ISOMETRI TERHADAP GEOMETRI INSIDENSI TERURUT

Damay Lisdiana, Muslim Ansori, Amanto

Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung
Jl. Prof Dr. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145
Email: peace_ay@yahoo.com

Abstrak. Misalkan fungsi α: $E^n \longrightarrow E^n$ adalah isometri, jika untuk semua titik P dan Q berada di E^n. Isometri merupakan suatu transformasi atas refleksi (pencerminan) apabila α(P) = P', α(Q) = Q' sehingga jarak $\overline{PQ}$ = $\overline{P'Q'}$ untuk setiap pasang titik P dan Q. Misalkan σ_g refleksi pada garis g, maka akan dibuktikan bahwa σ_g adalah suatu isometri. Dengan menggunakan metode studi literatur, maka akan dibuktikan bahwa σ_g adalah suatu isometri. Dengan memisalkan bahwa terdapat tiga titik segaris yang berurutan A, B, dan C direfleksikan terhadap garis g. Karena σ_g refleksi pada garis g, maka σ_g(A) = A', σ_g(B) = B', dan σ_g(C) = C'. Sehingga jarak $\overline{ABC}$ = $\overline{A'B'C'}$. Karena σ_g dapat mempertahankan jarak, maka σ_g adalah suatu isometri.

Kata kunci **:** *Geometri Insidensi, Geometri Insidensi Terurut, Geometri Transformasi, Isometri, Refleksi.*

PENDAHULUAN

Geometri Euclides adalah geometri yang mempelajari tentang bidang datar yang didasarkan pada definisi, teorema, aksioma dan asumsi-asumsi. Geometri insidensi merupakan geometri yang mendasari geometri Euclides. Geometri insidensi adalah geometri yang didasari oleh aksioma insidensi. Menurut David Hilbert, geometri Euclides didasarkan pada lima kelompok aksioma, yaitu: kelompok aksioma insidensi, kelompok aksioma urutan, kelompok aksioma kekongruenan, aksioma kesejajaran Euclides, dan aksioma kekontinuan. Jadi dapat dikatakan bahwa geometri Euclides adalah sebuah geometri insidensi yang dilengkapi dengan kelompok aksioma-aksioma tersebut. Sedangkan geometri insidensi yang telah diperkaya dengan aksioma urutan disebut geometri insidensi terurut.

LANDASAN TEORI

Suatu geometri dibentuk berdasarkan aksioma yang berlaku dalam geometri-geometri tersebut. Geometri insidensi didasari oleh aksioma insidensi. Di dalam sebuah geometri selain aksioma diperlukan juga unsur-unsur tak terdefinisi. Untuk membangun suatu geometri diperlukan unsur tak terdefinisi sebagai berikut :

1. Titik.
   Titik hanya mempunyai posisi, tetapi titik tidak mempunyai panjang, lebar, maupun ketebalan.
2. Himpunan titik-titik yang dinamakan garis.
   Garis mempunyai panjang tapi tidak mempunyai lebar maupun ketebalan.
3. Himpunan titik-titik yang dinamakan bidang.
   Bidang mempunyai panjang dan lebar tapi tidak mempunyai ketebalan.

Geometri Insidensi

Pada geometri insidensi sistem aksioma yang digunakan adalah sistem aksioma insidensi yang terdiri dari enam aksioma, yaitu :

1.1 Garis adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit dua titik.
1.2 Dua titik yang berlainan terkandung dalam tepat satu garis (satu dan tidak lebih dari satu garis).
1.3 Bidang adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit tiga titik yang tidak terkandung dalam satu garis (tiga titik tak segaris atau tiga titik yang tak kolinear).
1.4 Tiga titik berlainan yang tak segaris terkandung dalam satu dan tidak lebih dari satu bidang.
1.5 Apabila sebuah bidang memuat dua titik berlainan dari sebuah garis, maka bidang itu akan memuat setiap titik pada garis tersebut (garis terkandung dalam bidang itu, atau garis terletak pada bidang itu).

1.6 Apabila dua bidang bersekutu pada sebuah titik maka kedua bidang itu akan bersekutu pada titik kedua yang lain (ada titik lain dimana bidang tersebut juga bersekutu).

Geometri Insidensi Terurut

Geometri insidensi terurut adalah geometri insidensi yang telah diperkaya dengan aksioma urutan [6].

Urutan Pada Garis

Urutan adalah salah satu pengertian yang amat mendasar dalam matematika. Secara matematika diperkenalkan pengertian urutan tersebut dalam bentuk suatu aksioma yang selanjutnya akan dinamakan sistem *Aksioma Terurut*. Sistem aksioma tersebut adalah sebagai berikut:

U_1 : (*ABC*) mengakibatkan *(CBA)*, *(ABC)* dibaca "titik *B* antara titik *A* dan titik *C*".

U_2 : *(ABC)* mengakibatkan ~*(BCA)* dan ~*(BAC)*, ~*(BCA)* dibaca "tidak *(BCA)*".

U_3 : Titik-titik *A*, *B*, *C* berlainan dan segaris jika dan hanya jika *(ABC)*, *(BCA)*, atau *(CAB)*.

U_4 : Jika *P* segaris dan berbeda dengan *A*, *B*, *C* maka *(APB)* mengakibatkan *(BPC)* atau *(APC)* tetapi tidak sekaligus dua-duanya.

U_5 : Jika $A \neq B$ maka ada *X*, *Y*, *Z* sehingga *(XAB)*, *(AYB)*, *(ABZ)*.

Ruas Garis

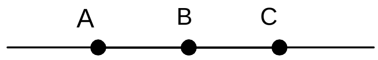
Ruas garis lurus dilambangkan dengan $\overline{AB}$. Ruas garis adalah bagian dari garis lurus yang berada di antara dua titik pada garis lurus tersebut, termasuk kedua titik tersebut [7].

Jika suatu ruas garis dibagi menjadi bagian-bagian:

1. Panjang keseluruhan ruas garis sama dengan jumlah dari panjang semua bagiannya.
2. Panjang keseluruhan ruas garis lebih besar dari panjang bagiannya yang manapun.
3. Dua ruas garis yang mempunyai panjang sama dikatakan *kongruen*. Jadi, jika *AB* = *CD* maka $\overline{AB}$ kongruen dengan $\overline{CD}$, sehingga ditulis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Jika suatu ruas garis dibagi menjadi dua bagian yang sama:

1. Titik bagiannya adalah titik tengah ruas garis tersebut.
2. Garis yang memotong pada titik tengah dikatakan membagi dua ruas garis tersebut.
3. Jika tiga titik *A*, *B*, dan *C* terletak pada satu garis, maka ketiganya disebut *kolinear*. Jika *A*, *B*, dan *C* kolinear dan *AB* + *BC* = *AC*, maka *B* terletak di antara *A* dan *C*.



Gambar 1. Tiga titik *A*, *B*, dan *C* yang kolinear.

Apabila $A \neq B$, maka himpunan $H = \{X|(AXB)\}$ disebut ruas garis *AB* atau disingkat $\overline{AB}$. Titik *A* dan *B* disebut ujung-ujung ruas. Sehingga mengakibatkan $\overline{AB} = \{X|(AXB)\}$ [6].

Urutan Pada Bidang

Pada garis berlaku aksioma U_1 sampai U_5, tapi aksioma tersebut kurang mencukupi untuk bidang, sehingga untuk bidang dilengkapi dengan aksioma U_6 yang biasa disebut dengan Aksioma Pasch. Aksiomanya berbunyi sebagai berikut:

U_6 : Misalkan g sebuah garis yang sebidang dengan titik *A*, *B*, *C* tetapi g tidak melalui *A*, *B*, atau *C*. apabila g memotong $\overline{AB}$ maka g memotong $\overline{BC}$ atau $\overline{AC}$ tetapi tidak dua-duanya.

U_6 juga berlaku apabila *A*, *B*, *C* berlainan dan segaris atau apabila *C* = *A* atau *C* = *B* [6].

Jika $A \notin$ g, himpunan semua titik X hingga $\overline{XA}$ memotong g dinamakan setengah bidang yang dilambangkan dengan g/*A* (dibaca "g atas *A*") garis g disebut tepi setengah bidang tersebut.

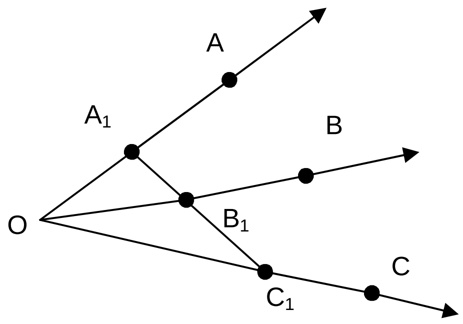
Setengah bidang dengan tepi g disebut sebuah sisi dari g. Dua setengah bidang yang berhadapan dengan sisi g dinamakan sisi yang berhadapan. Dua titik atau dua himpunan titik dikatakan terletak pada sisi g yang sama apabila mereka terletak pada setengah bidang bertepi g yang sama, mereka terletak pada sisi g yang berhadapan apabila mereka terletak pada dua setengah bidang bertepi g yang berhadapan.

Oleh karena setiap titik yang tidak pada *g* terletak pada tepat satu setengah bidang bertepi *g* sedangkan setiap setengah bidang bertepi *g* memiliki setengah bidang tunggal yang berhadapan, sehingga dapat ditarik kesimpulan sifat-sifat berikut berdasarkan dari Aksioma Pash, yaitu:

1. Misalkan titik *A* dan *B* terletak pada sisi *g* yang sama dan *B* dan *C* pada sisi *g* yang sama maka, *A* dan *C* juga pada sisi *g* yang sama.
2. Misalkan *A* dan *B* pada sisi *g* yang sama dan *B* dan *C* pada sisi *g* yang berhadapan, maka *A* dan *C* terletak pada sisi *g* yang berhadapan.

3. Misalkan *A* dan *B* terletak pada sisi *g* yang berhadapan dan *B* dan *C* terletak pada sisi *g* yang berhadapan maka *A* dan *C* terletak pada sisi *g* yang sama.

Urutan sinar

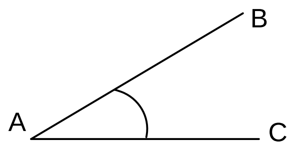


Gambar 2. Kedudukan antar sinar

Misalkan $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, dan $\overline{OC}$ tiga sinar yang berpangkalan sama di titik *O*. Misalkan pula $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$ berlainan dan tidak berlawanan. Jika ada titik A_1, B_1, C_1 sehingga $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ dan (A_1, B_1, C_1) maka dikatakan bahwa sinar $\overline{OB}$ terletak antara $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$, ditulis ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$) [6].

Sudut

Sudut adalah suatu gambar yang terbentuk oleh dua sinar yang mempunyai titik akhir yang sama. Sinar-sinar tersebut merupakan sisi-sisi sudut, sementara titik akhirnya merupakan titik sudutnya. Simbol untuk sudut adalah ∠ atau ∡ [7].



Gambar 3. Sudut

Pengertian sudut menyangkut berbagai konsep, yaitu:
1. Sebuah gambar yang terdiri atas dua garis.
2. Daerah pada bidang yang dibatasi oleh dua garis yang berpotongan.
3. Sebuah ukuran yang dinyatakan dengan bilangan real yang menggambarkan selisih arah dua garis yang berpotongan.

Misalkan ada tiga titik *O*, *A*, *B* yang berlainan dan tidak segaris himpunan titik $\overline{OA} \cup \overline{OB} \cup \{O\}$ disebut sudut dan ditulis sebagai $\angle AOB$.
Jadi $\angle AOB = \overline{OA} \cup \overline{OB} \cup \{O\}$. Sinar $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ dinamakan sisi sudut dan *O* dinamakan titik sudut.

Daerah dalam sebuah $\angle AOB$, yang dilambangkan dengan $D(\angle AOB)$ adalah himpunan titik *X* sehingga $\overline{OX}$ antara $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ atau dengan kata lain $D(\angle AOB) = \{X | (\overline{OA}\ \overline{OX}\ \overline{OB})\}$.

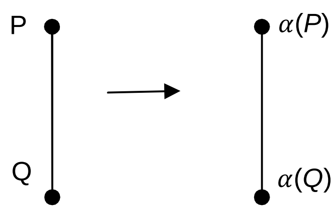
Daerah luar $\angle AOB$, adalah himpunan titik *X* yang tidak dalam daerah dalam maupun pada sudut tersebut. Daerah luar $\angle AOB$ ditulis sebagai $L(\angle AOB)$. Jadi adalah
$L(\angle AOB) = \{X | X \in AOB \cap X \notin D(\angle AOB) \cap X \notin \angle AOB\}$.

Dua buah sudut yang bertitik ujung sama membentuk sepasang sudut yang bertolak belakang apabila kedua kaki sudut yang satu berlawanan arah dengan kedua kaki sudut yang lain.
Dua garis *l* dan *m* dikatakan membentuk sebuah sudut, apabila titik sudutnya berimpit dengan titik potong kedua garis itu dan apabila kedua kakinya termuat dalam dua garis tersebut [6].

Isometri

Fungsi : $E^n \longrightarrow E^n$ adalah isometri, jika untuk semua titik *P* dan *Q* berada di E^n [5].

$$\alpha(P)\ \alpha(Q) = PQ$$



Gambar 4. Isometri

Transformasi α dinamakan suatu isometri apabila $\alpha(P) = P'$, $\alpha(Q) = Q'$ sehingga jarak $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ untuk setiap pasang titik *P* dan *Q*.
Jadi, suatu isometri adalah suatu transformasi titik yang mempertahankan jarak antara tiap pasang titik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dari penelitian ini adalah menentukan isometri terhadap geometri insidensi terurut dan memperoleh sifat-sifat khusus dari suatu isometri terhadap geometri insidensi terurut. Isometri merupakan suatu transformasi atas refleksi, translasi, dan rotasi pada sebuah garis yang mempertahankan jarak, yaitu panjang dari suatu ruas garis. Pada pembahasan ini akan dibahas hanya tentang refleksi (pencerminan).

Refleksi

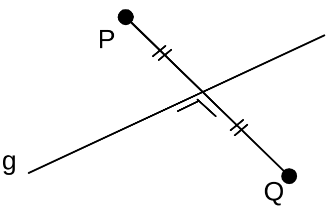
Refleksi atau pencerrninan adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dari suatu objek dengan menggunakan sifat bayangan, yaitu:

1. Garis yang menghubungkan setiap titik dengan bayangannya tegak lurus dengan sumbu pencerminan.
2. Jarak antara setiap titik dan cermin sama dengan jarak bayangan ke cermin.
3. Bangun dan bayangannya adalah kongruen.

Sebuah refleksi dari titik *P*, yang hasil refleksi ditulis sebagai $\sigma_g(P)$ dengan g garis yang dinamakan sumbu refleksi ditentukan sebagai berikut

$$\sigma_g(P) = \begin{cases} P, & \text{jika } P \in g \\ Q, & \text{jika } P \notin g \end{cases}$$

Dan g adalah sumbu ruas *PQ*

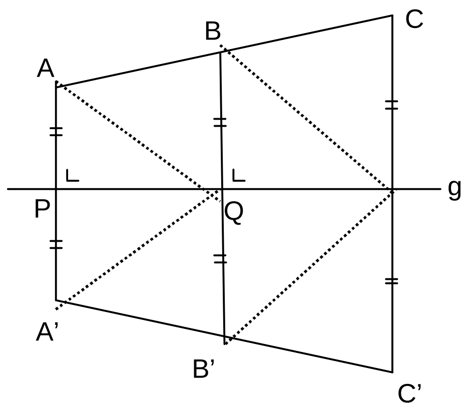


Gambar 5. Refleksi titik *P* terhadap garis g

Teorema
Jika g sebuah garis dan misalkan σ_g refleksi pada g, maka σ_g adalah suatu isometri.

Bukti:
Misalkan, diketahui tiga titik berurutan yang segaris *A*, *B*, dan *C* yang terletak pada sisi yang sama terhadap garis g. Titik *B* terletak di antara *A* dan *C*, dapat ditulis $A - B - C$. jika σ_g adalah refleksi pada g dan jika $\sigma_g(A) = A'$, $\sigma_g(B) = B'$, dan $\sigma_g(C) = C'$. Akan dibuktikan bahwa $ABC = A'B'C'$.
Misalkan, jika $AA' \perp g$, $BB' \perp g$,dan C' ~~g~~

Diketahui *AA'* memotong g di titik *P*, *BB'* memotong g di titik *Q*, dan *CC'* memotong g di titik *R*.
Karena σ_g adalah refleksi pada g, maka $PA = PA'$, $QB = QB'$, dan $RC = RC'$. Sehingga diperoleh $\Delta PAQ \cong \Delta PA'Q$, dan $\Delta QBR \cong \Delta QB'R$ yang mengakibatkan $QA = QA'$ dan $RB = RB'$.
Jadi, $\angle AQB = \angle A'QB'$ dan $\angle BRC = \angle B'RC'$.
Sehingga terbukti bahwa $ABC = A'B'C'$ dan σ_g merupakan suatu isometri.



Gambar 6. Refleksi tiga titik berurutan A, B, dan C terhadap garis g

Berdasarkan bukti dari teorema, maka diperoleh lima sifat isometri, yaitu:

1. Suatu isometri mempertahankan sebuah ruas garis
   Bukti:
   Dapat dilihat pada gambar 6
   Misalkan, diketahui $A \neq B$, maka himpunan $AB = \{X|\ AXB\}$, dan σ_g adalah refleksi pada g dan merupakan suatu isometri.
   Misalkan $X \in AB$ maka $X' \in A'B'$ dengan $X' = \sigma_g(X)$, $A' = \sigma_g(A)$, dan $B' = \sigma_g(B)$.
   Sehingga,
   $\sigma_g(AB) = \{X'|A' - X' - B'\}$
   $= \{\sigma_g \mid \sigma_g(A) - \sigma_g(X) - \sigma_g(B)\}$
   Jadi, terbukti bahwa suatu isometri mempertahankan sebuah ruas garis.

2. Suatu isometri mempertahankan keantaraan
   Bukti:
   Dapat dilihat pada gambar 6
   Misalkan, diketahui titik *A*, *B*, dan *C* yang segaris dan titik *B* terletak antara titik *A* dan titik *C*, dapat ditulis $A - B - C$. σ_g adalah refleksi pada g dan merupakan suatu isometri.
   Jika $\sigma_g(A) = A'$, $\sigma_g(B) = B'$, dan $\sigma_g(C) = C'$ maka dari $AB + BC = AC$ diperoleh $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, dan $A'C' = AC$, mengakibatkan $A'B' + B'C' = A'C'$. Dari $A–B–C$ diperoleh bahwa jika titik B letaknya di antara titik *A* dan titik *C* maka titik *B'* juga

letaknya di antara titik *A'* dan titik *C'*, sehingga *A' – B' – C'*.
Jadi, terbukti bahwa suatu isometri mempertahankan keantaraan.

3. Suatu isometri mempertahankan titik tengah
Bukti:
Dapat dilihat pada gambar 6
Misalkan, diketahui $AB = BC$, jadi B merupakan titik tengah AC. σ_g adalah refleksi pada g dan merupakan suatu isometri.
Jika $\sigma_g(A) = A'$, $\sigma_g(B) = B'$, dan $\sigma_g(C) = C'$ sehingga $\sigma_g(AB) = A'B'$, dan $\sigma_g(BC) = B'C'$, maka $A'B' = B'C'$ yang mengakibatkan B' merupakan titik tengah antara A' dan C'.
Jadi, terbukti bahwa suatu isometri mempertahankan titik tengah.

4. Suatu isometri mempertahankan kesebangunan
Bukti:
Dapat dilihat pada gambar 6
Misalkan, diketahui titik-titik P, A dan Q tidak segaris, maka $PA + AQ > PQ$. Jika σ_g adalah refleksi pada g dan merupakan suatu isometri, maka $PA' + A'Q > PQ$, yang berarti bahwa P, A', dan Q juga tidak segaris.
ΔPAQ merupakan gabungan dari ruas-ruas $\overline{PA}$, $\overline{AQ}$, dan $\overline{PQ}$ sehingga σ (ΔPAQ) adalah $\Delta PA'Q$.
$\Delta PA'Q$ merupakan gabungan dari ruas-ruas $\overline{PA}$', $\overline{A'Q}$, dan $\overline{PQ}$, sedemikian rupa sehingga $\Delta PAQ \cong \Delta PA'Q$.
Jadi, terbukti bahwa isometri mempertahankan kesebangunan.

5. Suatu isometri mempertahankan sudut
Bukti:
Dapat dilihat pada gambar 6
Misalkan, diketahui ada tiga titik berlainan dan tidak segaris yaitu *A*, *B*, dan *C*.
□AQB merupakan himpunan titik $\overline{AQ} \cup \overline{QB} \cup \{Q\}$.
Jika σ_g adalah refleksi pada g dan merupakan suatu isometri, maka σ (□AQB) adalah □$A'QB'$.
□$A'QB'$ merupakan himpunan titik dari $\overline{A'Q} \cup \overline{QB'} \cup \{Q\}$, sedemikian rupa sehingga $\angle AQB = \angle A'QB'$.
Jadi, terbukti bahwa isometri mempertahankan sudut.

KESIMPULAN

Dari pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa pada suatu refleksi (pencerminan) diperoleh bahwa bentuk bayangan sama dan sebangun dengan bentuk aslinya. Suatu isometri atas refleksi memiliki sifat-sifat sebagai berikut: mempertahankan sebuah ruas garis dengan tiga titik segaris yang berurutan dengan jarak dan panjang yang sama, mempertahankan keantaraan pada tiga titik segaris yang berurutan, mempertahankan titik tengah terhadap tiga titik segaris yang berurutan, mempertahankan kesebangunan, mempertahankan sudut antara dua garis.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terselesaikannya penulisan makalah ini tidak hanya dari penulis saja, tetapi juga karena bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Muslim Ansori, M.Si., bapak Amanto, M.Si., bapak Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. atas bimbingan, bantuan dan kesabarannya yang selalu membimbing penulis dalam menyelesaikan makalah ini
2. Ibu dan Bapak, terima kasih atas kasih sayang, cinta dan doa – doanya, yang selalu mendukung, membimbing dan memberi motivasi bagi penulis untuk tetap semangat
3. Sahabat serta teman-teman Jurusan Matematika terutama angkatan 2009 (Geometri) yang telah banyak membantu dan memberikan masukan yang sangat berarti dalam pembuatan makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] David Hilbert. 1971. *Fondation of Geometry*. Illinois: Open Court.
[2] Edwin Moise. 1963. *Elementary Geometry from Advance Standpoint*. Addison Wesley Publishing Company, Inc.
[3] G. E. Martin. 1932. *Transformation Geometry: An Introduction to Symetry.* New York: Springer.
[4] Greenberg, Marvin J. 1973. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. W.H. Freeman and Company.
[5] Jennings, George A. 1997. *Modern Geometry with Aplication*. New York: Springer.
[6] Rawuh. 2009. *Geometri*. Jakarta: UniversitasTerbuka.
[7] Schaum's. 2005. *Geometri*. Jakarta: Erlangga.
[8] Wallace Edward C.N. and West Stephen F. 1992. *Road to Geometry*. Prentice Hall.
[9] W. Prenowitz & Meyer Jordan. 1965. *Basic Concepts of Geometry*. Massachusetts: Xerox College Publishing.