktif dengan pernyataan bahwa $d(a,b) = \epsilon$. Karena itu G dan H saling lepas. Contoh a dan b termuat secara berurutan pada bola terbuka G dan H yang saling lepas.
Jadi, X merupakan ruang-T_2.

Teorema 4.3.1 Setiap ruang-T_2 adalah ruang-T_1.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa ruang-T_2 adalah ruang-T_1. Misalkan (X,T) adalah ruang-T_2. Diberikan $a \in X$ dan untuk setiap $x \in X$, $x \neq a$

Terdapat himpunan terbuka A_x, sedemikian hingga $x \in A_x$ dan $a \notin A_x$, jadi

$$X - \{a\} = \bigcup_{x \neq a} A_x$$

dan $X - \{a\}$ adalah himpunan terbuka sebagai sebuah gabungan kumpulan dari himpunan terbuka A_x.
Karena itu, $\{a\}$ tertutup dan X adalah ruang-T_1.

Akan ditunjukkan juga bahwa terdapat ruang-T_1 yang bukan merupakan ruang-T_2.

Diberikan himpunan X, memuat 0 dan seluruh titik $\frac{1}{n}$, untuk $n = 1,2,3, \dots$
$X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$
Didefinisikan topologi T pada : himpunan yang memuat 1 terbuka, jika dan hanya jika merupakan komplemen dari himpunan terbatas. Himpunan yang tidak memuat titik 1 terbuka, jika merka terbuka dalam hal topologi bilangan real. Karena itu, setiap himpunan yang memuat 0 adalah tak terbatas.
Oleh karena itu, titik 0 dan 1 tidak dapat dipisahkan oleh dua himpunan terbuka yang saling bebas. Maka merupakan ruang-T_1 namun bukan ruang-T_2.

Teorema 4.3.2 Himpunan X dengan order topologi merupakan ruang-T_2.

Bukti:
Diberikan X mewakili sebarang himpunan terurut oleh $<, (X, <)$. Diberikan S mewakili kumpulan himpunan bagian X dalam bentuk

$$\{x: x < a\} \text{ atau } \{x: a < x\}$$

Untuk semua $a \in X$.
S membentuk subbasis untuk topologi T di X, disebut topologi terurut terinduksi oleh $<$. Akan ditunjukkan bahwa (X, T) adalah ruang-T_2.

Diberikan $a, b \in X$ mewakili dua titik berbeda. Karena X terurut sempurna, dari dapa $a < b$ atau $b < a$. Misalkan $a < b$. Maka terdapat dua kemungkinan:

1. Sebuah element $c \in X$ ada, sedemikian hingga
   $a < c < b$
   maka
   $$\{x: x < c\} \text{ dan } \{x: c < x\}$$
   Secara berurutan merupakan persekitaran saling bebas dari a dan b.
2. Tidak ada $c \in X$, sedemikian hingga
   $$a < c < b$$
   maka
   $$\{x: x < b\} \text{ dan } \{x: a < x\}$$
   Secara berurutan merupakan persekitaran saling bebas dari a dan b.

Teorema 4.3.3 jika (X, T) ruang-T_2 dengan A himpunan bagian terbatas dari X maka A tertutup.

Bukti:
Diberikan $x \in X$. Akan ditunjukkan bahwa $\{x\}$ tertutup. Diberikan

$$y \in X - \{x\}$$

Kemudian terdapat persekitaran U dari , sedemikian hingga

$$x \notin U$$

Karena itu,
$U \subset X - \{x\}$
dan himpunan $X - \{x\}$ terbuka. Jadi, $\{x\}$ tertutup.
Sebarang himpunan bagian $\{x_1, \dots, x_n\}$ ruang Hausdorff tertutup.

Teorema 4.3.4 Jika (X, T) ruang-T_2, terdapat $A \subset X$, dengan x titik *cluster* A dan U adalah persekitaran di X maka $U \cap A$ tak terbatas.

Bukti:
Misalkan, kebalikannya bahwa $U \cap A$ terbatas. Maka

$$U \cap [A - \{x\}]$$

tertutup. Karena itu
$U - [U \cap (A - \{x\})]$
terbuka, tetapi
$x \in U - [U \cap (A - \{x\})] = U - (A - \{x\})$
Maka $U - (A - \{x\})$ adalah persekitaran dari x.
Karena x adalah titik *cluster* dari A, maka
$\{[U - (A - \{x\})] - \{x\}\} \cap A \neq \emptyset$
dan merupakan kontradiksi.

Teorema 4.3.5 Jika (X, T) merupakan ruang-T_2 maka setiap deret konvergen di X memiliki limit unik.

Bukti:
Diberikan (x_n) merupakan deret konvergen dengan dua limit a, b, dimana $a \neq b$.
Karena (X, T) ruang-T_2, terdapat himpunan terbuka U_1 dan U_2, sedemikian hingga

$$a \in U_1, \quad b \in U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

(x_n) konvergen ke a. Maka

$$\exists k_1 \quad \forall n > k_1 \quad x_n \in U_1.$$

demikian juga dengan

$$\exists k_2 \quad \forall n > k_2 \quad x_n \in U_2.$$

Dimana himpunan U_1 dan U_2 saling bebas.
Maka kontradiksi. Oleh karena itu, $a = b$.

4.4 Ruang Regular

Definisi 4.4.1 Ruang Regular

Ruang topologi (X, T) dikatakan regular jika terdapat himpunan bagian tertutup $F \subset X$ dan sebarang titik $x \in X$, sedemikian hingga $x \notin F$, terdapat himpunan terbuka U dan V, sedemikian hingga

$$F \subseteq U, \quad x \in V, \quad \text{dan} \quad U \cap V = \emptyset$$

Contoh 4.4.1:
Diberikan topologi $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ pada himpunan $X = \{a, b, c\}$. Diketahui himpunan bagian tertutup dari X adalah $X, \emptyset, \{a\}$ dan $\{b, c\}$ maka (X, T) memenuhi definisi ruang regular. Disisi lain, (X, T) bukan merupakan ruang-T_1 hingga terdapat himpunan terbatas misalnya $\{b\}$ yang tidak tertutup.

Teorema 4.4.1 Setiap himpunan bagian ruang regular juga merupakan ruang regular.

Bukti:
Diberikan (X, T) ruang regular dengan (A, T_A) sebagai himpunan bagiannya. Diberikan $y \in A$ dan F mewakili himpunan tertutup T_Y dari A, sedemikian hingga $y \notin F$. Diketahui bahwa jika

y tidak termuat di *closure* T_Y dari A maka y tidak termuat di *closure* T dari A. Sehingga
$y \notin \bar{F}$
Dimana $\bar{F}$ adalah *closure* T dari F. Ruang (X,T) regular. Terdapat dua himpunan terbuka G dan H, sedemikian hingga

$$\bar{F} \subset G,\ \ y \in H,\ \ G \cap H = \emptyset.$$

Namun

$G \cap A$ dan $H \cap A$ adalah himpunan terbuka T_A dari A.

$y \in A \cap H$ karena $y \in A$ dan $y \in H$. Himpunan $A \cap G$ dan $A \cap H$ saling lepas karena $G \cap H = \emptyset$.
Juga karena

$$F \subset A \text{ dan } F \subset \bar{F} \subset G \Rightarrow F \subset A \cap G.$$

Maka, (A,T_A) juga regular.

Teorema 4.4.2 Ruang-T_1 X regular jika dan hanya jika untuk setiap persekitaran terbuka W dari setia titik p pada X, terdapat himpunan terbuka U sedemikian hingga
$p \in U \subset \bar{U} \subset W$

Bukti:
Diberikan X adalah ruang-T_1. Diketahui titik p dan himpunan tertutup F sedemikian hingga $p \notin F$, maka $W = X - F$ adalah persekitaran terbuka dari p.
Oleh karena itu dapat dipilih sebuah himpunan terbuka U sedemikian hingga
$p \in U \subset \bar{U} \subset W$
Maka U dan $V = X - \bar{U}$ adalah himpunan terbuka yang memenuhi definisi 4.5, karena itu X regular.

Dan sebaliknya, diberikan X regular dan W adalah persekitran terbuka dari titik p dari X. Maka terdapat himpunan terbuka U dan V sedemikian hingga

$$p \in U, \quad X - W \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

Karena itu $U \subseteq X - V$, yang berimplikasi
$\bar{U} \subset \overline{X - V} = X - V \subset W$
Karena $X - V$ tertutup. Maka U memenuhi kondisi yang diinginkan.

4.5 Definisi Ruang-T_3

Ruang-T_1 yang bersifat regular disebut ruang-T_3.

Bukti:
Diberikan (X,T) menotasikan sebuah ruang-T_3. Akan ditunjukkan bahwa (X,T) juga merupakan ruang Hausdorff.

Diberikan $a, b \in X$. Ruang (X,T) adalah ruang-T_1, oleh karena itu, himpunan $\{a\}$ tertutup.
Karena a dan b saling beda
$b \notin \{a\}$
Karena (X,T) adalah ruang regular, terdapat dua himpunan terbuka disjoint G dan H, sedemikian hingga

$$b \in G \quad \text{dan} \quad \{a\} \subset H$$

Karena itu, a dan b termasuk dalam dua himpunan terbuka disjoint G dan H. Sehingga (X,T) adalah ruang Hausdorff (ruang-T_2).

Berikut ini beberapa sifat ruang-T_3:

Teorema 4.5.1 Sebarang ruang metrik (X,d) adalah ruang-T_3.

Bukti:
Diberikan (X,d) dinotasikan sebagai ruang metrik dan U mewakili sebarang persekitaran $x \in X$. Terdapat persekitaran bola $B(x,r)$, sedemikian hingga
$x \in B(x,r) \subset U$
digunakan sebarang nilai r'
$0 < r' < r$
maka
$B(x,r') \subset B(x,r)$
dan
$\overline{B(x,r')} = \{y : d(x,y) \leq r'\} \subset B(x,r) \subset U$
Karena itu, untuk sebarang $x \in X$ dan sebarang persekitaran U dari x, terdapat persekitaran $B(x,r')$ dari x. Sedemikian hingga
$\overline{B(x,r')} \subset U$
Dapat disimpulkan bahwa (X,d) regular. Karena (X,d) juga merupakan T_1, sehingga sebarang ruang metrik juga merupakan ruang-T_3.

Teorema 4.5.2 Setiap himpunan bagian dari ruang-T_3 juga merupakan ruang-T_3.

Bukti:
Diberikan Y menotasikan himpunan bagian dari ruang-T_3 (X,T). Diberikan F tertutup di Y dan $x \in Y$ dan $x \notin F$

Karena F tertutup di Y.
$F = Y \cap F'$
Dimana F' adalah himpunan bagian tertutup dari X. Maka $x \notin F'$. Ruang X bersifat regular, karena itu, terdapat himpunan terbuka U dan V, sedemikian sehingga

$$x \in U, \quad F' \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

Himpunan $Y \cap U$ dan $Y \cup V$ terbuka di Y dan

$x \in Y \cap U, \quad F \subset Y \cap V, \quad (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = \emptyset$
Karena itu, ruang (Y, T_Y) regular. Karena (Y, T_Y) adalah himpunan bagian dari ruang-T_1 (X, T), juga merupakan T_1. Oleh karena itu, (Y, T_Y) adalah regular dan merupakan ruang-T_1, contohnya ruang-T_3.

4.6 Ruang Normal

Definisi 4.6.1 Ruang Normal

Ruang topologi (X, T) dikatakan normal jika , diberikan sebarang dua himpunan disjoint tertutup F_1 dan F_2 dari X, terdapat himpuanan terbuka disjoint U dan V, sedemikian hingga

$$F_1 \subset U \text{ dan } F_2 \subset V$$

Contoh 4.6.1:
Sebarang ruang (X, T), memuat lebih dari satu titik pada topologi indiskrit adalah ruang normal.

Dalam topologi indiskrit terdapat dua himpunan X dan $\emptyset$.

$$T = \{X, \emptyset\}.$$

Karena itu, hanya terdapat himpunan tertutup X dan $\emptyset$ karena $X - \emptyset = X$ dan $X - X = \emptyset$. Sehingga, tidak ada himpunan bagian disjoint tak-kosong dari X. Maka ruang ini normal.

Teorema 4.6.1 Sebuah ruang topologi (X, T) normal jika dan hanya jika, untuk setiap himpunan tertutup F dan setiap himpunan terbuka H memuat F, terdapat himpuanan terbuka U, sedemikian hingga
$F \subset U \subset \bar{U} \subset H$

Bukti:
$\Rightarrow$ Diberikan (X, T) dinotasikan sebagai ruang normal. F mewakili sebuah himpunan tertutup dan H sebuah himpuanan terbuka, sedemikian hingga
$F \subset H$
Himpuanan $X - H$ tertutup dan
$F \cap (X - H) = \emptyset$
F dan $X - H$ adalah dua himpuanan tertutup disjoint. Karena itu, himpunan terbuka U dan U' ada, sedemikian hingga
$F \subset U, \quad X - H \subset U', \quad U \cap U' = \emptyset$
Maka

$U \cap U' = \emptyset$, diperolah $U \subset X - U'$
dan karena itu,

$X - H \subset U'$, diperoleh $X - U' \subset H$
Himpunan $X - U$ tertutup, karena itu, dapat disimpulkan
$F \subset U \subset \bar{U} \subset X - U' \subset H$
$\Leftarrow$ diberikan F_1 dan F_2 menotasikan himpuanan tertutup. Maka
$F_1 \subset X - F_2$
dan $X - F_2$ terbuka. Terdapat himpuanan terbuka, sedemikian hingga
$F_1 \subset U \subset \bar{U} \subset X \subset F_2$
Tetapi, karena $\bar{U} \subset X - F_2$, akan dieperoleh $F_2 \subset X - \bar{U}$. Juga kerena $U \subset \bar{U}$, diperoleh
$U \cap (X - \bar{U}) = \emptyset$
Jadi, karena $X - \bar{U}$ terbuka $F_1 \subset U, F_2 \subset X - \bar{U}$ dan $U \cap (X - \bar{U}) = \emptyset$ dimana U dan $X - \bar{U}$ adalah himpunan terbuka.

4.7 Ruang-T_4

Definisi 4.7.1 Ruang-T_4

Ruang normal yang juga merupakan ruang-T_1 disebut ruang-T_4.

Teorema 4.7.1 Setiap ruang-T_4 juga merupakan ruang-T_3.

Bukti:
Diberikan (X, T) menotasikan ruang-T_4.
Berdasarkan definisi, (X, T) normal dan T_1.
Misalkan F himpunan bagian tertutup dari X dan $a \notin F$. Karena (X, T) adalah T_1, himpunan singleton $\{a\}$ tertutup. Himpunan F dan $\{a\}$ tertutup dan disjoint. Karena (X, T) adalah normal, himpunan terbuka U_1 dan U_2 ada, sedemikian hingga
$\{a\} \subset U_1, \; F \subset U_2, \; U_1 \cap U_2 = \emptyset$
Untuk itu (X, T) regular dan T_3.

Teorema 4.7.2 Jika Y adalah himpunan tertutup dari ruang-T_4 (X, T), maka sub ruang (Y, T_Y) juga merupakan ruang-T_4.

Bukti:
Setiap sub ruang dari ruang-T_1 adalah T_1 dan (X, T) juga T_1, maka Y juga merupakan ruang-T_1.
Karena Y tertutup, himpunan bagian F pada Y tertutup di Y, jika dan hanya jika F tertutup di X.
Karena itu, jika F_1 dan F_2 himpunan bagian Y yang tertutup dan saling lepas, maka juga akan tertutup dan saling lepas di X.
Sehingga terdapat himpunan terbuka U_1 dan U_2, sedemikian hingga

$$F_1 \subset U_1, \quad F_2 \subset U_2 \quad \text{dan} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Maka

$$F_1 \subset U_1 \cap Y, \quad F_1 \subset U_1 \cap Y,$$

Dan $U_1 \cap Y$ dan $U_2 \cap Y$ himpunan bagian saling lepas dari Y, terbuka di Y. Karena (Y, T_Y) memenuhi T_1 dan normal, maka juga merupakan ruang-T_4.

Sifat Hereditary Ruang-T_4

Jika Y merupakan himpunan bagian tertutup dari ruang-T_4 (X, T), Maka himpunan bagian (Y, T_Y) juga merupakan ruang-T_4.

Bukti:
Karena setiap himpunan bagian dari ruang-T_1 adalah T_1 dan (X, T) juga merupakan T_1, Y adalah ruang-T_1. Karena Y tertutup, himpunan bagian F dari Y tertutup di Y, jika dan hanya jika F tertutup di X. Karena itu, jika F_1 dan F_2 himpunan bagian disjoint tertutup, maka juga merupakan himpunan tertutup disjoint dari X. Jadi, himpunan terbuka dari U_1 dan U_2 ada, sedemikian hingga

$$F_1 \subset U_1,\ F_2 \subset U_2 \text{ dan } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Jadi

$F_1 \subset U_1 \cap Y,\ F_2 \subset U_2 \cap Y,$

dan $U_1 \cap Y$ dan $U_2 \cap Y$ himpunan bagian disjoint dari Y, terbuka di Y. Karena (Y, T_Y) adalah T_1 dan normal, dan merupakan T_4.

4. Simpulan

Berdasarkan pada pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Setiap ruang metrik merupakan ruang-T_0.
2. Setiap ruang metrik merupakan ruang-T_1 sehingga ruang-T_1 juga merupakan ruang-T_0.
3. Setiap ruang-T_2 merupakan ruang-T_1.
4. Jika diketahui (X, T) ruang-T_2 dan A himpunan bagian terbatas dari X maka A tertutup.
5. Jika diketahui (X, T) ruang-T_2, $A \subset X$, x adalah titik *cluster* dari A, U adalah persekitaran dari X maka $U \cap A$ takterbatas.
6. Setiap ruang-T_3 merupakan ruang-T_2 sehingga ruang-T_3 juga merupakan ruang-T_2, T_1 dan T_0.
7. Setiap ruang-T_4 juga merupakan ruang-T_3.

5. Saran

Oleh karena prosiding ini hanya membahas hingga topologi ruang-T_4 maka perlu ada pembahasan untuk ruang-ruang topologi lain seperti ruang Tychonoff yang merupakan pengembangan dari ruang regular dan regular lengkap.

6. Daftar Pustaka

Milewski, Emil G. 1994. *The Topology Problem Solver.* Research and Education Association. New jersey.

Munkres, J. 2000. *Topology Second Edition*. Prentice Hall. New Jersey

Nagata, Jun-Iti. 1968. *Modern General Topology*. Elsevier Science Publishers. Netherlands.

Willard, S. 1970. *General Topology*. Addison-Wesley. Alberta.