

ISSN : 2337-9057



PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

**SEMINAR HASIL PENELITIAN
SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI
15 DESEMBER 2012**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012**



DAFTAR ISI

Halaman

Kelompok Matematika

PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID Anggun Novita Sari, Muslim Ansori dan Agus Sutrisno	1-6
Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 Anwar Sidik, Muslim Ansori dan Amanto	7-14
PENERAPAN GRAF DEBRUIJN PADA KONSTRUKSI GRAF EULERIAN Fazrie Mulia, Wamiliana, dan Fitriani	15-21
REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN Herlisa Anggraini, Muslim Ansori, Amanto	22-27
ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL) Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno	28-33
Algoritma Untuk Mencari Grup Automorfisma Pada Graf Circulant Vebriyan Agung, Ahmad Faisol, Amanto	34-37
KEISOMORFISMAAN GEOMETRI AFFIN Pratiwi Handayani, Muslim Ansori, Dorrah Aziz	38-41
METODE PENGUKURAN SUDUT MES SEBAGAI KEBIJAKAN PENENTUAN 1 SYAWAL Mardiyah Hayati, Tiryono, dan Dorrah	42-44
KE-ISOMORFISMAAN GEOMETRI INSIDENSI Marlina, Muslim Ansori dan Dorrah Aziz	45-47
TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN \mathbb{R}^n Nur Rohmah, Muslim Ansori dan Amanto	48-53
KAJIAN ANALITIK GEOMETRI PADA GERAK MEKANIK POLISI TIDUR (POLDUR) UNTUK PENGGERAK DINAMO Nurul Hidayah Marfiatin, Tiryono Ruby dan Agus Sutrisno	54-56
<i>INTEGRAL RIEMANN FUNGSI BERNILAI VEKTOR</i> Pita Rini, Dorrah Aziz, dan Amanto	57-63
ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF <i>WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS</i> DAN GRAF <i>CYCLIC-CUBES</i> Ririn Septiana, Wamiliana, dan Fitriani	64-71
Ring Armendariz Tri Handono, Ahmad Faisol dan Fitriani	72-77
PERKALIAN DAN AKAR KUADRAT UNTUK OPERATOR <i>SELF-ADJOINT</i> Yuli Kartika, Muslim Ansori, Fitriani	78-81

Kelompok Statistika

APROKSIMASI DISTRIBUSI <i>T-STUDENT</i> TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA	82-85
--	-------

Eflin Marsinta Uli, Warsono, dan Widiarti	
ANALISIS CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN NEW JERSEY Eva fitrilia, Rudi Ruswandi, dan Widiarti	86-93
PENDEKATAN DIDISTRIBUSI GAMMATERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD)BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Jihan Trimita Sari T, Warsono, dan Widiarti	94-97
PERBANDINGAN ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOM Latusiania Oktamia, Netti Herawati, Eri Setiawan	98-103
PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM (<i>EXPECTATION MAXIMIZATION</i>) Nurashri Partasiwi, Dian Kurniasari dan Widiarti	104-109
KAJIAN CADANGAN ASURANSIDENGAN METODE ZILLMER DAN METODE KANADA RozaZelvia, Rudi Ruswandi dan Widiarti	110-115
ANALISIS KOMPONEN RAGAM DATA HILANG PADA RANCANGAN <i>CROSS-OVER</i> Sorta Sundry H. S, Mustofa Usman dan Dian Kurniasari	116-121
PENDEKATAN DISTRIBUSI GOMPERTZ PADA CADANGAN ASURANSI JIWA UNTUK METODE ZILLMER DAN ILLINOIS Mahfuz Hudori, Rudi Ruswandi dan Widiarti	122-126
KAJIAN RELATIF BIASMETODE <i>ONE-STAGE</i> DAN <i>TWO-STAGE CLUSTER SAMPLING</i> Rohman, Dian Kurniasar dan Widiarti	127-130
PERBANDINGAN UJI HOMOGENITAS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOMV Tika Wahyuni, Netti Herawati dan Eri Setiawan	131-136
PENDEKATAN DISTRIBUSI KHI-KUADRAT TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA</i> <i>DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Tiyas Yulita , Warsono dan Dian Kurniasari	137-140
Kelompok Kimia	
TRANSESTERIFIKASI MINYAK SAWIT DENGAN METANOL DAN KATALIS HETEROGEN BERBASIS SILIKA SEKAM PADI (MgO-SiO ₂) EviRawati Sijabat, Wasinton Simanjuntak dan Kamisah D. Pandiangan	141-147
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT (CaCO ₃) DENGAN METODE <i>UNSEEDDED EXPERIMENT</i> Miftasani' Suharso dan Buhani	148-153
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING WULUH SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT (CaCO ₃) DENGAN METODE <i>SEEDDED EXPERIMENT</i> PutriFebriani Puspita' Suharso dan Buhani	154-160
IDENTIFIKASI SENYAWA AKTIF DARI KULIT BUAH ASAM KERANJI (<i>Dalium indum</i>) SEBAGAI INHIBITORKOROSIBAJA LUNAK Dewi Kartika Sari, Ilim Wasinton dan Simanjuntak	161-168
TransesterifikasiMinyakSawitdenganMetanoldanKatalisHeterogenBerbasis	169-175

Silika Sekam Padi ($\text{TiO}_2/\text{SiO}_2$) Wanti Simanjuntak, Kamisah D. Pandiangan dan Wasinton Simanjuntak	
UJI PENDAHULUAN HIDROLISIS ONGGOK UNTUK MENGHASILKAN GULA REDUKSI DENGAN BANTUAN ULTRASONIKASI SEBAGAI PRAPERLAKUAN Juwita Ratna Sari dan Wasinton Simanjuntak	176-182
STUDI FORMULASI PATI SORGUM-GELATIN DAN KONSENTRASI <i>PLASTICIZER</i> DALAM SINTESA BIOPLASTIK SERTA UJI <i>BIODEGRADABLE</i> DENGAN METODE FISIK Yesti Harryzona dan Yuli Darni	183-190
Kelompok Fisika	
Pengaruh Variasi Suhu Pemanasan Dengan Pendinginan Secara Lambat Terhadap Uji <i>Bending</i> Dan Struktur Mikro Pada Baja Pegas Daun AISI 5140 Adelina S.E Sianturi, Ediman Ginting dan Pulung Karo-Karo	191-195
Pengaruh Kadar CaCO_3 terhadap Pembentukan Fase Bahan Superkonduktor BSCCO-2212 dengan Doping Pb (BPSCCO-2212) Ameilda Larasati, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	196-201
Variasi Kadar CaCO_3 dalam Pembentukan Fase Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 dengan Doping Pb (BPSCCO-2223) Fitri Afriani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	202-207
Sintesis Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 Tanpa Doping Pb Pada Berbagai Kadar CaCO_3 Henri Handayani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	208-212
Pengaruh Variasi Waktu Penarikan dalam Pembuatan Lapisan Tipis TiO_2 dengan Metode Pelapisan Celup Dian Yulia Sari dan Posman Manurung	213-218
Pengaruh Suhu Sintering terhadap Karakteristik Struktur dan Mikrostruktur Komposit Aluminosilikat $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ Berbasis Dasar Silika Sekam Padi Fissilla Venia Wiranti dan Simon Sembiring	219-225
Sintesis dan Karakterisasi Titania Silika dengan Metode Sol Gel Revy Susi Maryanti dan Posman Manurung	226-230
Uji Fotokatalis Bahan TiO_2 yang ditambahkan dengan SiO_2 pada Zat Warna Metilen Biru Violina Sitorus dan Posman Manurung	231- 236
KARAKTERISTIK STRUKTUR DAN MIKROSTRUKTUR KOMPOSIT $\text{B}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ BERBASIS SILIKA SEKAM PADI DENGAN VARIASI SUHU KALSINASI Nur Hasanah, Suprihatin, dan Simon Sembiring	237-241
RANCANG BANGUN DAN ANALISIS ALAT UKUR MASSA JENIS ZAT CAIR BERBASIS MIKROKONTROLER ATmega8535 Prawoto, Arif Surtono, dan Gurum Ahmad Pauzi	242-247
ANALISIS BAWAH PERMUKAAN KELURAHAN TRIKORA KABUPATEN NGADA NTT MENGUNAKAN METODE GPR (<i>Ground Penetrating Radar</i>) DAN GEOLISTRIK R. Wulandari, Rustadi dan A. Zaenudin	248-250
Analisis Fungsionalitas Na_2CO_3 Berbasis CO_2 Hasil Pembakaran Tempurung Kelapa RizkySastia Ningrum, Simon Sembiring dan Wasinton Simanjuntak	251-256

PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID

Anggun Novita Sari

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Lampung

ABSTRAK

Geometri Euclid adalah geometri yang pertama kali muncul yang dibuat oleh seorang matematikawan Yunani bernama Euclides. Geometri non-Euclid lahir dikarenakan kelemahan postulat kesejajaran Euclid. Sebuah segiempat Lambert adalah segiempat yang memiliki tiga sudut siku-siku, yang tercipta atas pemikiran Johann Lambert untuk penyempurnaan Segiempat Saccheri. Dari hasil penelitian diperoleh pada geometri Euclid bahwa sudut keempat dari Segiempat Lambert adalah siku-siku dengan sisi atas sama panjang dengan sisi alas. Sudut keempat dari Segiempat Lambert adalah lancip dengan sisi atas lebih panjang dari sisi alas pada geometri Lobachevsky. Sudut keempat dari Segiempat Lambert adalah tumpul dengan sisi atas lebih pendek dari sisi alas pada geometri Riemann. Akibatnya, empat persegi panjang hanya ada dalam geometri Euclid.

Kata kunci : Segiempat Lambert, Geometri Euclid, Geometri Lobachevsky, Geometri Riemann

1. PENDAHULUAN

Geometri Euclid (geometri Parabolik) adalah geometri yang pertama kali muncul yang dibuat oleh seorang matematikawan Yunani bernama Euclid. Geometri non-Euclid lahir setelah terpecahkannya permasalahan postulat kesejajaran Euclid oleh Bolyai dan Lobachevsky. Geometri non-Euclid diantaranya adalah geometri Lobachevsky (geometri Hiperbolik) dan geometri Riemann (geometri Eliptik).

Dalam geometri Euclid dan non-Euclid, terdapat segiempat yang besar sudutnya bergantung pada geometri mana ia berada. Segiempat tersebut adalah segiempat Saccheri dan segiempat Lambert. Menurut Rawuh [6], suatu segiempat ABCD dinamakan segiempat Saccheri apabila kaki $\overline{BC} = \overline{AD}$ dan apabila sudut alas $\angle DAB = \angle ABC$ dengan $u(\angle DAB) = 90^\circ$.

Pada geometri Euclid besar dua sudut atas segiempat Saccheri adalah siku-siku, pada geometri Lobachevsky dua sudut atasnya adalah sudut lancip, sedangkan pada geometri Riemann dua sudut atasnya adalah tumpul.

Johann Lambert memberi suatu gagasan untuk menyempurnakan hasil pemikiran Giovanni Saccheri mengenai segiempat Saccheri, inilah awal dari terciptanya segiempat Lambert.

2.1. GEOMETRI EUCLID

Untuk menyusun geometrinya, Euclides memulainya dengan membuat pernyataan mengenai unsur-unsur yang tak terdefinisi, yaitu:

1. Titik, adalah unsur yang tidak memiliki panjang, lebar maupun ketebalan.

2. Garis, dilambangkan dengan \overline{AB} adalah panjang yang tidak mempunyai lebar maupun ketebalan. Suatu garis bisa lurus, melengkung maupun kombinasi keduanya
3. Bidang adalah unsur yang memiliki panjang dan lebar, tapi tidak mempunyai ketebalan. Bidang adalah suatu permukaan dimana suatu garis yang menghubungkan dua titik pada permukaan tersebut secara keseluruhan akan terletak pada permukaan tersebut [6].

Dengan menggunakan unsur-unsur tak terdefinisi tersebut, dapat dibentuk bangun datar seperti segitiga dan segiempat. Segitiga adalah segi yang terbentuk oleh tiga segmen yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak segaris, ketiga segmen tersebut disebut sisi, dan ketiga titik sudut tersebut disebut titik sudut [3].

Dua segitiga dikatakan kongruen jika :

1. Dua sisi dan satu sudut yang bersesuaian pada kedua segitiga kongruen (S, Sd, S).
2. Dua sudut dan satu sisi yang bersesuaian pada kedua segitiga kongruen (Sd, S, Sd).
3. Ketiga sisi yang bersesuaian pada kedua segitiga kongruen (S, S, S) [6].

Geometri Euclid memiliki postulat kesejajaran yang berbunyi "Melalui sebuah titik di luar sebuah garis dapat ditarik hanya sebuah garis lurus lain yang sejajar dengan garis pertama". Berdasarkan postulat kesejajaran tersebut, ditentukan bahwa jumlah ukuran sudut dalam suatu segitiga sama dengan 180° . Oleh karenanya, jumlah ukuran sudut dalam suatu segiempat adalah 360° , dan sudut-sudut puncak dari segiempat Saccheri adalah sama dan siku-siku (90°) [1].

Karena postulat kelima (postulat kesejajaran) Euclid dianggap lemah, maka beberapa ilmuwan mencoba membuktikan kebenarannya, dan akhirnya menimbulkan pemikiran menciptakan geometri non-Euclid, yaitu Geometri Lobachevsky dan Geometri Riemann.

2.2. GEOMETRI LOBACHEVSKY

Geometri Lobachevsky berbeda dengan Geometri Euclid hanya pada postulat keseajarannya. Postulat kesejajaran Lobachevsky berbunyi "jika sebuah titik terletak tidak pada suatu garis, maka terdapat paling sedikit dua garis yang dapat ditarik melalui titik itu serta sejajar dengan garis tadi" [5].

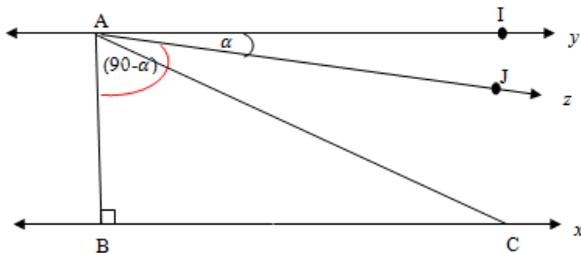
Berdasarkan postulat tersebut, ditentukan bahwa jumlah ukuran sudut dalam suatu segitiga kurang dari 180° .

Teorema 2.2.1

Berlaku pada segitiga dengan jumlah derajat sudut kurang dari 180° .

Bukti:

Misal titik A terletak tidak pada garis x, maka dapat ditarik garis y yang melalui A dan sejajar garis x. Misalkan garis x melalui titik B dan C dengan \overleftrightarrow{AB} tegak lurus garis x



Gambar 1. Segitiga dengan jumlah sudut kurang dari 180°

Maka berdasarkan postulat kesejajaran Lobachevsky dapat ditarik satu garis lain yang sejajar dengan garis x dan melalui titik A yaitu garis z. Dengan ini akan dibuktikan bahwa besar ukuran sudut dalam segitiga ABC kurang dari 180° .

$$\begin{aligned} u(\angle ABC) &= 90^\circ \\ u(\angle BCA) &< \alpha \\ u(\angle CAB) &< u(\angle JAB) \\ &< 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Untuk jumlah ketiga sudut dalam segitiga ABC diperoleh :

$$\begin{aligned} u(\angle ABC) + u(\angle BCA) + u(\angle CAB) &< 90^\circ + \alpha + (90^\circ - \alpha) \\ &< 180^\circ \end{aligned}$$

Terbukti bahwa jumlah ukuran sudut dalam segitiga pada Geometri Lobachevsky adalah kurang dari 180° .

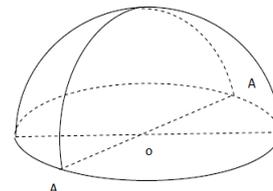
Teorema ini mengakibatkan suatu segiempat dalam Geometri Lobachevsky memiliki jumlah sudut dalam kurang dari 360° dan sudut-sudut puncak Segiempat Saccheri adalah sama dan lancip [8].

2.3. GEOMETRI RIEMANN

Seperti halnya Geometri Lobachevsky, Geometri Riemann berbeda dengan Geometri Euclid hanya pada postulat keseajarannya. Postulat kesejajaran Riemann berbunyi "tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain" [2]. Dengan kata lain, dalam Geometri Riemann tidak ada garis yang sejajar, melainkan selalu tegak lurus dengan garis lain. Pada Geometri Riemann terdapat dua macam pengkhususan, yaitu geometri "single elliptic" dan geometri "double elliptic".

• Geometri Single Elliptic

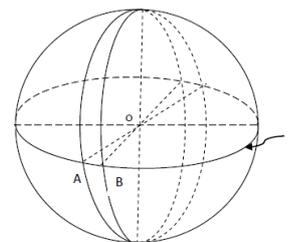
Sebarang dua garis yang berpotongan tepat pada satu titik, tetapi tidak ada garis yang memisahkan bidang tersebut



Gambar 2. Model geometri single elliptic

• Geometri Double Elliptic

Dua garis berpotongan tepat pada dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang.



Gambar 3. Model geometri double elliptic

Dua garis yang tegak lurus selalu berpotongan pada satu titik (pada geometri Riemann titik itu disebut titik kutub) dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu [4].

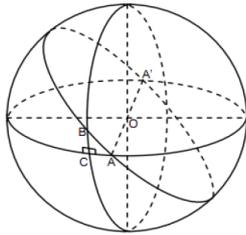
Dalil 2.3.1

Dalam sebarang segitiga ABC dengan sudut C = 90° , sudut A besarnya kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari 90° tergantung dari segmen BC kurang dari, sama dengan atau lebih besar dari jarak polar [3].

Bukti:

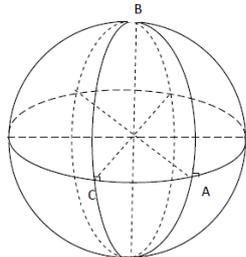
Diketahui : segitiga ABC dengan $\angle C = 90^\circ$

a. Ditunjukkan $\angle A < 90^\circ$, bila jarak B ke C < dari jarak polar



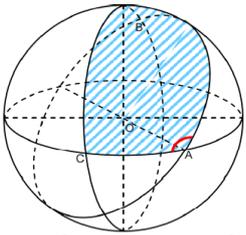
Gambar 4. Ilustrasi dalil 2.3.1 dengan $\angle A < 90^\circ$

b. Ditunjukkan $\angle A = 90^\circ$, bila jarak B ke C = dari jarak polar



Gambar 5. Ilustrasi dalil 2.3.1 dengan $\angle A = 90^\circ$

c. Ditunjukkan $\angle A > 90^\circ$, bila jarak B ke C > dari jarak polar



Gambar 6. Ilustrasi dalil 2.3.1 dengan $\angle A > 90^\circ$

Teorema 2.3.1

Jumlah besar sudut-sudut dalam segitiga lebih besar dari 180° .

Bukti:

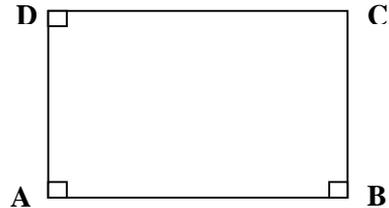
Pada gambar 5, terlihat bahwa $\angle A = 90^\circ, \angle C = 90^\circ$ dan $\angle B$ pastilah positif. Sehingga jumlah sudut segitiga ABC adalah lebih besar dari 180° .

Teorema ini mengakibatkan pada Geometri Riemann jumlah ukuran sudut dalam suatu segiempat adalah lebih besar dari 180° dan sudut-sudut puncak pada Segiempat Saccheri adalah sama dan tumpul.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1

Segiempat Lambert adalah segiempat yang memiliki 3 sudut siku-siku.



Gambar 7. Segiempat Lambert

Misal segiempat ABCD di atas adalah segiempat Lambert, maka:

$$u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^\circ$$

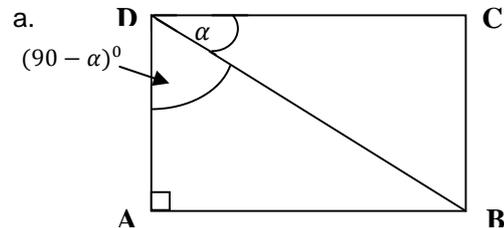
Hipotesa yang diberikan Johan Lambert (1728-1777) pada segiempat yang ketiga sudutnya siku-siku maka sudut keempatnya adalah lancip, siku-siku atau tumpul.

3.1 Segiempat Lambert pada Geometri Euclid

Diberikan segiempat Lambert ABCD dengan $u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^\circ$. Akan dibuktikan bahwa:

- a. $u(\angle BCD)$ sebesar 90° atau siku-siku.
- b. Panjang sisi $AB = CD$

Bukti:



Gambar 8. ΔABD dan ΔBCD dalam segiempat ABCD Geometri Euclid

Terlihat bahwa:

- $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^\circ$ (dari definisi segiempat Lambert)
- $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle ADB \cong \angle CBD$
- $u(\angle ABD) + u(\angle CBD) = u(\angle ADB) + u(\angle BDC) = 90^\circ$

Misal $u(\angle BDC) = \alpha$ maka

$$u(\angle ADB) = (90 - \alpha)^\circ$$

Karena $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle CBD \cong \angle ADB$, maka :

$$u(\angle ABD) = u(\angle BDC) = \alpha$$

dan

$$u(\angle CBD) = u(\angle ADB) = (90 - \alpha)^\circ$$

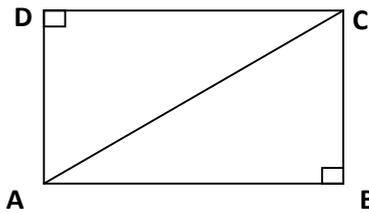
Pada geometri Euclid, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah 180° . Oleh karenanya, besar

ukuran sudut $\angle BCD$ diperoleh dari $\triangle BCD$ dengan

$$\begin{aligned} u(\angle BDC) &= \alpha \\ u(\angle CBD) &= (90 - \alpha)^0 \\ u(\angle BDC) + u(\angle CBD) + u(\angle BCD) &= 180^0 \\ \alpha^0 + (90 - \alpha)^0 + u(\angle BCD) &= 180^0 \\ \alpha^0 - \alpha^0 + 90^0 + u(\angle BCD) &= 180^0 \\ 90^0 + u(\angle BCD) &= 180^0 \\ 90^0 - 90^0 + u(\angle BCD) &= 180^0 - 90^0 \\ u(\angle BCD) &= 90^0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa besar ukuran sudut $\angle BCD$ adalah 90^0 atau siku-siku.

b. Panjang $AB = CD$



Gambar 9. Dua Segitiga Kongruen dalam Segiempat ABCD pada Geometri Euclid

Telah dibuktikan bahwa keempat sudut segiempat Lambert ABCD di atas siku-siku atau

$$u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle BCD) = u(\angle ADC) = 90^0.$$

Perhatikan $\triangle ABC$ dan $\triangle ACD$, terlihat bahwa:

- $u(\angle CAD) + u(\angle BAC) = 90^0$
- $u(\angle ACB) + u(\angle ACD) = 90^0$
- \overline{AC} dan \overline{CA} adalah dua garis yang berimpit pada $\triangle ABC$ dan $\triangle ACD$

Dalam geometri Euclid, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah 180^0 , maka pada $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} u(\angle BAC) + u(\angle ABC) + u(\angle ACB) &= 180^0 \\ u(\angle BAC) + 90^0 + u(\angle ACB) &= 180^0 \\ u(\angle BAC) + u(\angle ACB) &= 90^0 \end{aligned}$$

Dari penjumlahan dua sudut $u(\angle ACB) + u(\angle ACD) = 90^0$ dan $u(\angle BAC) + u(\angle ACB) = 90^0$ maka didapat $u(\angle ACD) = u(\angle BAC)$ atau $\angle ACD \cong \angle BAC$.

Dari penjumlahan dua sudut $u(\angle BAC) + u(\angle ACB) = 90^0$ dan $u(\angle BAC) + u(\angle CAD) = 90^0$ maka didapat $u(\angle ACB) = u(\angle CAD)$ atau $\angle ACB \cong \angle CAD$.

Karena $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\angle ACD \cong \angle BAC$ dan $\angle ACB \cong \angle CAD$ maka $\triangle ABC$ dan $\triangle ACD$ adalah dua segitiga yang kongruen.

Oleh karena itu, sisi-sisi yang bersesuaian pada $\triangle ABC$ dan $\triangle ACD$ adalah $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$,

$\overline{AB} = \overline{CD}$. Dengan kata lain, terbukti bahwa panjang sisi $AB = CD$.

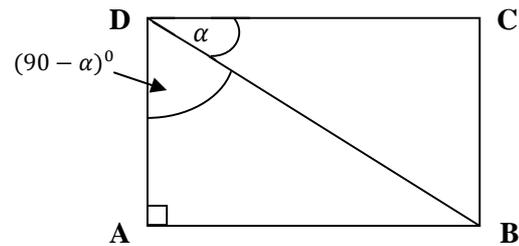
3.2. Segiempat Lambert pada Geometri Lobachevsky

Diberikan segiempat Lambert ABCD dengan $u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^0$. Akan dibuktikan bahwa:

- $u(\angle BCD)$ besarnya kurang dari 90^0 (sudut lancip)
- Panjang sisi $AB < CD$

Bukti:

a.



Gambar 10. $\triangle ABD$ dan $\triangle BCD$ dalam segiempat ABCD Lobachevsky

Terlihat bahwa:

- $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^0$ (dari definisi segiempat Lambert)
- $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle ADB \cong \angle CBD$
- $u(\angle ABD) + u(\angle CBD) = u(\angle ADB) + u(\angle BDC) = 90^0$

Misal: $u(\angle BDC) = \alpha$, maka $u(\angle ADB) = (90 - \alpha)^0$. Karena $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle CBD \cong \angle ADB$, maka

$$u(\angle ABD) = u(\angle BDC) = \alpha$$

Dan

$$u(\angle CBD) = u(\angle ADB) = (90 - \alpha)^0$$

Pada geometri Lobachevsky, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah kurang dari 180^0 . Oleh karenanya, besar ukuran sudut $\angle BCD$ diperoleh dari $\triangle BCD$ dengan

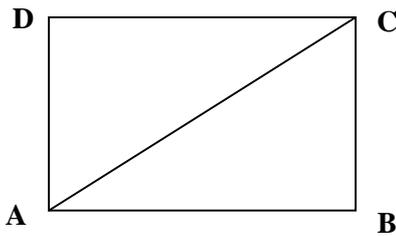
$$\begin{aligned} u(\angle BDC) &= \alpha \\ u(\angle CBD) &= (90 - \alpha)^0 \\ u(\angle BDC) + u(\angle CBD) + u(\angle BCD) &< 180^0 \\ \alpha^0 + (90 - \alpha)^0 + u(\angle BCD) &< 180^0 \\ \alpha^0 - \alpha^0 + 90^0 + u(\angle BCD) &< 180^0 \\ 90^0 + u(\angle BCD) &< 180^0 \\ 90^0 - 90^0 + u(\angle BCD) &< 180^0 - 90^0 \\ u(\angle BCD) &< 90^0 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa besar sudut $\angle BCD$ atau sudut keempat dari segiempat Lambert pada geometri Lobachevsky kurang dari 90^0 (sudut lancip).

b. Panjang sisi $AB < CD$

Untuk membuktikan panjang sisi $AB < CD$, perlu dibentuk segitiga-segitiga kongruen dengan

memisalkan $AB = CD$ di dalam segiempat ABCD seperti gambar berikut:



Gambar 11. Dua Segitiga Kongruen dalam Segiempat ABCD pada Geometri Lobachevsky

Karena $u(\angle CDA) = 90^\circ$ maka $u(\angle CDA) = u(\angle ABC) = 90^\circ$ dan \overline{AC} merupakan sisi persekutuan dari $\triangle ACD$ dan $\triangle ABC$ maka $\triangle ACD \cong \triangle ABC$ dan diperoleh $\angle DAC \cong \angle BCA$ dan $\angle DCA \cong \angle BAC$.

Maka

$$\begin{aligned} u(\angle DAC) + u(\angle BAC) &= u(\angle ACD) + u(\angle ACB) \\ &= 90^\circ \\ u(\angle BAD) &= u(\angle BCD) = 90^\circ \end{aligned}$$

Terjadi kontradiksi karena telah dibuktikan bahwa $u(\angle BCD) < 90^\circ$, jadi tidak mungkin $AB = CD$.

Dari segiempat Lambert ABCD diperoleh $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^\circ$ dan $u(\angle BCD) < 90^\circ$ (lancip), maka $AB < CD$ atau $CD > AB$.

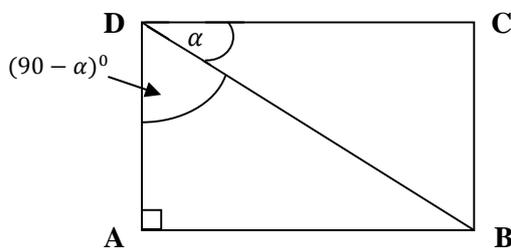
3.3. Segiempat Lambert pada Geometri Riemann

Diberikan segiempat Lambert ABCD dengan $u(\angle BAD) = u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = 90^\circ$. Akan dibuktikan bahwa:

- $u(\angle BCD)$ besarnya lebih dari 90° (sudut tumpul)
- Panjang sisi $AB > CD$

Bukti:

a.



Gambar 12. $\triangle ABD$ dan $\triangle BCD$ dalam Segiempat ABCD Geometri Riemann

Terlihat bahwa:

- $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^\circ$ (dari definisi segiempat Lambert)
- $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle ADB \cong \angle CBD$
- $u(\angle ABD) + u(\angle CBD) = u(\angle ADB) + u(\angle BDC) = 90^\circ$

Misal : $u(\angle BDC) = \alpha$,
maka $u(\angle ADB) = (90 - \alpha)^\circ$
Karena $\angle ABD \cong \angle BDC$ dan $\angle CBD \cong \angle ADB$,
maka

$$u(\angle ABD) = u(\angle BDC) = \alpha$$

Dan

$$u(\angle CBD) = u(\angle ADB) = (90 - \alpha)^\circ$$

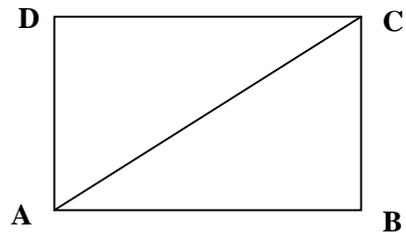
Pada geometri Riemann, jumlah sudut-sudut pada segitiga adalah lebih dari 180° . Oleh karenanya, besar ukuran sudut $\angle BCD$ diperoleh dari $\triangle BCD$ dengan

$$\begin{aligned} u(\angle BDC) &= \alpha \\ u(\angle CBD) &= (90 - \alpha)^\circ \\ u(\angle BDC) + u(\angle CBD) + u(\angle BCD) &> 180^\circ \\ \alpha^\circ + (90 - \alpha)^\circ + u(\angle BCD) &> 180^\circ \\ \alpha^\circ - \alpha^\circ + 90^\circ + u(\angle BCD) &> 180^\circ \\ 90^\circ + u(\angle BCD) &> 180^\circ \\ 90^\circ - 90^\circ + u(\angle BCD) &> 180^\circ - 90^\circ \\ u(\angle BCD) &> 90^\circ \end{aligned}$$

Terbukti bahwa besar sudut $\angle BCD$ atau sudut keempat dari segiempat Lambert pada geometri Riemann lebih dari 90° (sudut tumpul).

b. Panjang sisi $AB < CD$

Untuk membuktikan panjang sisi $AB < CD$, perlu dibentuk segitiga-segitiga kongruen dengan memisalkan $AB = CD$ di dalam segiempat ABCD seperti gambar berikut:



Gambar 13. Dua Segitiga Kongruen dalam Segiempat ABCD Pada Geometri Riemann

Karena $u(\angle CDA) = 90^\circ$ maka $u(\angle CDA) = u(\angle ABC) = 90^\circ$ dan \overline{AC} merupakan sisi persekutuan dari $\triangle ACD$ dan $\triangle ABC$ maka $\triangle ACD \cong \triangle ABC$ dan diperoleh $\angle DAC \cong \angle BCA$ dan $\angle DCA \cong \angle BAC$.

Maka

$$\begin{aligned} u(\angle DAC) + u(\angle BAC) &= u(\angle ACD) + u(\angle ACB) \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

$$u(\angle BAD) = u(\angle BCD) = 90^\circ$$

Terjadi kontradiksi karena telah dibuktikan bahwa $u(\angle BCD) > 90^\circ$, jadi tidak mungkin $AB = CD$.

Dari segiempat Lambert ABCD diperoleh $u(\angle ABC) = u(\angle ADC) = u(\angle BAD) = 90^\circ$ dan $u(\angle BCD) > 90^\circ$ (tumpul), maka $AB > CD$ atau $CD < AB$.

4. KESIMPULAN

Pada geometri Euclid, keempat sudut dalam Segiempat Lambert adalah siku-siku dan sisi atas sama panjang dengan sisi alas. Pada Geometri Lobachevsky segiempat Lambert memiliki tiga sudut siku-siku dan satu sudut lancip dengan sisi atas lebih panjang dari sisi alas. Sedangkan pada Geometri Riemann Segiempat Lambert memiliki tiga sudut siku-siku dan satu sudut tumpul dengan sisi atas lebih pendek dari sisi alas.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1]Deniyanti, Pinta. 2007 .
<http://id.scribd.com/doc/69498813/MATERI-GEOMETRI-EUCLID-2007>. Diakses pada 24 September 2012.
- [2]Karso. 1996. *Pendidikan Matematika 4* . Universitas Terbuka, Jakarta.
- [3]Keedy, Mervin L. dkk.1967. Exploring Geometri. New York: Holt, Rinchart and Winston, Inc.
- [4]Moeharti HW. 1986. *Materi Pokok Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta: Kanika Jakarta, Universitas Terbuka.
- [5]Rawuh. 2009. *Geometri*. Universitas Terbuka, Jakarta.
- [6]Rich, Barneth . 2005. *Geometri (Schaum's Easy Outlines)*. Erlangga, Jakarta.
- [7]Ruseffendi. 1985. *Pengajaran Matematika Modern* . Tarsito, Bandung.
- [8]Tandililing, Fitriana dkk. 2011.
<http://ml.scribd.com/doc/88654454/Geometry-Hiperbolik> .Diakses pada 13 September 2012.