ISSN : 2337-9057

# PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

## SEMINAR HASIL PENELITIAN

### SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012


FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

2012

# DAFTAR ISI

**Kelompok Kimia**

**KelompokFisika**

# PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID

Anggun Novita Sari

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Lampung

**ABSTRAK**

Geometri Euclid adalah geometri yang pertama kali muncul yang dibuat oleh seorang matematikawan Yunani bernama Euclides. Geometri non-Euclid lahir dikarenakan kelemahan postulat kesejajaran Euclid. Sebuah segiempat Lambert adalah segiempat yang memiliki tiga sudut siku-siku, yang tercipta atas pemikiran Johann Lambert untuk penyempurnaan Segiempat Saccheri . Dari hasil penelitian diperoleh pada geometri Euclid bahwa sudut keempat dari Segiempat Lambert adalah siku-siku dengan sisi atas sama panjang dengan sisi alas. Sudut keempat dari Segiempat Lambert adalah lancip dengan sisi atas lebih panjang dari sisi alas pada geometri Lobachevsky. Sudut keempat dari Segiempat Lambert adalah tumpul dengan sisi atas lebih pendek dari sisi alas pada geometri Riemann. Akibatnya, empat persegi panjang hanya ada dalam geometri Euclid.

**Kata kunci** : Segiempat Lambert , Geometri Euclid , Geometri Lobachevsky, Geometri Riemann

## 1. PENDAHULUAN

Geometri Euclid (geometri Parabolik) adalah geometri yang pertama kali muncul yang dibuat oleh seorang matematikawan Yunani bernama Euclid. Geometri non-Euclid lahir setelah terpecahkannya permasalahan postulat kesejajaran Euclid oleh Bolyai dan Lobachevsky. Geometri non-Euclid diantaranya adalah geometri Lobachevsky (geometri Hiperbolik) dan geometri Riemann (geometri Eliptik).

Dalam geometri Euclid dan non-Euclid, terdapat segiempat yang besar sudutnya bergantung pada geometri mana ia berada. Segiempat tersebut adalah segiempat Saccheri dan segiempat Lambert. Menurut Rawuh [6], suatu segiempat ABCD dinamakan segiempat Saccheri apabila kaki $\overline{BC} = \overline{AD}$ dan apabila sudut alas $\angle DAB = \angle ABC$ dengan $u(\angle DAB) = 90^0$.

Pada geometri Euclid besar dua sudut atas segiempat Saccheri adalah siku-siku, pada geometri Lobachevsky dua sudut atasnya adalah sudut lancip, sedangkan pada geometri Riemann dua sudut atasnya adalah tumpul.

Johann Lambert memberi suatu gagasan untuk menyempurnakan hasil pemikiran Giovanni Saccheri mengenai segiempat Saccheri, inilah awal dari terciptanya segiempat Lambert.

### 2.1. GEOMETRI EUCLID

Untuk menyusun geometrinya, Euclides memulainya dengan membuat pernyataan mengenai unsur-unsur yang tak terdefinisi, yaitu:

1. Titik, adalah unsur yang tidak memiliki panjang, lebar maupun ketebalan.
2. Garis, dilambangkan dengan $\overleftrightarrow{AB}$ adalah panjang yang tidak mempunyai lebar maupun ketebalan. Suatu garis bisa lurus, melengkung maupun kombinasi keduanya
3. Bidang adalah unsur yang memiliki panjang dan lebar, tapi tidak mempunyai ketebalan. Bidang adalah suatu permukaan dimana suatu garis yang menghubungkan dua titik pada permukaan tersebut secara keseluruhan akan terletak pada permukaan tersebut [6].

Dengan menggunakan unsur-unsur tak terdefinisi tersebut, dapat dibentuk bangun datar seperti segitiga dan segiempat. Segitiga adalah segi yang terbentuk oleh tiga segmen yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak segaris, ketiga segmen tersebut disebut sisi, dan ketiga titik sudut tersebut disebut titik sudut [3].
Dua segitiga dikatakan kongruen jika :

1. Dua sisi dan satu sudut yang bersesuaian pada kedua segitiga kongruen (S, Sd, S).
2. Dua sudut dan satu sisi yang bersesuaian pada kedua segitiga kongruen (Sd, S, Sd).
3. Ketiga sisi yang bersesuaian pada kedua segitiga kongruen (S, S, S) [6].

Geometri Euclid memiliki postulat kesejajaran yang berbunyi "*Melalui sebuah titik di luar sebuah garis dapat ditarik hanya sebuah garis lurus lain yang sejajar dengan garis pertama*". Berdasarkan postulat kesejajaran tersebut, ditentukan bahwa jumlah ukuran sudut dalam suatu segitiga sama dengan $180^0$. Oleh karenanya, jumlah ukuran sudut dalam suatu segiempat adalah $360^0$ , dan sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri adalah sama dan siku-siku ($90^0$) [1].

Karena postulat kelima (postulat kesejajaran) Euclid dianggap lemah, maka beberapa ilmuwan mencoba membuktikan kebenarannya, dan akhirnya menimbulkan pemikiran menciptakan geometri non-Euclid, yaitu Geometri Lobachevsky dan Geometri Riemann.

## 2.2. GEOMETRI LOBACHEVSKY

Geometri Lobachevsky berbeda dengan Geometri Euclid hanya pada postulat kesejajarannya. Postulat kesejajaran Lobachevsky berbunyi *"jika sebuah titik terletak tidak pada suatu garis, maka terdapat paling sedikit dua garis yang dapat ditarik melalui titik itu serta sejajar dengan garis tadi"* [5].

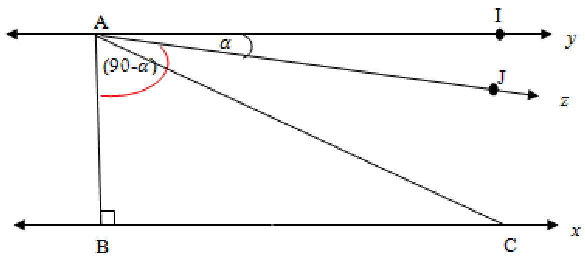
Berdasarkan postulat tersebut, ditentukan bahwa jumlah ukuran sudut dalam suatu segitiga kurang dari $180^0$.

**Teorema 2.2.1**

Berlaku pada segitiga dengan jumlah derajat sudut kurang dari 180°.

**Bukti:**

Misal titik A terletak tidak pada garis *x* , maka dapat ditarik garis *y* yang melalui A dan sejajar garis *x* .Misalkan garis *x* melaui titik B dan C dengan $\overleftrightarrow{AB}$ tegak lurus garis *x*




Gambar 1. Segitiga dengan jumlah sudut kurang dari 180°

Maka berdasarkan postulat kesejajaran Lobachevsky dapat ditarik satu garis lain yang sejajar dengan garis *x* dan melalui titik A yaitu garis *z.* Dengan ini akan dibuktikan bahwa besar ukuran sudut dalam segitiga ABC kurang dari 180°.

$u(\angle ABC) = 90°$
$u(\angle BCA) < \alpha$
$u(\angle CAB) < u(\angle JAB)$
$< 90° - \alpha$

Untuk jumlah ketiga sudut dalam segitiga ABC diperoleh :

$u(\angle ABC) + u(\angle BCA) + u(\angle CAB)$
$< 90° + \alpha + (90° - \alpha)$
$< 180°$

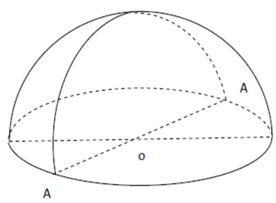
Terbukti bahwa jumlah ukuran sudut dalam segitiga pada Geometri Lobachevsky adalah kurang dari 180°.

Teorema ini mengakibatkan suatu segiempat dalam Geometri Lobachevsky memiliki jumlah sudut dalam kurang dari $360^0$ dan sudut-sudut puncak Segiempat Saccheri adalah sama dan lancip [8].

## 2.3. GEOMETRI RIEMANN

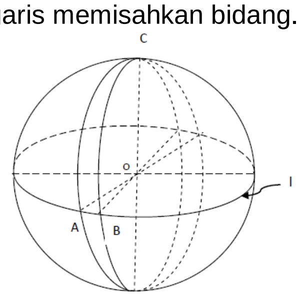
Seperti halya Geometri Lobachevsky, Geometri Riemann berbeda dengan Geometri Euclid hanya pada postulat kesejajarannya. Postulat kesejajaran Riemann berbunyi *"tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain"* [2]. Dengan kata lain, dalam Geometri Riemann tidak ada garis yang sejajar, melainkan selalu tegak lurus dengan garis lain. Pada Geometri Riemann terdapat dua macam pengkhususan, yaitu geometri "*single elliptic*" dan geometri "*double elliptic*".

- Geometri *Single Elliptic*
  Sebarang dua garis yang berpotongan tepat pada satu titik, tetapi tidak ada garis yang memisahkan bidang tersebut




Gambar 2. Model geometri *single elliptic*

- Geometri *Double Elliptic*
  Dua garis berpotongan tepat pada dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang.




Gambar 3. Model geometri *double elliptic*

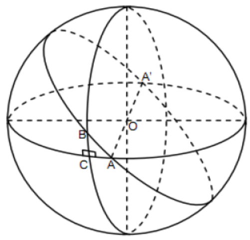
Dua garis yang tegak lurus selalu berpotongan pada satu titik (pada geometri Riemann titik itu disebut titik kutub) dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu [4].

**Dalil 2.3.1**

Dalam sebarang segitiga ABC dengan sudut C = $90^0$, sudut A besarnya kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari $90^0$ tergantung dari segmen BC kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari jarak polar [3].

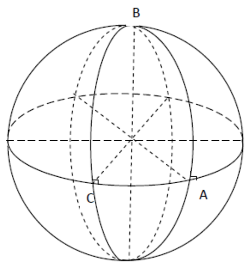
**Bukti:**
Diketahui : segitiga ABC dengan ∠C = 90$^{0}$

a. Ditunjukkan ∠A < 90°, bila jarak $B$ ke $C$ < dari jarak polar



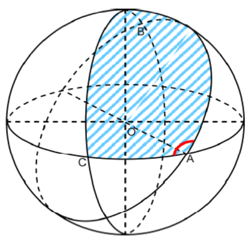
Gambar 4. Ilustrasi dalil 2.3.1 dengan ∠A < 90°

b. Ditunjukkan ∠A = 90°, bila jarak $B$ ke $C$ = dari jarak polar



Gambar 5. Ilustrasi dalil 2.3.1 dengan ∠A = 90°

c. Ditunjukkan ∠A > 90°, bila jarak $B$ ke $C$ > dari jarak polar



Gambar 6. Ilustrasi dalil 2.3.1 dengan ∠A > 90°

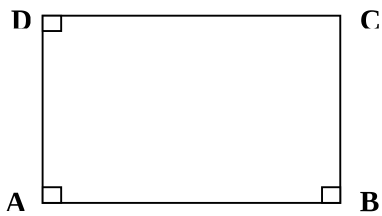
**Teorema 2.3.1**
Jumlah besar sudut-sudut dalam segitiga lebih besar dari 180°.

**Bukti:**
Pada gambar 5, terlihat bahwa ∠A = 90°,∠C = 90° dan ∠B pastilah positif. Sehingga jumlah sudut segitiga ABC adalah lebih besar dari 180°.

Teorema ini mengakibatkan pada Geometri Riemann jumlah ukuran sudut dalam suatu segiempat adalah lebih besar dari 180°dan sudut-sudut puncak pada Segiempat Saccheri adalah sama dan tumpul.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

**Definisi 3.1**
Segiempat Lambert adalah segiempat yang memiliki 3 sudut siku-siku.



Gambar 7. Segiempat Lambert

Misal segiempat ABCD di atas adalah segiempat Lambert, maka:

$$u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^0$$

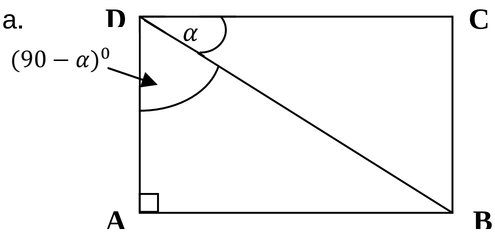
Hipotesa yang diberikan Johan Lambert (1728-1777) pada segiempat yang ketiga sudutnya siku-siku maka sudut keempatnya adalah lancip, siku-siku atau tumpul.

### 3.1 Segiempat Lambert pada Geometri Euclid

Diberikan segiempat Lambert ABCD dengan $u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^0$. Akan dibuktikan bahwa:

a. $u(\angle BCD)$ sebesar $90^0$ atau siku-siku.
b. Panjang sisi AB = CD

**Bukti**:

a.


Gambar 8. Δ $ABD$ dan Δ$BCD$ dalam segiempat ABCD Geometri Euclid

Terlihat bahwa:

- $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^0$ (dari definisi segiempat Lambert)
- $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle ADB \cong \angle CBD$
- $u(\angle ABD) + u(\angle CBD) = u(\angle ADB) + u(\angle BDC) = 90^0$

Misal $u(\angle BDC) = \alpha$ maka

$$u(\angle ADB) = (90-\alpha)^0$$

Karena $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle CBD \cong \angle ADB$ , maka :

$$u(\angle ABD) = u(\angle BDC) = \alpha$$

dan

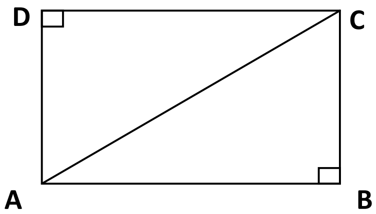
$$u(\angle CBD) = u(\angle ADB) = (90-\alpha)^0$$

Pada geometri Euclid, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah 180$^{0}$. Oleh karenanya, besar ukuran sudut $\angle BCD$ diperoleh dari $\Delta BCD$ dengan

$$u(\angle BDC) = \alpha$$
$$u(\angle CBD) = (90-\alpha)^0$$
$$u(\angle BDC) + u(\angle CBD) + u(\angle BCD) = 180^0$$
$$\alpha^0 + (90-\alpha)^0 + u(\angle BCD) = 180^0$$
$$\alpha^0 - \alpha^0 + 90^0 + u(\angle BCD) = 180^0$$
$$90^0 + u(\angle BCD) = 180^0$$
$$90^0 - 90^0 + u(\angle BCD) = 180^0 - 90^0$$
$$u(\angle BCD) = 90^0$$

Terbukti bahwa besar ukuran sudut $\angle BCD$ adalah $90^0$ atau siku-siku.

b. Panjang AB = CD



Gambar 9. Dua Segitiga Kongruen dalam Segiempat ABCD pada Geometri Euclid

Telah dibuktikan bahwa keempat sudut segiempat Lambert ABCD di atas siku-siku atau

$$u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle BCD) = u(\angle ADC) = 90^0.$$

Perhatikan $\Delta ABC$ dan $\Delta ACD$ , terlihat bahwa:

- $u(\angle CAD) + u(\angle BAC) = 90^0$
- $u(\angle ACB) + u(\angle ACD) = 90^0$
- $\overline{AC}$ dan $\overline{CA}$ adalah dua garis yang berimpit pada $\Delta ABC$ dan $\Delta ACD$

Dalam geometri Euclid, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah $180^0$ , maka pada $\Delta ABC$ :

$$u(\angle BAC) + u(\angle ABC) + u(\angle ACB) = 180^0$$
$$u(\angle BAC) + 90^0 + u(\angle ACB) = 180^0$$
$$u(\angle BAC) + u(\angle ACB) = 90^0$$

Dari penjumlahan dua sudut $u(\angle ACB) + u(\angle ACD) = 90^0$ dan $u(\angle BAC) + u(\angle ACB) = 90^0$ maka didapat $u(\angle ACD) = u(\angle BAC)$ atau $\angle ACD \cong \angle BAC$.

Dari penjumlahan dua sudut $u(\angle BAC) + u(\angle ACB) = 90^0$ dan $u(\angle BAC) + u(\angle CAD) = 90^0$ maka didapat $u(\angle ACB) = u(\angle CAD)$ atau $\angle ACB \cong \angle CAD$.

Karena $\overline{AC} = \overline{CA}$ , $\angle ACD \cong \angle BAC$ dan $\angle ACB \cong \angle CAD$ maka $\Delta ABC$ dan $\Delta ACD$ adalah dua segitiga yang kongruen.

Oleh karena itu, sisi-sisi yang bersesuaian pada $\Delta ABC$ dan $\Delta ACD$ adalah $\overline{AC} = \overline{CA}$ , $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ . Dengan kata lain, terbukti bahwa panjang sisi $AB = CD$.

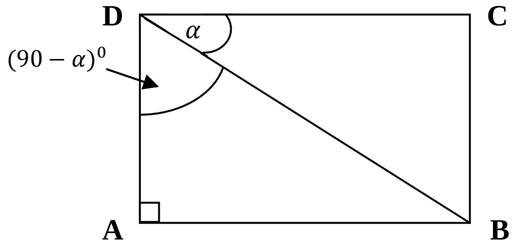
**3.2. Segiempat Lambert pada Geometri Lobachevsky**

Diberikan segiempat Lambert ABCD dengan $u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^0$. Akan dibuktikan bahwa:

a. $u(\angle BCD)$ besarnya kurang dari $90^0$ (sudut lancip)
b. Panjang sisi AB < CD

**Bukti:**

a.



Gambar 10. $\Delta ABD$ dan $\Delta BCD$ dalam segiempat ABCD Lobachevsky

Terlihat bahwa:

- $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^0$ (dari definisi segiempat Lambert)
- $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle ADB \cong \angle CBD$
- $u(\angle ABD) + u(\angle CBD) = u(\angle ADB) + u(\angle BDC) = 90^0$

Misal : $u(\angle BDC) = \alpha$ ,
maka $u(\angle ADB) = (90-\alpha)^0$
Karena $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle CBD \cong \angle ADB$ , maka

$$u(\angle ABD) = u(\angle BDC) = \alpha$$

Dan

$$u(\angle CBD) = u(\angle ADB) = (90-\alpha)^0$$

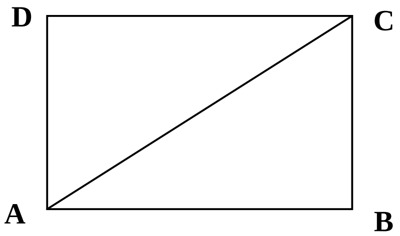
Pada geometri Lobachevsky, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah kurang dari $180^0$. Oleh karenanya, besar ukuran sudut $\angle BCD$ diperoleh dari $\Delta BCD$ dengan

$$u(\angle BDC) = \alpha$$
$$u(\angle CBD) = (90-\alpha)^0$$
$$u(\angle BDC) + u(\angle CBD) + u(\angle BCD) < 180^0$$
$$\alpha^0 + (90-\alpha)^0 + u(\angle BCD) < 180^0$$
$$\alpha^0 - \alpha^0 + 90^0 + u(\angle BCD) < 180^0$$
$$90^0 + u(\angle BCD) < 180^0$$
$$90^0 - 90^0 + u(\angle BCD) < 180^0 - 90^0$$
$$u(\angle BCD) < 90^0$$

Terbukti bahwa besar sudut $\angle BCD$ atau sudut keempat dari segiempat Lambert pada geometri Lobachevsky kurang dari $90^0$ (sudut lancip).

b. Panjang sisi AB < CD

Untuk membuktikan panjang sisi AB < CD , perlu dibentuk segitiga-segitiga kongruen dengan memisalkan AB = CD di dalam segiempat ABCD seperti gambar berikut:




Gambar 11. Dua Segitiga Kongruen dalam Segiempat ABCD pada Geometri Lobachevsky

Karena $u(\angle CDA)$= $90^0$ maka $u(\angle CDA) = u(\angle ABC)$ =$90^0$ dan $\overline{AC}$ merupakan sisi persekutuan dari $\Delta\, ACD$ dan $\Delta\, ABC$ maka $\Delta\, ACD \cong \Delta\, ABC$ dan diperoleh $\angle DAC \cong \angle BCA$ dan $\angle DCA \cong \angle BAC$ .

Maka

$$u(\angle DAC) + u(\angle BAC) = u(\angle ACD) + u(\angle ACB) = 90^0$$

$$u(\angle BAD) = u(\angle BCD) = 90^0$$

Terjadi kontradiksi karena telah dibuktikan bahwa $u(\angle BCD) < 90^0$, jadi tidak mungkin AB = CD.

Dari segiempat Lambert ABCD diperoleh $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^0$ dan $u(\angle BCD) < 90^0$ (lancip), maka AB < CD atau CD > AB.

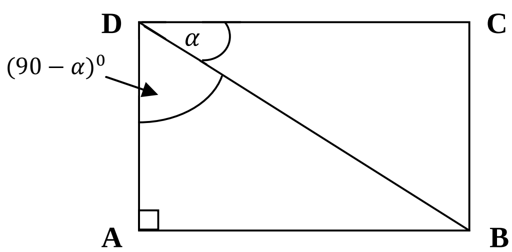
### 3.3. Segiempat Lambert pada Geometri Riemann

Diberikan segiempat Lambert ABCD dengan $u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^0$. Akan dibuktikan bahwa:

a. $u(\angle BCD)$ besarnya lebih dari $90^0$ (sudut tumpul)
b. Panjang sisi AB > CD

**Bukti:**

a.




Gambar 12. $\Delta\, ABD$ dan $\Delta BCD$ dalam Segiempat ABCD Geometri Riemann

Terlihat bahwa:

- $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^0$ (dari definisi segiempat Lambert)
- $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle ADB \cong \angle CBD$
- $u(\angle ABD) + u(\angle CBD) = u(\angle ADB) + u(\angle BDC) = 90^0$

Misal : $u(\angle BDC) = \alpha$ ,
maka $u(\angle ADB) = (90-\alpha)^0$
Karena $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle CBD \cong \angle ADB$ , maka

$$u(\angle ABD) = u(\angle BDC) = \alpha$$

Dan

$$u(\angle CBD) = u(\angle ADB) = (90-\alpha)^0$$

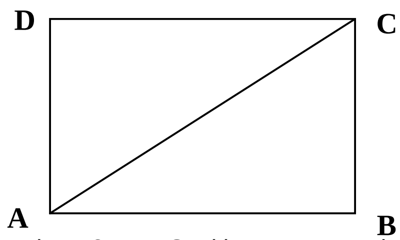
Pada geometri Riemann, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah lebih dari $180^0$. Oleh karenanya, besar ukuran sudut $\angle BCD$ diperoleh dari $\Delta BCD$ dengan

$u(\angle BDC) = \alpha$
$u(\angle CBD) = (90-\alpha)^0$
$u(\angle BDC) + u(\angle CBD) + u(\angle BCD) > 180^0$
$\alpha^0 + (90-\alpha)^0 + u(\angle BCD) > 180^0$
$\alpha^0 - \alpha^0 + 90^0 + u(\angle BCD) > 180^0$
$90^0 + u(\angle BCD) > 180^0$
$90^0 - 90^0 + u(\angle BCD) > 180^0 - 90^0$
$u(\angle BCD) > 90^0$

Terbukti bahwa besar sudut $\angle BCD$ atau sudut keempat dari segiempat Lambert pada geometri Riemann lebih dari $90^0$ (sudut tumpul).

b. Panjang sisi AB < CD

Untuk membuktikan panjang sisi AB < CD , perlu dibentuk segitiga-segitiga kongruen dengan memisalkan AB = CD di dalam segiempat ABCD seperti gambar berikut:




Gambar 13. Dua Segitiga Kongruen dalam Segiempat ABCD Pada Geometri Riemann

Karena $u(\angle CDA)$= $90^0$ maka $u(\angle CDA) = u(\angle ABC)$ =$90^0$ dan $\overline{AC}$ merupakan sisi persekutuan dari $\Delta\, ACD$ dan $\Delta\, ABC$ maka $\Delta\, ACD \cong \Delta\, ABC$ dan diperoleh $\angle DAC \cong \angle BCA$ dan $\angle DCA \cong \angle BAC$ .

Maka

$$u(\angle DAC) + u(\angle BAC) = u(\angle ACD) + u(\angle ACB) = 90^0$$

$$u(\angle BAD) = u(\angle BCD) = 90^0$$

Terjadi kontradiksi karena telah dibuktikan bahwa $u(\angle BCD) > 90^0$, jadi tidak mungkin AB = CD.

Dari segiempat Lambert ABCD diperoleh $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^0$ dan $u(\angle BCD) > 90^0$ (tumpul), maka AB > CD atau CD < AB.

## 4. KESIMPULAN

Pada geometri Euclid, keempat sudut dalam Segiempat Lambert adalah siku-siku dan sisi atas sama panjang dengan sisi alas. Pada Geometri Lobachevsky segiempat Lambert memiliki tiga sudut siku-siku dan satu sudut lancip dengan sisi atas lebih panjang dari sisi alas. Sedangkan pada Geometri Riemann Segiempat Lambert memiliki tiga sudut siku-siku dan satu sudut tumpul dengan sisi atas lebih pendek dari sisi alas.

## 5. DAFTAR PUSTAKA

[1]Deniyanti, Pinta. 2007 .http://id.scribd.com/doc/69498813/MATERI-GEOMETRI-EUCLID-2007. Diakses pada 24 September 2012.

[2]Karso. 1996. *Pendidikan Matematika 4* . Universitas Terbuka, Jakarta.

[3]Keedy, Mervin L. dkk.1967. Exploring Geometri. New York: Holt, Rinchart and Winston, Inc.

[4]Moeharti HW. 1986. *Materi Pokok Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta: Kanika Jakarta, Universitas Terbuka.

[5]Rawuh. 2009. *Geometri*. Universitas Terbuka, Jakarta.

[6]Rich, Barneth . 2005. *Geometri (Schaum's Easy Outlines).* Erlangga, Jakarta.

[7]Ruseffendi. 1985. *Pengajaran Matematika Modern* . Tarsito, Bandung.

[8]Tandililing, Fitriana dkk. 2011. http://ml.scribd.com/doc/88654454/Geometry-Hiperbolik .Diakses pada 13 September 2012.