ISSN : 2337-9057

PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

SEMINAR HASIL PENELITIAN

SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

2012

DAFTAR ISI

Halaman

KelompokMatematika

Kelompok Statistika

Kelompok Kimia

KelompokFisika

ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT C[a, b]
(STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL)

Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

Abstrak

Aproksimasi fungsi dalam proses komputasi sering digunakan hampir di semua bidang analisis numerik. Dua alasan utama penggunaan aproksimasi fungsi adalah untuk memberikan fungsi pendekatan yang efektif dan mendekati suatu fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana. Diberikan sebuah fungsi *f*, baik secara utuh ataupun hanya beberapa nilai di titik-titik tertentu saja, kita ingin memperoleh hampiran (aproksimasi) untuk f yang mempunyai bentuk tertentu (misalnya supaya lebih mudah dianalisis) dengan kesalahan yang dapat kita kontrol. Misalnya kita hendak menghitung $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, kita hampiri integrannya dengan polinom (suku banyak) berderajat *n* (dengan *n* cukup besar). Masalah optimisasi khususnya aproksmasi fungsi terbaik yang tidak medapatkan solusi terbaik (ralat yang besar) dalam ruang fisis atau yang dikenal sebagai ruang real , dapat dipecahkan dengan sistem matematis yang sederhana, dengan membawa masalah aproksimasi tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vekor, khususnya pada ruang Hilbert C[a,b]. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah minimum norm dalam ruang Hilbert C[a,b]. Dengan menggunakan konsep minimum norm akan diperoleh kesalahan optimal (galat) yang minimum.

Kata kunci: *Aproksimasi, minimum norm, ruang Hilbert C[a,b], polinom, kesalahan optimal.*

I. PENDAHULUAN

Optimisasi adalah suatu proses memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi objektif yang memenuhi kendala tertentu. Masalah aproksimasi fungsi di atas dapat diselesaikan pada ruang vektor, yaitu dengan metode optimisasi ruang vektor. Ruang vektor yang digunakan adalah ruang Hilbert. Ruang Hilbert merupakan ruang abstrak yang di dalamnya memuat perpaduan tiga konsep, yaitu Aljabar, Analisis dan Geometri. Konsep geometri yang digunakan adalah mengenai proyeksi, sebab ruang Hilbert dibangun oleh konsep *inner product* (Berberian, 1961). Fungsi yang akan dicari aproksimasinya adalah fungsi-fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada [a,*b*] . Dalam pemecahan masalah ini, langkah penting yang harus dilakukan adalah pemilihan basis yang bebas linear yang membangun ruang fungsi yang akan diaproksimasi dan penentuan kesalahan optimal atau ralat optimal dari aproksimasi yang diambil. Basis ini tidak tunggal. Pemilihan basis yang berbeda akan menghasilkan aproksimasi fungsi yang sama dan juga kesalahan optimal yang sama.

II. LANDASAN TEORI

Teorema proyeksi merupakan prinsip dasar dalam penyelesaian masalah optimisasi. Sebelum ke Teorema proyeksi, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep ortogonalitas.

Definisi 2.1.1 (Luenberger, 1969)
Dalam suatu ruang pre-Hilbert X, vektor x,y $\in$ *X dikatakan ortogonal jika <x, y>= 0, dinotasikan dengan x* $\perp$ *y. Suatu vektor x dikatakan ortogonal dengan himpunan S, dinotasikan x* $\perp$ *S jika x* $\perp$ *s untuk setiap s* $\in$ *S.*

Lemma berikut menunjukkan bahwa Teorema Phytagorean dalam geometri bidang merupakan akibat dari konsep ortogonalitas.

Lemma 2.1.1

Misalkan *X* suatu ruang Hilbert dan *x, y* $\in$ *X*. Jika $x \perp y$, maka $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Bukti :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \quad \blacksquare$$

Teorema 2.1.2 (*Teorema Proyeksi di Ruang pre-Hilbert*)

Misalkan *X* suatu ruang Pre-Hilbert, *M* suatu ruang bagian dari *X* dan *x* sebarang vektor di *X*. Jika ada vektor $m_0 \in M$, sedemikian hingga $\|x - m_o\| \le \|x - m\|, \forall m \in M$, maka m_0 tunggal. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$, suatu vektor minimal tunggal di *M* adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap *M*.

Teorema 2.1.3 (*Teorema Proyeksi Klasik*)

Misalkan *H* ruang Hilbert dan *M* ruang bagian tertutup dari *H*, maka untuk sebarang vektor $x \in H$, terdapat tunggal vektor $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_o\| \le \|x - m\|, \forall m \in M$. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$,suatu vektor minimal tunggal adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian *M*.

Teorema proyeksi di atas akan ditetapkan untuk membangun sifat struktural tambahan dari suatu ruang Hilbert, antara lain adalah dalam sebarang ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert, sebarang vektor dapat ditulis sebagai jumlahan dua vektor, satu vektor di ruang bagian tertutup dan vektor yang lain ortogonal terhadapnya.

Definisi 2.1.2 (Luenberger, 1969)

Misalkan S suatu himpunan bagian dari ruang Pre-Hilbert. Himpunan semua vektor yang ortogonal terhadap S disebut komplemen ortogonal dari S dan dinotasikan dengan $S^{\perp}$.

Teorema 2.1.4

Misalkan *S* dan *T* himpunan bagian dari ruang Hilbert dan $S^{\perp}$, $T^{\perp}$ berturut-turut menyatakan komplemen ortogonal dari *S* dan *T* maka :

1. $S^{\perp}$ adalah ruang bagian tertutup
2. $S \subset S^{\perp\perp}$
3. Jika $S \subset T$ maka $T^{\perp} \subset S^{\perp}$
4. $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$

Definisi 2.1.3 (Luenberger, 1969)

Ruang vektor X dikatakan jumlahan langsung dari ruang bagian M dan N, jika setiap vektor $x \in X$ *dapat ditulis secara tunggal, dalam bentuk* $x = m + n$ *dengan* $m \in M$ *dan* $n \in N$*, dinotasikan dengan* $X = M \oplus N$.

Teorema 2.1.5

Jika *M* ruang bagian linear tertutup dari suatu ruang Hilbert *H* maka $H = M \oplus M^{\perp}$ dan $M = M^{\perp\perp}$

Definisi 2.1.4 (Luenberger, 1969)

Misalkan $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ *basis dari M. Diberikan sebarang vektor* $x \in H$ *dan akan dicari vektor* m_0 *di M yang terdekat ke x. Jika vektor* m_0 *dinyatakan dalam suku-suku dalam vektor* y_i *sebagai :*

$$m_o = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$$

Maka masalah tersebut ekuivalen dengan menemukan skalar β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *yang meminimalkan* $\|x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \ldots\ldots - \beta_n y_n\|$.

Menurut Teorema proyeksi, vektor minimal tunggal m_0 *adalah proyeksi ortogonal x pada M, atau vektor selisih* $x - m_0$ *ortogonal terhadap setiap vektor* y_i.

Dengan demikian :

$$< x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \ldots\ldots\ldots - \beta_n y_n, y_i >= 0$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Atau

$$<x, y_1> - <\beta_1 y_1, y_1> - <\beta_2 y_2, y_1> - \ldots\ldots\ldots - <\beta_n y_n, y_1> = 0$$

$$<x, y_2> - <\beta_1 y_1, y_2> - <\beta_2 y_2, y_2> - \ldots\ldots\ldots - <\beta_n y_n, y_2> = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$<x, y_n> - <\beta_1 y_1, y_n> - <\beta_2 y_2, y_n> - \ldots\ldots\ldots - <\beta_n y_n, y_n> = 0$$

Atau

$$<y_1, y_1> \beta_1 + <y_2, y_1> \beta_2 + \ldots\ldots\ldots + <y_n, y_1> \beta_n = <x, y_1>$$

$$<y_1, y_2> \beta_1 + <y_2, y_2> \beta_2 + \ldots\ldots\ldots + <y_n, y_2> \beta_n = <x, y_2>$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$<y_1, y_n> \beta_1 + <y_2, y_n> \beta_2 + \ldots\ldots\ldots + <y_n, y_n> \beta_n = <x, y_n>$$

Persamaan dalam koefisien β_i *sebanyak n kali ini dikenal sebagai persamaan normal untuk masalah minimalisasi.*

Matriks n x n yang berhubungan dengan vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *yaitu :*

$$G = G(y_1, y_2,\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} <y_1,y_1> & <y_1,y_2> & \ldots\ldots & <y_1,y_n> \\ <y_2,y_1> & <y_2,y_2> & \ldots\ldots & <y_2,y_n> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <y_n,y_1> & <y_n,y_2> & \ldots\ldots & <y_n,y_n> \end{vmatrix}$$

disebut matriks Gram dari $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n$. *Matriks ini adalah tranpose dari matriks koefisien normal.*

Teorema 2.1.6

Determinan Gram $g = g(y_1, y_2,\ldots, y_n) \neq 0$ jika dan hanya jika $y_1, y_2,\ldots, y_n$ bebas linear.

Teorema 2.1.7

Misalkan $y_1,\ldots, y_n$ bebas linear dan ∂ jarak minimum vektor x ke ruang bagian M yang dibangun oleh y_i, yaitu :

$$\partial = \min \left\| x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \ldots\ldots - \alpha_n y_n \right\| = \left\| x - \hat{x} \right\|$$

maka,

$$\partial^2 = \frac{g(y_1, y_2,\ldots, y_n, x)}{g(y_1, y_2,\ldots, y_n)}$$

Teorema 2.2.1

Misalkan M ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert H, x suatu elemen tertentu di H dan variasi linier, $V = x + M$, maka terdapat tunggal vektor x_0 di V dengan norm minimum dan x_0 ortogonal dengan M.

Teorema 2.2.2

Misalkan H ruang Hilbert dan $\{y_1,\ldots,y_n\}$vektor-vektor bebas linear di H. Di antara semua vektor $x \in N$ yang memenuhi :

$$<x_1, y_1> = c_1$$
$$<x_1, y_2> = c_2$$
$$\vdots$$
$$<x_1, y_n> = c_n.$$

Misalkan x_0 mempunyai norm minimum, maka :

$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$ dengan koefisien β_i memenuhi persamaan :

$$<y_1, y_1> \beta_1 + <y_2, y_1> \beta_2 + \ldots\ldots + <y_n, y_1> \beta_n = c_1$$

$$<y_1, y_2> \beta_1 + <y_2, y_2> \beta_2 + \ldots\ldots + <y_n, y_2> \beta_n = c_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$<y_1, y_n> \beta_1 + <y_2, y_n> \beta_2 + \ldots\ldots + <y_n, y_n> \beta_n = c_n$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Masalah Aproksimasi Terbaik Fungsi Polinomial

Misalkan X adalah ruang vektor yang terdiri dari fungsi-fungsi kontinu bernilai riil pada [-1, 2], dengan perkalian dalam yang didefinisikan dengan :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{2} x(t)y(t)dt \;\; dan\, x(t) = t^2 .$$

Penyelesaian :
Akan dicari fungsi polinomial berderajat satu yang merupakan aproksimasi terbaik ke fungsi $x(t) = t^2, -1 \le t \le 2$. Dengan langkah-langkah berikut :

Langkah I
Diketahui ruang vektor X adalah ruang yang terdiri dari fungsi-fungsi kontinu bernilai riil pada [-1, 2], dengan perkalian dalam yang didefinisikan dengan $\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{2} x(t)y(t)dt \;\; dan\, x(t) = t^2$.

Langkah II
Asumsi :

(1) Ruang vector X memenuhi ruang Hilbert $C[a,b]$
(2) Untuk setiap $x, y \in C[a,b]$ adalah ruang Hilbert dengan $\langle x, y \rangle = \int_{a}^{b} x(t)y(t)dt$
(3) Vektor-vektor yang mambangun polinomial berderajat satu adalah $y_1(t) = a$ dan $y_2(t) = b + ct$

Langkah III
Masalah :
Akan dicari fungsi polynomial berderajat satu yang merupakan aproksimasi terbaik ke fungsi $x(t) = t^2, -1 \le t \le 2$.

Langkah IV
Solusi :
Masalah yang hanya bergantung pada vektor-vektor yang membangun polinomial bederajat satu : $y_1(t) = a$ dan $y_2(t) = b + ct$. Masalah ini dapat diselesaikan dengan memberlakukannya sebagai masalah norm minimum di ruang Hilbert C[-1,2] sebab untuk setiap $x, y \in C[-1,2]$ adalah ruang Hilbert dengan $\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{2} x(t)y(t)dt$.

Dan vektor yang dicari dapat dinyatakan sebagai $\hat{x} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$, masalah ini ekuivalen dengan menemukan scalar β_1 dan β_2 yang meminimalkan $\|x-\beta_1 y_1-\beta_2 y_2\|$.

Menurut Teorema proyeksi vektor minimal tunggal $\hat{x}$ adalah proyeksi orthogonal x pada M (ruang bagian dari ruang Hilbert) atau selisih $x-\hat{x}$ orthogonal terhadap setiap vector $y_1,\ i=1,2$. Dengan demikian $\langle x-\beta_1 y_1-\beta_2 y_2, y_i\rangle = 0$, untuk i = 1,2
Atau

$$\langle x, y_1\rangle - \langle \beta_1 y_1, y_1\rangle - \langle \beta_2 y_2, y_1\rangle = 0$$

atau

$$\beta_1\langle y_1, y_1\rangle - \beta_2\langle y_2, y_1\rangle = \langle x, y_1\rangle$$

$$\langle x, y_2\rangle - \langle \beta_1 y_1, y_2\rangle - \langle \beta_2 y_2, y_2\rangle = 0$$

$$\beta_1\langle y_1, y_2\rangle - \beta_2\langle y_2, y_2\rangle = \langle x, y_2\rangle$$

Dapat dibentuk :

$$G(y_1, y_2)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle x, y_1\rangle\\ \langle x, y_2\rangle\end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix}\langle y_1, y_1\rangle\langle y_1, y_2\rangle\\ \langle y_2, y_1\rangle\langle y_2, y_2\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle x, y_1\rangle\\ \langle x, y_2\rangle\end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh :

$$\langle y_1, y_1\rangle = \int_{-1}^{2} a.a\, dt = 3a^2$$

$$\langle y_1, y_2\rangle = \langle y_2, y_1\rangle = \int_{-1}^{2} a.(b+ct)\, dt = 3ab + \frac{3}{2}ac$$

$$\langle y_2, y_2\rangle = \int_{-1}^{2} (b+ct).(b+ct)\, dt = 3b^2 + 3bc + 3c^2$$

$$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{2} t^2.t^2 dt = \frac{33}{5}$$

$$\langle x, y_1\rangle = \langle y_1, x\rangle = \int_{-1}^{2} a.t^2\, dt = 3a$$

$$\langle x, y_2\rangle = \langle y_2, x\rangle = \int_{-1}^{2} t^2.(b+ct)\, dt = 3b + \frac{15}{4}c$$

Berdasarkan (2.1) diperoleh :

$$(3a^2)\beta_1 + (3ab + \frac{3}{2}ac)\beta_2 = 3a$$

$$(3ab + \frac{3}{2}ac)\beta_1 + (3b^2 + 3bc + 3c^2)\beta_2 = 3b + \frac{15}{4}$$

Dengan perhitungan diperoleh:

$$\beta_1 = \frac{3ac - 6ab}{6a^3c} \quad dan \quad \beta_2 = \frac{1}{c}$$

Jadi, diperoleh fungsi aproksimasi terbaik ke fungsi $x(t) = t^2,\ -1 \le t \le 2$:

$$\hat{x} = \left[\frac{3ac - 6ac}{6a^3c}\right].a + \left[\frac{1}{c}\right].b + ct$$

$$\hat{x} = \frac{3ac - 6ac}{6a^2c} + \frac{b}{c} + t$$

$$\hat{x} = \frac{ac - 2ab + 2a^2b}{2a^2c} + t$$

(4.1)

Kesalahan optimalnya atau minimumnya yaitu :

$$\partial^2 = \|x - \tilde{x}\|^2$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}\langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & \langle x, y_1\rangle\\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \langle x, y_2\rangle\\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_2, x\rangle & \langle x, x\rangle\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & 0\\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & 0\\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_2, x\rangle & 1\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}3a^2 & 3ab + \frac{3}{2}ac & 3a\\ 3ab + \frac{3}{2}ac & 3b^2 + 3bc + 3c^2 & 3b + \frac{15}{4}c\\ 3a & 3b + \frac{15}{4}c & \frac{33}{5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3a^2 & 3ab + \frac{3}{2}ac & 0\\ 3ab + \frac{3}{2}ac & 3b^2 + 3bc + 3c^2 & 0\\ 3a & 3b + \frac{15}{4}c & 1\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}a^2bc + \frac{729}{80}a^2c^2}{\frac{27}{4}a^2c^2}$$

(4.2)

Jadi jarak minimum adalah

$$\partial = \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}a^2bc + \frac{729}{80}a^2c^2}{\frac{27}{4}a^2c^2}}$$

b. Masalah Aproksimasi Terbaik Fungsi Rasional

Misalkan X adalah ruang vektor yang terdiri dari fungsi-fungsi kontinu bernilai riil pada [1,8], dengan perkalian dalam yang didefinisikan dengan :

$$\langle x, y\rangle = \int_1^8 x(t)\,y(t)dt \;\; dan\; x(t) = \frac{1}{t}.$$

Penyelesaian :

Akan dicari fungsi polinomial berderajat satu yang merupakan aproksimasi terbaik ke fungsi $x(t) = \frac{1}{t},\, 1 \le t \le 8$. Dengan langkah-langkah berikut :

$$\langle y_1, y_1\rangle = \int_1^8 a.a\,dt = 7a^2$$

$$\langle y_1, y_2\rangle = \langle y_2, y_1\rangle = \int_1^8 a.(b+ct)\,dt = 7ab + \frac{63}{2}ac$$

$$\langle y_2, y_2\rangle = \int_1^8 (b+ct).(b+ct)\,dt = 7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2$$

$$\langle x, x\rangle = \int_1^8 \frac{1}{t}.\frac{1}{t}dt = \frac{7}{8}$$

$$\langle x, y_1\rangle = \langle y_1, x\rangle = \int_1^8 a.\frac{1}{t}dt = a\ln 8 = (2{,}079)a$$

$$\langle x, y_2\rangle = \langle y_2, x\rangle = \int_1^8 \frac{1}{t}.(b+ct)\,dt = b\ln 8 + 7c = (2{,}079)b + 7c$$

Berdasarkan (2.1) diperoleh :

$$(7a^2)\beta_1 + (7ab + \frac{63}{2}ac)\beta_2 = (2{,}079)a$$

$$(7ab + \frac{63}{2}ac)\beta_1 + (7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2)\beta_2 = (2{,}079)b + 7c$$

Dengan perhitungan diperoleh:

$$\beta_1 = \frac{50{,}71a^2bc + 146{,}84a^2c^2 - 4{,}02a^2b^2c}{49a^3b + 220{,}5a^3c} \;\; dan\, \beta_2 = -\frac{0{,}082}{c}$$

Jadi, diperoleh fungsi aproksimasi terbaik ke fungsi $x(t) = \frac{1}{t},\, 1 \le t \le 8$:

$$\hat{x} = \left[\frac{50{,}71a^2bc + 146{,}84a^2c^2 - 4{,}02a^2b^2c}{49a^3b + 220{,}5a^3c}\right].a + \left[-\frac{0{,}082}{c}\right].b + ct$$

$$\hat{x} = \frac{50{,}71a^3bc + 146{,}84a^3c^2 - 4{,}02a^3b^2c}{49a^3b + 220{,}5a^3c} - \frac{0{,}082\,b}{c} - 0{,}082\,t$$

Kesalahan optimalnya atau minimumnya yaitu :

$$\partial^2 = \|x - \tilde{x}\|^2$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & \langle x, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & \langle x, y_2\rangle \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_2, x\rangle & \langle x, x\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle & 0 \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle & 0 \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_2, x\rangle & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 7a^2 & 7ab + \frac{63}{2}ac & 2{,}079a \\ 7ab + \frac{63}{2}ac & 7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2 & 2{,}079b + 7c \\ 2{,}079a & 2{,}079b + 7c & \frac{7}{8} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7a^2 & 7ab + \frac{63}{2}ac & 0 \\ 7ab + \frac{63}{2}ac & 7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2 & 0 \\ 2{,}079a & 2{,}079b + 7c & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{12,7a^2c^2}{200,08a^2c^2}$$
$$= 0,063$$

Jadi jarak minimum adalah $\partial = \sqrt{0,063}$

IV. KESIMPULAN

Masalah optimisasi khususnya aproksmasi fungsi terbaik yang tidak medapatkan solusi terbaik (ralat yang besar) dalam ruang fisis atau yang dikenal sebagai ruang real , dapat dipecahkan dengan sistem matematis yang sederhana, dengan masalah aproksimasi tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vekor, khususnya pada ruang Hilbert C[a,b]. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah minimum norm dalam ruang Hilbert C[a,b]. Dengan menggunakan konsep minimum norm akan diperoleh kesalahan optimal (galat) yang minimum.

Dalam penyelesaian masalah minimum norm dengan menggunakan ruang Hilbert C[a,b] maka fungsi aproksimasi tidak tergantung pada pemilihan basis, asalkan basis yang dipilih membangun ruang Hilber C[a, b].

DAFTAR PUSTAKA

[1] Amanto, Suharsono, dan Waluyo, J.,2003. Penyelesaian Masalah Minimum Norm dalam Ruang Hilbert L_2[a,b]. *Jurnal Matematika, Aplikasi dan Pembelajarannya (JMAP)*, Vol 2, hal. 124 – 131.

[2] Atkinson, K. And Han, W., 2001. *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*. Springer Verlag, New York.

[3] Berberian, SK., 1961. *Introduction to Hilbert Space*, Academic Press, Inc., New York.

[4] Joko Waluyo, 2003. *Penyelesaian Masalah Minimum Norm Dalam Ruang Hilbert* C[a,*b*]. Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Unila.

[5] Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York : John Willey.

[6] Luenberger, D.G., 1969. *Optimization by Vector Space Methods* John Wiley and Sons, New York.