Hubungan Kekongruenan Dalam Geometri Terhingga

Lina Ardila Sari, Suharsono, Muslim Ansori

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung
Jln. Prof Dr. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung35145
Alamat Email : linaardilasari@ymail.com

Abstrak. Aksioma – aksioma terkait untuk geometri insidensi Euclid berdimensi n dapat dipenuhi dengan model – model berhingga, yaitu model – model yang memuat hanya sejumlah hingga titik, garis, bidang dll. Model – model ini adalah ruang vektor linier berdimensi n atas Lapangan hingga GF_q dengan $q = p^h$. Masalahnya adalah aksioma – aksioma urutan dan aksioma – aksioma kekongruenan dapat dipenuhi dalam geometri berhingga. Untuk kasus $h \neq 1$, penggantian aksioma 3 dalam paper ini memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan hasil sebelumnya.

Kata Kunci. Geometri Euclidian, Geometri insidensi, aksioma, kekongruenan, geometri terhingga.

PENDAHULUAN

Geometri berhingga adalah geometri yang memiliki sejumlah kecil aksioma dan teorema serta sejumlah titik yang berhingga. Salah satu contah dari geometri terhingga adalah geometri empat titik. Pada dasarnya sudah diketahui bahwa kejadian aksioma atau yang sesuai dengan suatu peristiwa geometri Euclidian berdimensi n dapat dipenuhi dengan model-model terhingga, yaitu model-model yang hanya mengandung titik-titik, garis-garis, bidang-bidang dalam jumlah terhingga, model ini adalah ruang-ruang vektor linier berdimensi n dalam bidang terhingga GF_q, $q = p^h$. Aksioma-aksioma tentang orde dan aksioma-aksioma tentang kekongruenan juga dapat dipenuhi dalam geometri terhingga. Hubungan kekongruenan dalam geometri terhingga, penelitian ini akan diberikan solusi untuk kasus-kasus $p = 2$ atau $n > 2$. Pada tulisan ini akan dibahas mengenai pembuktikan teorema yaitu bila O, I, K adalah tiga titik kolinier berbeda, O, J, L adalah tiga titik koliner berbeda, dan IJ sejajar dengan KL, maka OI = OJ berimplikasi dengan OK = OL. Dengan menggunakan aksioma-aksioma yang ada di geometri terhingga.

LANDASAN TEORI

Garis

Sebuah garis (garis lurus) dapat dibayangkan sebagai kumpulan dari titik – titik yang memanjang secara tak terhingga ke kedua arah **[2].**

Ruas Garis

Ruas garis lurus dilambangkan dengan $\overline{AB}$. Ruas garis lurus adalah bagian dari garis lurus yang berada di antara dua titik pada garis lurus tersebut, termasuk kedua titik tersebut.

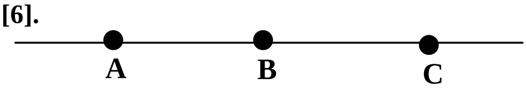
Jika suatu ruas garis dibagi menjadi bagian-bagian:

1. Panjang keseluruhan ruas garis sama dengan jumlah dari panjang semua bagiannya.
2. Panjang keseluruhan ruas garis lebih besar dari panjang bagiannya yang manapun.
3. Dua ruas garis yang mempunyai panjang sama dikatakan *kongruen*. Jadi, jika AB = CD maka $\overline{AB}$ kongruen dengan $\overline{CD}$, sehingga ditulis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Jika suatu ruas garis dibagi menjadi dua bagian yang sama:

1. Titik bagiannya adalah titik tengah ruas garis tersebut.
2. Garis yang memotong pada titik tengah dikatakan membagi dua ruas garis tersebut.

Jika tiga titik A, B, dan C terletak pada satu garis, maka ketiganya disebut *kolinear*. Jika A, B, dan C kolinear dan $AB + BC = AC$, maka B terletak di antara A dan C **[6].**



Gambar 2.1. Tiga titik A, B, dan C yang kolinear.

Bidang

Sebuah bidang dapat dianggap sebagai kumpulan titik yang jumlahnya tak terhingga yang membentuk permukaan rata yang melebar ke segala arah sampai tak terhingga **[2].**

Geomertri Euclid EG(*2, pn*)

Lapangan adalah daerah integral yang setiap elemen yang tidak nol mempunyai invers terhadap pergandaan. F adalah suatu lapangan perluasan dari lapangan K. Jika K merupakan lapangan bagian dari F. Selanjutnya jika K lapangan dengan f(x) polinominal yang tidak konstan maka terdapatlah lapangan perluasan F dari K, dan elemen F. Jika lapangan F mempunyai jumlah F terhingga disebut lapangan terhingga. Lapangan dengan jumlah elemen yang terhingga yaitu *pn*, dimana *p* bilangan prima dan *n* sebarang bilangan bulat positif disebut *Galois field* GF (*pn*). Elemen F yang jumlahnya terhingga dapat digunakan untuk mengkostruksi sebuah sistem geometri yang disebut geometri Euclid.

Geometri Euclid *(Euclidean Geometry)* EG (*m*, *q*) dengan *m* dimensi terbentuk dari lapangan berhingga GF(*q*), dimana *p* bilangan prima. Geometri Euclid dari dua dimensi atas lapangan GF(*pn*) dinotasikan dengan EG (*2*, *pn*) **[1].**

Geometri Insidensi

Suatu geometri dibentuk berdasarkan aksioma yang berlaku dalam geometri-geometri tersebut. Geometri insidensi didasari oleh aksioma insidensi. Di dalam sebuah geometri selain aksioma diperlukan juga unsur-unsur tak terdefinisi.

Untuk membangun suatu geometri diperlukan unsur tak terdefinisi sebagai berikut :

1. Titik.
2. Himpunan titik-titik yang dinamakan garis.
3. Himpunan titik-titik yang dinamakan bidang.

Ketiga unsur tak terdefinisi tersebut dikaitkan satu sama lain dengan sebuah sistem aksioma.
Pada geometri insidensi sistem aksioma yang digunakan adalah sistem aksioma insidensi yang terdiri dari enam aksioma, yaitu :

1. Garis adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit dua titik.
2. Dua titik yang berlainan terkandung dalam tepat satu garis (satu dan tidak lebih dari satu garis).
3. Bidang adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit tiga titik yang tidak terkandung dalam satu garis (tiga titik tak segaris atau tiga titik yang tak kolinear).
4. Tiga titik berlainan yang tak segaris terkandung dalam satu dan tidak lebih dari satu bidang.
5. Apabila sebuah bidang memuat dua titik berlainan dari sebuah garis, maka bidang itu akan memuat setiap titik pada garis tersebut (garis terkandung dalam bidang itu, atau garis terletak pada bidang itu).
6. Apabila dua bidang bersekutu pada sebuah titik maka kedua bidang itu akan bersekutu pada titik kedua yang lain (ada titik lain dimana bidang tersebut juga bersekutu).

Sebuah himpunan titik-titik bersama dengan himpunan bagian seperti garis dan bidang yang memenuhi sistem aksioma 1 sampai dengan 6 disebut suatu geometri insidensi **[5].**

Konsep Kekongruenan

Bentuk-bentuk kongruen adalah bentuk-bentuk yang memiliki ukuran dan bentuk yang sama: bentuk-bentuk tersebut merupakan duplikat yang persis satu sama lain. Bentuk-bentuk tersebut dapat dibuat tumpang tindih sehingga bagian-bagiannya yang bersesuaian saling berimpitan.

Dua lingkaran yang mempunyai jari-jari sama adalah lingkaran-lingkaran yang kongruen. Dan segitiga-segitiga yang kongruen adalah segitiga-segitiga yang mempunyai ukuran dan bentuk yang sama. Kongruen adalah keadaan dua bangun datar yang sama dan sebangun. Semua bangun datar yang sebangun belum tentu kongruen, tapi semua bangun datar yang kongruen sudah pasti sebangun **[6].**

Kekongruenan ruas garis memiliki sifat-sifat berikut **[5]**:

(i) $\overline{AB} \simeq \overline{AB}$ (sifat refleksif)

(ii) $Jika\ \overline{AB} \simeq \overline{CD}$ maka $\overline{CD} \simeq \overline{AB}$ (sifat simetrik)

(iii) $Jika\ \overline{AB} \simeq \overline{CD}, \overline{CD} \simeq \overline{EF}$ maka $\overline{AB} \simeq \overline{EF}$ (sifat transitif)

(iv) $jika\ \overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$ dengan (*ABC*), (*A'B' C'*) maka $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$

(v) Andaikan $\overline{AB}$ sebuah sinar dan $\overline{CD}$ sebuah ruas, maka ada sebuah titik P □ $\overline{AB}$ sehingga $\overline{AP} \cong \overline{CD}$

Beberapa Aksioma dan teorema

Sebuah hubungan yang unik tentang kekongruenan dalam bidang Euclidian terhingga pada setiap bidang Galois GF_q, $q = p^h$, $p \neq 2$.

Ditulis secara singkat "AB = CD" untuk preposisi "ruas antara titik A dan B adalah kongruen dengan ruas antara titik C dan D".

Aksioma 1.

AB = CD mengakibatkan BA = CD dan CD = AB.
AB = CD dan CD = EF mengakibatkan AB = EF.

Aksioma2.

Bila AB dan CD sejajar, maka AB=CD valid jika hanya jika AC sejajar dengan BD atau AD sejajar dengan BC.

Aksioma 3.

Bila A, B, C, D adalah empat titik kolinier dan A', B', C', D', adalah empat titik kolinier, dan garis AA', BB', CC', DD' sejajar, maka AB = A'B' mengakibatkan CD = C'D'.

Dari aksioma 2 diperoleh dua teorema yaitu:

Teorema 1.

AA = BC mengakibatkan B = C.

Teorema 2.

Bila A, B adalah dua titik yang berbeda, maka terdapat satu dan hanya satu titik C sedemikian sehingga A, B, C kolinier, B $\neq$ C, dan AB = AC **[3].**

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari, memahami dan mengkaji mengenai buku-buku, jurnal maupun makalah yang berhubungan dengan penelitian.

Dalam melakukan penelitian ini, ada langkah–langkah yang harus penulis lakukan untuk mempermudah penulis dalam memperoleh maupun menyelesaikan hasil penelitian. Langkah-langkah yang penulis lakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan referensi yang berhubungan dengan penelitian.
2. Menuliskan aksioma-aksioma dan teorema-teorema yang berhubungan dengan penelitian.
3. Mempelajari dan memahami aksioma-aksioma dan teorema-teorema yang berhubungan dengan penelitian.
4. Menguraikan dan menggunakan aksioma-aksioma dan teorema-teorema sebagai acuan dalam melakukan penelitian untuk memperoleh hasil penelitian ini.
5. Melakukan penelitian tentang hubungan kekongruenan dalam geometri terhingga.
6. Penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

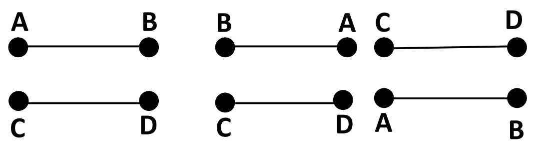
Dari penelitian ini didapat beberapa penjelasan dan pembuktian untuk aksioma dan teorema. Dapat di lihat di bab ini penjelasan dan bukti nya. Ditulis secara singkat "AB = CD" untuk preposisi "ruas antara titik A dan B adalah kongruen dengan ruas antara titik C dan D".

Aksioma 1.

AB = CD mengakibatkan BA = CD dan CD = AB.
AB = CD dan CD = EF mengakibatkan AB = EF.

Penjelasan nya:

AB = CD mengakibatkan BA = CD dan CD = AB, ini berarti untuk menyatakan suatu ruas garis AB dapat ditulis BA. Karena AB = CD suatu proposisi walau di bolak – balik tetap sama.



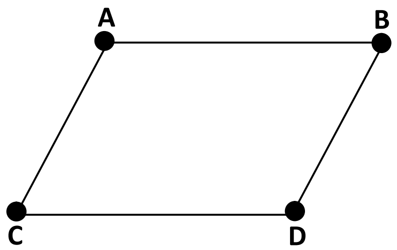
Gambar .1. Aksioma 1

Aksioma 2.

Bila AB dan CD sejajar, maka AB=CD valid jika hanya jika AC sejajar dengan BD atau AD sejajar dengan BC.

Penjelasannya:

Diterangkan melalui gambar jajar genjang yaitu gambar 4.2 aksioma 2, ini jelas terlihat bahwa AB dan CD sejajar.



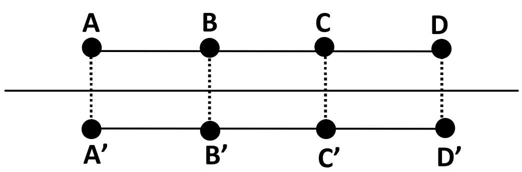
Gambar .2. Aksioma 2

Aksioma 3.

Bila A, B, C, D adalah empat titik kolinier dan A', B', C', D', adalah empat titik kolinier, dan garis AA', BB', CC', DD' sejajar, maka AB = A'B' mengakibatkan CD = C'D'.

Penjelasannya:

Diterangkan melalui gambar dibawah ini



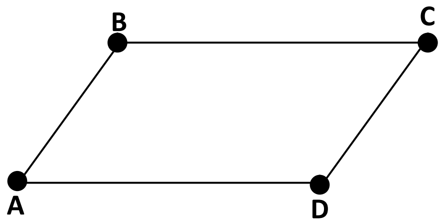
Gambar .3. Aksioma 3

AA', BB', CC', DD', adalah saling paralel (sejajar). Untuk AB = A'B' mengakibatkan CD = C'D'.

Dari aksioma 2 diperoleh dua teorema yaitu:

Teorema 1. AA = BC mengakibatkan B = C.

Bukti :Dengan aksioma 2, ditulis AA = AD pada gambar dengan A = D

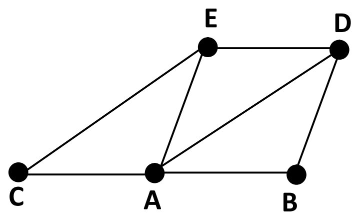


Gambar .4. Teorema 1

Gambar di atas adalah konstruksi jajar genjang ABCD dengan AD // BC maka dengan aksioma 2, AD = BC mengakibatkan AB // DC atau AB // CD. Karena A = D, maka AB dan CD berimpit sehingga menjadi B = C.

Teorema 2. Bila A, B adalah dua titik yang berbeda, maka terdapat satu dan hanya satu titik C sedemikian sehingga A, B, C kolinier, B $\neq$ C, dan AB = AC.

Bukti: Dapat ditunjukkan dengan membangun sebuah jajar genjang ABDE, seperti dibawah ini:

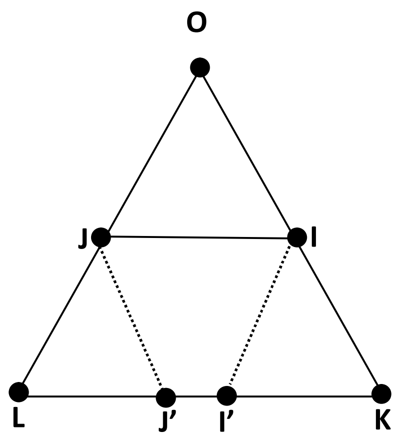


Gambar 5. Teorema 2

Dengan melihat konstruksi titik C sedemikian sehingga CE // AD, mengakibatkan AC = DE (aksioma 2) karena DE = AD (pada jajar genjang ABDE) maka dengan aksioma 1 haruslah AC = AB.

Teorema 3.Bila O, I, K adalah tiga titik kolinier berbeda, O, J, L adalah tiga titik koliner berbeda, dan IJ sejajar dengan KL, maka OI = OJ berimplikasi dengan OK = OL.

Bukti: Membuktikan teorema 3 ini merupakan tujuan dalam penelitian penulis, dibawah ini gambar dari teorema 3.



Gambar 3.6 Teorema 3

Buat JJ' // IK dan II' // JL pandang jajar genjang JII'L karena diketahui IJ//KL, demikian juga pada jajar genjang JII'L, IJ // I'L, maka dengan aksioma (2...) IJ = I'L. Sehingga I'K = KL – I'L = KL – IJ.

Kemudian pandang jajar genjang IJJ'K karena diketahui IJ // KL, demikian hal nya pada jajar genjang IJJ'K, IJ // KL, maka dengan aksioma (..2..) IJ = KJ'. Sehingga LJ' = KL – KJ' = KL – IJ. Dengan demikian, I'K = LJ'.

KESIMPULAN

Kesimpulan

Dari pembahasan dimuka dapat disimpulkan bahwa bila O, I, K adalah tiga titik kolinier berbeda, O, J, L adalah tiga titik koliner berbeda, dan IJ sejajar dengan KL, maka OI = OJ mengakibatkan dengan OK = OL. Terbukti

Saran

Selanjutnya diharapkan dapat dirumuskan teorema baru sebagai pengembangan dari teorema 3.

UCAPAN TERIMA KASIH

Syukur *Alhamdulillah* penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan ridho-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini. Tak lupa shalawat serta salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad SAW. Penelitian dengan judul "Hubungan Kekongruenan Dalam Geometri Terhingga". Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu dalam memberikan bimbingan, dukungan serta saran demi terwujudnya penelitian ini. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Suharsono. S, M.Si., M.Sc., Ph. D selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu diantara kesibukannya untuk membimbing serta mengarahkan dengan penuh kesabaran, sehingga penelitian ini dapat terselesaikan.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, selaku dosen pembimbing pembantu yang telah memberikan pengarahan dan motivasi dalam proses penyusunan penelitian ini.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku penguji dan juga selaku Pembimbing Akademik untuk saran dan kritik yang diberikan untuk masukkan bagi penelitian ini. Dan juga selaku Ketua Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
4. Datuk tersayang, Emak, Ayah, Wodang Shaura, Dang Amir, Adek, Mak Wo, Pak Wo, yang selalu membantu dan mendoakan ku.
5. Indah, Perti, Damay, Ana, Wo Desi, Wo Iin, dan kawan-kawan atas bantuan dan persahabatan yang telah terjalin.
6. Keluarga besar "GEOMETRI '09" (Generation Mathematics Real and Inspirative '09), atas kebersamaan dan keceriaannya selama ini, semoga terjalin sampai kapanpun.
7. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan laporan kerja praktik ini, yang tidak dapat penulis sebut kan satu persatu.

DAFTAR PUSTAKA

[1]Irawanto, B. (2008). Geometri Berhingga Atas GF(P^N) Untuka Membentuk Orthogonal Series Designs.. *Sensors & Transducers Journal*, Vol. 16, Issue 3, juli 2008 p. 106 – 111.

[2] Kohn, Ed. 2003. *Cliffs Quick Review Geometry*. Bandung: Pakar Karya

[3] Kustaanheimo, P. (1957). On The Relation Of Congruence In Finiti Geometri. *Sensors & Transducers Journal*, Vol. 5, Issue 1, Maret 2013 p. 197 – 201.

[4] Mulyati, Sri. 2000. Geometri Euclid. Malang: JICA

[5] Rawuh. Geometri. Jakarta: Universitas Terbuka

[6] Schaum's. 2005. Geometri. Jakarta: Erlangga