PROSIDING

SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK 2017

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAIDISIPLIN ILMU UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

SEMINAR NASIONAL

METODE KUANTITATIF

2017

PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :
Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :
Shela Malinda Tampubolon

Alamat :
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN
KETUA PELAKSANA
SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema “pengunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa”.

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmuan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

DAFTAR ISI

Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017
ISBN No. 978-602-98559-3-7

PERBANDINGAN METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON DAN METODE MILNE-SIMPSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER ORDE-8

Faranika Latip[1], Dorrah Azis[2], dan Suharsono[3]
Universitas Lampung, Jalan Prof. Dr. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
latipfaranika@gmail.com
[1)]Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
[2,3)]Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

ABSTRAK

Persamaan diferensial Euler adalah bentuk khusus dari persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah. Dalam penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda, digunakan metode langkah banyak (multi steps) atau disebut juga dengan metode prediktor-korektor yaitu Adams-Bashforth Moulton dan metode Milne-Simpson sebagai metode dalam menghampiri solusi analitiknya. Bentuk umum dari persamaan diferensial Euler orde-8 :

$$\sum_{i=0}^{8} a_i x^i y^{(i)} = 0$$

Ditransformasikan menjadi sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan menggunakan transformasi $x = e^t$, *dimana* $x > 0$. *Didapatkan sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan nilai-nilai awal yang kemudian disubtitusikan ke dalam persamaan prediktor lalu dikoreksi pada persamaan korektor dengan pemilihan ukuran* h *yang tepat. Diperoleh kesimpulan bahwa kedua metode di atas dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8. Metode Adams Bashforth-Moulton lebih akurat dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8 diketahui dari perbandingan jumlah galatnya, sebaliknya metode Milne-Simpson lebih efisien dalam melakukan iterasi karena lebih cepat dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.*

Kata kunci : *Persamaan Diferensial Euler, Adams Bashforth-Moulton, Milne-Simpson*

1. PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial (*differential equation*) adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya terhadap variabel-variabel bebas [1]. Salah satu bentuk persamaan diferensial biasa yaitu persamaan diferensial Euler. Persamaan diferensial Euler adalah salah satu bentuk khusus dari persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah [2]. Setiap bentuk persamaan differensial mempunyai metode penyelesaian yang berbeda. Metode lain yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde tinggi yaitu metode numerik.

Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) [3]. Metode numerik dibagi menjadi dua yaitu metode langkah tunggal (*one step*) dan metode langkah banyak (*multi steps*). Metode yang termasuk metode langkah tunggal adalah metode Euler, metode Heun, dan metode Runge-Kutta. Sedangkan metode yang termasuk metode langkah banyak adalah metode Adams Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson, dan metode Hamming. Semakin tinggi orde yang muncul pada persamaan diferensial maka akan semakin sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian dengan menggunakan metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memperoleh solusi pendekatannya .

Pada penelitian ini hanya difokuskan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda lalu membandingkan solusi dari metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson sebagai metode lain dalam penyelesaiannya.

2. LANDASAN TEORI

PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER CAUCHY ORDE TINGGI HOMOGEN

Persamaan diferensial linear orde tinggi homogen dengan koefisien peubah dikatakan sebagai persamaan diferensial Euler Cauchy, jika persamaan diferensial tersebut berbentuk [2]:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

dimana $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ merupakan konstanta-konstanta dan $a_n \neq 0$. Dengan menggunakan pendekatan yang dikembangkan pada persamaan diferensial Euler Cauchy homogen orde dua, untuk menentukan penyelesaian umumnya, ambil basis-basis penyelesaiannya berbentuk :

$$y = x^m$$

Dengan menurunkan persamaan $y = x^m$, terhadap x sebanyak n kali dan,

dengan mensubtitusikan basis $y = x^m$ dan turunan-turunannya $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ke persamaan (1), didapatkan

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + c_3 x^{m_3} + \cdots + c_n x^{m_n} \tag{2}$$

METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON

Metode prediktor-korektor Adams Bashforth-Moulton (ABM) adalah metode langkah banyak yang diturunkan dari teorema dasar kalkulus [4] :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(t, y(t)\big) dt \tag{3}$$

Persamaan prediktor Adams Bashforth :

$$P_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \tag{4}$$

Persamaan korektor Adams Moulton :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \tag{5}$$

METODE MILNE-SIMPSON

Metode prediktor-korektor lain yang terkenal adalah metode Milne-Simpson [4]. Prediktor berdasarkan integrasi dari $f(t, y(t))$ pada interval $[t_{k-3}, t_{k+1}]$:

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-3}) + \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt \tag{6}$$

Prediktor Milne:

$$P_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \tag{7}$$

Persamaan Simpson :

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) \tag{8}$$

ANALISIS *ERROR*

Dalam melakukan analisis numerik perlu untuk memperhatikan bahwa solusi yang dihitung bukanlah solusi analitik. Ketelitian dari solusi numerik dapat mengurangi nilai *error*.

Definisi Misalkan $\hat{p}$ adalah aproksimasi (pendekatan) ke p. *Error* mutlak adalah $E_p = |p - \hat{p}|$ dan *error* relatif adalah $R_p = |p - \hat{p}|/|p|$, dinyatakan bahwa $p \neq 0$ [4].

3. METODOLOGI PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut :

1. Studi pustaka yaitu mencari referensi, menelaah, dan mengkaji yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mentransformasikan bentuk umum persamaan diferensial Euler orde-8 ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan koefisien konstanta untuk menyelesaikan secara numerik.
3. Menyelesaikan contoh kasus dengan cara, yaitu :
   a. Mentransformasikan contoh kasus dari persamaan diferensial Euler orde-8 ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde-1 dengan koefisien konstanta untuk menyelesaikannya secara numerik.
   b. Menentukan solusi umum anlitik dari contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 dan mentransformasikannya ke dalam bentuk $x = e^t$ sehingga didapatkan solusi khusus analitiknya.
   c. Mencari solusi awal dari solusi khusus analitik contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 dengan metode Runge-Kutta orde-4.
   d. Menentukan algoritma dan mencari solusi numerik dari contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode banyak langkah (*multi steps*) yaitu metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dengan *software* MATLAB R2013b.
   e. Membandingkan solusi analitik dan solusi numerik dari persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan kedua metode dengan *software* MATLAB R2013b sehingga dapat diketahui metode manakah yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

HASIL

ALGORITMA METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON

Algoritma penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton adalah sebagai berikut :

1. Diketahui masalah nilai awal dari persamaan diferensial Euler orde-8 yang telah ditransformasikan ke dalam sistem persamaan dferensial orde-1,

$$\bar{Y}^{(1)} = \frac{d\bar{Y}}{dt} = f(t, \bar{Y}) \qquad \text{, dengan nilai awal} \qquad \bar{Y}(0) = \hat{\bar{Y}}_{(0)}$$

   dimana $\bar{Y} = [Y_0, Y_1, \dots, Y_7]^T$, dengan ukuran langkah h dan $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$.

2. Hitung empat solusi awal $\hat{\bar{Y}}_{(0)}, \hat{\bar{Y}}_{(1)}, \hat{\bar{Y}}_{(2)}$, dan $\hat{\bar{Y}}_{(3)}$ menggunakan metode Runge-Kutta orde-4.
3. Tentukan nilai-nilai $f_{(i)}, f_{(i-1)}, f_{(i-2)}$, dan $f_{(i-3)}$ dengan $i = 3,4, \dots ,20$
4. Tentukan solusi numerik menggunakan metode Adams Bashforth :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i)} + \frac{h}{24}(-9f_{(i-3)} + 37f_{(i-2)} - 59f_{(i-1)} + 55f_{(i)})$$

5. Hitung $f_{(i+1)} = f\left(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)}\right)$ dan disubtitusikan pada metode Adams Moulton.
6. Hitung solusi numerik menggunakan metode Adams Moulton :

$$\hat{\bar{Y}}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i)} + \frac{h}{24}(f_{(i-2)} - 5f_{(i-1)} + 19f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

   dengan perhitungan galat mutlak sebagai berikut :

$$E_{Y_{(i)}} = \left|Y\left(t_{(i)}\right) - \hat{Y}_{0_{(i)}}\right|$$

ALGORITMA METODE MILNE-SIMPSON

Algoritma penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode Milne-Simpson adalah sebagai berikut :

1. Diketahui masalah nilai awal dari persamaan diferensial Euler orde-8 yang telah ditransformasikan ke dalam sistem persamaan diferensial orde-1 ,

$$\bar{Y}^{(1)} = \frac{d\bar{Y}}{dt} = f(t, \bar{Y}) \qquad \text{, dengan nilai awal} \qquad \bar{Y}(0) = \hat{\bar{Y}}_{(0)}$$

   dimana $\bar{Y} = [Y_0, Y_1, \dots, Y_7]^T$, dengan ukuran langkah h dan $t_{(i+1)} = t_i + h$.

2. Hitung empat solusi awal $\hat{\bar{Y}}_{(0)}, \hat{\bar{Y}}_{(1)}, \hat{\bar{Y}}_{(2)}$, dan $\hat{\bar{Y}}_{(3)}$ menggunakan metode Runge-Kutta orde-4.
3. Tentukan nilai-nilai $f_{(i)}, f_{(i-1)}$, dan $f_{(i-2)}$ dengan $i = 3,4, \dots ,20$
4. Tentukan solusi numerik menggunakan metode Milne :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i-3)} + \frac{4h}{3}(2f_{(i-2)} - f_{(i-1)} + 2f_{(i)})$$

5. Hitung $f_{(i+1)} = f\left(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)}\right)$ dan disubtitusikan pada metode Simpson.
6. Hitung solusi numerik menggunakan metode Simpson :

$$\hat{\bar{Y}}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i-1)} + \frac{h}{3}(f_{(i-1)} + 4f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

7. Kesalahan (*error*) yang terjadi adalah sebagai berikut :

$$E_{Y_{(i)}} = \left|Y\left(t_{(i)}\right) - \hat{Y}_{0_{(i)}}\right|$$

Contoh Kasus 1 :

$$x^8y^{(8)} + 9x^7y^{(7)} + 7x^6y^{(6)} - 15x^5y^{(5)} + 13x^4y^{(4)} - 6x^3y^{(3)} \\ +6x^2y^{(2)} - 7x^1y^{(1)} + 14y = 0 \tag{9}$$

Sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 adalah sebagai berikut :

$$Y_0{}^{(1)} = \frac{dY_0}{dt} = Y^{(1)} = Y_1$$

$$Y_1{}^{(1)} = \frac{dY_1}{dt} = Y^{(2)} = Y_2$$

$$Y_2{}^{(1)} = \frac{dY_2}{dt} = Y^{(3)} = Y_3$$

$$Y_3{}^{(1)} = \frac{dY_3}{dt} = Y^{(4)} = Y_4$$

$$Y_4{}^{(1)} = \frac{dY_4}{dt} = Y^{(5)} = Y_5$$

$$Y_5{}^{(1)} = \frac{dY_5}{dt} = Y^{(6)} = Y_6$$

$$Y_6{}^{(1)} = \frac{dY_6}{dt} = Y^{(7)} = Y_7$$

$$Y_7{}^{(1)} = \frac{dY_7}{dt} = Y^{(8)}$$

$$= -\frac{k_7}{k_8}Y_7 - \frac{k_6}{k_8}Y_6 - \frac{k_5}{k_8}Y_5 - \frac{k_4}{k_8}Y_4 - \frac{k_3}{k_8}Y_3 - \frac{k_2}{k_8}Y_2 - \\ \frac{k_1}{k_8}Y_1 + \frac{k_0}{k_8}Y_0$$

$$= 19Y_7 - 140Y_6 + 505Y_5 - 912Y_4 + 700Y_3 - 27Y_2 \\ -137Y_1 + 14Y_0 \tag{10}$$

Sehingga diperoleh solusi umum analitik dari persamaan di atas sebagai berikut :

$$y(x) = c_1x^{(-0,1133)} + c_2x^{(-0,2823)} + c_3x^{(1,1146)} + c_4x^{(1,6452)} + \\ c_5x^{(2,6185)} + c_6x^{(3,1288)} + c_7x^{(4,7254)} + c_8x^{(6,1629)} \tag{11}$$

Dimisalkan sebarang $c_1, c_2, \dots, c_8$, kemudian solusi umum analitik ditransformasikan ke dalam bentuk $x = e^t$, diperoleh solusi khusus analitik dari persamaan di atas menjadi :

$$y(x) = 2e^{t(-0,1133)} + 2e^{t(-0,2823)} + e^{t(1,1146)} + e^{t(1,6452)} + 2e^{t(2,6185)} \\ +2e^{t(3,1288)} + 2e^{t(3,1288)} + e^{t(4,7254)} + e^{t(6,1629)} \tag{12}$$

Dengan nilai-nilai awalnya :

$$Y_0(0) = Y_{0_{(0)}} = 12 \qquad Y_1(0) = Y_{1_{(0)}} = 24.3515$$

$$Y_2(0) = Y_{2_{(0)}} = 97.7366 \qquad Y_3(0) = Y_{3_{(0)}} = 442.5461$$

$$Y_4(0) = Y_{4_{(0)}} = 2235.7554 \qquad Y_5(0) = Y_{5_{(0)}} = 12106.2351$$

$$Y_6(0) = Y_{6_{(0)}} = 68467.3887 \qquad Y_7(0) = Y_{7_{(0)}} = 397876.1827$$

Selanjutnya, digunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson.

Penyelesaian dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (13) yaitu :

$$f(t,\bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (19Y_7 - 140Y_6 + 505Y_5 - 912Y_4 + 700Y_3 - 27Y_2 \\ -137Y_1 + 14Y_0) \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal $t_{(0)} = 0$ dan nilai-nilai awal, yaitu :

$$Y_0(0) = Y_{0_{(0)}} = 12 \qquad Y_1(0) = Y_{1_{(0)}} = 24.3515$$

$$Y_2(0) = Y_{2_{(0)}} = 97.7366 \qquad Y_3(0) = Y_{3_{(0)}} = 442.5461$$

$$Y_4(0) = Y_{4_{(0)}} = 2235.7554 \qquad Y_5(0) = Y_{5_{(0)}} = 12106.2351$$

$$Y_6(0) = Y_{6_{(0)}} = 68467.3887 \qquad Y_7(0) = Y_{7_{(0)}} = 397876.1827$$

Serta $h = 0.05$ dan $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$. Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval $[0,1]$ untuk memperoleh solusi awal $\hat{\bar{Y}}_{(0)}, \hat{\bar{Y}}_{(1)}, \hat{\bar{Y}}_{(2)}$, dan $\hat{\bar{Y}}_{(3)}$ menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai $f_{(i)}, f_{(i-1)}, f_{(i-2)}$, dan $f_{(i-3)}$ kemudian hasil tersebut disubtitusikan ke metode Adams Bashforth :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i)} + \frac{h}{24}(-9f_{(i-3)} + 37f_{(i-2)} - 59f_{(i-1)} + 55f_{(i)})$$

$$\bar{P}_{(4)} = \hat{\bar{Y}}_{(3)} + \frac{h}{24}(-9f_{(0)} + 37f_{(1)} - 59f_{(2)} + 55f_{(3)})$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung $f_{(i+1)} = f\left(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)}\right)$ kemudian disubtitusikan ke persamaan Adams Moulton untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\hat{\bar{Y}}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i)} + \frac{h}{24}(f_{(i-2)} - 5f_{(i-1)} + 19f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

$$\hat{\bar{Y}}_{(4)} = \hat{\bar{Y}}_{(3)} + \frac{h}{24}(f_{(1)} - 5f_{(2)} + 19f_{(3)} + 9f_{(4)})$$

Kemudian hitung galat mutlak :

$$E_{Y_{(i)}} = \left| Y\left(t_{(i)}\right) - \hat{Y}_{0_{(i)}} \right|$$

didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 1 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

Tabel 4.1. *Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 1 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton*

i	$\mathbf{t_{(i)}}$	**Solusi Numerik ABM** ($\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{0}_{(i)}}$)	**Solusi Analitik** $\left(\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}_{(i)}\right)\right)$	**Galat (Error)** ($\mathbf{E}_{\mathbf{Y}_{(i)}}$)
0	0	12.0000000000000	12.0000000000000	0.0000000000000
1	0.05	13.3495476883854	13.3495808684785	0.0000331800931
2	0.10	15.0079308991162	15.0080192175174	0.0000883184012
3	0.15	17.0570744923525	17.0572509854047	0.0001764930522
4	0.20	19.6034266711746	19.6036972309463	0.0002705597717
5	0.25	22.7857135452836	22.7861221169730	0.0004085716893

6	0.30	26.7855073680835	26.7861214272842	0.0006140592008
7	0.35	31.8412293426238	31.8421446816390	0.0009153390152
8	0.40	38.2669165390816	38.2682688100184	0.0013522709367
9	0.45	46.4773894767133	46.4793671623633	0.0019776856500
10	0.50	57.0220351495490	57.0248937002438	0.0028585506948
11	0.55	70.6302071411936	70.6342818966311	0.0040747554375
12	0.60	88.2723009897650	88.2780135424466	0.0057125526816
13	0.65	111.2419944936692	111.2498425446593	0.0078480509902
14	0.70	141.2670830583940	141.2775962084315	0.0105131500374
15	0.75	180.6589706343647	180.6726023887393	0.0136317543746
16	0.80	232.5144437667462	232.5313509731758	0.0169072064296
17	0.85	300.9881945375205	301.0078260613651	0.0196315238446
18	0.90	391.6611224609805	391.6814940757838	0.0203716148033
19	0.95	512.0383535036823	512.0548183893688	0.0164648856866
20	1.00	672.2230058080054	672.2262290757910	0.0032232677856

Penyelesaian dengan menggunakan metode Milne-Simpson, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (13), yaitu :

$$f(t,\bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (19Y_7 - 140Y_6 + 505Y_5 - 912Y_4 + 700Y_3 - 27Y_2 \\ -137Y_1 + 14Y_0) \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal $t_0 = 0$ dan nilai-nilai awal yaitu :

$$Y_0(0) = Y_{0_{(0)}} = 12 \qquad Y_1(0) = Y_{1_{(0)}} = 24.3515$$

$$Y_2(0) = Y_{2_{(0)}} = 97.7366 \qquad Y_3(0) = Y_{3_{(0)}} = 442.5461$$

$$Y_4(0) = Y_{4_{(0)}} = 2235.7554 \qquad Y_5(0) = Y_{5_{(0)}} = 12106.2351$$

$$Y_6(0) = Y_{6_{(0)}} = 68467.3887 \qquad Y_7(0) = Y_{7_{(0)}} = 397876.1827$$

Serta $h = 0.05$ dan $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$. Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval $[0,1]$ untuk memperoleh solusi awal $\hat{\bar{Y}}_{(0)}, \hat{\bar{Y}}_{(1)}, \hat{\bar{Y}}_{(2)}$, dan $\hat{\bar{Y}}_{(3)}$ menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai $f_{(i)}, f_{(i-1)}$, dan $f_{(i-2)}$ kemudian hasil tersebut disubtitusikan ke metode Milne :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i-3)} + \frac{4h}{3}(2f_{(i-2)} - f_{(i-1)} + 2f_{(i)})$$

$$\bar{P}_{(4)} = \hat{\bar{Y}}_{(0)} + \frac{4h}{3}(2f_{(1)} - f_{(2)} + 2f_{(3)})$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung $f_{(i+1)} = f\left(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)}\right)$ kemudian disubtitusikan ke persamaan korektor Simpson untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\hat{\bar{Y}}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i-1)} + \frac{h}{3}(f_{(i-1)} + 4f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

$$\hat{\bar{Y}}_{(4)} = \hat{\bar{Y}}_{(2)} + \frac{h}{3}(f_{(2)} + 4f_{(3)} + 9f_{(4)})$$

Kemudian dihitung galat mutlak :

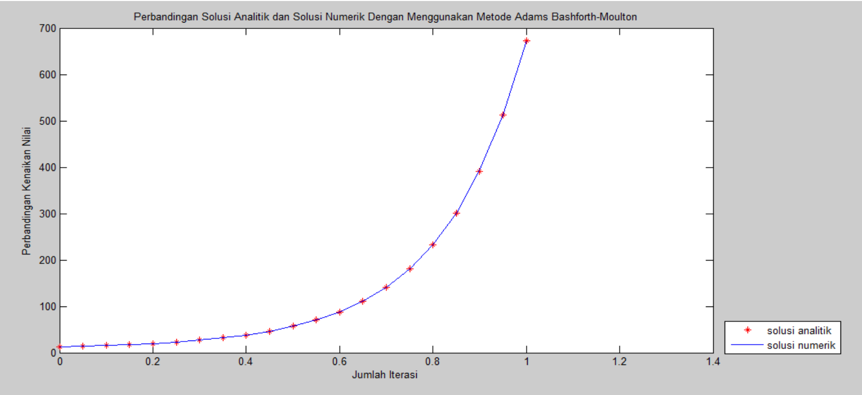
$$E_{Y_{(i)}} = \left| Y\left(t_{(i)}\right) - \hat{Y}_{0_{(i)}} \right|$$

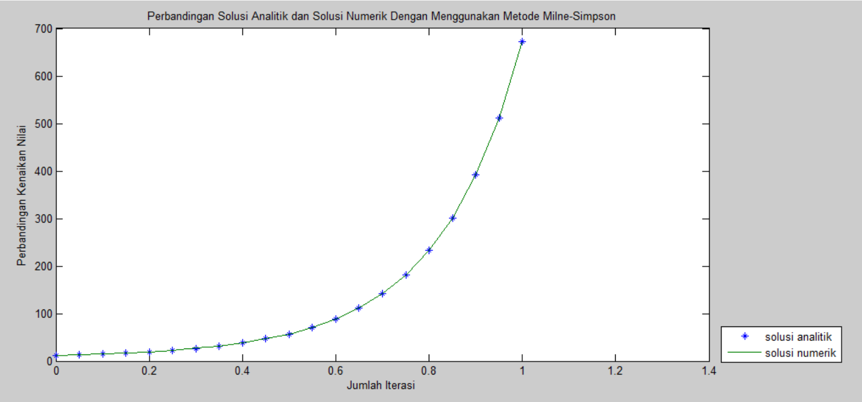
didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 1 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

Tabel 4.2. *Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 1 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Milne-Simpson*

i	$\mathbf{t_{(i)}}$	**Solusi Numerik MS** ($\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{0}_{(i)}}$)	**Solusi Analitik** $\left(\mathbf{Y}\left(\mathbf{t}_{(i)}\right)\right)$	**Galat (Error)** ($\mathbf{E}_{\mathbf{Y}_{(i)}}$)
0	0	12.0000000000000	12.0000000000000	0.0000000000000
1	0.05	13.3495476883854	13.3495808684785	0.0000331800931
2	0.10	15.0079308991162	15.0080192175174	0.0000883184012
3	0.15	17.0570744923525	17.0572509854047	0.0001764930522
4	0.20	19.6034178756786	19.6036972309463	0.0002793552677
5	0.25	22.7856570817454	22.7861221169730	0.0004650352276
6	0.30	26.7854006885009	26.7861214272842	0.0007207387833
7	0.35	31.8410253060456	31.8421446816390	0.0011193755934
8	0.40	38.2665831203740	38.2682688100184	0.0016856896443
9	0.45	46.4768479714010	46.4793671623633	0.0025191909623
10	0.50	57.0212000320491	57.0248937002438	0.0036936681947
11	0.55	70.6289305887431	70.6342818966311	0.0053513078880
12	0.60	88.2703927104533	88.2780135424466	0.0076208319933
13	0.65	111.2391632147506	111.2498425446593	0.0106793299087
14	0.70	141.2629302470732	141.2775962084315	0.0146659613583
15	0.75	180.6529141807399	180.6726023887393	0.0196882079994
16	0.80	232.5056702627636	232.5313509731718	0.0256807104122
17	0.85	300.9755390704375	301.0078260613651	0.0322869909276
18	0.90	391.6429468694513	391.6814940757838	0.0385472063325
19	0.95	512.0123332984838	512.0548183893688	0.0424850908851
20	1.00	672.1858688254897	672.2262290757910	0.0403602503013

Berikut adalah gambar grafik perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik untuk contoh kasus 1 persamaan diferensial Euler orde-8 dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson :





Gambar 4.1. *Grafik Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 1 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson*

Contoh Kasus 2 :

$$x^8y^{(8)} + 10x^7y^{(7)} + 14x^6y^{(6)} - 13x^5y^{(5)} + 13x^4y^{(4)} - x^3y^{(3)} + x^2y^{(2)} + 4x^1y^{(1)} - 10y = 0 \quad (13)$$

Didapatkan sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 adalah sebagai berikut :

$$Y_0^{(1)} = \frac{dY_0}{dt} = Y^{(1)} = Y_1$$

$$Y_1^{(1)} = \frac{dY_1}{dt} = Y^{(2)} = Y_2$$

$$Y_2^{(1)} = \frac{dY_2}{dt} = Y^{(3)} = Y_3$$

$$Y_3^{(1)} = \frac{dY_3}{dt} = Y^{(4)} = Y_4$$

$$Y_4^{(1)} = \frac{dY_4}{dt} = Y^{(5)} = Y_5$$

$$Y_5^{(1)} = \frac{dY_5}{dt} = Y^{(6)} = Y_6$$

$$Y_6^{(1)} = \frac{dY_6}{dt} = Y^{(7)} = Y_7$$

$$Y_7{}^{(1)} = \frac{dY_7}{dt} = Y^{(8)}$$

$$= -\frac{k_7}{k_8}Y_7 - \frac{k_6}{k_8}Y_6 - \frac{k_5}{k_8}Y_5 - \frac{k_4}{k_8}Y_4 - \frac{k_3}{k_8}Y_3 - \frac{k_2}{k_8}Y_2 - \frac{k_1}{k_8}Y_1 + \frac{k_0}{k_8}Y_0$$

$$= 18Y_7 - 126Y_6 + 433Y_5 - 752Y_4 + 576Y_3 - 61Y_2 - 91Y_1 - 10Y_0 \quad (14)$$

Sehingga diperoleh solusi umum analitik dari persamaan di atas sebagai berikut :

$$y(x) = c_1x^{(-0.3367)} + c_2x^{(0.1090)} + c_3x^{(0.8529)} + c_4x^{(1.9803)} + c_5x^{(2.0000)} + c_6x^{(2.9803)} + c_7x^{(4.9661)} + c_8x^{(5.4479)} \quad (15)$$

Dimisalkan sebarang $c_1, c_2, \dots, c_8$, kemudian solusi umum analitik ditransformasikan ke dalam bentuk $x = e^t$, diperoleh solusi khusus analitik dari persamaan di atas menjadi :

$$Y(t) = 2e^{t(-0.3367)} + e^{t(0.1090)} + 2e^{t(0.8529)} + e^{t(1.9803)} + 2e^{t(2.0000)} + e^{t(2.9803)} + 2e^{t(4.9661)} + e^{t(5.4479)} \quad (16)$$

Dengan nilai-nilai awalnya :

$$Y_0(0) = Y_{0_{(0)}} = 12 \qquad Y_1(0) = Y_{1_{(0)}} = 25.4821$$

$$Y_2(0) = Y_{2_{(0)}} = 101.5011 \qquad Y_3(0) = Y_{3_{(0)}} = 458.0442$$

$$Y_4(0) = Y_{4_{(0)}} = 2224.6790 \qquad Y_5(0) = Y_{5_{(0)}} = 11170.3964$$

$$Y_6(0) = Y_{6_{(0)}} = 57034.0952 \qquad Y_7(0) = Y_{7_{(0)}} = 293878.8247$$

Selanjutnya, digunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson.

Penyelesaian dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (17) yaitu :

$$f(t, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (18Y_7 - 126Y_6 + 433Y_5 - 752Y_4 + 576Y_3 - 61Y_2 \\ -91Y_1 - 10Y_0) \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal $t_0 = 0$ dan nilai-nilai awal yaitu :

$$Y_0(0) = Y_{0_{(0)}} = 12 \qquad Y_1(0) = Y_{1_{(0)}} = 25.4821$$

$$Y_2(0) = Y_{2_{(0)}} = 101.5011 \qquad Y_3(0) = Y_{3_{(0)}} = 458.0442$$

$$Y_4(0) = Y_{4_{(0)}} = 2224.6790 \qquad Y_5(0) = Y_{5_{(0)}} = 11170.3964$$

$$Y_6(0) = Y_{6_{(0)}} = 57034.0952 \qquad Y_7(0) = Y_{7_{(0)}} = 293878.8247$$

Serta $h = 0.05$ dan $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$. Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval $[0,1]$ untuk memperoleh solusi awal $\hat{\hat{Y}}_{(0)}, \hat{\hat{Y}}_{(1)}, \hat{\hat{Y}}_{(2)}$, dan $\hat{\hat{Y}}_{(3)}$ menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai $f_{(i)}, f_{(i-1)}, f_{(i-2)}$, dan $f_{(i-3)}$ kemudian hasil tersebut disubtitusikan ke metode Adams bashforth :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{\hat{Y}}_{(i)} + \frac{h}{24}(-9f_{(i-3)} + 37f_{(i-2)} - 59f_{(i-1)} + 55f_{(i)})$$

$$\bar{P}_{(4)} = \hat{\hat{Y}}_{(3)} + \frac{h}{24}(-9f_{(0)} + 37f_{(1)} - 59f_{(2)} + 55f_{(3)})$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung $f_{(i+1)} = f\left(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)}\right)$ kemudian disubtitusikan ke persamaan Adams Moulton untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\hat{\hat{Y}}_{(i+1)} = \hat{\hat{Y}}_{(i)} + \frac{h}{24}(f_{(i-2)} - 5f_{(i-1)} + 19f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

$$\hat{\hat{Y}}_{(4)} = \hat{\hat{Y}}_{(3)} + \frac{h}{24}(f_{(1)} - 5f_{(2)} + 19f_{(3)} + 9f_{(4)})$$

Kemudian dihitung galat mutlak :

$$E_{Y_{(i)}} = \left|Y\left(t_{(i)}\right) - \hat{Y}_{0_{(i)}}\right|$$

didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 2 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

Tabel 4.3. *Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 2 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton*

i	$t_{(i)}$	Solusi Numerik ABM ($\hat{Y}_{0_{(i)}}$)	Solusi Analitik $\left(Y(t_{(i)})\right)$	Galat (Error) ($E_{Y_{(i)}}$)
0	0	12.0000000000000	12.0000000000000	0.0000000000000
1	0.05	13.4111033059896	13.4111337830808	0.0000304770912
2	0.10	15.1422635610499	15.1423424266375	0.0000788655877
3	0.15	17.2767083056203	17.2768613001565	0.0001529945362
4	0.20	19.9209849147927	19.9211942018391	0.0002092870464
5	0.25	23.2115424203424	23.2118253294148	0.0002829090724
6	0.30	27.3235128652981	27.3238973047029	0.0003844394048
7	0.35	32.4819128264705	32.4824360407517	0.0005232142812
8	0.40	38.9761610052408	38.9768757474937	0.0007147422529
9	0.45	47.1788782536437	47.1798613256007	0.0009830719570
10	0.50	57.5702295395952	57.5715961933444	0.0013666537492
11	0.55	70.7694526401717	70.7713812430724	0.0019286029007
12	0.60	87.5757073128212	87.5784811589605	0.0027738461393
13	0.65	109.0210141703044	109.0250915942196	0.0040774239152
14	0.70	136.4388783251231	136.4450087307618	0.0061304056387
15	0.75	171.5532656196127	171.5626788021488	0.0094131825361
16	0.80	216.5939930023279	216.6087037708262	0.0147107684983
17	0.85	274.4464056678120	274.4696974832635	0.0232918154516
18	0.90	348.8455672041557	348.8827504837690	0.0371832796133
19	0.95	444.6282481406327	444.6878355186185	0.0595873779858
20	1.00	568.0599749599790	568.1554834546089	0.0955084946298

Penyelesaian dengan menggunakan metode Milne-Simpson, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (17), yaitu :

$$f(t,\bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (18Y_7 - 126Y_6 + 433Y_5 - 752Y_4 + 576Y_3 - 61Y_2 \\ -91Y_1 - 10Y_0) \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal $t_0 = 0$ dan nilai-nilai awal yaitu :

$$Y_0(0) = Y_{0_{(0)}} = 12 \qquad Y_1(0) = Y_{1_{(0)}} = 25.4821$$

$$Y_2(0) = Y_{2_{(0)}} = 101.5011 \qquad Y_3(0) = Y_{3_{(0)}} = 458.0442$$

$$Y_4(0) = Y_{4_{(0)}} = 2224.6790 \qquad Y_5(0) = Y_{5_{(0)}} = 11170.3964$$

$$Y_6(0) = Y_{6_{(0)}} = 57034.0952 \qquad Y_7(0) = Y_{7_{(0)}} = 293878.8247$$

Serta $h = 0.05$ dan $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$. Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval $[0,1]$ untuk memperoleh solusi awal $\hat{\bar{Y}}_{(0)}, \hat{\bar{Y}}_{(1)}, \hat{\bar{Y}}_{(2)}$, dan $\hat{\bar{Y}}_{(3)}$ menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai $f_{(i)}, f_{(i-1)}$, dan $f_{(i-2)}$ kemudian hasil tersebut disubtitusikan ke metode Milne :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i-3)} + \frac{4h}{3}(2f_{(i-2)} - f_{(i-1)} + 2f_{(i)})$$

$$\bar{P}_{(4)} = \hat{\bar{Y}}_{(0)} + \frac{4h}{3}(2f_{(1)} - f_{(2)} + 2f_{(3)})$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung $f_{(i+1)} = f\left(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)}\right)$ kemudian disubtitusikan ke persamaan Simpson untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\hat{\bar{Y}}_{(i+1)} = \hat{\bar{Y}}_{(i-1)} + \frac{h}{3}(f_{(i-1)} + 4f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

$$\hat{\bar{Y}}_{(4)} = \hat{\bar{Y}}_{(2)} + \frac{h}{3}(f_{(2)} + 4f_{(3)} + 9f_{(4)})$$

Kemudian dihitung galat mutlak :

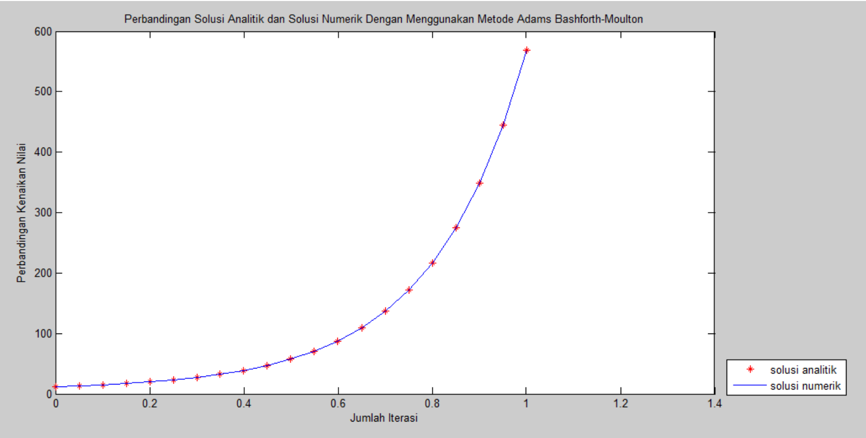
$$E_{Y_{(i)}} = \left| Y\left(t_{(i)}\right) - \hat{Y}_{0_{(i)}} \right|$$

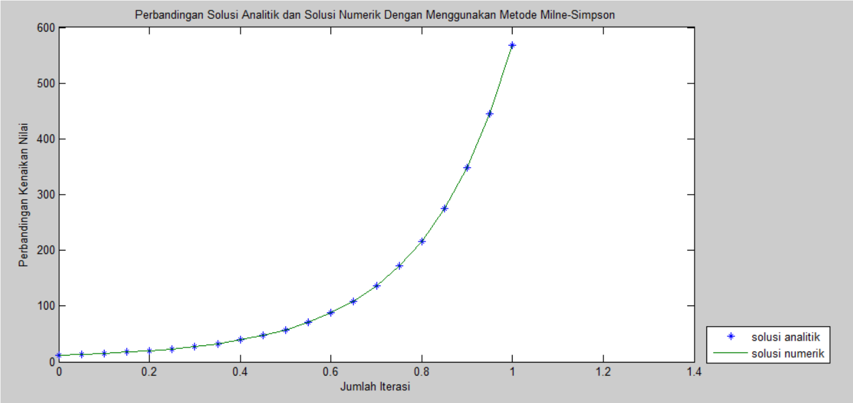
didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 2 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

Tabel 4.4. *Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 2 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Milne-Simpson*

i	$t_{(i)}$	Solusi Numerik MS $(\hat{Y}_{0_{(i)}})$	Solusi Analitik $\left(Y(t_{(i)})\right)$	Galat (Error) $(E_{Y_{(i)}})$
0	0	12.0000000000000	12.0000000000000	0.0000000000000
1	0.05	13.4111033059896	13.4111337830808	0.0000304770912
2	0.10	15.1422635610499	15.1423424266375	0.0000788655877
3	0.15	17.2767083056203	17.2768613001565	0.0001529945362
4	0.20	19.9209745040050	19.9211942018391	0.0002196978342
5	0.25	23.2114728188767	23.2118253294148	0.0003525105381
6	0.30	27.3233836126020	27.3238973047029	0.0005136921008
7	0.35	32.4816679091208	32.4824360407517	0.0007681316309
8	0.40	38.9757680798519	38.9768757474937	0.0011076676418
9	0.45	47.1782508172365	47.1798613256007	0.0016105083641
10	0.50	57.5692824286226	57.5715961933444	0.0023137647218
11	0.55	70.7680361636050	70.7713812430724	0.0033450794673
12	0.60	87.5736414406642	87.5784811589605	0.0048397182963
13	0.65	109.0180267070998	109.0250915942196	0.0070648871198
14	0.70	136.4346159593168	136.4450087307618	0.0103927714451
15	0.75	171.5472258240373	171.5626788021488	0.0154529781114
16	0.80	216.5855049800691	216.6087037708262	0.0231987907572
17	0.85	274.4345407001467	274.4696974832635	0.0351567831168
18	0.90	348.8290742070952	348.8827504837690	0.0536762766737
19	0.95	444.6054175209614	444.6878355186185	0.0824179976572
20	1.00	568.0284993485176	568.1554834546089	0.1269841060913

Berikut adalah gambar grafik perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik untuk contoh kasus 2 persamaan diferensial Euler orde-8 dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson :





Gambar 4.2. *Grafik Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 2 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson*

PEMBAHASAN

Metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat digunakan untuk penyelesaian solusi analitik dan solusi numerik persamaan diferensial Euler orde-8 dengan akar-akar karakteristiknya riil berbeda. Terlihat pada Table 4.1, Tabel 4.2, Tabel 4.3 serta Tabel 4.4 bahwa nilai solusi numerik dari hasil metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson semakin mendekati nilai solusi analitiknya, serta dari Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 bahwa gambar grafik perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik kedua metode terlihat berhimpitan.

Diketahui dari Table 4.5 bahwa metode Adams Bashforth-Moulton lebih mendekati nilai solusi analitik dibandingkan metode Milne-Simpson serta dilihat dari jumlah perbandingan galat yang didapatkan bahwa untuk kedua kasus galat metode Adams Bashforth-Moluton lebih kecil dibandingkan metode Milne-Simpson, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Adams Bashforth-Moulton lebih akurat dibandingkan metode Milne-Simpson untuk kedua contoh kasus tersebut. Berikut adalah perbandingan galat yang didapatkan dari kedua contoh kasus :

Tabel 4.5. *Jumlah Perbandingan Galat (Error) Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dengan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson Untuk Contoh Kasus 1 dan Contoh Kasus 2*

ABM CK 1	***MS CK 1***	***ABM CK 2***	***MS CK 2***
0.127073791	*0.248146933*	*0.26*	*0.369678*

Keterangan :

ABM CK1 = Jumlah galat metode Adams Bashforth-Moulton dari contoh kasus 1

MS CK 1 = Jumlah galat metode Milne-Simpson dari contoh kasus 1

ABM CK 2 = Jumlah galat metode Adams Bashforth-Moulton dari contoh kasus 1

MS CK 2 = Jumlah galat metode Milne-Simpson dari contoh kasus 2

Untuk efisiensi dapat dibandingkan dengan menghitung lama waktu program berjalan hingga diperoleh solusi numerik. Berikut adalah tabel perbandingan perhitungan dari kedua metode tersebut :

Tabel 4.6. *Perbandingan Lama Waktu Proses Iterasi dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson*

ABM CK1	***MS CK1***	***ABM CK 2***	***MS CK 2***
0.335147 s	*0.020519 s*	*0.307962 s*	*0.020490 s*

Terlihat bahwa untuk kedua kasus tersebut metode Milne-Simpson dalam melakukan iterasi lebih cepat dibandingkan dengan metode Adams Bashforth-Moulton. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Milne-Simpson lebih efisien daripada metode Adams Bashforth-Moulton.

5. SIMPULAN

Adapun kesimpulan yang didapatkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Persamaan diferensial Euler orde-8 dapat ditransformasikan kedalam bentuk sistem persamaan diferensial orde-1 dengan menggunakan transformasi $x = e^t, x > 0$.
2. Hasil perbandingan antara metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat disimpulkan bahwa :
    a. Metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.
    b. Solusi numerik dari kedua metode tersebut mendekati solusi analitik dari kedua contoh kasus yang telah diselesaikan.
    c. Metode Milne-Simpson lebih efisien dibandingkan dengan metode Adams Bashforth-Moulton.
    d. Metode Adams Bashforth-Mouton lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde- 8 karena lebih akurat terlihat dari jumlah perbandingan galatnya.

KEPUSTAAKAN

[1] Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferesial Biasa dan Aplikasinya : Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

[2] Prayudi. 2006. *Matematika Teknik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

[3] Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik : Revisi Kedua*. Penerbit Informatika, Bandung.

[4] Mathews, John H., and Kurtis D. Fink. 2004. *Numerical Methods Using MATLAB*. Pearson Education, Inc, United States of America.