ISSN : 2337-9057

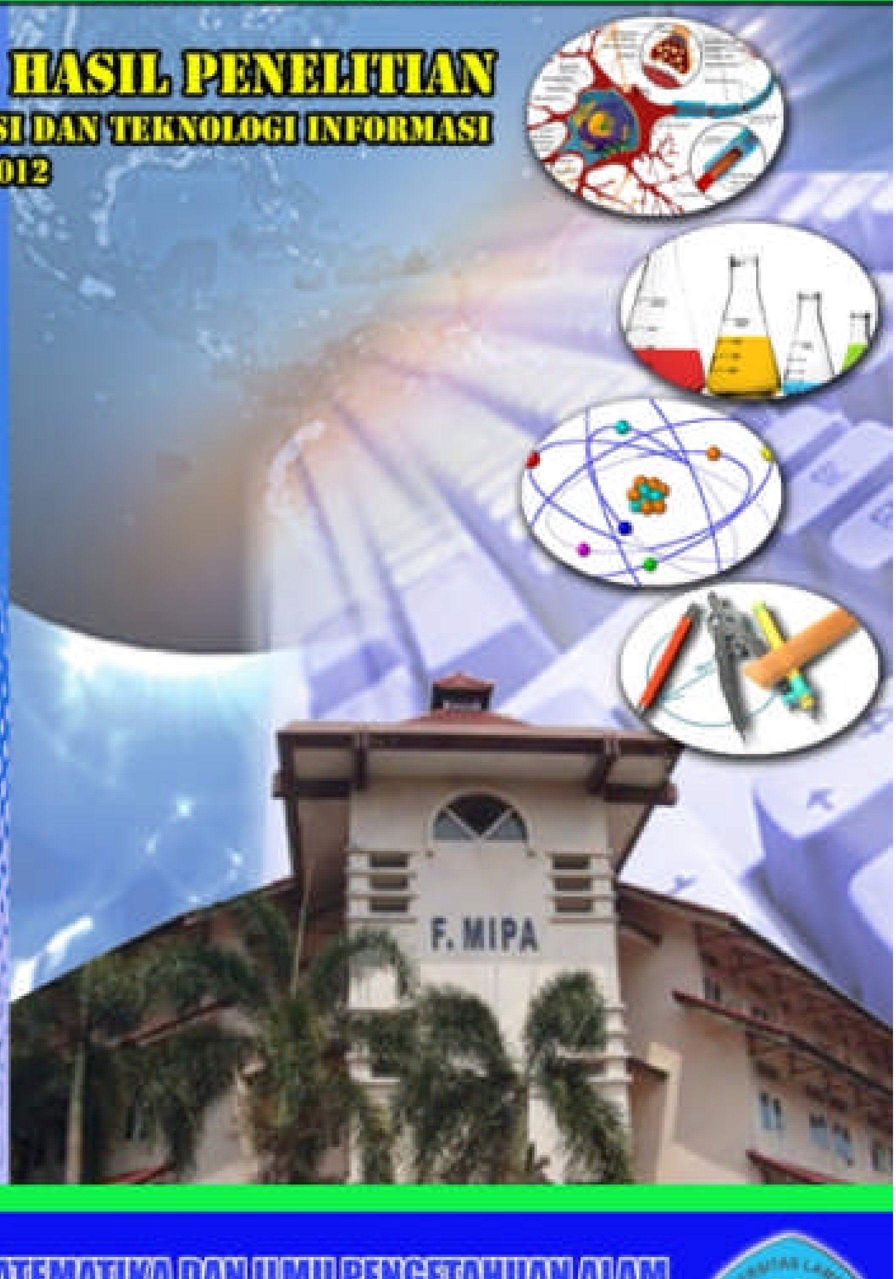
PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

SEMINAR HASIL PENELITIAN

SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012



FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012

DAFTAR ISI

Kelompok Statistika

Kelompok Kimia

KelompokFisika

TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN l^p

Nur Rohmah, Muslim Ansori & Amanto

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Abstrak

Ruang barisan l^p dengan $1 \le p < \infty$ merupakan ruang banach. Setiap operator $A: l^p \to l^q$ dengan $1 \le p, q < \infty$ menentukan suatu matriks tak hingga (a_{ij}) dengan syarat-syarat tertentu, dan sebaliknya juga berlaku. Karena setiap pemetaan yang diwakili matriks tak hingga bersifat linier maka operator $A: l^p \to l^q$ dengan $1 \le p, q < \infty$ bersifat linier. Karena l^p dan l^q terkait dengan matriks tak hingga maka A kontinu. Oleh karena itu setiap operator A dari l^p ke l^q dengan $1 \le p, q < \infty$ bersifat linier kontinu.

Kata kunci: ruang barisan, operator linear, $l^p (1 \le p < \infty)$, ruang banach

I. PENDAHULUAN

Salah satu bahasan tentang ruang barisan adalah teori transformasi matriks. Dalam pembahasan ini lebih difokuskan menganalisa matriks tak hingga, matriks dan masalah kekonvergenan. Teorema Banach-Steinhauss dan teorema-teorema yang berkaitan banyak dimanfaatkan untuk mengkaji transformasi matriks tersebut. Sebagian besar operator linear pada suatu ruang barisan ke ruang barisan lainnya, dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga, oleh sebab itu digunakan tranformasi yang diberikan oleh matriks tak hingga, bukan operator linear umum.

II. LANDASAN TEORI

Definisi 2.1 *Ruang Banach*

Suatu ruang vektor bernorm X dinamakan ruang banach jika X lengkap. Kelengkapan berarti bahwa setiap barisan Cauchy dalam X konvergen jika $\|(x_n + x_m)\| \to 0 \ (n, m \to \infty),\ x_n \in x$ maka terdapat $x \in X$ sehingga

$\|(x_n - x)\| \to 0 \ (n \to \infty)$ [5].

Definisi 2.2 *Ruang Barisan*

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan real, jadi:

$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$

a. Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l^\infty = \{x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$$

dan norm pada l^∞ yaitu

$\|x\|_\infty = sup_{j \ge 1} |x_j|$ [3].

Definisi 2.3 *Operator*

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm.

a. Operator $A : X \to Y$ dikatakan terbatas jika ada bilangan $M \in R$ dengan $M \ge 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $\|Ax\| \le M\|x\|$.
b. Operator A dikatakan kontinu di $x \in X$ jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $y \in X$ dengan $\|x - y\| \le \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$.
c. Jika A kontinu di setiap $x \in X$, A disebut kontinu pada X. [4]

Teorema 2.1

Jika Y ruang banach maka $\mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ ruang banach.

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset \mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat $n_0 \in N$ sehingga jika $m, n \in N$ dengan $m,n \geq n_0$ berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal untuk setiap $x \in X$ dan $m,n \geq n_0$ diperoleh

$$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$$
$$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon_0\|x\|$$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilih bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$) ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m,n \geq n_0$ berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\} \subset Y$ dan Y lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen, katakan ke $y_x \in Y$.

Jadi $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x menentukan suatu operator A sehingga $Ax = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$.

Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A sehingga $Az = y_z$.

Untuk setiap skalar a dan b, diperoleh $ax + bz \in X$.

$\lim_{n\to\infty} A_n (ax + bz) = y_{ax+bz}$ dan $ax + bz$ menentukan suatu operator A sehingga $A(ax+bz) = y_{ax+bz}$.

$$\text{Jadi } A(ax+bz) = \lim_{n\to\infty} A_n (ax + bz)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(aA_n x + bA_n z)$$
$$= \lim_{n\to\infty} aA_n x + \lim_{n\to\infty} bA_n z$$
$$= a\lim_{n\to\infty} A_n x + b\lim_{n\to\infty} A_n z$$
$$= ay_x + by_z$$
$$= aA_x + bA_z$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_m x - A_n x\|$$
$$= \|A_m x - Ax\|$$
$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0\|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena Am dan $(A_m - A)$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka A terbatas (kontinu).

Jadi $A \in \mathcal{L}_c((X,Y), \|.\|)$ dengan kata lain $\mathcal{L}_c((X,Y), \|.\|)$ ruang Banach. [5]

Teorema 2.2

Misal X dan Y ruang BK (Banach Lengkap). Jika A matriks tak hingga yang memetakan X ke Y maka A kontinu.

Bukti :

Misal $A = (a_{ij})$

$X = (x_j) \in X$

$y = (y_i) \in Y$ dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada X. jelas bahwa setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan $\alpha \in R$

$$f_m(s) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j$$

$$(i)\, f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} s_j + a_{ij} t_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (s_j + t_j)$$
$$= \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} (s + t)_j$$
$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)\, (f_m)(ax) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (\alpha x_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha (a_{ij} x_j)$$
$$= \alpha \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$
$$= \alpha (f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti merupakan fungsi linear pada X.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada X.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada X.

Diketahui X ruang BK maka terdapat M > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada x

$$f_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

Maka f juga kontinu pada x.
Karena y ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j^{(n)}$$

Atau

$$Ax^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_1^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_2^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{(n)}\right) = f(x) = A(x)_i,\ \forall i$$

Jika $y = Ax$ maka bukti lengkap. [6]

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 3.1
Jika bilangan real p dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Banach.

Bukti :
Telah dibuktikan bahwa $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Bernorm. Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang Bernorm itu lengkap.
Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p < \infty$, diambil sebarang barisan Cauchy $\{\bar{x}^{(n)}\} \subset l^p$ dengan

a) $\bar{x}^{(n)} = \{\bar{x}^{(n)}\} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots\right)$
Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$. Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap k. dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehungga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan (b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Selanjutnya dibentuk barisan $\bar{x} = (x_k)$. Menurut ketidaksamaan Minkowski.

c)
$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\bar{x} = \{x_k\} \in l^p$. Berdasarkan (a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

d) $$\left\|\bar{x} - \bar{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$$
maka barisan $\{\bar{x}^{(n)}\}$ konvergen ke $\bar{x}$.
Berdasarkan hasil (c) dan (d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\{\bar{x}^{(n)}\} \subset l^p$ konvergen ke $\bar{x} = \{x_k\} \in l^p$ atau terbukti bahwa $(l^p, \|.\|_p), (1 \leq p < \infty)$, merupakan ruang Banach. [3]

Teorema 3.2
Operator $A : l^p \to l^q$ dengan $1 < p, q < \infty$ dan q konjugat p bersifat linear kontinu jika dan hanya

jika ada matriks tak hingga (a_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$ dan $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l^q$ untuk setiap $x \in l^p$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Diambil sebarang $x \in l^p$ dengan $1 < p < \infty$. Karena l^p dan l^q (q konjugat p dan $1 < p,q < \infty$) masing-masing ruang barisan maka operator linear kontinu A menentukan suatu matriks tak hingga (a_{ij}) dan

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Berdasarkan pertidaksamaan *Holder* diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}x_j|\right|^q \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}x_j|\right)^q$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\|a_i\|_q\|x\|_p\right)^q$$
$$= (\|x\|_p)^q\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q$$
$$= (\|x\|_p)^q\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$$

Jika $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$, dengan q konjugat q dan $1 < p,q < \infty$.

Jadi terbukti ada matriks tak hingga (a_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$ dan $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l^q$ untuk setiap $x \in l^p$ dengan $1 < p,q < \infty$ dan q konjugat p.

$(\Leftarrow)$ Diambil sebarang barisan $x \in l^p$. Maka x dapat ditulis sebagai vektor kolom dan menurut yang diketahui diperoleh

$$(a_{ij})x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Karena $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$ dengan $1 < q < \infty$ dan q konjugat p maka

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}x_j|\right|^q \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}x_j|\right)^q$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\|a_i\|_q\|x\|_p\right)^q$$
$$= (\|x\|_p)^q\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q$$
$$= (\|x\|_p)^q\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$$

Jadi $(a_{ij})x \in l^q$ untuk setiap $x \in l^p$ dengan $1 < p,q < \infty$ dan q konjugat p serta matriks tak hingga (a_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q < \infty$ menentukan suatu operator, katakan A, dari l^p ke l^q. Dengan menggunakan sifat linear suatu matriks, jelas jika diambil sebarang skalar a,b maka untuk setiap $x,y \in l^p$ diperoleh

$$(a_{ij})(ax+by) = a(a_{ij})x + b(a_{ij})x \Leftrightarrow$$
$$A(ax+by) = a\,Ax + b\,Ay$$

Jadi operator A bersifat linear. Karena l^p dan l^q dengan $1 < p,q < \infty$ dan q konjugat p masing-masing ruang BK, maka A operator kontinu. Jadi terbukti A operator linear kontinu dari l^p ke l^q ($1 < p,q < \infty$ dan q konjugat p). [8]

Teorema 3.3

Operator $A : l^p \to l^q$ dengan $1 < p,q < \infty$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks tak hingga (a_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q < \infty$ dan q konjugat p serta $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l^q$ untuk setiap $x \in l^p$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Diambil sebarang dengan $x \in l^p$ dengan $1 < p < \infty$. Karena l^p dan $l^q (1 < q < \infty)$ masing-masing ruang barisan maka operator linear kontinu A menentukan suatu matriks tak hingga (a_{ij}) dan

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Berdasarkan pertidaksamaan *Holder* diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} x_j| \right|^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} x_j| \right)^q$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|a_i\|_q \|x\|_p)^q$$

$$= (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$$

Jika $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$ dengan $1 < p, q < \infty$ dan q konjugat p. Jadi terbukti ada matriks tak hingga (a_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$ dan $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\} \in l^q$ untuk setiap $x \in l^p$ dengan $1 < p, q < \infty$ dan q konjugat p.

$(\Leftarrow)$ Diambil sebarang barisan $x \in l^p$ dengan $1 < p < \infty$. Maka x dapat ditulis sebagai vektor kolom dan menurut yang diketahui diperoleh

$$(a_{ij})x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Karena $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$ dengan $1 < p, q < \infty$ dan q konjugat p maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} x_j| \right|^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} x_j| \right)^q$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|a_i\|_q \|x\|_p)^q$$

$$= (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$$

Jadi $(a_{ij})x \in l^q$ untuk setiap $x \in l^p$ dan matriks tak hingga (a_{ij}) dengan $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$ menentukan suatu operator, katakan A dari l^p ke l^q dengan $1 < p, q < \infty$ dan q konjugat p. Dengan menggunakan sifat linear yang dimiliki suatu matriks, jelas jika diambil sebarang skalar a,b maka untuk setiap $x, y \in l^p$ diperoleh

$$(a_{ij})(ax + by) = a(a_{ij})x + b(a_{ij})x \Leftrightarrow$$
$$A(ax + by) = a\,Ax + b\,Ay$$

Jadi diperoleh A bersifat linear. Karena l^p dan l^q dengan $1 < p, q < \infty$ masing-masing ruang BK, maka A operator kontinu.
Jadi terbukti A operator linear kontinu dari l^p ke l^q dengan $1 < p, q < \infty$. [8]

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Ruang barisan l^p dengan $1 \leq p < \infty$ merupakan ruang Banach. Setiap operator $A: l^p \to l^q$ dengan $1 \leq p, q < \infty$ menentukan suatu matriks tak hingga (a_{ij}) dengan syarat-syarat tertentu, dan sebaliknya juga berlaku. Karena setiap matriks pemetaan bersifat linear maka operator $A: l^p \to l^q$ dengan $1 \leq p, q < \infty$ bersifat linear. Karena l^p dan l^q terkait dengan matriks tak hingga maka A kontinu. Oleh karena itu setiap operator A dari l^p ke l^q dengan $1 \leq p, q < \infty$ bersifat linear kontinu.Syarat suatu matriks tak hingga (a_{ij}) sehingga terkait suatu operator linear kontinu *A* dari l^p ke l^q dengan $1 \leq p, q < \infty$ adalah

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$$

Saran untuk penelitian selanjutnya, yaitu untuk mencari transformasi matriks tak hingga dari ruang barisan ke ruang barisan yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ayres, Frank. 1974. *Theory and Problems of Matrices*. McGraw-Hill, New York.

[2] Berberian, S. K. 1996. *Fundamentals of Real Analysis*. Springer, Texas.

[3] Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

[4] Kreyszig, Erwin. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York.

[5] Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, New York.

[6] Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS – KENT Publishing Company.

[7] Rudin, Walter. 1987. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York.

[8] Safaatullah, MF. 2003. *Operator Linier dari Ruang l^p ke Ruang l^q*. Tesis. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.