Identifikasi Karakteristik *Hazard Rate* Distribusi *Gamma* Dengan Menggunakan Teorema Glaser

Selvi Nila Puspita, Warsono, dan Widiarti

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 10 Bandar Lampung 35145
Email : cime_raykad@yahoo.com

Abstrak. Waktu kelangsungan hidup adalah data yang mengukur waktu untuk kejadian tertentu. Distribusi dari waktu kelangsungan hidup biasanya digambarkan atau digolongkan oleh tiga fungsi yaitu : fungsi kelangsungan hidup(*Survival Function*), fungsi kepekatan peluang (fkp) dan fungsi *Hazard*. Laju kegagalan (*hazard rate*) mempunyai bentuk-bentuk kurva yang telah diketahui, yaitu *Increasing* (I), *Decreasing* (D), *Bathtub* (∪),*Upside-down Bathtub* (∩) dan *konstan*. Dengan demikian tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji karakteristik laju kegagalan *(hazard rate)* pada distribusi *Gamma* dengan menggunakan Teorema Glaser. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa pola atau bentuk laju *hazard* dapat diduga oleh $\eta'(t) = 0$ dan tanda dari koefisien-koefisiennya dan karakteristik *hazard rate* distribusi *gamma* adalah konstan, *Increasing*, dan *Decreasing*.

Kata kunci: **Distribusi *Gamma*, *Survival Function*, *Hazard Rate*.**

1. PENDAHULUAN

Analisis data kelangsungan hidup merupakan salah satu teknik statistika yang berguna untuk melakukan pengujian tentang kelangsungan hidup. Analisis terhadap data waktu hidup yang salah satunya adalah laju kegagalan *(hazard rate)* diperlukan untuk mengetahui apakah distribusi dari data dalam fungsi kelangsungan hidup yang diasumsikan telah menggambarkan keadaan yang sesungguhnya. Laju kegagalan adalah perbandingan antara fungsi kepekatan peluang (fkp) dengan fungsi kelangsungan hidup (S(t)). Laju kegagalan mempunyai bentuk-bentuk kurva yang telah diketahui, yaitu *Increasing* (I), *Decreasing* (D), *Bathtub* (∪),*Upside-down Bathtub* (∩) dan *konstan*. Tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji karakteristik laju kegagalan *(Hazard Rate)* distribusi *Gamma*

2. Distribusi Gamma dan Fungsi Hazard

Menurut Hogg and Tanis [2] Distribusi *Gamma* merupakan salah satu dari keluarga distribusi *eksponensial* dengan dua parameter α dan β. Dimana α merupakan parameter bentuk (*shape*) dan β parameter skala (*scale*). Peubah acak X dikatakan berdistribusi *Gamma* dengan parameter α dan β jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}.\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}.e^{\frac{-x}{\beta}} \quad ;\ \alpha, \beta, x > 0$$

Fungsi *Gamma* yang dinotasikan Γ(n) untuk setiap n > 0 , didefinisikan :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1}.e^{-y}\, dy \ \ ,\ untuk\ n > 0$$

Menurut Elisa T. Lee [3] waktu kelangsungan hidup adalah data yang mengukur waktu untuk kejadian tertentu. Distribusi dari waktu kelangsungan hidup biasanya digambarkan atau digolongkan oleh tiga fungsi:

1. Fungsi Kelangsungan Hidup
2. Fungsi Kepekatan Peluang (fkp)
3. Fungsi *Hazard*

Fungsi kelangsungan hidup (*Survival Function*) dinotasikan dengan $S(t)$, didefinisikan sebagai peluang suatu individu yang bertahan lebih dari t:

$$S(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(t)dt$$

Dari definisi fungsi distribusi kumulatif $F(t)$ dari T, maka

$$S(t) = 1 - F(t)$$

Seperti beberapa peubah acak kontinu lainnya, waktu kelangsungan hidup T mempunyai fungsi kepekatan peluang (fkp) yang didefinisikan sebagai limit dari peluang suatu individu yang gagal dalam interval pendek t ke t + Δt per satuan lebar Δt, atau peluang kegagalan dalam interval kecil per satuan waktu. Hal itu dapat dijelaskan sebagai:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(suatu\ individu\ mati\ dalam\ interval\ (t,t+\Delta t)}{\Delta t}$$

Fungsi *hazard* didefinisikan sebagai peluang gagal selama interval waktu yang sangat kecil, diasumsikan bahwa individu memiliki hidup yang lebih lama untuk awal dari interval, atau sebagai limit dari peluang individu gagal dalam interval yang sangat kecil, t ke t + Δt per satuan waktu. Fungsi *hazard* dapat juga didefinisikan dalam bentuk dari fungsi distribusi kumulatif $F(t)$ dan fungsi kepekatan peluang $f(t)$:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

3. Teorema Glaser untuk Identifikasi Karakteristik Hazard Rate Distribusi Gamma

Untuk mengidentifikasikan karakteristik fungsi *hazard* yang dipengaruhi oleh kombinasi dari nilai-nilai parameter , Glaser [1] membuat teorema sebagai berikut :

1. Jika $\eta'(t) > 0$ untuk semua t>0, maka Increasing (I)
2. Jika $\eta'(t) < 0$ untuk semua t>0, maka Decreasing (D)
3. Misal terdapat $t_0 > 0$ sehingga $\eta'(t) < 0$ untuk semua $t \epsilon (0, t_0)$, $\eta'(t_0) = 0$, $\eta'(t) > 0$ untuk semua $t > t_0$, dan
   - Jika $\lim_{t\to 0} fkp(t) = 0$, maka Increasing (I)
   - Jika $\lim_{t\to 0} fkp(t) \to \infty$, maka Bathtub (∪)
4. Misalkan terdapat $t_0 > 0$ sehingga $\eta'(t) > 0$ untuk semua $t \epsilon (0, t_0)$, $\eta'(t) < 0$ untuk semua $t > t_0$ dan
   - Jika $\lim_{t\to 0} fkp(t) = 0$, maka Upside-down Bathtub (∩)
   - Jika $lim_{t\to 0} fkp(t) \to \infty$, maka Decreasing (D)

Dimana :

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

$$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\eta'(t) = \frac{d}{dt}\, \eta(t)$$

Selain itu, untuk mengidentifikasi karakteristik fungsi hazard digunakan teknik grafis yang dibuat dengan menggunakan bahasa R.

4. Analisis Karakteristik *Hazard Rate* Distribusi *Gamma*

Langkah awal yang harus dilakukan untuk melakukan analisis laju hazard adalah mencari turunan pertama dari fungsi kepekatan peluang distribusi *Gamma*. Fungsi kepekatan peluang distribusi *Gamma* adalah sebagai berikut:

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\, t^{\alpha-1}}_{u}\ \underbrace{e^{-\frac{t}{\beta}}}_{v}$$

Rumus turunan untuk perkalian fungsi adalah:

$$f'(t) = u'v + v'u$$

Maka diperoleh :

$$f'(t) = \left[\frac{(\alpha-1)}{t} - \frac{1}{\beta}\right].f(t)$$

Menurut Glaser (1980) nilai $\eta(t)$ dapat digunakan untuk melihat karakteristik fungsi *hazard* suatu distribusi. Oleh karena itu langkah selanjutnya adalah mencari nilai dari $\eta(t)$.

$$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha-1}{t} - \frac{1}{\beta}\right)}{f(t)}\ f(t)$$

$$= -\left(\frac{\alpha-1}{t} - \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{(\alpha-1)}{t} + \frac{1}{\beta}$$

Menurut McDonald dan Richard [4] pola laju *hazard* dapat diduga oleh $\eta'(t) = 0$ dan tanda dari koefisien-koefisiennya. Oleh karena itu langkah selanjutnya adalah mencari turunan pertama dari $\eta(t)$. Turunan pertama dari $\eta(t)$ pada distribusi *Gamma* adalah:

$$\eta'(t) = \frac{d}{dt}\left(\eta(t)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\frac{(\alpha-1)}{t} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \frac{(\alpha-1)}{t^2}$$

Sehingga diperoleh nilai $\eta'(t)$ adalah $\frac{(\alpha-1)}{t^2}$

Fungsi kelangsungan hidup dari distribusi gamma dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencari fungsi distribusi kumulatif. Fungsi distribusi kumulatif distribusi *Gamma* adalah:

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx$$
$$= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$
$$F(t) = I\left(\frac{t}{\beta}, \alpha\right)$$

Dimana *I* adalah fungsi gamma yang tidak lengkap.

Setelah mendapatkan fungsi distribusi kumulatif distribusi *Gamma*, maka langkah selanjutnya adalah mencari fungsi kelangsungan hidup dari distribusi *Gamma*, yang dituliskan sebagai berikut:

$$S(t) = 1 - F(t)$$
$$= 1 - I\left(\frac{t}{\beta}, \alpha\right)$$

Langkah selanjutnya adalah mencari fungsi *hazard* dari distribusi *Gamma*.

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{1 - I\left(\frac{t}{\beta}, \alpha\right)}$$
$$h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \left(\Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{\alpha-1} \left(\frac{t}{\beta}\right)^k k!\right)}$$

Titik kritis suatu fungsi dapat diketahui dengan cara menurunkan suatu fungsi dan membuat fungsi tersebut sama dengan nol, sehingga dapat dilihat bentuk dari kurvanya. Berdasarkan persamaan $\eta'(t) = \frac{(\alpha-1)}{t^2}$, maka:

$$\eta'(t) = \frac{(\alpha-1)}{t^2} = 0$$
$$(\alpha - 1) = 0$$

- Untuk $\alpha = 1$ maka $\eta'(t)$ konstan.
- Untuk $\alpha > 0$ maka $\eta'(t)$ *Increasing* atau naik.
- Untuk $0 < \alpha < 1$ maka $\eta'(t)$ *Decreasing* atau turun.

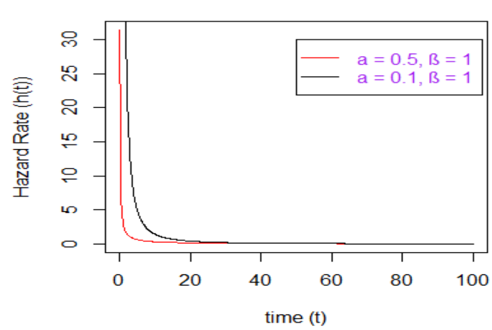
Berdasarkan uraian sebelumnya, maka analisa dari laju hazard untuk distibusi *gamma* adalah sebagai berikut :

1. Jika $\eta'(t) > 0$ untuk semua $t > 0$ maka *Increasing*
   $\alpha > 0$, maka $\eta'(t) > 0$ untuk semua $t > 0$
   $\alpha = 1$ maka $\eta'(t) = 0$
   $\alpha = 2$ maka $\eta'(t) = 1$
   $\alpha = 3$ maka $\eta'(t) = 2$
   $\alpha = 4$ maka $\eta'(t) = 3$
   Karena $\eta'(t)$ bernilai (+) atau $\eta'(t) > 0$ maka *Increasing*

2. Jika $\eta'(t) < 0$ untuk semua $t > 0$ maka *Decreasing*
   $0 < \alpha \leq 1$, maka $\eta'(t) < 0$ untuk semua $t > 0$
   $\alpha = 0{,}1$ maka $\eta'(t) = -0{,}9$
   $\alpha = 0{,}2$ maka $\eta'(t) = -0{,}8$
   $\alpha = 0{,}3$ maka $\eta'(t) = -0{,}7$
   $\alpha = 0{,}4$ maka $\eta'(t) = -0{,}6$
   Karena $\eta'(t)$ bernilai (-) atau $\eta'(t) < 0$ maka *Decreasing*

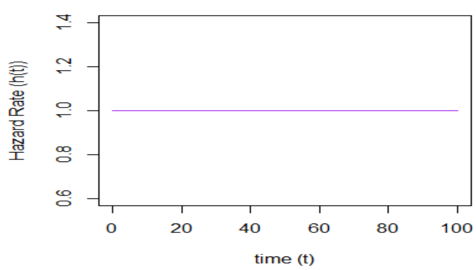
3. Misalkan terdapat $t_0 > 0$ sehingga $\eta'(t) < 0$ untuk semua $t \in (0, t_0)$, $\eta'(t_0) = 0, \eta'(t) > 0$ untuk semua $t > t_0$ dan
   Jika $\lim_{t\to 0} pdf\ (t) = 0, maka\ Increasing$
   $$pdf\ (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}$$
   $$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \lim_{t\to 0} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}$$
   $$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} [\lim_{t\to 0} t]^{\alpha-1} \left[\lim_{t\to 0} e^{-t/\beta}\right]$$
   $$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} .0\ .1$$
   $$= 0, maka\ Increasing$$

Tahap selanjutnya adalah membuat grafik antara fungsi hazard h(t) terhadap waktu t. Grafik fungsi hazard dibuat menggunakan software R yang bertujuan untuk melihat karakteristik fungsi hazard dari distribusi gamma.



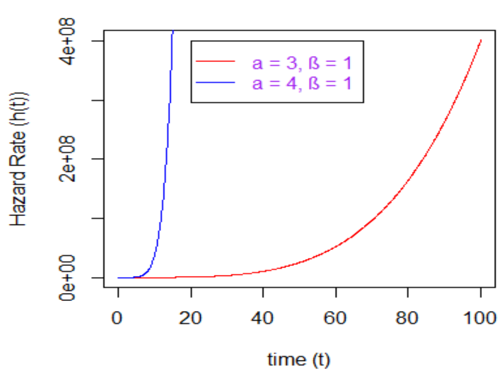
Gambar 4.1 Fungsi Hazard Rate Distribusi Gamma untuk nilai 0<α<1, β = 1

Pada Gambar 4.1 grafik fungsi *hazard rate* distribusi *gamma* untuk α = 0.5, β = 1 dan α = 0.1, β = 1 bentuk grafiknya adalah menurun (*Decreasing*). Artinya semakin meningkat waktu dari suatu sistem atau individu maka laju kegagalannya (*hazard rate*-nya) akan semakin menurun. Selain itu dapat disimpulkan juga untuk 0< α <1 dan β = 1 grafik fungsi *hazard*nya akan selalu turun (*Decreasing*).



Gambar 4.2 Fungsi Hazard Rate Distribusi Gamma untuk nilai α=1, β = 1

Gambar 4.2 adalah grafik fungsi *hazard rate* untuk α = 1 dan β = 1. Berdasarkan grafik di atas dapat dilihat bahwa untuk α = 1 dan β = 1 grafik laju *hazard rate* akan berbentuk konstan. Artinya, semakin meningkat waktu dari suatu sistem atau individu maka laju kegagalannya (*hazard rate*-nya) akan selalu sama atau konstan.



Gambar 4.3 Fungsi Hazard Rate Distribusi Gamma untuk nilai α>1, β = 1

Selanjutnya untuk grafik fungsi *hazard rate* distribusi *gamma* pada Gambar 4.3 dapat dilihat pada saat α = 2, β = 1 , α = 3, β = 1 dan α = 4, β = 1 grafik fungsi hazard akan meningkat naik (*Increasing*) , artinya semakin tinggi waktu dari suatu sistem atau individu maka laju kegagalannya (*hazard rate*-nya) akan semakin meningkat.

5. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu :

1. *Hazard Rate* berbentuk konstan untuk $\alpha = 1, \beta = 1$ untuk semua $t > 0$.
2. *Hazard Rate* berbentuk *Increasing* atau naik untuk $\alpha > 1, \beta = 1$ untuk semua $t > 0$.
3. *Hazard Rate* berbentuk *Decreasing* atau turun untuk $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$ untuk semua $t > 0$.
4. Hasil analisis dengan menggunakan teorema Glaser [2] ternyata sebanding dengan bentuk grafik dari *hazard function* dengan menggunakan software R.
5. Pola atau bentuk laju *hazard* dapat diduga oleh $\eta'(t) = 0$ dan tanda dari koefisien-koefisiennya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Glaser, R. E. (1980). Bathtub and Related Failur Rate Characterizations. *J. American Statistical Association*, Vol. **75**, pp 667-672.

[2] Hogg, R.V. and Tanis, E.A. (1997). *Probability and Statistical Inference*. Sixth Edition. Pretencise-hall Inc., New Jersey.

[3] Lee, E. T. (1992). *Statistical Methods for Survival Data Analysis*. Second Edition. John Wiley & Sons Inc., Canada.

[4] McDonal, J. B. and Ricards, D. O. (1987). Hazard Rates and Generalized Beta Distributions. *Transactions On Reliability*, Vol. **R-36**, 463-466.