

ISSN : 2337-9057



PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

**SEMINAR HASIL PENELITIAN
SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI
15 DESEMBER 2012**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012**



DAFTAR ISI

	Halaman
Kelompok Matematika	
PERBANDINGAN SEGIEMPAT LAMBERT PADA GEOMETRI EUCLID DAN NON-EUCLID Anggun Novita Sari, Muslim Ansori dan Agus Sutrisno	1-6
Ruang Topologi T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 Anwar Sidik, Muslim Ansori dan Amanto	7-14
PENERAPAN GRAF DEBRUIJN PADA KONSTRUKSI GRAF EULERIAN Fazrie Mulia, Wamiliana, dan Fitriani	15-21
REPRESENTASI OPERATOR HILBERT SCHMIDT PADA RUANG BARISAN Herlisa Anggraini, Muslim Ansori, Amanto	22-27
ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL) Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno	28-33
Algoritma Untuk Mencari Grup Automorfisma Pada Graf Circulant Vebriyan Agung, Ahmad Faisol, Amanto	34-37
KEISOMORFISMAAN GEOMETRI AFFIN Pratiwi Handayani, Muslim Ansori, Dorrah Aziz	38-41
METODE PENGUKURAN SUDUT MES SEBAGAI KEBIJAKAN PENENTUAN 1 SYAWAL Mardiyah Hayati, Tiryo, dan Dorrah	42-44
KE-ISOMORFISMAAN GEOMETRI INSIDENSI Marlina, Muslim Ansori dan Dorrah Aziz	45-47
TRANSFORMASI MATRIKS PADA RUANG BARISAN L^p Nur Rohmah, Muslim Ansori dan Amanto	48-53
KAJIAN ANALITIK GEOMETRI PADA GERAK MEKANIK POLISI TIDUR (POLDUR) UNTUK PENGGERAK DINAMO Nurul Hidayah Marfiatin, Tiryo Ruby dan Agus Sutrisno	54-56
<i>INTEGRAL RIEMANN FUNGSI BERNILAI VEKTOR</i> Pita Rini, Dorrah Aziz, dan Amanto	57-63
ISOMORFISME BENTUK-BENTUK GRAF <i>WRAPPED BUTTERFLY NETWORKS</i> DAN <i>GRAF CYCLIC-CUBES</i> Ririn Septiana, Wamiliana, dan Fitriani	64-71
Ring Armendariz Tri Handono, Ahmad Faisol dan Fitriani	72-77
PERKALIAN DAN AKAR KUADRAT UNTUK OPERATOR <i>SELF-ADJOINT</i> Yuli Kartika, Muslim Ansori, Fitriani	78-81

Kelompok Statistika

APROKSIMASI DISTRIBUSI <i>STUDENT</i> TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Eflin Marsinta Uli, Warsono, dan Widiarti	82-85
ANALISIS CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN NEW JERSEY Eva fitrilia, Rudi Ruswandi, dan Widiarti	86-93
PENDEKATAN DISTRIBUSI GAMMA TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Jihan Trimita Sari T, Warsono, dan Widiarti	94-97
PERBANDINGAN ANALISIS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOM Latusiania Oktamia, Netti Herawati, Eri Setiawan	98-103
PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM (<i>EXPECTATION MAXIMIZATION</i>) Nurashri Partasiwi, Dian Kurniasari dan Widiarti	104-109
KAJIAN CADANGAN ASURANSI DENGAN METODE ZILLMER DAN METODE KANADA RozaZelvia, Rudi Ruswandi dan Widiarti	110-115
ANALISIS KOMPONEN RAGAM DATA HILANG PADA RANCANGAN <i>CROSS-OVER</i> Sorta Sundry H. S, Mustofa Usman dan Dian Kurniasari	116-121
PENDEKATAN DISTRIBUSI GOMPERTZ PADA CADANGAN ASURANSI JIWA UNTUK METODE ZILLMER DAN ILLINOIS Mahfuz Hudori, Rudi Ruswandi dan Widiarti	122-126
KAJIAN RELATIF BIAS METODE <i>ONE-STAGE</i> DAN <i>TWO-STAGE CLUSTER SAMPLING</i> Rohman, Dian Kurniasari dan Widiarti	127-130
PERBANDINGAN UJI HOMOGENITAS RAGAM KLASIFIKASI SATU ARAH METODE KONVENSIONAL DENGAN METODE ANOMV Tika Wahyuni, Netti Herawati dan Eri Setiawan	131-136
PENDEKATAN DISTRIBUSI KHI-KUADRAT TERHADAP <i>GENERALIZED LAMBDA DISTRIBUTION</i> (GLD) BERDASARKAN EMPAT MOMEN PERTAMANYA Tiyas Yulita, Warsono dan Dian Kurniasari	137-140

Kelompok Kimia

TRANSESTERIFIKASI MINYAK SAWIT DENGAN METANOL DAN KATALIS HETEROGEN BERBASIS SILIKA SEKAM PADI ($MgO-SiO_2$) EviRawati Sijabat, Wasinton Simanjuntak dan Kamisah D. Pandiangan	141-147
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT ($CaCO_3$) DENGAN METODE <i>UNSEEDED EXPERIMENT</i> Miftasani, Suharso dan Buhani	148-153
EFEK PENAMBAHAN SENYAWA EKSTRAK DAUN BELIMBING WULUH SEBAGAI INHIBITOR KERAK KALSIUM KARBONAT ($CaCO_3$) DENGAN METODE <i>SEEDED EXPERIMENT</i> PutriFebriani Puspita, Suharso dan Buhani	154-160

IDENTIFIKASI SENYAWA AKTIF DARI KULIT BUAH ASAM KERANJI (<i>Dalium indum</i>) SEBAGAI INHIBITORKOROSIBAJA LUNAK Dewi Kartika Sari, Ilim Wasinton dan Simanjuntak	161-168
TransesterifikasiMinyakSawitdenganMetanoldanKatalisHeterogenBerbasis SilikaSekamPadi(TiO_2/SiO_2) Wanti Simanjuntak, Kamisah D. Pandiangan dan Wasinton Simanjuntak	169-175
UJI PENDAHULUAN HIDROLISIS ONGGOK UNTUK MENGHASILKAN GULA REDUKSI DENGAN BANTUAN ULTRASONIKASI SEBAGAI PRAPERLAKUAN Juwita Ratna Sari dan Wasinton Simanjuntak	176-182
STUDI FORMULASI PATI SORGUM-GELATIN DAN KONSENTRASI <i>PLASTICIZER</i> DALAM SINTESA BIOPLASTIK SERTA UJI <i>BIODEGRADABLE</i> DENGAN METODE FISIK Yesti Harryzona dan Yuli Darni	183-190
Kelompok Fisika	
Pengaruh Variasi Suhu Pemanasan Dengan Pendinginan Secara Lambat Terhadap Uji <i>Bending</i> Dan Struktur Mikro Pada Baja Pegas Daun AISI 5140 Adelina S.E Sianturi, Ediman Ginting dan Pulung Karo-Karo	191-195
PengaruhKadar $CaCO_3$ terhadapPembentukanFaseBahanSuperkonduktorBSCCO-2212 denganDopingPb (BPSCCO-2212) Ameilda Larasati, Suprihatin dan Ediman GintingSuka	196-201
Variasi Kadar $CaCO_3$ dalamPembentukanFaseBahanSuperkonduktor BSCCO-2223 dengan Doping Pb (BPSCCO-2223) Fitri Afriani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	202-207
Sintesis Bahan Superkonduktor BSCCO-2223 Tanpa Doping Pb Pada Berbagai Kadar $CaCO_3$ Heni Handayani, Suprihatin dan Ediman Ginting Suka	208-212
Pengaruh Variasi Waktu Penarikan dalam Pembuatan Lapisan Tipis TiO_2 dengan Metode Pelapisan Celup Dian Yulia Sari dan Posman Manurung	213-218
Pengaruh Suhu Sintering terhadap Karakteristik Struktur dan Mikrostruktur Komposit Aluminosilikat $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ Berbahan Dasar Silika Sekam Padi Fissilla Venia Wiranti dan Simon Sembiring	219-225
Sintesisdan KarakterisasiTitaniaSilikadenganMetode Sol Gel Revy Susi Maryanti dan Posman Manurung	226-230
Uji Fotokatalis Bahan TiO_2 yang ditambahdengan SiO_2 padaZatWarnaMetilenBiru Violina Sitorus dan Posman Manurung	231- 236
KARAKTERISTIK STRUKTUR DAN MIKROSTRUKTUR KOMPOSIT $B_2O_3-SiO_2$ BERBASIS SILIKA SEKAM PADI DENGAN VARIASI SUHU KALSINASI Nur Hasanah, Suprihatin, dan Simon Sembiring	237-241
RANCANG BANGUN DAN ANALISIS ALAT UKUR MASSA JENIS ZAT CAIR BERBASIS MIKROKONTROLER ATMega8535 Prawoto, Arif Surtono, dan Gurum Ahmad Pauzi	242-247

ANALISIS BAWAH PERMUKAAN KELURAHAN TRIKORA KABUPATEN NGADA NTT MENGUNAKAN METODE GPR (<i>Ground Penetrating Radar</i>) DAN GEOLISTRIK R. Wulandari, Rustadi dan A. Zaenudin	248-250
Analisis Fungsionalitas Na ₂ CO ₃ Berbasis CO ₂ Hasil Pembakara Tempurung Kelapa RizkySastia Ningrum, Simon Sembiring dan Wasinton Simanjuntak	251-256

ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT $C[a, b]$ (STUDI KASUS : FUNGSI POLINOM DAN FUNGSI RASIONAL)

Ida Safitri, Amanto, dan Agus Sutrisno

*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung*

Abstrak

Aproksimasi fungsi dalam proses komputasi sering digunakan hampir di semua bidang analisis numerik. Dua alasan utama penggunaan aproksimasi fungsi adalah untuk memberikan fungsi pendekatan yang efektif dan mendekati suatu fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana. Diberikan sebuah fungsi f , baik secara utuh ataupun hanya beberapa nilai di titik-titik tertentu saja, kita ingin memperoleh hampiran (aproksimasi) untuk f yang mempunyai bentuk tertentu (misalnya supaya lebih mudah dianalisis) dengan kesalahan yang dapat kita

kontrol. Misalnya kita hendak menghitung $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, kita hampiri integrannya dengan polinom (suku banyak)

berderajat n (dengan n cukup besar). Masalah optimisasi khususnya aproksimasi fungsi terbaik yang tidak mendapatkan solusi terbaik (ralat yang besar) dalam ruang fisis atau yang dikenal sebagai ruang real, dapat dipecahkan dengan sistem matematis yang sederhana, dengan membawa masalah aproksimasi tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vektor, khususnya pada ruang Hilbert $C[a,b]$. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah minimum norm dalam ruang Hilbert $C[a,b]$. Dengan menggunakan konsep minimum norm akan diperoleh kesalahan optimal (galat) yang minimum.

Kata kunci: Aproksimasi, minimum norm, ruang Hilbert $C[a,b]$, polinom, kesalahan optimal.

I. PENDAHULUAN

Optimisasi adalah suatu proses memaksimalkan atau meminimumkan suatu fungsi objektif yang memenuhi kendala tertentu. Masalah aproksimasi fungsi di atas dapat diselesaikan pada ruang vektor, yaitu dengan metode optimisasi ruang vektor. Ruang vektor yang digunakan adalah ruang Hilbert. Ruang Hilbert merupakan ruang abstrak yang di dalamnya memuat perpaduan tiga konsep, yaitu Aljabar, Analisis dan Geometri. Konsep geometri yang digunakan adalah mengenai proyeksi, sebab ruang Hilbert dibangun oleh konsep *inner product* (Berberian, 1961). Fungsi yang akan dicari aproksimasinya adalah fungsi-fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada $[a,b]$. Dalam pemecahan masalah ini, langkah penting yang harus dilakukan adalah pemilihan basis yang bebas linear yang membangun ruang fungsi yang akan diaproksimasi dan penentuan kesalahan optimal atau ralat optimal dari aproksimasi yang diambil. Basis ini tidak tunggal. Pemilihan basis yang berbeda akan menghasilkan aproksimasi fungsi yang sama dan juga kesalahan optimal yang sama.

II. LANDASAN TEORI

Teorema proyeksi merupakan prinsip dasar dalam penyelesaian masalah optimisasi. Sebelum ke

Teorema proyeksi, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep ortogonalitas.

Definisi 2.1.1 (Luenberger, 1969)

Dalam suatu ruang pre-Hilbert X , vektor $x, y \in X$ dikatakan ortogonal jika $\langle x, y \rangle = 0$, dinotasikan dengan $x \perp y$. Suatu vektor x dikatakan ortogonal dengan himpunan S , dinotasikan $x \perp S$ jika $x \perp s$ untuk setiap $s \in S$.

Lemma berikut menunjukkan bahwa Teorema Pythagorean dalam geometri bidang merupakan akibat dari konsep ortogonalitas.

Lemma 2.1.1

Misalkan X suatu ruang Hilbert dan $x, y \in X$. Jika $x \perp y$, maka $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Bukti :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 (Teorema Proyeksi di Ruang pre-Hilbert)

Misalkan X suatu ruang Pre-Hilbert, M suatu ruang bagian dari X dan x sebarang vektor di X . Jika ada vektor $m_0 \in M$, sedemikian hingga $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$, maka m_0 tunggal.

Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$, suatu vektor minimal tunggal di M adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap M .

Teorema 2.1.3 (Teorema Proyeksi Klasik)

Misalkan H ruang Hilbert dan M ruang bagian tertutup dari H , maka untuk sebarang vektor $x \in H$, terdapat tunggal vektor $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$.

Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$, suatu vektor minimal tunggal adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian M .

Teorema proyeksi di atas akan ditetapkan untuk membangun sifat struktural tambahan dari suatu ruang Hilbert, antara lain adalah dalam sebarang ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert, sebarang vektor dapat ditulis sebagai jumlahan dua vektor, satu vektor di ruang bagian tertutup dan vektor yang lain ortogonal terhadapnya.

Definisi 2.1.2 (Luenberger, 1969)

Misalkan S suatu himpunan bagian dari ruang Pre-Hilbert. Himpunan semua vektor yang ortogonal terhadap S disebut komplemen ortogonal dari S dan dinotasikan dengan S^\perp .

Teorema 2.1.4

Misalkan S dan T himpunan bagian dari ruang Hilbert dan S^\perp, T^\perp berturut-turut menyatakan komplemen ortogonal dari S dan T maka :

1. S^\perp adalah ruang bagian tertutup
2. $S \subset S^{\perp\perp}$
3. Jika $S \subset T$ maka $T^\perp \subset S^\perp$
4. $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$

Definisi 2.1.3 (Luenberger, 1969)

Ruang vektor X dikatakan jumlahan langsung dari ruang bagian M dan N , jika setiap vektor $x \in X$ dapat ditulis secara tunggal, dalam bentuk $x = m + n$ dengan $m \in M$ dan $n \in N$, dinotasikan dengan $X = M \oplus N$.

Teorema 2.1.5

Jika M ruang bagian linear tertutup dari suatu ruang Hilbert H maka $H = M \oplus M^\perp$ dan $M = M^{\perp\perp}$

Definisi 2.1.4 (Luenberger, 1969)

Misalkan y_1, y_2, \dots, y_n basis dari M . Diberikan sebarang vektor $x \in H$ dan akan dicari vektor m_0 di M yang terdekat ke x . Jika vektor m_0 dinyatakan dalam suku-suku dalam vektor y_i sebagai :

$$m_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$$

Maka masalah tersebut ekuivalen dengan menemukan skalar $\beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang meminimalkan $\|x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \dots - \beta_n y_n\|$.

Menurut Teorema proyeksi, vektor minimal tunggal m_0 adalah proyeksi ortogonal x pada M , atau vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap setiap vektor y_i .

Dengan demikian :

$$\langle x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - \dots - \beta_n y_n, y_i \rangle = 0$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Atau

$$\langle x, y_1 \rangle - \beta_1 \langle y_1, y_1 \rangle - \beta_2 \langle y_2, y_1 \rangle - \dots - \beta_n \langle y_n, y_1 \rangle = 0$$

$$\langle x, y_2 \rangle - \beta_1 \langle y_1, y_2 \rangle - \beta_2 \langle y_2, y_2 \rangle - \dots - \beta_n \langle y_n, y_2 \rangle = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\langle x, y_n \rangle - \beta_1 \langle y_1, y_n \rangle - \beta_2 \langle y_2, y_n \rangle - \dots - \beta_n \langle y_n, y_n \rangle = 0$$

Atau

$$\langle y_1, y_1 \rangle \beta_1 + \langle y_2, y_1 \rangle \beta_2 + \dots + \langle y_n, y_1 \rangle \beta_n = \langle x, y_1 \rangle$$

$$\langle y_1, y_2 \rangle \beta_1 + \langle y_2, y_2 \rangle \beta_2 + \dots + \langle y_n, y_2 \rangle \beta_n = \langle x, y_2 \rangle$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\langle y_1, y_n \rangle \beta_1 + \langle y_2, y_n \rangle \beta_2 + \dots + \langle y_n, y_n \rangle \beta_n = \langle x, y_n \rangle$$

Persamaan dalam koefisien β_i sebanyak n kali ini dikenal sebagai persamaan normal untuk masalah minimalisasi.

Matriks $n \times n$ yang berhubungan dengan vektor y_1, y_2, \dots, y_n yaitu :

menemukan scalar β_1 dan β_2 yang meminimalkan $\|x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2\|$.

Menurut Teorema proyeksi vektor minimal tunggal \hat{x} adalah proyeksi orthogonal x pada M (ruang bagian dari ruang Hilbert) atau selisih $x - \hat{x}$ orthogonal terhadap setiap vector y_i , $i=1,2$.

Dengan demikian $\langle x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2, y_i \rangle = 0$, untuk $i = 1,2$
Atau

$$\langle x, y_1 \rangle - \langle \beta_1 y_1, y_1 \rangle - \langle \beta_2 y_2, y_1 \rangle = 0 \quad \text{atau}$$

$$\beta_1 \langle y_1, y_1 \rangle - \beta_2 \langle y_2, y_1 \rangle = \langle x, y_1 \rangle$$

$$\langle x, y_2 \rangle - \langle \beta_1 y_1, y_2 \rangle - \langle \beta_2 y_2, y_2 \rangle = 0$$

$$\beta_1 \langle y_1, y_2 \rangle - \beta_2 \langle y_2, y_2 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$$

Dapat dibentuk :

$$G(y_1, y_2) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x, y_1 \rangle \\ \langle x, y_2 \rangle \end{bmatrix} \quad \text{atau}$$

$$\begin{bmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x, y_1 \rangle \\ \langle x, y_2 \rangle \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh :

$$\langle y_1, y_1 \rangle = \int_{-1}^2 a \cdot a \, dt = 3a^2$$

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle = \int_{-1}^2 a \cdot (b + ct) \, dt = 3ab + \frac{3}{2}ac$$

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \int_{-1}^2 (b + ct) \cdot (b + ct) \, dt = 3b^2 + 3bc + 3c^2$$

$$\langle x, x \rangle = \int_{-1}^2 t^2 \cdot t^2 \, dt = \frac{33}{5}$$

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle y_1, x \rangle = \int_{-1}^2 a \cdot t^2 \, dt = 3a$$

$$\langle x, y_2 \rangle = \langle y_2, x \rangle = \int_{-1}^2 t^2 \cdot (b + ct) \, dt = 3b + \frac{15}{4}c$$

Berdasarkan (2.1) diperoleh :

$$(3a^2)\beta_1 + (3ab + \frac{3}{2}ac)\beta_2 = 3a$$

$$(3ab + \frac{3}{2}ac)\beta_1 + (3b^2 + 3bc + 3c^2)\beta_2 = 3b + \frac{15}{4}c$$

Dengan perhitungan diperoleh:

$$\beta_1 = \frac{3ac - 6ab}{6a^3c} \quad \text{dan} \quad \beta_2 = \frac{1}{c}$$

Jadi, diperoleh fungsi aproksimasi terbaik ke fungsi $x(t) = t^2$, $-1 \leq t \leq 2$:

$$\hat{x} = \left[\frac{3ac - 6ab}{6a^3c} \right] \cdot a + \left[\frac{1}{c} \right] \cdot b + ct$$

$$\hat{x} = \frac{3ac - 6ab}{6a^2c} + \frac{b}{c} + t$$

$$\hat{x} = \frac{ac - 2ab + 2a^2b}{2a^2c} + t$$

(4.1)

Kesalahan optimalnya atau minimumnya yaitu :

$$\begin{aligned} \partial^2 &= \|x - \tilde{x}\|^2 \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \langle x, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \langle x, y_2 \rangle \\ \langle y_1, x \rangle & \langle y_2, x \rangle & \langle x, x \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & 0 \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & 0 \\ \langle y_1, x \rangle & \langle y_2, x \rangle & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 3a^2 & 3ab + \frac{3}{2}ac & 3a \\ 3ab + \frac{3}{2}ac & 3b^2 + 3bc + 3c^2 & 3b + \frac{15}{4}c \\ 3a & 3b + \frac{15}{4}c & \frac{33}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3a^2 & 3ab + \frac{3}{2}ac & 0 \\ 3ab + \frac{3}{2}ac & 3b^2 + 3bc + 3c^2 & 0 \\ 3a & 3b + \frac{15}{4}c & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}a^2bc + \frac{729}{80}a^2c^2}{\frac{27}{4}a^2c^2} \end{aligned}$$

(4.2)

Jadi jarak minimum adalah

$$\partial = \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}a^2bc + \frac{729}{80}a^2c^2}{\frac{27}{4}a^2c^2}}$$

b. Masalah Aproksimasi Terbaik Fungsi Rasional

Misalkan X adalah ruang vektor yang terdiri dari fungsi-fungsi kontinu bernilai riil pada $[1,8]$, dengan perkalian dalam yang didefinisikan dengan :

$$\langle x, y \rangle = \int_1^8 x(t)y(t)dt \text{ dan } x(t) = \frac{1}{t}.$$

Penyelesaian :

Akan dicari fungsi polinomial berderajat satu yang merupakan aproksimasi terbaik ke fungsi

$x(t) = \frac{1}{t}, 1 \leq t \leq 8$. Dengan langkah-langkah berikut :

$$\langle y_1, y_1 \rangle = \int_1^8 a \cdot a dt = 7a^2$$

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle = \int_1^8 a \cdot (b + ct) dt = 7ab + \frac{63}{2}ac$$

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \int_1^8 (b + ct) \cdot (b + ct) dt = 7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2$$

$$\langle x, x \rangle = \int_1^8 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{7}{8}$$

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle y_1, x \rangle = \int_1^8 a \cdot \frac{1}{t} dt = a \ln 8 = (2,079)a$$

$$\langle x, y_2 \rangle = \langle y_2, x \rangle = \int_1^8 \frac{1}{t} \cdot (b + ct) dt = b \ln 8 + 7c = (2,079)b + 7c$$

Berdasarkan (2.1) diperoleh :

$$(7a^2)\beta_1 + (7ab + \frac{63}{2}ac)\beta_2 = (2,079)a$$

$$(7ab + \frac{63}{2}ac)\beta_1 + (7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2)\beta_2 = (2,079)b + 7c$$

Dengan perhitungan diperoleh:

$$\beta_1 = \frac{5071a^2bc + 14684a^2c^2 - 402a^2b^2c}{49a^3b + 2205a^3c} \text{ dan } \beta_2 = \frac{0,082}{c}$$

Jadi, diperoleh fungsi aproksimasi terbaik ke

fungsi $x(t) = \frac{1}{t}, 1 \leq t \leq 8$:

$$\hat{x} = \left[\frac{50,71a^2bc + 146,84a^2c^2 - 4,02a^2b^2c}{49a^3b + 220,5a^3c} \right] \cdot a + \left[-\frac{0,082}{c} \right] \cdot b + ct$$

$$\hat{x} = \frac{50,71a^3bc + 146,84a^3c^2 - 4,02a^3b^2c}{49a^3b + 220,5a^3c} - \frac{0,082b}{c} - 0,082t$$

Kesalahan optimalnya atau minimumnya yaitu :

$$\partial^2 = \|x - \tilde{x}\|^2$$

$$= \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \langle x, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \langle x, y_2 \rangle \\ \langle y_1, x \rangle & \langle y_2, x \rangle & \langle x, x \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & 0 \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & 0 \\ \langle y_1, x \rangle & \langle y_2, x \rangle & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7a^2 & 7ab + \frac{63}{2}ac & 2,079a \\ 7ab + \frac{63}{2}ac & 7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2 & 2,079b + 7c \\ 2,079a & 2,079b + 7c & \frac{7}{8} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7a^2 & 7ab + \frac{63}{2}ac & 0 \\ 7ab + \frac{63}{2}ac & 7b^2 + 63bc + \frac{511}{3}c^2 & 0 \\ 2,079a & 2,079b + 7c & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12,7a^2c^2}{200,08a^2c^2} \\
&= 0,063
\end{aligned}$$

Jadi jarak minimum adalah $\hat{\delta} = \sqrt{0,063}$

IV. KESIMPULAN

Masalah optimisasi khususnya aproksimasi fungsi terbaik yang tidak mendapatkan solusi terbaik (ralat yang besar) dalam ruang fisis atau yang dikenal sebagai ruang real, dapat dipecahkan dengan sistem matematis yang sederhana, dengan masalah aproksimasi tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vektor, khususnya pada ruang Hilbert $C[a,b]$. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah minimum norm dalam ruang Hilbert $C[a,b]$. Dengan menggunakan konsep minimum norm akan diperoleh kesalahan optimal (galat) yang minimum.

Dalam penyelesaian masalah minimum norm dengan menggunakan ruang Hilbert $C[a,b]$ maka fungsi aproksimasi tidak tergantung pada pemilihan basis, asalkan basis yang dipilih membangun ruang Hilbert $C[a, b]$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Amanto, Suharsono, dan Waluyo, J., 2003. Penyelesaian Masalah Minimum Norm dalam Ruang Hilbert $L_2[a,b]$. *Jurnal Matematika, Aplikasi dan Pembelajarannya (JMAP)*, Vol 2, hal. 124 – 131.
- [2] Atkinson, K. And Han, W., 2001. *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*. Springer Verlag, New York.
- [3] Berberian, SK., 1961. *Introduction to Hilbert Space*, Academic Press, Inc., New York.
- [4] Joko Waluyo, 2003. *Penyelesaian Masalah Minimum Norm Dalam Ruang Hilbert $C[a,b]$* . Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Unila.
- [5] Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York : John Willey.
- [6] Luenberger, D.G., 1969. *Optimization by Vector Space Methods* John Wiley and Sons, New York.