

ISSN : 2337-9057



# PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

**SEMINAR HASIL PENELITIAN  
SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI  
15 DESEMBER 2012**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
2012**



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>Kelompok Matematika</b>	
PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID Anggun Novita Sari, Muslim Ansori dan Agus Sutrisno	1-6
Ruang Topologi $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4$ Anwar Sidik, Muslim Ansori dan Amanto	7-14
PENERAPAN GRAF DEBRUIJN PADA KONSTRUKSI GRAF EULERIAN Fazrie Mulia, Wamiliana, dan Fitriani	15-21
REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN Herlisa Anggraini, Muslim Ansori, Amanto	22-27
ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL) Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno	28-33
Algoritma Untuk Mencari Grup Automorfisma Pada Graf Circulant Vebriyan Agung, Ahmad Faisol, Amanto	34-37
KEISOMORFISMAAN GEOMETRI AFFIN Pratiwi Handayani, Muslim Ansori, Dorrah Aziz	38-41
METODE PENGUKURAN SUDUT MES SEBAGAI KEBIJAKAN PENENTUAN 1 SYAWAL Mardiyah Hayati, Tiryo, dan Dorrah	42-44
KE-ISOMORFISMAAN GEOMETRI INSIDENSI Marlina, Muslim Ansori dan Dorrah Aziz	45-47
TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN $\mathbb{R}^n$ Nur Rohmah, Muslim Ansori dan Amanto	48-53
KAJIAN ANALITIK GEOMETRI PADA GERAK MEKANIK POLISI TIDUR (POLDUR) UNTUK PENGGERAK DINAMO Nurul Hidayah Marfiatin, Tiryo Ruby dan Agus Sutrisno	54-56
<i>INTEGRAL RIEMANN FUNGSI BERNILAI VEKTOR</i> Pita Rini, Dorrah Aziz, dan Amanto	57-63
ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF <i>WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS</i> DAN <i>GRAF CYCLIC-CUBES</i> Ririn Septiana, Wamiliana, dan Fitriani	64-71
Ring Armendariz Tri Handono, Ahmad Faisol dan Fitriani	72-77
PERKALIAN DAN AKAR KUADRAT UNTUK OPERATOR <i>SELF-ADJOINT</i> Yuli Kartika, Muslim Ansori, Fitriani	78-81

## Kelompok Statistika

APROKSIMASI DISTRIBUSI <i>STUDENT</i> TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Eflin Marsinta Uli, Warsono, dan Widiarti	82-85
ANALISIS CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN NEW JERSEY Eva fitrilia, Rudi Ruswandi, dan Widiarti	86-93
PENDEKATAN DISTRIBUSI GAMMA TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Jihan Trimita Sari T, Warsono, dan Widiarti	94-97
PERBANDINGAN ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOM Latusiania Oktamia, Netti Herawati, Eri Setiawan	98-103
PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM ( <i>EXPECTATION MAXIMIZATION</i> ) Nurashri Partasiwi, Dian Kurniasari dan Widiarti	104-109
KAJIAN CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN METODE KANADA RozaZelvia, Rudi Ruswandi dan Widiarti	110-115
ANALISIS KOMPONEN RAGAM DATA HILANG PADA RANCANGAN <i>CROSS-OVER</i> Sorta Sundry H. S, Mustofa Usman dan Dian Kurniasari	116-121
PENDEKATAN DISTRIBUSI GOMPERTZ PADA CADANGAN ASURANSI JIWA UNTUK METODE ZILLMER DAN ILLINOIS Mahfuz Hudori, Rudi Ruswandi dan Widiarti	122-126
KAJIAN RELATIF BIAS METODE <i>ONE-STAGE</i> DAN <i>TWO-STAGE CLUSTER SAMPLING</i> Rohman, Dian Kurniasari dan Widiarti	127-130
PERBANDINGAN UJI HOMOGENITAS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOMV Tika Wahyuni, Netti Herawati dan Eri Setiawan	131-136
PENDEKATAN DISTRIBUSI KHI-KUADRAT TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Tiyas Yulita, Warsono dan Dian Kurniasari	137-140

## Kelompok Kimia

TRANSESTERIFIKASI MINYAK SAWIT DENGAN METANOL DAN KATALIS HETEROGEN BERBASIS SILIKA SEKAM PADI ( $MgO-SiO_2$ ) EviRawati Sijabat, Wasinton Simanjuntak dan Kamisah D. Pandiangan	141-147
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT ( $CaCO_3$ ) DENGAN METODE <i>UNSEEDED EXPERIMENT</i> Miftasani, Suharso dan Buhani	148-153
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING WULUH SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT ( $CaCO_3$ ) DENGAN METODE <i>SEEDED EXPERIMENT</i> PutriFebriani Puspita, Suharso dan Buhani	154-160

IDENTIFIKASI SENYAWA AKTIF DARI KULIT BUAH ASAM KERANJI ( <i>Dalium indum</i> ) SEBAGAI INHIBITORKOROSIBAJA LUNAK Dewi Kartika Sari, Ilim Wasinton dan Simanjuntak	161-168
TransesterifikasiMinyakSawitdenganMetanoldanKatalisHeterogenBerbasis SilikaSekamPadi( $TiO_2/SiO_2$ ) Wanti Simanjuntak, Kamisah D. Pandiangan dan Wasinton Simanjuntak	169-175
UJI PENDAHULUAN HIDROLISIS ONGGOK UNTUK MENGHASILKAN GULA REDUKSI DENGAN BANTUAN ULTRASONIKASI SEBAGAI PRAPERLAKUAN Juwita Ratna Sari dan Wasinton Simanjuntak	176-182
STUDI FORMULASI PATI SORGUM-GELATIN DAN KONSENTRASI <i>PLASTICIZER</i> DALAM SINTESA BIOPLASTIK SERTA UJI <i>BIODEGRADABLE</i> DENGAN METODE FISIK Yesti Harryzona dan Yuli Darni	183-190
<b>Kelompok Fisika</b>	
Pengaruh Variasi Suhu Pemanasan Dengan Pendinginan Secara Lambat Terhadap Uji <i>Bending</i> Dan Struktur Mikro Pada Baja Pegas Daun AISI 5140 Adelina S.E Sianturi, Ediman Ginting dan Pulung Karo-Karo	191-195
PengaruhKadar $CaCO_3$ terhadapPembentukanFaseBahanSuperkonduktorBSCCO-2212 denganDopingPb (BPSCCO-2212) Ameilda Larasati, Suprihatin dan Ediman GintingSuka	196-201
Variasi Kadar $CaCO_3$ dalamPembentukanFaseBahanSuperkonduktor BSCCO-2223 dengan Doping Pb (BPSCCO-2223) Fitri Afriani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	202-207
Sintesis Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 Tanpa Doping Pb Pada Berbagai Kadar $CaCO_3$ Heni Handayani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	208-212
Pengaruh Variasi Waktu Penarikan dalam Pembuatan Lapisan Tipis $TiO_2$ dengan Metode Pelapisan Celup Dian Yulia Sari dan Posman Manurung	213-218
Pengaruh Suhu Sintering terhadap Karakteristik Struktur dan Mikrostruktur Komposit Aluminosilikat $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ Berbahan Dasar Silika Sekam Padi Fissilla Venia Wiranti dan Simon Sembiring	219-225
Sintesisdan KarakterisasiTitaniaSilikadenganMetode Sol Gel Revy Susi Maryanti dan Posman Manurung	226-230
Uji Fotokatalis Bahan $TiO_2$ yang ditambahdengan $SiO_2$ padaZatWarnaMetilenBiru Violina Sitorus dan Posman Manurung	231- 236
KARAKTERISTIK STRUKTUR DAN MIKROSTRUKTUR KOMPOSIT $B_2O_3-SiO_2$ BERBASIS SILIKA SEKAM PADI DENGAN VARIASI SUHU KALSINASI Nur Hasanah, Suprihatin, dan Simon Sembiring	237-241
RANCANG BANGUN DAN ANALISIS ALAT UKUR MASSA JENIS ZAT CAIR BERBASIS MIKROKONTROLER ATMega8535 Prawoto, Arif Surtono, dan Gurum Ahmad Pauzi	242-247

ANALISIS BAWAH PERMUKAAN KELURAHAN TRIKORA KABUPATEN NGADA NTT MENGUNAKAN METODE GPR ( <i>Ground Penetrating Radar</i> ) DAN GEOLISTRIK R. Wulandari, Rustadi dan A. Zaenudin	248-250
Analisis Fungsionalitas Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub> Berbasis CO <sub>2</sub> Hasil Pembakara Tempurung Kelapa RizkySastia Ningrum, Simon Sembiring dan Wasinton Simanjuntak	251-256

# TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN $l^p$

Nur Rohmah, Muslim Ansori & Amanto

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Lampung

## Abstrak

Ruang barisan  $l^p$  dengan  $1 \leq p < \infty$  merupakan ruang banach. Setiap operator  $A: l^p \rightarrow l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  menentukan suatu matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan syarat-syarat tertentu, dan sebaliknya juga berlaku. Karena setiap pemetaan yang diwakili matriks tak hingga bersifat linier maka operator  $A: l^p \rightarrow l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  bersifat linier. Karena  $l^p$  dan  $l^q$  terkait dengan matriks tak hingga maka  $A$  kontinu. Oleh karena itu setiap operator  $A$  dari  $l^p$  ke  $l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  bersifat linier kontinu.

**Kata kunci:** ruang barisan, operator linear,  $l^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), ruang banach

## I. PENDAHULUAN

Salah satu bahasan tentang ruang barisan adalah teori transformasi matriks. Dalam pembahasan ini lebih difokuskan menganalisa matriks tak hingga, matriks dan masalah kekonvergenan. Teorema Banach-Steinhaus dan teorema-teorema yang berkaitan banyak dimanfaatkan untuk mengkaji transformasi matriks tersebut. Sebagian besar operator linear pada suatu ruang barisan ke ruang barisan lainnya, dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga, oleh sebab itu digunakan transformasi yang diberikan oleh matriks tak hingga, bukan operator linear umum.

## II. LANDASAN TEORI

### Definisi 2.1 Ruang Banach

Suatu ruang vektor bernorm  $X$  dinamakan ruang banach jika  $X$  lengkap. Kelengkapan berarti bahwa setiap barisan Cauchy dalam  $X$  konvergen jika  $\|(x_n + x_m)\| \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ),  $x_n \in X$  maka terdapat  $x \in X$  sehingga  $\|(x_n - x)\| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) [5].

### Definisi 2.2 Ruang Barisan

Diberikan  $\omega$  yaitu koleksi semua barisan bilangan real, jadi:

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}; x_k \in \mathbb{R}\}$$

- a. Untuk setiap bilangan real  $p$  dengan  $1 \leq p < \infty$  didefinisikan

$$l^p = \{x \in \{x_j\} \in \omega; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}$$

dan norm pada  $l^p$  yaitu

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- b. Untuk  $p = \infty$  didefinisikan

$$l^\infty = \{x \in \{x_j\} \in \omega; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$$

dan norm pada  $l^\infty$  yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \geq 1} |x_j| \quad [3].$$

### Definisi 2.3 Operator

Diberikan  $(X, \|\cdot\|)$  dan  $(Y, \|\cdot\|)$  masing-masing ruang bernorm.

- a. Operator  $A: X \rightarrow Y$  dikatakan terbatas jika ada bilangan  $M \in \mathbb{R}$  dengan  $M \geq 0$  sehingga untuk setiap  $x \in X$  berlaku  $\|Ax\| \leq M\|x\|$ .
- b. Operator  $A$  dikatakan kontinu di  $x \in X$  jika diberikan bilangan  $\varepsilon > 0$  ada bilangan  $\delta > 0$  sehingga untuk setiap  $y \in X$  dengan  $\|x - y\| \leq \delta$  berlaku  $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$ .
- c. Jika  $A$  kontinu di setiap  $x \in X$ ,  $A$  disebut kontinu pada  $X$ . [4]

### Teorema 2.1

Jika  $Y$  ruang banach maka  $\mathcal{L}_c((X, Y), \|\cdot\|)$  ruang banach.

### Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy  $\{A_j\} \subset \mathcal{L}_c((X, Y), \|\cdot\|)$ .

Jadi untuk setiap bilangan  $\varepsilon_0$  terdapat  $n_0 \in N$  sehingga jika  $m, n \in N$  dengan  $m, n \geq n_0$  berlaku  $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$ .

Misal untuk setiap  $x \in X$  dan  $m, n \geq n_0$  diperoleh

$$\begin{aligned} \|A_m x - A_n x\| &= \|(A_m - A_n)x\| \\ &\leq \|A_m - A_n\| \|x\| < \varepsilon_0 \|x\| \end{aligned}$$

Jelas untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  (dapat dipilih bilangan  $\varepsilon_0 > 0$  sehingga  $\varepsilon_0 \|x\| < \varepsilon$ ) ada  $n_0 \in N$  sehingga untuk setiap  $m, n \in N$  dengan  $m, n \geq n_0$  berlaku  $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0 \|x\| < \varepsilon$ .

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy  $\{A_n x\} \subset Y$  dan  $Y$  lengkap, dengan kata lain  $\{A_n x\}$  konvergen, katakan ke  $y_x \in Y$ .

Jadi  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = y_x$  dan  $x$  menentukan suatu operator  $A$  sehingga  $Ax = y_x$ .

Proses di atas dapat diulang untuk  $z \in X$  tetap, dengan  $z \neq x$ .

Jadi diperoleh  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n z = y_z$  dan  $z$  menentukan suatu operator  $A$  sehingga  $Az = y_z$ .

Untuk setiap skalar  $a$  dan  $b$ , diperoleh  $ax + bz \in X$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$  dan  $ax + bz$  menentukan suatu operator  $A$  sehingga  $A(ax + bz) = y_{ax+bz}$ .

$$\begin{aligned} \text{Jadi } A(ax + bz) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(ax + bz) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (aA_n x + bA_n z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} aA_n x &+ \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} bA_n z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \\ a \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x &+ \\ &\quad b \lim_{n \rightarrow \infty} A_n z \\ &= ay_x + by_z \\ &= aA_x + bA_z \end{aligned}$$

**Jadi operator A bersifat linear.**

Untuk  $n \rightarrow \infty$  diperoleh

$$\begin{aligned} \|(A_m - A_n)x\| &= \|A_m x - A_n x\| \\ &= \|A_m x - Ax\| \\ &= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0 \|x\| \end{aligned}$$

Jadi operator  $(A_m - A)$  dengan  $m \geq n_0$  bersifat linear terbatas.

Karena  $A_m$  dan  $(A_m - A)$  masing-masing terbatas, serta  $A = A_m - (A_m - A)$  maka  $A$  terbatas (kontinu).

Jadi  $A \in \mathcal{L}_c((X, Y), \|\cdot\|)$  dengan kata lain  $\mathcal{L}_c((X, Y), \|\cdot\|)$  ruang Banach. [5]

### Teorema 2.2

Misal  $X$  dan  $Y$  ruang BK (Banach Lengkap). Jika  $A$  matriks tak hingga yang memetakan  $X$  ke  $Y$  maka  $A$  kontinu.

Bukti :

Misal  $A = (a_{ij})$

$$X = (x_j) \in X$$

$$y = (y_i) \in Y \text{ dapat dinyatakan}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada  $X$ . jelas bahwa setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j$$

Misal  $s = (s_j), t = (t_j)$  dan  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j \quad f_m(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij} t_j$$

$$\begin{aligned} \text{(i) } f_m(s) + f_m(t) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} s_j + \sum_{j=1}^m a_{ij} t_j \\ &= \sum_{j=1}^m (a_{ij} s_j + a_{ij} t_j) \\ &= \sum_{j=1}^m a_{ij} (s_j + t_j) \\ &= \sum_{j=1}^m a_{ij} (s + t)_j \\ &= f_m(s + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } (f_m)(\alpha x) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} (\alpha x_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha (a_{ij} x_j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \\ &= \alpha (f_m(x)) \end{aligned}$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti merupakan fungsi linear pada  $X$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan  $f_m$  kontinu pada  $X$ .

Hal ini sama saja membuktikan  $f_m$  terbatas pada  $X$ .

Diketahui  $X$  ruang BK maka terdapat  $M > 0$  sehingga  $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$\begin{aligned}
 |f_m(x)| &= \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \\
 &\leq \sum_{j=1}^m |a_{ij}| M
 \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian di atas,  $f_m$  mendefinisikan fungsi linear kontinu pada  $x$

$$f_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$$

Maka  $f$  juga kontinu pada  $x$ .

Karena  $y$  ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

Atau

$$\begin{aligned}
 Ax^{(n)} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 y_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) \\
 &= f(x) \\
 &= A(x)_i, \forall i
 \end{aligned}$$

Jika  $y = Ax$  maka bukti lengkap. [6]

### III. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### Teorema 3.1

Jika bilangan real  $p$  dengan  $1 \leq p \leq \infty$ , maka  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  merupakan ruang Banach.

**Bukti :**

Telah dibuktikan bahwa  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  merupakan ruang Bernorm. Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang Bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk  $1 \leq p < \infty$ , diambil sebarang barisan Cauchy

$\{\bar{x}^{(n)}\} \subset l^p$  dengan

$$a) \bar{x}^{(n)} = \{\bar{x}^{(n)}\} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots)$$

Untuk sebarang  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $n_0$  sehingga untuk setiap dua bilangan asli  $m, n \geq n_0$  berlaku

$$b) \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \text{ atau}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p.$$

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli  $m, n > 0$  diperoleh  $|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \frac{\varepsilon}{4}$  untuk setiap  $k$ . dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy  $x_k^{(n)}$  untuk setiap  $k$ . Jadi terdapat bilangan  $x_k$  sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k \text{ atau}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_k^{(n)} - x_k| = 0.$$

Berdasarkan (b) diperoleh untuk  $n \geq n_0$  berlaku

$$|x_k^{(n)} - x_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

. Selanjutnya dibentuk barisan  $\bar{x} = (x_k)$ .

Menurut ketidaksamaan Minkowski.

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

c)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty
 \end{aligned}$$

Yang berarti  $\bar{x} = \{x_k\} \in l^p$ . Berdasarkan (a) diperoleh untuk  $n \geq n_0$  berlaku

$$\begin{aligned}
 d) \|\bar{x} - \bar{x}^{(n)}\| &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}
 \end{aligned}$$

maka barisan  $\{\bar{x}^{(n)}\}$  konvergen ke  $\bar{x}$ .

Berdasarkan hasil (c) dan (d), terbukti bahwa barisan Cauchy  $\{\bar{x}^{(n)}\} \subset l^p$

konvergen ke  $\bar{x} = \{x_k\} \in l^p$  atau terbukti bahwa  $(l^p, \|\cdot\|_p)$ , ( $1 \leq p < \infty$ ),

merupakan ruang Banach. [3]

#### Teorema 3.2

Operator  $A : l^p \rightarrow l^q$  dengan  $1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$  bersifat linear kontinu jika dan hanya

jika ada matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$  dan  $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l^q$  untuk setiap  $x \in l^p$ .

**Bukti :**

( $\Rightarrow$ ) Diambil sebarang  $x \in l^p$  dengan  $1 < p < \infty$ .

Karena  $l^p$  dan  $l^q$  ( $q$  konjugat  $p$  dan  $1 < p, q < \infty$ ) masing-masing ruang barisan maka operator linear kontinu  $A$  menentukan suatu matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dan

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Berdasarkan pertidaksamaan *Holder* diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right|^q &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x_j| \right)^q \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|a_i\|_q \|x\|_p)^q \\ &= (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q \\ &= (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty \end{aligned}$$

Jika  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$ , dengan  $q$  konjugat  $p$  dan  $1 < p, q < \infty$ .

Jadi terbukti ada matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$  dan  $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l^q$  untuk setiap  $x \in l^p$  dengan  $1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$ .

( $\Leftarrow$ ) Diambil sebarang barisan  $x \in l^p$ . Maka  $x$  dapat ditulis sebagai vektor kolom dan menurut yang diketahui diperoleh

$$(a_{ij})x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Karena  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$  dengan  $1 < q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$  maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right|^q &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x_j| \right)^q \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|a_i\|_q \|x\|_p)^q \\ &= (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q \\ &= (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty \end{aligned}$$

Jadi  $(a_{ij})x \in l^q$  untuk setiap  $x \in l^p$  dengan

$1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$  serta matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$

menentukan suatu operator, katakan  $A$ , dari  $l^p$  ke  $l^q$ . Dengan menggunakan sifat linear suatu

matriks, jelas jika diambil sebarang skalar  $a, b$  maka untuk setiap  $x, y \in l^p$  diperoleh

$$\begin{aligned} (a_{ij})(ax + by) &= a(a_{ij})x + b(a_{ij})x \Leftrightarrow \\ A(ax + by) &= aAx + bAy \end{aligned}$$

Jadi operator  $A$  bersifat linear. Karena  $l^p$  dan  $l^q$  dengan  $1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$  masing-masing ruang BK, maka  $A$  operator kontinu. Jadi terbukti  $A$  operator linear kontinu dari  $l^p$  ke  $l^q$  ( $1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$ ). [8]

### Teorema 3.3

Operator  $A : l^p \rightarrow l^q$  dengan  $1 < p, q < \infty$

bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks tak hingga  $(a_{ij})$

dengan  $\sum_{i=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q < \infty$  dan  $q$

konjugat  $p$  serta  $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l^q$  untuk setiap  $x \in l^p$ .

**Bukti :**

( $\Rightarrow$ ) Diambil sebarang dengan  $x \in l^p$  dengan  $1 < p < \infty$ . Karena  $l^p$  dan  $l^q (1 < q < \infty)$  masing-masing ruang barisan maka operator linear kontinu  $A$  menentukan suatu matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dan

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Berdasarkan pertidaksamaan *Holder* diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right|^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|a_i\|_q \|x\|_p)^q = (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Jika  $\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$  dengan

$1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$ . Jadi terbukti ada matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \text{ dan}$$

$Ax = \{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \} \in l^q$  untuk setiap  $x \in l^p$  dengan  $1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$ .

( $\Leftarrow$ ) Diambil sebarang barisan  $x \in l^p$  dengan  $1 < p < \infty$ . Maka  $x$  dapat ditulis sebagai vektor kolom dan menurut yang diketahui diperoleh

$$(a_{ij})x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Karena  $\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$  dengan

$1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$  maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right|^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|a_i\|_q \|x\|_p)^q = (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Jadi  $(a_{ij})x \in l^q$  untuk setiap  $x \in l^p$  dan matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \text{ menentukan suatu}$$

operator, katakan  $A$  dari  $l^p$  ke  $l^q$  dengan

$1 < p, q < \infty$  dan  $q$  konjugat  $p$ . Dengan menggunakan sifat linear yang dimiliki suatu matriks, jelas jika diambil sebarang skalar  $a, b$  maka untuk setiap  $x, y \in l^p$  diperoleh

$$(a_{ij})(ax + by) = a(a_{ij})x + b(a_{ij})y \Leftrightarrow A(ax + by) = aAx + bAy$$

Jadi diperoleh  $A$  bersifat linear. Karena  $l^p$  dan  $l^q$  dengan  $1 < p, q < \infty$  masing-masing ruang BK, maka  $A$  operator kontinu.

Jadi terbukti  $A$  operator linear kontinu dari  $l^p$  ke  $l^q$  dengan  $1 < p, q < \infty$ . [8]

#### IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Ruang barisan  $l^p$  dengan  $1 \leq p < \infty$  merupakan ruang Banach. Setiap operator  $A: l^p \rightarrow l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  menentukan suatu matriks tak hingga  $(a_{ij})$  dengan syarat-syarat tertentu, dan sebaliknya juga berlaku. Karena setiap matriks pemetaan bersifat linear maka operator  $A: l^p \rightarrow l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  bersifat linear. Karena  $l^p$  dan  $l^q$  terkait dengan matriks tak hingga maka  $A$  kontinu. Oleh karena itu setiap operator  $A$  dari  $l^p$  ke  $l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  bersifat linear

kontinu. Syarat suatu matriks tak hingga  $(\alpha_{ij})$  sehingga terkait suatu operator linear kontinu  $A$  dari  $l^p$  ke  $l^q$  dengan  $1 \leq p, q < \infty$  adalah

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q < \infty$$

Saran untuk penelitian selanjutnya, yaitu untuk mencari transformasi matriks tak hingga dari ruang barisan ke ruang barisan yang lainnya.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ayres, Frank. 1974. *Theory and Problems of Matrices*. McGraw-Hill, New York.
- [2] Berberian, S. K. 1996. *Fundamentals of Real Analysis*. Springer, Texas.
- [3] Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- [4] Kreyszig, Erwin. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York.
- [5] Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, New York.
- [6] Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS – KENT Publishing Company.
- [7] Rudin, Walter. 1987. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York.
- [8] Safaatullah, MF. 2003. *Operator Linier dari Ruang  $l^p$  ke Ruang  $l^q$* . [Tesis](#). Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.