



PROSIDING SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK 2017

PENGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA,
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA



**SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF
2017**

**PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017**

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :

Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :

Shela Malinda Tampubolon

Alamat :

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN KETUA PELAKSANA SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema “penggunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa”.

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmun. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN	iii
KEPANITIAAN	iv
DAFTAR ISI	vi
Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen (<i>Fauzia Anisatul F, Suharsono S, dan Dorrah Aziz</i>)	1
Simulasi Interaksi Angin Laut dan Bukit Barisan dalam Pembentukan Pola Cuaca di Wilayah Sumatera Barat Menggunakan Model Wrf-Arw (<i>Achmad Rafli Pahlevi</i>)	7
Penerapan Mekanisme Pertahanan Diri (Self-Defense) sebagai Upaya Strategi Pengurangan Rasa Takut Terhadap Kejahatan (Studi Pada Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung yang Menduduki Peringkat <i>Crime Rate</i> Tertinggi) (<i>Teuku Fahmi</i>)	18
Tingkat Ketahanan Individu Mahasiswa Unila pada Aspek Soft Skill (<i>Pitojo Budiono, Feni Rosalia, dan Lilih Muflihah</i>)	33
Metode Analisis Homotopi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Linear Non Homogen Orde Satu (<i>Atika Faradilla dan Suharsono S</i>)	44
Penerapan Neural Machine Translation Untuk Eksperimen Penerjemahan Secara Otomatis pada Bahasa Lampung – Indonesia (<i>Zaenal Abidin</i>)	53
Ukuran Risiko Cre-Var (<i>Insani Putri dan Khreshna I.A.Syuhada</i>)	69
Penentuan Risiko Investasi dengan Momen Orde Tinggi $V@R-Cv@R$ (<i>Marianik dan Khreshna I.A.Syuhada</i>)	77
Simulasi Komputasi Aliran Panas pada Model Pengering Kabinet dengan Metode Beda Hingga (<i>Vivi Nur Utami, Tiryono Ruby, Subian Saidi, dan Amanto</i>)	83
Segmentasi Wilayah Berdasarkan Derajat Kesehatan dengan Menggunakan <i>Finite Mixture Partial Least Square</i> (Fimix-Pls) (<i>Agustina Riyanti</i>)	90
Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan $L_{3/2}$ (<i>Risky Aulia Ulfa, Muslim Ansori, Suharsono S, dan Agus Sutrisno</i>)	99
Analisis Rangkaian Resistor, Induktor dan Kapasitor (RLC) dengan Metode Runge-Kutta Dan Adams Bashforth Moulton (<i>Yudandi K.A., Agus Sutrisno, Amanto, dan Dorrah Aziz</i>)	110

Representasi Operator Linier dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan L 13/12 (Amanda Yona Ningtyas, Muslim Ansori, Subian Saidi, dan Amanto)	116
Desain Kontrol Model Suhu Ruangan (Zulfikar Fakhri Bismar dan Aang Nuryaman)	126
Penerapan Logika Fuzzy pada Suara Tv Sebagai Alternative Menghemat Daya Listrik (Agus Wantoro)	135
Clustering Wilayah Lampung Berdasarkan Tingkat Kesejahteraan (Henida Widyatama).....	149
Pemanfaatan Sistem Informasi Geografis Untuk Valuasi Jasa Lingkungan Mangrove dalam Penyakit Malaria di Provinsi Lampung (Imawan A.Q., Samsul Bakri, dan Dyah W.S.R.W.)	156
Analisis Pengendalian Persediaan Dalam Mencapai Tingkat Produksi <i>Crude Palm Oil</i> (CPO) yang Optimal di PT. Kresna Duta Agroindo Langling Merangin-Jambi (Marcelly Widya W., Hery Wibowo, dan Estika Devi Erinda)	171
Analisis <i>Cluster Data Longitudinal</i> pada Pengelompokan Daerah Berdasarkan Indikator IPM di Jawa Barat (A.S Awalluddin dan I. Taufik).....	187
Indek Pembangunan Manusia dan Faktor Yang Mempengaruhinya di Daerah Perkotaan Provinsi Lampung (Ahmad Rifa'i dan Hartono).....	195
<i>Parameter Estimation Of Bernoulli Distribution Using Maximum Likelihood and Bayesian Methods</i> (Nurmaita Hamsyiah, Khoirin Nisa, dan Warsono).....	214
Proses Pengamanan Data Menggunakan Kombinasi Metode Kriptografi <i>Data Encryption Standard</i> dan <i>Steganografi End Of File</i> (Dedi Darwis, Wamiliana, dan Akmal Junaidi).	228
<i>Bayesian Inference of Poisson Distribution Using Conjugate A and Non-Informative Prior</i> (Misgiyati, Khoirin Nisa, dan Warsono).	241
Analisis Klasifikasi Menggunakan Metode Regresi Logistik Ordinal dan Klasifikasi Naïve Bayes pada Data Alumni Unila Tahun 2016 (Shintia F., Rudi Ruswandi, dan Subian Saidi)...	251
Analisis Model <i>Markov Switching Autoregressive</i> (MSAR) pada <i>Data Time Series</i> (Aulianda Prasyanti, Mustofa Usman, dan Dorrah Aziz)	263
Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8 (Faranika Latip., Dorrah Aziz, dan Suharsono S).	278
Pengembangan Ekowisata dengan Memanfaatkan Media Sosial untuk Mengukur Selera Calon Konsumen (Gustafika Maulana, Gunardi Djoko Winarso, dan Samsul Bakri).	293
Diagonalisasi Secara Unger Matriks Hermite dan Aplikasinya pada Pengamanan Pesan Rahasia (Abdurrois, Dorrah Aziz, dan Aang Nuryaman)	308

Pembandingan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton dalam Penyelesaian Model Pertumbuhan Uang yang Diinvestasikan (Intan Puspitasari, Agus Sutrisno, Tiryono Ruby, dan Muslim Ansori) .	328
Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde-N Non Homogen dengan Fungsi Green (Fathurrohman Al Ayubi, Dorrah Aziz, dan Muslim Ansori).....	341
Penyelesaian Kata Ambigu pada Proses Pos Tagging Menggunakan Algoritma Hidden Markov Model (HMM) (Agus Mulyanto, Yeni Agus Nurhuda, dan Nova Wiyanto).....	347
Sistem Temu Kembali Citra Daun Tumbuhan Menggunakan Metode Eigenface (Supiyanto dan Samuel A. Mandowen) .	359
Efektivitas Model <i>Problem Solving</i> dalam Meningkatkan Kemampuan Berfikir Lancar Mahasiswa pada Materi Ph Larutan (Ratu Betta Rudibyani).....	368
<i>The Optimal Bandwidth for Kernel Density Estimation of Skewed Distribution: A Case Study on Survival Data of Cancer Patients</i> (Netti Herawati, Khoirin Nisa, dan Eri Setiawan).....	380
Karakteristik Larutan Kimia Di Dalam Air Dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear (Titik Suparwati).....	389
Bentuk Solusi Gelombang Berjalan Persamaan $\Delta\Delta$ mKdV Yang Diperumum (Notiragayu, Rudi Ruswandi, dan La Zakaria).....	398
Pendugaan Blup Dan Eblup(Suatu Pendekatan Simulasi) (Nusyirwan).....	403

METODE ANALISIS HOMOTOPHI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR NON HOMOGEN ORDE SATU

Atika Faradilla, Suharsono S.

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung. Telp 0721701609. Fax 0721702767
E-mail: atika.faradilla@yahoo.com

ABSTRAK

Pada tahun 1992, Liao mengusulkan sebuah metode analisis untuk memecahkan masalah – masalah persamaan maupun sistem persamaan, bernama metode analisis homotopi. Metode ini digunakan untuk memecahkan masalah dengan langkah yang sesuai dan memudahkan penentuan konvergensi deret. Dalam beberapa tahun belakangan ini, metode ini telah dengan sukses dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai persamaan yang linear maupun tak linear dan yang homogen maupun non homogen. Untuk memahami lebih dalam mengenai metode ini, maka penulis mencoba menerapkan metode analisis homotopi pada sistem persamaan diferensial linear non homogen orde satu. Dengan menerapkan metode analisis homotopi ke dalam sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t + u_x - (u - v) = -2$ dengan syarat awal $u(x, 0) = 1 + e^x$ dan $v(x, 0) = -1 + e^x$, didapatkan solusi homotopi yang konvergen ke solusi $u(x, t) = 1 + e^{x+t}$ dan $v(x, t) = -1 + e^{x-t}$ apabila nilai $h = -1$.

Kata kunci: metode analisis homotopi, persamaan linear non homogen, sistem persamaan diferensial parsial

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial parsial dapat dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Tidak berlebihan jika dikatakan bahwa hanya sistem fisik yang paling sederhana yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan masalah-masalah yang lebih rumit, seperti topik-topik dalam fisika lanjut, harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Kenyataannya, persamaan – persamaan tersebut sulit untuk dipecahkan dengan penyelesaian persamaan diferensial parsial analitik biasa. Sehingga dikembangkan berbagai metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial ini, seperti metode pemisahan variabel, metode transformasi Laplace, metode transformasi Fourier, metode beda hingga, metode garis, dan sebagainya.

Pada tahun 1992, Liao mengusulkan sebuah metode dalam disertasi PhD-nya, bernama metode analisis homotopi. Metode ini kemudian dimodifikasi lebih lanjut pada tahun 1997 untuk memperkenalkan parameter untuk membangun homotopi pada sistem diferensial dalam bentuk umum. Dalam beberapa tahun belakangan ini, metode ini telah dengan sukses dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai persamaan maupun sistem persamaan linear maupun tak linear dan yang homogen maupun non homogen.

Metode analisis homotopi ini digunakan untuk memecahkan masalah dengan langkah yang sesuai dan memudahkan penentuan konvergensi deret. Selain itu, metode analisis homotopi tidak bergantung pada besar kecilnya parameter. Kenyataannya adalah metode homotopi lebih mudah digunakan dalam menyelesaikan masalah yang sulit. Berdasarkan hal-hal tersebut, maka penulis mencoba menerapkan metode analisis homotopi pada sistem persamaan diferensial linear non homogen.

Misalkan diberikan suatu sistem persamaan linear non homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t - u_x - (u - v) = -2$. Dengan kondisi awal $u(x, 0) = 1 + e^x$ dan $v(x, 0) = -1 + e^x$. Untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut, maka akan digunakan metode analisis homotopi.

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan tentang metode analisis homotopi.
2. Menerapkan metode analisis homotopi pada sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t - u_x - (u - v) = -2$.
3. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t - u_x - (u - v) = -2$ hingga diperoleh solusinya.

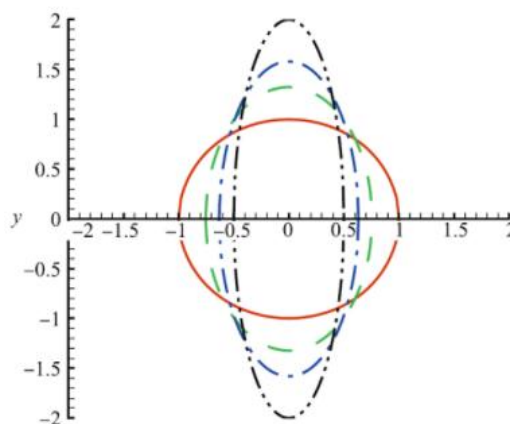
2. LANDASAN TEORI

Konsep Dasar Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya persamaan differensial dibagi dalam dua kelas, yaitu persamaan differensial biasa (PDB) dan persamaan differensial parsial (PDP). Jika turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut persamaan differensial biasa. Sedangkan, jika turunan fungsi itu tergantung pada lebih dari satu variabel bebasdisebut persamaan differensial parsial[1].

2.2 Deformasi

Deformasi adalah perubahan bentuk sebuah benda dari kondisi semula ke kondisi terkini. Makna dari "kondisi" dapat diartikan sebagai serangkaian posisi dari semua partikel yang ada di dalam benda tersebut. Sebagai contoh sebuah lingkaran dapat dideformasikan secara kontinu menjadi elips, dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat.



Gambar 1. Deformasi kontinu dari solusi $y(x; q)$ dari persamaan (1)

Keterangan

: $q = 0$	
: $q = 1/4$	
: $q = 1/2$	
: $q = 1$	

Misalkan terdapat suatu persamaan

$$\varepsilon(q) : (1 + 3q)x^2 + \frac{y^2}{(1+3q)} = 1, \quad q \in [0,1] \quad (1)$$

Dengan $q \in [0,1]$ adalah parameter homotopi.

Jika $q = 0$, maka akan didapat persamaan lingkaran

$$\varepsilon_0 : x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

Yang solusinya merupakan lingkaran $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$. Jika $q = 1$, maka didapat persamaan elips

$$\varepsilon_1 : 4x^2 + y^2/4 = 1 \quad (3)$$

Yang solusinya merupakan elips $y = \pm 2\sqrt{1 - 4x^2}$.

Sehingga, seiring dengan bertambahnya parameter homotopi q dari 0 ke 1, persamaan (1) berubah secara kontinu dari persamaan lingkaran ε_0 menjadi persamaan elips ε_1 , sementara solusinya ydeformasi secara kontinu dari lingkaran $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ menjadi elips $y = \pm 2\sqrt{1 - 4x^2}$, seperti dapat dilihat dalam Gambar 1.

Maka, solusi y dari (1) tidak hanya bergantung kepada x tapi juga bergantung kepada $q \in [0,1]$, sehingga persamaan (1) dapat ditulis dengan lebih tepat sebagai

$$\varepsilon(q) : (1 + 3q)x^2 + \frac{y^2(x;q)}{(1+3q)} = 1, \quad q \in [0,1] \quad (4)$$

Yang mendefinisikan dua homotopi: pertama, homotopi dari persamaan

$$\varepsilon(q) : \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1 \quad (5)$$

Dimana ε_0 dan ε_1 secara berturut – turut dinotasikan dalam (2) dan (3). Yang kedua adalah homotopi dari fungsi

$$y(x; q) = \pm \sqrt{1 - x^2} \sim \pm 2\sqrt{1 - 4x^2} \quad (6)$$

Dengan kata lain, solusi $y(x; q)$ dari (4) juga merupakan homotopi. Deformasi kontinu secara lengkap telah dinotasikan dalam (4). Untuk lebih sederhananya, (4) dapat disebut sebagai deformasi orde – nol. Konsep yang sama dapat diterapkan kedalam berbagai jenis persamaan lainnya, seperti persamaan diferensial, persamaan integral, dan lain – lain [2].

2.3Metode Analisis Homotopi

Misalkan terdapat persamaan differensial berikut,

$$N_i[z_i(x, t)] = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

dengan N_i adalah operator nonlinear yang mewakili seluruh persamaan, x dan t adalah variabel bebas dan $z_i(x, t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Dengan cara mengeneralisasi metode homotopi sederhana, Liao menyusun persamaan deformasi orde nol.

$$(1 - q) L[\phi_i(x, t; q) - z_{i,0}(x, t)] = q h_i N_i [\phi_i(x, t; q)] \quad (8)$$

Untuk $q \in [0, 1]$ adalah parameter homotopi, h_i adalah fungsi tak nol tambahan, L adalah operator linear tambahan, $z_{i,0}(x, t)$ adalah syarat awal dari $z_i(x, t)$ dan $\phi(x, t; q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Penting untuk diingat bahwa, bebas untuk memilih objek tambahan seperti h_i dan L pada metode analisis homotopi. Terlihat jelas bahwa saat $q = 0$ dan $q = 1$, keduanya menghasilkan

$$\phi_i(x, t; 0) = z_{i,0}(x, t) \text{ dan } \phi_i(x, t; 1) = z_i(x, t) \quad (9)$$

Maka, seiring dengan bertambahnya nilai q dari 0 ke 1, solusi $\phi_i(x, t; q)$ berubah dari syarat awal $z_{i,0}(x, t)$ ke solusi $z_i(x, t)$. Mengekspansikan $\phi_i(x, t; q)$ ke dalam deret Taylor terhadap q , akan menghasilkan

$$\phi_i(x, t; q) = z_{i,0}(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x, t) q^m \quad (10)$$

dengan

$$z_{i,m} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\delta^m \phi_i(x, t; q)}{\delta q^m} \right|_{q=0} \quad (11)$$

Jika operator linear tambahan, syarat awal, parameter tambahan h_i , dan fungsi tambahan dipilih dengan benar, maka deret pada persamaan (10) konvergen ke $q = 1$ dan

$$\phi_i(x, t; 1) = z_{i,0}(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x, t) \quad (12)$$

Yang merupakan salah satu dari solusi – solusi persamaan nonlinear, seperti yang telah dibuktikan oleh Liao. Jika $h_i = -1$, persamaan (8) menjadi

$$(1 - q) L[\phi_i(x, t; q) - z_{i,0}(x, t)] + q N_i [\phi_i(x, t; q)] = 0 \quad (13)$$

Yang merupakan persamaan yang paling sering digunakan dalam metode analisis homotopi.

Berdasarkan (11), persamaan tersebut dapat di deduksi dari persamaan deformasi orde nol (8). Didefinisikan vektor

$$\overrightarrow{z_{i,n}} = \{ z_{i,0}(x, t), z_{i,1}(x, t), \dots, z_{i,n}(x, t) \} \quad (14)$$

Mendiferensialkan (8) sebanyak m kali terhadap parameter homotopi q dan substitusikan $q = 0$ dan akhirnya membaginya dengan $m!$, maka diperoleh persamaan deformasi orde ke- m .

$$L [z_{i,m}(x, t) - \chi_m z_{i,m-1}(x, t)] = h_i R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}}) \quad (15)$$

untuk

$$R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\delta^{m-1} N_i[\phi_i(x, t; q)]}{\delta q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (16)$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $z_{i,m}(x, t) (m \geq 1)$ berdasarkan persamaan linear (15) dengan kondisi batas linear yang didapat dari masalah awalnya [3].

3. METODOLOGI PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan operator linear L dan mengkonstruksikan persamaan deformasi orde ke-nol.
2. Menentukan rangkaian solusi dari komponen yang telah diperoleh melalui perkiraan awal jika $q=0$, dan $q=1$.
3. Mengkonstruksikan persamaan deformasi orde-m.
4. Menentukan solusi persamaan deformasi pada persamaan yang diperoleh dari langkah ke (3) untuk setiap $m = 1, 2, \dots, n$.
5. Mensubstitusikan hasil ini ke dalam deret homotopi, sehingga diperoleh solusi homotopi.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan suatu sistem persamaan linear tak homogen

$$u_t - v_x - (u - v) = -2 \quad (17)$$

$$v_t + u_x - (u - v) = -2 \quad (18)$$

dengan syarat awal

$$u(x, 0) = 1 + e^x, \text{ dan } v(x, 0) = -1 + e^x \quad (19)$$

Untuk menyelesaikan sistem (1) – (3) dengan metode analisis homotopi, maka dipilih

$$u_0(x, 0) = 1 + e^x \text{ dan } v_0(x, 0) = -1 + e^x.$$

Didefinisikan operator linear sebagai berikut

$$L[\phi_i(x, t; q)] = \frac{\partial \phi_i(x, t; q)}{\partial t} \quad (20)$$

untuk

$$L[c_i] = 0 \quad (21)$$

Dan $c_i (i = 1, 2)$ merupakan konstanta integral.

Selanjutnya, berdasarkan sistem (1) dan (2) didefinisikan sistem operator nonlinear sebagai berikut.

$$N_1[\phi_i(x, t; q)] = \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial x} - \phi_1(x, t; q) + \phi_2(x, t; q) + 2$$

$$N_2[\phi_i(x, t; q)] = \frac{\partial \phi_2(x, t; q)}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1(x, t; q)}{\partial x} - \phi_1(x, t; q) + \phi_2(x, t; q) + 2$$

Dengan menggunakan definisi diatas, dikonstruksikan persamaan deformasi orde ke-0.

$$(1 - q) L[\phi_i(x, t; q) - z_{i,0}(x, t)] = q h_i N_i[\phi_i(x, t; q)], \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

Sehingga, saat $q = 0$ dan $q = 1$,

$$\begin{aligned} \phi_1(x, t; 0) &= z_{1,0}(x, t) = u_0(x, t), & \phi_1(x, t; 1) &= u(x, t), \\ \phi_2(x, t; 0) &= z_{2,0}(x, t) = v_0(x, t), & \phi_2(x, t; 1) &= v(x, t), \end{aligned}$$

Maka, seiring dengan bertambahnya nilai q dari 0 ke 1, solusi $\phi_i(x, t; q)$ berubah dari syarat awal $z_{i,0}(x, t)$ ke solusiz_i(x, t). Kemudian jika $\phi_i(x, t; q)$ diekspansikan ke dalam deret Taylor terhadap q , akan menghasilkan

$$\phi_i(x, t; q) = z_{i,0}(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x, t) q^m$$

untuk

$$z_{i,m} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\delta^m \phi_i(x, t; q)}{\delta q^m} \right|_{q=0}$$

Jika, syarat awal dan parameter tambahan h_i , dipilih dengan benar, maka deret diatas akan konvergen ke $q = 1$, sehingga

$$\begin{aligned} u(x, t) &= z_{1,0}(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{1,m}(x, t) \\ v(x, t) &= z_{2,0}(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{2,m}(x, t) \end{aligned}$$

Yang mana merupakan salah satu dari solusi – solusi persamaan nonlinear, seperti yang telah dibuktikan oleh Liao. Sekarang didefinisikan vektor

$$\overrightarrow{z_{i,n}} = \{ z_{i,0}(x, t), z_{i,1}(x, t), \dots, z_{i,n}(x, t) \}$$

Sehingga, persamaan deformasi ke- m adalah

$$L[z_{i,m}(x, t) - \chi_m z_{i,m-1}(x, t)] = h_i R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}}) \quad (23)$$

Dengan syarat awal

$$z_{i,m}(x, 0) = 0 \quad (25)$$

dan

$$\begin{aligned} R_{1,m}(\overrightarrow{z_{1,m-1}}) &= (z_{1,m-1})_t - (z_{2,m-1})_x - z_{1,m-1} + z_{2,m-1} + 2 - 2\chi_m \\ R_{2,m}(\overrightarrow{z_{2,m-1}}) &= (z_{2,m-1})_t + (z_{1,m-1})_x - z_{1,m-1} + z_{2,m-1} + 2 - 2\chi_m \end{aligned}$$

untuk

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Sekarang, solusi dari persamaan deformasi orde ke- m (23) untuk $m \geq 1$ menjadi

$$z_{i,m}(x, t) = \chi_m z_{i,m-1}(x, t) + h_i \int_0^t R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}}) d\tau + c_i \quad (26)$$

Dimana konstanta integral c_i ($i = 1, 2$) ditentukan oleh syarat awal (25).

Sehingga untuk $h_i = h$ didapatkan

$$R_{1,1}(\overrightarrow{z_{1,0}}) = -e^x$$

$$z_{1,1}(x, t) = -hte^x$$

$$R_{2,1}(\overrightarrow{z_{2,0}}) = e^x$$

$$z_{2,1}(x, t) = hte^x$$

$$R_{1,2}(\overrightarrow{z_{2,0}}) = hte^x - he^x$$

$$z_{1,2}(x, t) = -\frac{hte^x}{2} [2 - h(t - 2)]$$

$$R_{2,2}(\overrightarrow{z_{2,1}}) = hte^x + he^x$$

$$z_{2,2}(x, t) = \frac{hte^x}{2} [2 + h(t + 2)]$$

$$R_{1,3}(\overrightarrow{z_{1,2}}) = -he^x + 2h^2te^x - h^2e^x - \frac{h^2t^2e^x}{2} + hte^x$$

$$z_{1,3}(x, t) = -\frac{hte^x}{6} [6 - 6h(t - 2) + h^2(t^2 - 6t + 6)]$$

$$R_{2,3}(\overrightarrow{z_{2,2}}) = he^x + 2h^2te^x + h^2e^x + \frac{h^2t^2e^x}{2} + hte^x$$

$$z_{2,3}(x, t) = \frac{hte^x}{6} [6 + 6h(t + 2) + h^2(t^2 + 6t + 6)]$$

$$R_{1,4}(\overrightarrow{z_{1,3}}) = -he^x + 4h^2te^x - 2h^2e^x - \frac{h^3t^2e^x}{2} + 3h^3te^x - h^3e^x - h^2t^2e^x - h^3t^2e^x + hte^x + \frac{h^3t^3e^x}{6}$$

$$z_{1,4}(x, t) = -\frac{hte^x}{24} [24 - 36h(t - 2) + 12h^2(t^2 - 6t + 6) - h^3(t^3 - 12t^2 + 36t - 24)]$$

$$R_{2,4}(\overrightarrow{z_{2,3}}) = he^x + 4h^2te^x + 2h^2e^x + \frac{h^3t^2e^x}{2} + 3h^3te^x + h^3e^x + h^2t^2e^x + h^3t^2e^x + hte^x + \frac{h^3t^3e^x}{6}$$

$$z_{2,4}(x, t) = \frac{hte^x}{24} [24 + 36h(t + 2) + 12h^2(t^2 + 6t + 6) + h^3(t^3 + 12t^2 + 36t + 24)]$$

$$R_{1,5}(\overrightarrow{z_{1,4}}) = -he^x + 6h^2te^x - 3h^2e^x - \frac{9h^3t^2e^x}{2} + 9h^3te^x - 3h^3e^x - 3h^4t^2e^x + 4h^4te^x - h^4e^x$$

$$+ \frac{2h^4t^3e^x}{3} + hte^x - \frac{3h^2t^2e^x}{2} - \frac{h^4t^4e^x}{24} + \frac{h^3t^3e^x}{2}$$

$$z_{1,5}(x, t) = -\frac{hte^x}{120} [120 - 240h(t - 2) + 120h^2(t^2 - 6t + 6) - 20h^3(t^3 - 12t^2 + 36t - 24) + h^4(t^4 - 20t^3 + 120t^2 - 240t + 120)]$$

$$\begin{aligned}
 R_{2,5}(\overrightarrow{z_{2,4}}) &= he^x + 6h^2te^x + 3h^2e^x + \frac{9h^3t^2e^x}{2} + 9h^3te^x + 3h^3e^x + 3h^4t^2e^x + 4h^4te^x + h^4e^x + \frac{2h^4t^3e^x}{3} \\
 &\quad + hte^x + \frac{3h^2t^2e^x}{2} + \frac{h^4t^4e^x}{24} + \frac{h^3t^3e^x}{2} \\
 z_{2,5}(x, t) &= \frac{hte^x}{120} [120 + 240h(t + 2) + 120h^2(t^2 + 6t + 6) + 20h^3(t^3 + 12t^2 + 36t + 24) \\
 &\quad + h^4(t^4 + 20t^3 + 120t^2 + 240t + 120)]
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, deret solusi dengan menggunakan metode HAM dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= z_{1,0}(x, t) + z_{1,1}(x, t) + z_{1,2}(x, t) + z_{1,3}(x, t) + z_{1,4}(x, t) + z_{1,5}(x, t) + \dots, \\
 v(x, t) &= z_{2,0}(x, t) + z_{2,1}(x, t) + z_{2,2}(x, t) + z_{2,3}(x, t) + z_{2,4}(x, t) + z_{2,5}(x, t) + \dots,
 \end{aligned}$$

Dalam kasus $h = -1$,

$$z_{1,0}(x, t) = 1 + e^x$$

$$z_{1,1}(x, t) = te^x$$

$$z_{1,2}(x, t) = \frac{t^2e^x}{2} = \frac{t^2e^x}{2!}$$

$$z_{1,3}(x, t) = \frac{t^3e^x}{6} = \frac{t^3e^x}{3!}$$

$$z_{1,4}(x, t) = \frac{t^4e^x}{24} = \frac{t^4e^x}{4!}$$

$$z_{1,5}(x, t) = \frac{t^5e^x}{120} = \frac{t^5e^x}{5!}$$

$$z_{2,0}(x, t) = -1 + e^x$$

$$z_{2,1}(x, t) = -te^x$$

$$z_{2,2}(x, t) = \frac{t^2e^x}{2} = \frac{t^2e^x}{2!}$$

$$z_{2,3}(x, t) = -\frac{t^3e^x}{6} = -\frac{t^3e^x}{3!}$$

$$z_{2,4}(x, t) = \frac{t^4e^x}{24} = \frac{t^4e^x}{4!}$$

$$z_{2,5}(x, t) = -\frac{t^5e^x}{120} = -\frac{t^5e^x}{5!}$$

Sehingga, deret solusinya dapat dituliskan sebagai

$$u(x, t) = 1 + e^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right),$$

$$v(x, t) = -1 + e^x \left(-t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots \right)$$

Karena $e^t = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$ dan $e^{-t} = -t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots$, maka solusi tersebut konvergen ke solusi eksak-nya, yaitu

$$u(x, t) = 1 + e^{x+t} \text{ dan } v(x, t) = -1 + e^{x-t}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa solusi tersebut memenuhi persamaan (17) dan (18).

Untuk persamaan (17),

$$u_t - v_x - (u - v) = -2$$

$$e^{x+t} - e^{x-t} - 1 - e^{x+t} - 1 + e^{x-t} = -2$$

$$-2 = -2 \text{ (Terbukti)}$$

Untuk persamaan (18),

$$v_t + u_x - (u - v) = -2$$

$$-e^{x-t} + e^{x+t} - 1 - e^{x+t} - 1 + e^{x-t} = -2$$

$$-2 = -2 \text{ (Terbukti)}$$

Sehingga, terbukti bahwa solusi $u(x, t) = 1 + e^{x+t}$ dan $v(x, t) = -1 + e^{x-t}$ telah memenuhi sistem persamaan tersebut.

5. SIMPULAN

Dengan menerapkan metode analisis homotopi ke dalam sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t + u_x - (u - v) = -2$ dengan syarat awal $u(x, 0) = 1 + e^x$ dan $v(x, 0) = -1 + e^x$, didapatkan solusi homotopi yang konvergen ke solusi $u(x, t) = 1 + e^{x+t}$ dan $v(x, t) = -1 + e^{x-t}$ apabila nilai $h = -1$.

Dalam karya tulis ini, metode analisis homotopi hanya diterapkan ke dalam sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen orde satu. Oleh karena itu, karya tulis ini diharapkan dapat digunakan sebagai referensi dalam menerapkan metode analisis homotopi ke dalam sistem persamaan diferensial parsial lainnya yang lebih rumit.

KEPUSTAKAAN

- [1] Bronson, R. dan Costa, G. (2007). *Persamaan Differensial*. Erlangga, Jakarta.
- [2] Liao, S. (2012). *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation*. Higher Education Press, Beijing.
- [3] Bataineh, Noorani, dan Hashim. (2007). Approximate Analytical Solutions of Systems of PDEs by Homotopy Analysis Method. *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, Malaysia. 55: 2913–2923.