GRAF LOBSTER BERBILANGAN KROMATIK LOKASI EMPAT

Asmiati

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Jl. Brojonegoro 1, Bandar Lampung
E-mail: asmiati308@yahoo.com

Abstrak. Misalkan $G=(V,E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan-*k* sejati dari G. Misal-kan pula $\Pi=\{C_1,C_2,\ldots,C_3\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan *c*. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari v adalah koordinat $(d(v,C_1),d(v,C_2),\ldots,d(v,C_k))$ dengan $d(v,C_i)=\min\{d(v,x)\mid x\in C_i\}$ untuk $1\le i\le k$. Jika semua titik di *G* mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi . Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan terkecil *k* sehingga *G* mempunyai pewarnaan-*k* lokasi. Pada paper ini akan dibahas sebuah graf lobster berbilangan kromatik lokasi empat .

Kata Kunci. Bilangan kromatik lokasi, graf.

PENDAHULUAN

Konsep bilangan kromatik lokasi diperkenalkan pada tahun 2002 oleh Chartrand, Erwin, Henning, Slater dan Zhang [4], sebagai pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan titik pada graf dan dimensi partisi graf [3]. Selanjutnya, perkawinan antara konsep dimensi partisi dan pewarnaan melahirkan konsep bilangan kromatik lokasi graf.

Pewarnaan-*k* titik sejati dari graf $G=(V,E)$ adalah suatu pemetaan $c:V\to\{1,2,\ldots,k\}$ sedemikian sehingga $c(u)\ne c(v)$ jika u dan v bertetangga. Bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan-*k* titik sejati disebut *bilangan kromatik* dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$ [6].

Chartrand dkk.[4] mendefinisikan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut. Misalkan $G=(V,E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan-*k* sejati dari G. Misalkan pula $\Pi=\{C_1,C_2,\ldots,C_3\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan *c*. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari v adalah koordinat $(d(v,C_1),d(v,C_2),\ldots,d(v,C_k))$ dengan $d(v,C_i)=\min\{d(v,x)\mid x\in C_i\}$ untuk $1\le i\le k$. Jika semua titik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi . Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan-*k* lokasi. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G)\le\chi_L(G)$ [8].

Penentuan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf secara umum merupakan persoalan *NP-hard* [3]. Karenanya, kajian penentuan bilangan kromatik lokasi graf dilakukan dengan membatasi untuk kelas-kelas graf tertentu atau dengan membatasi untuk bilangan kromatik lokasi tertentu. Sejauh penelusuran literatur, penelitian yang terkait dengan penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon masih terbatas pada lintasan, graf bintang, dan graf bintang ganda[5].

Pada penelitian sebelumnya, kami telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi untuk kelas graf pohon, khususnya kelas graf pohon yang merupakan amalgamasi dari n buah graf bintang yang tidak harus isomorfik dan dilanjutkan dengan menentukan sifat kemonotonannya [1]. Penelitian lainnya yang telah berhasil kami lakukan adalah menentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api (*firecracker graphs*), yakni kelas dari graf pohon yang dikonstruksi dari *n* buah graf bintang dengan menghubungkan satu daun dari setiap graf bintang menjadi sebuah lintasan P_n [2]. Karena itu, pada paper ini akan didiskusikan graf pohon yang lain, yaitu graf lobster tertentu yang berbilangan kromatik lokasi empat. .

METODE PENELITIAN

Metode yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon G, $\chi_L(G)$ adalah dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari $\chi_L(G)$. Kita dapat menentukan batas bawah awal dari bilangan kromatik lokasi terkecil dari graf pohon berorde $n \geq 5$ adalah 3. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq 3$. Sedangkan untuk mendapatkan

batas atas dari bilangan kromatik lokasi ini diperlukan suatu konstruksi pewarnaan yang sesuai. Konstruksi dapat diawali dari pewarnaan sejati dan /atau dari partisi pembeda graf tersebut. Kemudian dimodifikasi sehingga memenuhi kriteria pewarnaan lokasi dengan memperhatikan diameter.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi umum dari graf lobster adalah graf yang apabila dihapus semua titik berderajat satu menghasilkan graf caterpillar. Khusus untuk makalah ini kita bahas graf lobster $L_{n,2,1}$ yaitu, graf yang diperoleh dari n≥2 buah lintasan P_5 (5 titik), yang mana setiap titik tengah dari P_5 dihubungkan oleh sebuah lintasan.

Himpunan titik graf lobster $L_{n,2,1}$ adalah

$$V(L_{n,2,1}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ldots, x_{n1}, x_{n2}\} \\ \cup \{x_{111}, x_{121}, x_{211}, x_{221} \ldots, x_{n11}, x_{n21}\}$$

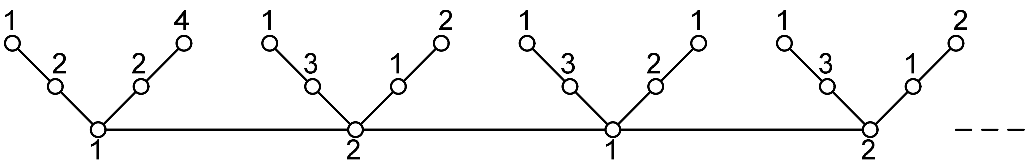
Himpunan sisi graf lobster $L_{n,2,1}$ adalah

$$E(L_{n,2,1}) = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n\} \cup \{x_1x_{11}, x_1x_{12}, \ldots, x_nx_{n1}, x_nx_{n2}\} \\ \cup \{x_{11}x_{111}, x_{12}x_{121}, \ldots, x_{n1}x_{n11}, x_{n2}x_{n21}\}$$

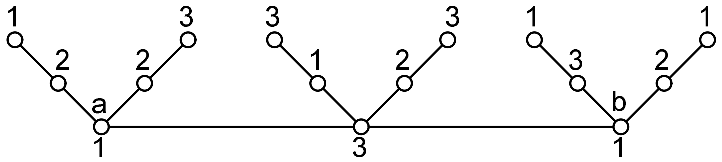
Teorema
Bilangan kromatik lokasi dari graf lobster $L_{n,2,1}$ untuk n≥3, adalah empat.

Bukti:
Pertama, akan ditentukan batas atas dari $L_{n,2,1}$ untuk n≥3. Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(L_{n,2,1}) \leq 4$ dengan n≥3, pandang c pewarnaan-4 pada $L_{n,2,1}$ sebagai berikut:

- $c(x_i) = 1$ jika i ganjil dan $c(x_i) = 2$ jika i genap;
- $c(x_{11}) = 2$, $c(x_{i1}) = 3$ untuk setiap i≥2. $c(x_{i2}) = 2$ jika i ganjil dan $c(x_{i2}) = 1$ jika i genap;
- $c(x_{i11}) = 1$ untuk setiap i, $c(x_{121}) = 4$, $c(x_{i22}) = 2$ jika i genap, dan $c(x_{i22}) = 1$ jika i≥3 ganjil.



GAMBAR 1 Pewarnaan Lokasi minimum Graf Lobster $L_{n,2,1}$ untuk n≥3



GAMBAR 2 Konstruksi batas bawah Graf Lobster $L_{3,2,1}$

Pewarnaan c akan membangun suatu partisi $\prod$ pada $V(L_{n,2,1})$. Jelas bahwa kode warna dari semua titik berbeda (berdasarkan jarak ke titik yang berwarna 4), akibatnya c adalah pewarnaan lokasi pada $L_{n,2,1}$ untuk n≥3. Jadi, $\chi_L(L_{n,2,1}) \leq 4$ untuk n≥3.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(L_{n,2,1}) \geq 4$ untuk n≥3. Andaikan terdapat pewarnaan-3 pada graf lobster $L_{n,2,1}$ untuk n≥3. Pada gambar 2, terlihat bahwa terdapat dua titik yang mempunyai kode warna yang sama, yaitu $c_\pi(a) = (0,1,1) = c_\pi(b)$. Jadi 3 warna tidaklah cukup untuk mewarnai graf lobster $L_{n,2,1}$ untuk n≥3. Akibatnya, $\chi_L(L_{n,2,1}) \geq 4$ untuk n≥3.

DAFTAR PUSTAKA

[1] **. Asmiati**, H. Assiyatun, E.T. Baskoro, (2011), Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars, *ITB J.Sci*., **43A**, 1-8.

[2]. **Asmiati**, H. Assiyatun, E.T. Baskoro, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa, Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **63(1)**, 11-23.

[3]. G. Chartrand, E. Salehi, dan P. Zhang, (1998), On the partition dimension of graph, *Congr. Numer*., **130**, 157-168.

[4]. G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang, (2002), The locating-chromatic number of a graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **36**, 89-101.

[5]. G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang, (2003), Graph of order n with locating-chromatic number *n-1*, *Discrete Math*., **269**, 65-79.

[6]. G. Chartrand dan P. Zhang, (2009), *Chromatic Graph Theory*, Chapman and Hall/CRC.