



# PROSIDING SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK 2017

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA,  
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU  
UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA





**SEMINAR NASIONAL  
METODE KUANTITATIF  
2017**

**PROSIDING**  
**Seminar Nasional**  
**Metode Kuantitatif 2017**

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu  
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :

Prof. Mustofa Usman, Ph.D  
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :

Shela Malinda Tampubolon

Alamat :

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Lampung, Bandar Lampung  
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung  
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

# **KATA SAMBUTAN KETUA PELAKSANA SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017**

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema “penggunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa”.

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmunan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

# DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN .....	iii
KEPANITIAAN .....	iv
DAFTAR ISI .....	vi
Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen ( <i>Fauzia Anisatul F, Suharsono S, dan Dorrah Aziz</i> ) .....	1
Simulasi Interaksi Angin Laut dan Bukit Barisan dalam Pembentukan Pola Cuaca di Wilayah Sumatera Barat Menggunakan Model Wrf-Arw ( <i>Achmad Rafli Pahlevi</i> ) .....	7
Penerapan Mekanisme Pertahanan Diri (Self-Defense) sebagai Upaya Strategi Pengurangan Rasa Takut Terhadap Kejahatan (Studi Pada Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung yang Menduduki Peringkat <i>Crime Rate</i> Tertinggi) ( <i>Teuku Fahmi</i> ) .....	18
Tingkat Ketahanan Individu Mahasiswa Unila pada Aspek Soft Skill ( <i>Pitojo Budiono, Feni Rosalia, dan Lilih Muflihah</i> ) .....	33
Metode Analisis Homotopi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Linear Non Homogen Orde Satu ( <i>Atika Faradilla dan Suharsono S</i> ) .....	44
Penerapan Neural Machine Translation Untuk Eksperimen Penerjemahan Secara Otomatis pada Bahasa Lampung – Indonesia ( <i>Zaenal Abidin</i> ) .....	53
Ukuran Risiko Cre-Var ( <i>Insani Putri dan Khreshna I.A.Syuhada</i> ) .....	69
Penentuan Risiko Investasi dengan Momen Orde Tinggi $V @ R - C_v @ R$ ( <i>Marianik dan Khreshna I.A.Syuhada</i> ) .....	77
Simulasi Komputasi Aliran Panas pada Model Pengering Kabinet dengan Metode Beda Hingga ( <i>Vivi Nur Utami, Tiryono Ruby, Subian Saidi, dan Amanto</i> ) .....	83
Segmentasi Wilayah Berdasarkan Derajat Kesehatan dengan Menggunakan <i>Finite Mixture Partial Least Square</i> (Fimix-Pls) ( <i>Agustina Riyanti</i> ) .....	90
Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan $L 3/2$ ( <i>Risky Aulia Ulfa, Muslim Ansori, Suharsono S, dan Agus Sutrisno</i> ) .....	99
Analisis Rangkaian Resistor, Induktor dan Kapasitor (RLC) dengan Metode Runge-Kutta Dan Adams Bashforth Moulton ( <i>Yudandi K.A., Agus Sutrisno, Amanto, dan Dorrah Aziz</i> ) .....	110

Representasi Operator Linier dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan L 13/12 ( <i>Amanda Yona Ningtyas, Muslim Ansori, Subian Saidi, dan Amanto</i> ) .....	116
Desain Kontrol Model Suhu Ruangan ( <i>Zulfikar Fakhri Bismar dan Aang Nuryaman</i> ) .....	126
Penerapan Logika Fuzzy pada Suara Tv Sebagai Alternative Menghemat Daya Listrik ( <i>Agus Wantoro</i> ) .....	135
Clustering Wilayah Lampung Berdasarkan Tingkat Kesejahteraan ( <i>Henida Widyatama</i> ).....	149
Pemanfaatan Sistem Informasi Geografis Untuk Valuasi Jasa Lingkungan Mangrove dalam Penyakit Malaria di Provinsi Lampung ( <i>Imawan A.Q., Samsul Bakri, dan Dyah W.S.R.W.</i> ) .....	156
Analisis Pengendalian Persediaan Dalam Mencapai Tingkat Produksi <i>Crude Palm Oil</i> (CPO) yang Optimal di PT. Kresna Duta Agroindo Langling Merangin-Jambi ( <i>Marcelly Widya W., Hery Wibowo, dan Estika Devi Erinda</i> ) .....	171
Analisis <i>Cluster Data Longitudinal</i> pada Pengelompokan Daerah Berdasarkan Indikator IPM di Jawa Barat ( <i>A.S Awalluddin dan I. Taufik</i> ).....	187
Indek Pembangunan Manusia dan Faktor Yang Mempengaruhinya di Daerah Perkotaan Provinsi Lampung ( <i>Ahmad Rifa'i dan Hartono</i> ).....	195
<i>Parameter Estimation Of Bernoulli Distribution Using Maximum Likelihood and Bayesian Methods</i> ( <i>Nurmaita Hamsyiah, Khoirin Nisa, dan Warsono</i> ).....	214
Proses Pengamanan Data Menggunakan Kombinasi Metode Kriptografi <i>Data Encryption Standard</i> dan <i>Steganografi End Of File</i> ( <i>Dedi Darwis, Wamiliana, dan Akmal Junaidi</i> ). .....	228
<i>Bayesian Inference of Poisson Distribution Using Conjugate A and Non-Informative Prior</i> ( <i>Misgiyati, Khoirin Nisa, dan Warsono</i> ). .....	241
Analisis Klasifikasi Menggunakan Metode Regresi Logistik Ordinal dan Klasifikasi Naïve Bayes pada Data Alumni Unila Tahun 2016 ( <i>Shintia F., Rudi Ruswandi, dan Subian Saidi</i> )....	251
Analisis Model <i>Markov Switching Autoregressive</i> (MSAR) pada <i>Data Time Series</i> ( <i>Aulianda Prasyanti, Mustofa Usman, dan Dorrah Aziz</i> ).....	263
Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8 ( <i>Faranika Latip., Dorrah Aziz, dan Suharsono S</i> ).....	278
Pengembangan Ekowisata dengan Memanfaatkan Media Sosial untuk Mengukur Selera Calon Konsumen ( <i>Gustafika Maulana, Gunardi Djoko Winarso, dan Samsul Bakri</i> ).....	293
Diagonalisasi Secara Ujiter Matriks Hermite dan Aplikasinya pada Pengamanan Pesan Rahasia ( <i>Abdurrois, Dorrah Aziz, dan Aang Nuryaman</i> ) .....	308

Pembandingan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton dalam Penyelesaian Model Pertumbuhan Uang yang Diinvestasikan ( <i>Intan Puspitasari, Agus Sutrisno, Tiryono Ruby, dan Muslim Ansori</i> ) .	328
Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde-N Non Homogen dengan Fungsi Green ( <i>Fathurrohman Al Ayubi, Dorrah Aziz, dan Muslim Ansori</i> ).....	341
Penyelesaian Kata Ambigu pada Proses Pos Tagging Menggunakan Algoritma <i>Hidden Markov Model</i> ( HMM ) ( <i>Agus Mulyanto, Yeni Agus Nurhuda, dan Nova Wiyanto</i> ).....	347
Sistem Temu Kembali Citra Daun Tumbuhan Menggunakan Metode Eigenface ( <i>Supiyanto dan Samuel A. Mandowen</i> ) .	359
Efektivitas Model <i>Problem Solving</i> dalam Meningkatkan Kemampuan Berfikir Lancar Mahasiswa pada Materi Ph Larutan ( <i>Ratu Betta Rudibyani</i> ).....	368
<i>The Optimal Bandwidth for Kernel Density Estimation of Skewed Distribution: A Case Study on Survival Data of Cancer Patients</i> ( <i>Netti Herawati, Khoirin Nisa, dan Eri Setiawan</i> ).....	380
Karakteristik Larutan Kimia Di Dalam Air Dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear ( <i>Titik Suparwati</i> ).....	389
Bentuk Solusi Gelombang Berjalan Persamaan $\Delta\Delta$ mKdV Yang Diperumum ( <i>Notiragayu, Rudi Ruswandi, dan La Zakaria</i> ).....	398
Pendugaan Blup Dan Eblup(Suatu Pendekatan Simulasi) ( <i>Nusyirwan</i> ).....	403



## **PERBANDINGAN METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON DAN METODE MILNE-SIMPSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER ORDE-8**

**Faranika Latip<sup>1)</sup>, Dorrah Azis<sup>2)</sup>, dan Suharsono<sup>3)</sup>**

Universitas Lampung, Jalan Prof. Dr. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145  
latipfaranika@gmail.com

<sup>1)</sup>Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

<sup>2,3)</sup>Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

### **ABSTRAK**

*Persamaan diferensial Euler adalah bentuk khusus dari persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah. Dalam penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda, digunakan metode langkah banyak (multi steps) atau disebut juga dengan metode prediktor-korektor yaitu Adams-Bashforth Moulton dan metode Milne-Simpson sebagai metode dalam menghampiri solusi analitiknya. Bentuk umum dari persamaan diferensial Euler orde-8 :*

$$\sum_{i=0}^8 a_i x^i y^{(i)} = 0$$

*Ditransformasikan menjadi sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan menggunakan transformasi  $x = e^t$ , dimana  $x > 0$ . Didapatkan sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan nilai-nilai awal yang kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan prediktor lalu dikoreksi pada persamaan korektor dengan pemilihan ukuran  $h$  yang tepat. Diperoleh kesimpulan bahwa kedua metode di atas dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8. Metode Adams Bashforth-Moulton lebih akurat dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8 diketahui dari perbandingan jumlah galatnya, sebaliknya metode Milne-Simpson lebih efisien dalam melakukan iterasi karena lebih cepat dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.*

**Kata kunci :** *Persamaan Diferensial Euler, Adams Bashforth-Moulton, Milne-Simpson*

## **1. PENDAHULUAN**

Persamaan Diferensial (*differential equation*) adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya terhadap variabel-variabel bebas [1]. Salah satu bentuk persamaan diferensial biasa yaitu persamaan diferensial Euler. Persamaan diferensial Euler adalah salah satu bentuk khusus dari persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah [2]. Setiap bentuk persamaan differensial mempunyai metode penyelesaian yang berbeda. Metode lain yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde tinggi yaitu metode numerik.

Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) [3]. Metode numerik dibagi menjadi dua yaitu metode langkah tunggal (*one step*) dan metode langkah banyak (*multi steps*). Metode yang termasuk metode langkah tunggal adalah metode Euler, metode Heun, dan metode Runge-Kutta. Sedangkan metode yang termasuk metode langkah banyak adalah metode Adams Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson, dan metode Hamming. Semakin tinggi orde yang muncul pada persamaan diferensial maka akan semakin sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian dengan menggunakan metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memperoleh solusi pendekatannya .

Pada penelitian ini hanya difokuskan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda lalu membandingkan solusi dari metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson sebagai metode lain dalam penyelesaiannya.

## 2. LANDASAN TEORI

### PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER CAUCHY ORDE TINGGI HOMOGEN

Persamaan diferensial linear orde tinggi homogen dengan koefisien peubah dikatakan sebagai persamaan diferensial Euler Cauchy, jika persamaan diferensial tersebut berbentuk [2]:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

dimana  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  merupakan konstanta-konstanta dan  $a_n \neq 0$ . Dengan menggunakan pendekatan yang dikembangkan pada persamaan diferensial Euler Cauchy homogen orde dua, untuk menentukan penyelesaian umumnya, ambil basis-basis penyelesaiannya berbentuk :

$$y = x^m$$

Dengan menurunkan persamaan  $y = x^m$ , terhadap  $x$  sebanyak  $n$  kali dan,

dengan mensubstitusikan basis  $y = x^m$  dan turunan-turunannya  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  ke persamaan (1), didapatkan

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + c_3 x^{m_3} + \dots + c_n x^{m_n} \quad (2)$$

### METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON

Metode prediktor-korektor Adams Bashforth-Moulton (ABM) adalah metode langkah banyak yang diturunkan dari teorema dasar kalkulus [4] :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

Persamaan prediktor Adams Bashforth :

$$P_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (4)$$

Persamaan korektor Adams Moulton :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \quad (5)$$

### METODE MILNE-SIMPSON

Metode prediktor-korektor lain yang terkenal adalah metode Milne-Simpson [4]. Prediktor berdasarkan integrasi dari  $f(t, y(t))$  pada interval  $[t_{k-3}, t_{k+1}]$  :

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-3}) + \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \quad (6)$$

Prediktor Milne:

$$P_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3} (2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (7)$$

Persamaan Simpson :

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) \quad (8)$$

## ANALISIS ERROR

Dalam melakukan analisis numerik perlu untuk memperhatikan bahwa solusi yang dihitung bukanlah solusi analitik. Ketelitian dari solusi numerik dapat mengurangi nilai *error*.

**Definisi** Misalkan  $\hat{p}$  adalah aproksimasi (pendekatan) ke  $p$ . *Error* mutlak adalah  $E_p = |p - \hat{p}|$  dan *error* relatif adalah  $R_p = |p - \hat{p}|/|p|$ , dinyatakan bahwa  $p \neq 0$  [4].

## 3. METODOLOGI PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut :

1. Studi pustaka yaitu mencari referensi, menelaah, dan mengkaji yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mentransformasikan bentuk umum persamaan diferensial Euler orde-8 ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan koefisien konstanta untuk menyelesaikan secara numerik.
3. Menyelesaikan contoh kasus dengan cara, yaitu :
  - a. Mentransformasikan contoh kasus dari persamaan diferensial Euler orde-8 ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde-1 dengan koefisien konstanta untuk menyelesaikannya secara numerik.
  - b. Menentukan solusi umum analitik dari contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 dan mentransformasikannya ke dalam bentuk  $x = e^t$  sehingga didapatkan solusi khusus analitiknya.
  - c. Mencari solusi awal dari solusi khusus analitik contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 dengan metode Runge-Kutta orde-4.
  - d. Menentukan algoritma dan mencari solusi numerik dari contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode banyak langkah (*multi steps*) yaitu metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dengan *software* MATLAB R2013b.
  - e. Membandingkan solusi analitik dan solusi numerik dari persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan kedua metode dengan *software* MATLAB R2013b sehingga dapat diketahui metode manakah yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### HASIL

#### ALGORITMA METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON

Algoritma penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton adalah sebagai berikut :

1. Diketahui masalah nilai awal dari persamaan diferensial Euler orde-8 yang telah ditransformasikan ke dalam sistem persamaan diferensial orde-1,

$$\bar{Y}^{(1)} = \frac{d\bar{Y}}{dt} = f(t, \bar{Y}) \quad , \text{ dengan nilai awal} \quad \bar{Y}(0) = \hat{Y}_{(0)}$$

dimana  $\bar{Y} = [Y_0, Y_1, \dots, Y_7]^T$ , dengan ukuran langkah  $h$  dan  $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$ .

2. Hitung empat solusi awal  $\hat{Y}_{(0)}, \hat{Y}_{(1)}, \hat{Y}_{(2)}$ , dan  $\hat{Y}_{(3)}$  menggunakan metode Runge-Kutta orde-4.
3. Tentukan nilai-nilai  $f_{(i)}, f_{(i-1)}, f_{(i-2)}$ , dan  $f_{(i-3)}$  dengan  $i = 3, 4, \dots, 20$
4. Tentukan solusi numerik menggunakan metode Adams Bashforth :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i)} + \frac{h}{24}(-9f_{(i-3)} + 37f_{(i-2)} - 59f_{(i-1)} + 55f_{(i)})$$

5. Hitung  $f_{(i+1)} = f(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)})$  dan disubstitusikan pada metode Adams Moulton.
6. Hitung solusi numerik menggunakan metode Adams Moulton :

$$\hat{Y}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i)} + \frac{h}{24}(f_{(i-2)} - 5f_{(i-1)} + 19f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

dengan perhitungan galat mutlak sebagai berikut :

$$E_{Y_{(i)}} = |Y(t_{(i)}) - \hat{Y}_{0(i)}|$$

### ALGORITMA METODE MILNE-SIMPSON

Algoritma penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode Milne-Simpson adalah sebagai berikut :

1. Diketahui masalah nilai awal dari persamaan diferensial Euler orde-8 yang telah ditransformasikan ke dalam sistem persamaan diferensial orde-1 ,

$$\bar{Y}^{(1)} = \frac{d\bar{Y}}{dt} = f(t, \bar{Y}) \quad , \text{ dengan nilai awal} \quad \bar{Y}(0) = \hat{Y}_{(0)}$$

dimana  $\bar{Y} = [Y_0, Y_1, \dots, Y_7]^T$ , dengan ukuran langkah  $h$  dan  $t_{(i+1)} = t_i + h$ .

2. Hitung empat solusi awal  $\hat{Y}_{(0)}, \hat{Y}_{(1)}, \hat{Y}_{(2)}$ , dan  $\hat{Y}_{(3)}$  menggunakan metode Runge-Kutta orde-4.
3. Tentukan nilai-nilai  $f_{(i)}, f_{(i-1)}$ , dan  $f_{(i-2)}$  dengan  $i = 3, 4, \dots, 20$
4. Tentukan solusi numerik menggunakan metode Milne :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i-3)} + \frac{4h}{3}(2f_{(i-2)} - f_{(i-1)} + 2f_{(i)})$$

5. Hitung  $f_{(i+1)} = f(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)})$  dan disubstitusikan pada metode Simpson.
6. Hitung solusi numerik menggunakan metode Simpson :

$$\hat{Y}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i-1)} + \frac{h}{3}(f_{(i-1)} + 4f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

7. Kesalahan (*error*) yang terjadi adalah sebagai berikut :

$$E_{Y_{(i)}} = |Y(t_{(i)}) - \hat{Y}_{0(i)}|$$

**Contoh Kasus 1 :**

$$x^8y^{(8)} + 9x^7y^{(7)} + 7x^6y^{(6)} - 15x^5y^{(5)} + 13x^4y^{(4)} - 6x^3y^{(3)} + 6x^2y^{(2)} - 7x^1y^{(1)} + 14y = 0 \quad (9)$$

Sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Y_0^{(1)} &= \frac{dY_0}{dt} = Y^{(1)} = Y_1 \\ Y_1^{(1)} &= \frac{dY_1}{dt} = Y^{(2)} = Y_2 \\ Y_2^{(1)} &= \frac{dY_2}{dt} = Y^{(3)} = Y_3 \\ Y_3^{(1)} &= \frac{dY_3}{dt} = Y^{(4)} = Y_4 \\ Y_4^{(1)} &= \frac{dY_4}{dt} = Y^{(5)} = Y_5 \\ Y_5^{(1)} &= \frac{dY_5}{dt} = Y^{(6)} = Y_6 \\ Y_6^{(1)} &= \frac{dY_6}{dt} = Y^{(7)} = Y_7 \\ Y_7^{(1)} &= \frac{dY_7}{dt} = Y^{(8)} \\ &= -\frac{k_7}{k_8}Y_7 - \frac{k_6}{k_8}Y_6 - \frac{k_5}{k_8}Y_5 - \frac{k_4}{k_8}Y_4 - \frac{k_3}{k_8}Y_3 - \frac{k_2}{k_8}Y_2 - \\ &\quad \frac{k_1}{k_8}Y_1 + \frac{k_0}{k_8}Y_0 \\ &= 19Y_7 - 140Y_6 + 505Y_5 - 912Y_4 + 700Y_3 - 27Y_2 \\ &\quad -137Y_1 + 14Y_0 \end{aligned} \quad (10)$$

Sehingga diperoleh solusi umum analitik dari persamaan di atas sebagai berikut :

$$y(x) = c_1x^{(-0,1133)} + c_2x^{(-0,2823)} + c_3x^{(1,1146)} + c_4x^{(1,6452)} + c_5x^{(2,6185)} + c_6x^{(3,1288)} + c_7x^{(4,7254)} + c_8x^{(6,1629)} \quad (11)$$

Dimisalkan sebarang  $c_1, c_2, \dots, c_8$ , kemudian solusi umum analitik ditransformasikan ke dalam bentuk  $x = e^t$ , diperoleh solusi khusus analitik dari persamaan di atas menjadi :

$$y(x) = 2e^{t(-0,1133)} + 2e^{t(-0,2823)} + e^{t(1,1146)} + e^{t(1,6452)} + 2e^{t(2,6185)} + 2e^{t(3,1288)} + 2e^{t(3,1288)} + e^{t(4,7254)} + e^{t(6,1629)} \quad (12)$$

Dengan nilai-nilai awalnya :

$$\begin{aligned} Y_0(0) = Y_{0(0)} &= 12 & Y_1(0) = Y_{1(0)} &= 24.3515 \\ Y_2(0) = Y_{2(0)} &= 97.7366 & Y_3(0) = Y_{3(0)} &= 442.5461 \\ Y_4(0) = Y_{4(0)} &= 2235.7554 & Y_5(0) = Y_{5(0)} &= 12106.2351 \\ Y_6(0) = Y_{6(0)} &= 68467.3887 & Y_7(0) = Y_{7(0)} &= 397876.1827 \end{aligned}$$

Selanjutnya, digunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson.

**Penyelesaian dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton**, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (13) yaitu :

$$f(t, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (19Y_7 - 140Y_6 + 505Y_5 - 912Y_4 + 700Y_3 - 27Y_2) \\ -137Y_1 + 14Y_0 \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal  $t_{(0)} = 0$  dan nilai-nilai awal, yaitu :

$$\begin{aligned} Y_0(0) = Y_{0(0)} = 12 & & Y_1(0) = Y_{1(0)} = 24.3515 \\ Y_2(0) = Y_{2(0)} = 97.7366 & & Y_3(0) = Y_{3(0)} = 442.5461 \\ Y_4(0) = Y_{4(0)} = 2235.7554 & & Y_5(0) = Y_{5(0)} = 12106.2351 \\ Y_6(0) = Y_{6(0)} = 68467.3887 & & Y_7(0) = Y_{7(0)} = 397876.1827 \end{aligned}$$

Serta  $h = 0.05$  dan  $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$ . Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval  $[0,1]$  untuk memperoleh solusi awal  $\hat{Y}_{(0)}, \hat{Y}_{(1)}, \hat{Y}_{(2)}$ , dan  $\hat{Y}_{(3)}$  menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai  $f_{(i)}, f_{(i-1)}, f_{(i-2)}$ , dan  $f_{(i-3)}$  kemudian hasil tersebut disubstitusikan ke metode Adams Bashforth :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(i+1)} &= \hat{Y}_{(i)} + \frac{h}{24}(-9f_{(i-3)} + 37f_{(i-2)} - 59f_{(i-1)} + 55f_{(i)}) \\ \bar{P}_{(4)} &= \hat{Y}_{(3)} + \frac{h}{24}(-9f_{(0)} + 37f_{(1)} - 59f_{(2)} + 55f_{(3)}) \end{aligned}$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung  $f_{(i+1)} = f(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)})$  kemudian disubstitusikan ke persamaan Adams Moulton untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{(i+1)} &= \hat{Y}_{(i)} + \frac{h}{24}(f_{(i-2)} - 5f_{(i-1)} + 19f_{(i)} + 9f_{(i+1)}) \\ \hat{Y}_{(4)} &= \hat{Y}_{(3)} + \frac{h}{24}(f_{(1)} - 5f_{(2)} + 19f_{(3)} + 9f_{(4)}) \end{aligned}$$

Kemudian hitung galat mutlak :

$$E_{Y_{(i)}} = |Y(t_{(i)}) - \hat{Y}_{0(i)}|$$

didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 1 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

**Tabel 4.1.** Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 1 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton

i	$t_{(i)}$	Solusi Numerik ABM ( $\hat{Y}_{0(i)}$ )	Solusi Analitik ( $Y(t_{(i)})$ )	Galat (Error) ( $E_{Y_{(i)}}$ )
0	0	12.00000000000000	12.00000000000000	0.00000000000000
1	0.05	13.3495476883854	13.3495808684785	0.0000331800931
2	0.10	15.0079308991162	15.0080192175174	0.0000883184012
3	0.15	17.0570744923525	17.0572509854047	0.0001764930522
4	0.20	19.6034266711746	19.6036972309463	0.0002705597717
5	0.25	22.7857135452836	22.7861221169730	0.0004085716893

6	0.30	26.7855073680835	26.7861214272842	0.0006140592008
7	0.35	31.8412293426238	31.8421446816390	0.0009153390152
8	0.40	38.2669165390816	38.2682688100184	0.0013522709367
9	0.45	46.4773894767133	46.4793671623633	0.0019776856500
10	0.50	57.0220351495490	57.0248937002438	0.0028585506948
11	0.55	70.6302071411936	70.6342818966311	0.0040747554375
12	0.60	88.2723009897650	88.2780135424466	0.0057125526816
13	0.65	111.2419944936692	111.2498425446593	0.0078480509902
14	0.70	141.2670830583940	141.2775962084315	0.0105131500374
15	0.75	180.6589706343647	180.6726023887393	0.0136317543746
16	0.80	232.5144437667462	232.5313509731758	0.0169072064296
17	0.85	300.9881945375205	301.0078260613651	0.0196315238446
18	0.90	391.6611224609805	391.6814940757838	0.0203716148033
19	0.95	512.0383535036823	512.0548183893688	0.0164648856866
20	1.00	672.2230058080054	672.2262290757910	0.0032232677856

**Penyelesaian dengan menggunakan metode Milne-Simpson**, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (13), yaitu :

$$f(t, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (19Y_7 - 140Y_6 + 505Y_5 - 912Y_4 + 700Y_3 - 27Y_2) \\ -137Y_1 + 14Y_0 \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal  $t_0 = 0$  dan nilai-nilai awal yaitu :

$$\begin{aligned} Y_0(0) = Y_{0(0)} &= 12 & Y_1(0) = Y_{1(0)} &= 24.3515 \\ Y_2(0) = Y_{2(0)} &= 97.7366 & Y_3(0) = Y_{3(0)} &= 442.5461 \\ Y_4(0) = Y_{4(0)} &= 2235.7554 & Y_5(0) = Y_{5(0)} &= 12106.2351 \\ Y_6(0) = Y_{6(0)} &= 68467.3887 & Y_7(0) = Y_{7(0)} &= 397876.1827 \end{aligned}$$

Serta  $h = 0.05$  dan  $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$ . Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval  $[0,1]$  untuk memperoleh solusi awal  $\hat{Y}_{(0)}, \hat{Y}_{(1)}, \hat{Y}_{(2)}$ , dan  $\hat{Y}_{(3)}$  menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai  $f_{(i)}, f_{(i-1)}$ , dan  $f_{(i-2)}$  kemudian hasil tersebut disubstitusikan ke metode Milne :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i-3)} + \frac{4h}{3}(2f_{(i-2)} - f_{(i-1)} + 2f_{(i)})$$

$$\bar{P}_{(4)} = \hat{Y}_{(0)} + \frac{4h}{3}(2f_{(1)} - f_{(2)} + 2f_{(3)})$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung  $f_{(i+1)} = f(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)})$  kemudian disubstitusikan ke persamaan korektor Simpson untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\hat{Y}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i-1)} + \frac{h}{3}(f_{(i-1)} + 4f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

$$\hat{Y}_{(4)} = \hat{Y}_{(2)} + \frac{h}{3}(f_{(2)} + 4f_{(3)} + 9f_{(4)})$$

Kemudian dihitung galat mutlak :

$$E_{Y_{(i)}} = \left| Y(t_{(i)}) - \hat{Y}_{0(i)} \right|$$

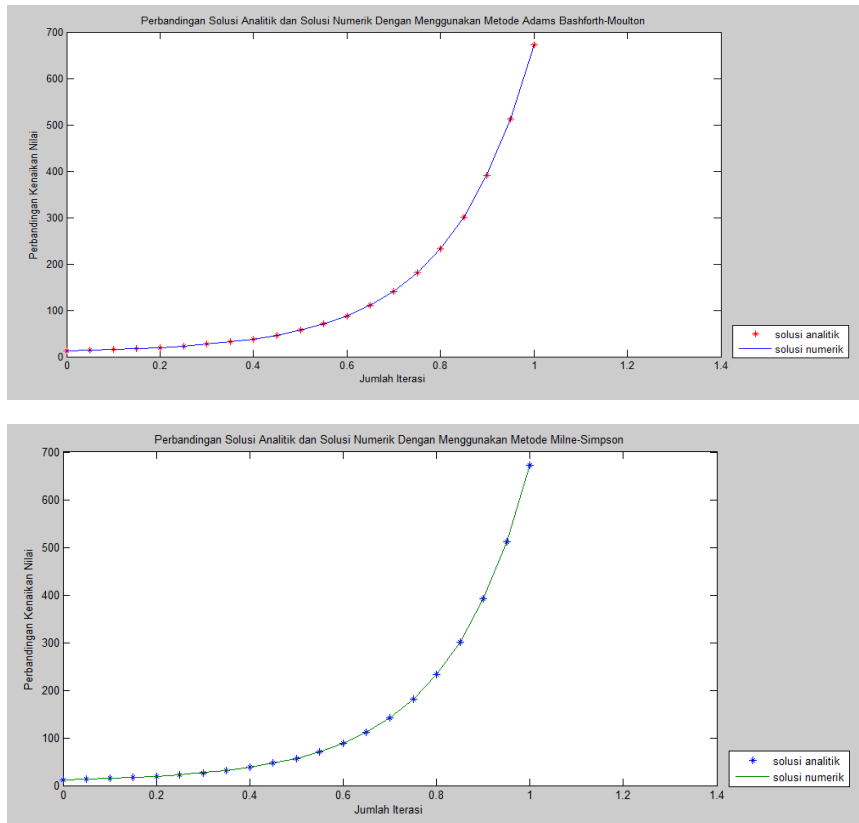
didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 1 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

**Tabel 4.2.** Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 1 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Milne-Simpson

i	t <sub>(i)</sub>	Solusi Numerik MS ( $\hat{Y}_{0(i)}$ )	Solusi Analitik ( $Y(t_{(i)})$ )	Galat (Error) ( $E_{Y_{(i)}}$ )
0	0	12.0000000000000	12.0000000000000	0.0000000000000
1	0.05	13.3495476883854	13.3495808684785	0.0000331800931
2	0.10	15.0079308991162	15.0080192175174	0.0000883184012
3	0.15	17.0570744923525	17.0572509854047	0.0001764930522
4	0.20	19.6034178756786	19.6036972309463	0.0002793552677
5	0.25	22.7856570817454	22.7861221169730	0.0004650352276
6	0.30	26.7854006885009	26.7861214272842	0.0007207387833
7	0.35	31.8410253060456	31.8421446816390	0.0011193755934
8	0.40	38.2665831203740	38.2682688100184	0.0016856896443
9	0.45	46.4768479714010	46.4793671623633	0.0025191909623
10	0.50	57.0212000320491	57.0248937002438	0.0036936681947
11	0.55	70.6289305887431	70.6342818966311	0.0053513078880
12	0.60	88.2703927104533	88.2780135424466	0.0076208319933
13	0.65	111.2391632147506	111.2498425446593	0.0106793299087
14	0.70	141.2629302470732	141.2775962084315	0.0146659613583
15	0.75	180.6529141807399	180.6726023887393	0.0196882079994
16	0.80	232.5056702627636	232.5313509731718	0.0256807104122
17	0.85	300.9755390704375	301.0078260613651	0.0322869909276
18	0.90	391.6429468694513	391.6814940757838	0.0385472063325
19	0.95	512.0123332984838	512.0548183893688	0.0424850908851
20	1.00	672.1858688254897	672.2262290757910	0.0403602503013

Berikut adalah gambar grafik perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik untuk contoh kasus 1 persamaan diferensial Euler orde-8 dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson :





**Gambar 4.1.** Grafik Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 1 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson

**Contoh Kasus 2 :**

$$\begin{aligned}
 x^8y^{(8)} + 10x^7y^{(7)} + 14x^6y^{(6)} - 13x^5y^{(5)} + 13x^4y^{(4)} - x^3y^{(3)} \\
 + x^2y^{(2)} + 4x^1y^{(1)} - 10y = 0
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Didapatkan sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 adalah sebagai berikut :

$$Y_0^{(1)} = \frac{dY_0}{dt} = Y^{(1)} = Y_1$$

$$Y_1^{(1)} = \frac{dY_1}{dt} = Y^{(2)} = Y_2$$

$$Y_2^{(1)} = \frac{dY_2}{dt} = Y^{(3)} = Y_3$$

$$Y_3^{(1)} = \frac{dY_3}{dt} = Y^{(4)} = Y_4$$

$$Y_4^{(1)} = \frac{dY_4}{dt} = Y^{(5)} = Y_5$$

$$Y_5^{(1)} = \frac{dY_5}{dt} = Y^{(6)} = Y_6$$

$$Y_6^{(1)} = \frac{dY_6}{dt} = Y^{(7)} = Y_7$$

$$\begin{aligned}
 Y_7^{(1)} &= \frac{dY_7}{dt} = Y^{(8)} \\
 &= -\frac{k_7}{k_8}Y_7 - \frac{k_6}{k_8}Y_6 - \frac{k_5}{k_8}Y_5 - \frac{k_4}{k_8}Y_4 - \frac{k_3}{k_8}Y_3 - \frac{k_2}{k_8}Y_2 - \\
 &\quad \frac{k_1}{k_8}Y_1 + \frac{k_0}{k_8}Y_0 \\
 &= 18Y_7 - 126Y_6 + 433Y_5 - 752Y_4 + 576Y_3 - \\
 &\quad 61Y_2 - 91Y_1 - 10Y_0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Sehingga diperoleh solusi umum analitik dari persamaan di atas sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 y(x) &= c_1x^{(-0.33367)} + c_2x^{(0.1090)} + c_3x^{(0.8529)} + c_4x^{(1.9803)} + \\
 &\quad c_5x^{(2.0000)} + c_6x^{(2.9803)} + c_7x^{(4.9661)} + c_8x^{(5.4479)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Dimisalkan sebarang  $c_1, c_2, \dots, c_8$ , kemudian solusi umum analitik ditransformasikan ke dalam bentuk  $x = e^t$ , diperoleh solusi khusus analitik dari persamaan di atas menjadi :

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= 2e^{t(-0.33367)} + e^{t(0.1090)} + 2e^{t(0.8529)} + e^{t(1.9803)} + \\
 &\quad 2e^{t(2.0000)} + e^{t(2.9803)} + 2e^{t(4.9661)} + e^{t(5.4479)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Dengan nilai-nilai awalnya :

$$\begin{aligned}
 Y_0(0) &= Y_{0(0)} = 12 & Y_1(0) &= Y_{1(0)} = 25.4821 \\
 Y_2(0) &= Y_{2(0)} = 101.5011 & Y_3(0) &= Y_{3(0)} = 458.0442 \\
 Y_4(0) &= Y_{4(0)} = 2224.6790 & Y_5(0) &= Y_{5(0)} = 11170.3964 \\
 Y_6(0) &= Y_{6(0)} = 57034.0952 & Y_7(0) &= Y_{7(0)} = 293878.8247
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, digunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson.

**Penyelesaian dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton**, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (17) yaitu :

$$f(t, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (18Y_7 - 126Y_6 + 433Y_5 - 752Y_4 + 576Y_3 - 61Y_2 - \\ -91Y_1 - 10Y_0) \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal  $t_0 = 0$  dan nilai-nilai awal yaitu :

$$\begin{aligned}
 Y_0(0) &= Y_{0(0)} = 12 & Y_1(0) &= Y_{1(0)} = 25.4821 \\
 Y_2(0) &= Y_{2(0)} = 101.5011 & Y_3(0) &= Y_{3(0)} = 458.0442 \\
 Y_4(0) &= Y_{4(0)} = 2224.6790 & Y_5(0) &= Y_{5(0)} = 11170.3964 \\
 Y_6(0) &= Y_{6(0)} = 57034.0952 & Y_7(0) &= Y_{7(0)} = 293878.8247
 \end{aligned}$$

Serta  $h = 0.05$  dan  $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$ . Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval  $[0,1]$  untuk memperoleh solusi awal  $\hat{Y}_{(0)}, \hat{Y}_{(1)}, \hat{Y}_{(2)}$ , dan  $\hat{Y}_{(3)}$  menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai  $f_{(i)}, f_{(i-1)}, f_{(i-2)}$ , dan  $f_{(i-3)}$  kemudian hasil tersebut disubstitusikan ke metode Adams bashforth :

$$\bar{P}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i)} + \frac{h}{24}(-9f_{(i-3)} + 37f_{(i-2)} - 59f_{(i-1)} + 55f_{(i)})$$

$$\bar{P}_{(4)} = \hat{Y}_{(3)} + \frac{h}{24}(-9f_{(0)} + 37f_{(1)} - 59f_{(2)} + 55f_{(3)})$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung  $f_{(i+1)} = f(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)})$  kemudian disubstitusikan ke persamaan Adams Moulton untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\hat{Y}_{(i+1)} = \hat{Y}_{(i)} + \frac{h}{24}(f_{(i-2)} - 5f_{(i-1)} + 19f_{(i)} + 9f_{(i+1)})$$

$$\hat{Y}_{(4)} = \hat{Y}_{(3)} + \frac{h}{24}(f_{(1)} - 5f_{(2)} + 19f_{(3)} + 9f_{(4)})$$

Kemudian dihitung galat mutlak :

$$E_{Y_{(i)}} = |Y(t_{(i)}) - \hat{Y}_{0(i)}|$$

didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 2 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

**Tabel 4.3.** Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 2 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton

i	t <sub>(i)</sub>	Solusi Numerik ABM ( $\hat{Y}_{0(i)}$ )	Solusi Analitik ( $Y(t_{(i)})$ )	Galat (Error) ( $E_{Y_{(i)}}$ )
0	0	12.00000000000000	12.00000000000000	0.00000000000000
1	0.05	13.4111033059896	13.4111337830808	0.0000304770912
2	0.10	15.1422635610499	15.1423424266375	0.0000788655877
3	0.15	17.2767083056203	17.2768613001565	0.0001529945362
4	0.20	19.9209849147927	19.9211942018391	0.0002092870464
5	0.25	23.2115424203424	23.2118253294148	0.0002829090724
6	0.30	27.3235128652981	27.3238973047029	0.0003844394048
7	0.35	32.4819128264705	32.4824360407517	0.0005232142812
8	0.40	38.9761610052408	38.9768757474937	0.0007147422529
9	0.45	47.1788782536437	47.1798613256007	0.0009830719570
10	0.50	57.5702295395952	57.5715961933444	0.0013666537492
11	0.55	70.7694526401717	70.7713812430724	0.0019286029007
12	0.60	87.5757073128212	87.5784811589605	0.0027738461393
13	0.65	109.0210141703044	109.0250915942196	0.0040774239152
14	0.70	136.4388783251231	136.4450087307618	0.0061304056387
15	0.75	171.5532656196127	171.5626788021488	0.0094131825361
16	0.80	216.5939930023279	216.6087037708262	0.0147107684983
17	0.85	274.4464056678120	274.4696974832635	0.0232918154516
18	0.90	348.8455672041557	348.8827504837690	0.0371832796133
19	0.95	444.6282481406327	444.6878355186185	0.0595873779858
20	1.00	568.0599749599790	568.1554834546089	0.0955084946298

**Penyelesaian dengan menggunakan metode Milne-Simpson**, telah diketahui bahwa sistem persamaan diferensial orde-1 pada persamaan (17), yaitu :

$$f(t, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} Y_1, Y_2, \dots, Y_7, (18Y_7 - 126Y_6 + 433Y_5 - 752Y_4 + 576Y_3 - 61Y_2) \\ -91Y_1 - 10Y_0 \end{bmatrix}$$

Ditentukan solusi masalah nilai awal dengan nilai awal  $t_0 = 0$  dan nilai-nilai awal yaitu :

$$\begin{aligned} Y_0(0) = Y_{0(0)} &= 12 & Y_1(0) = Y_{1(0)} &= 25.4821 \\ Y_2(0) = Y_{2(0)} &= 101.5011 & Y_3(0) = Y_{3(0)} &= 458.0442 \\ Y_4(0) = Y_{4(0)} &= 2224.6790 & Y_5(0) = Y_{5(0)} &= 11170.3964 \\ Y_6(0) = Y_{6(0)} &= 57034.0952 & Y_7(0) = Y_{7(0)} &= 293878.8247 \end{aligned}$$

Serta  $h = 0.05$  dan  $t_{(i+1)} = t_{(i)} + h$ . Akan dicari solusi masalah nilai awal di atas pada interval  $[0,1]$  untuk memperoleh solusi awal  $\hat{Y}_{(0)}, \hat{Y}_{(1)}, \hat{Y}_{(2)}$ , dan  $\hat{Y}_{(3)}$  menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Setelah diperoleh solusi awal menggunakan Runge-Kutta orde-4, tentukan nilai-nilai  $f_{(i)}, f_{(i-1)}$ , dan  $f_{(i-2)}$  kemudian hasil tersebut disubstitusikan ke metode Milne :

$$\begin{aligned} \bar{P}_{(i+1)} &= \hat{Y}_{(i-3)} + \frac{4h}{3}(2f_{(i-2)} - f_{(i-1)} + 2f_{(i)}) \\ \bar{P}_{(4)} &= \hat{Y}_{(0)} + \frac{4h}{3}(2f_{(1)} - f_{(2)} + 2f_{(3)}) \end{aligned}$$

Setelah didapatkan nilai prediksi, hitung  $f_{(i+1)} = f(t_{(i+1)}, \bar{P}_{(i+1)})$  kemudian disubstitusikan ke persamaan Simpson untuk memperoleh nilai koreksi :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{(i+1)} &= \hat{Y}_{(i-1)} + \frac{h}{3}(f_{(i-1)} + 4f_{(i)} + 9f_{(i+1)}) \\ \hat{Y}_{(4)} &= \hat{Y}_{(2)} + \frac{h}{3}(f_{(2)} + 4f_{(3)} + 9f_{(4)}) \end{aligned}$$

Kemudian dihitung galat mutlak :

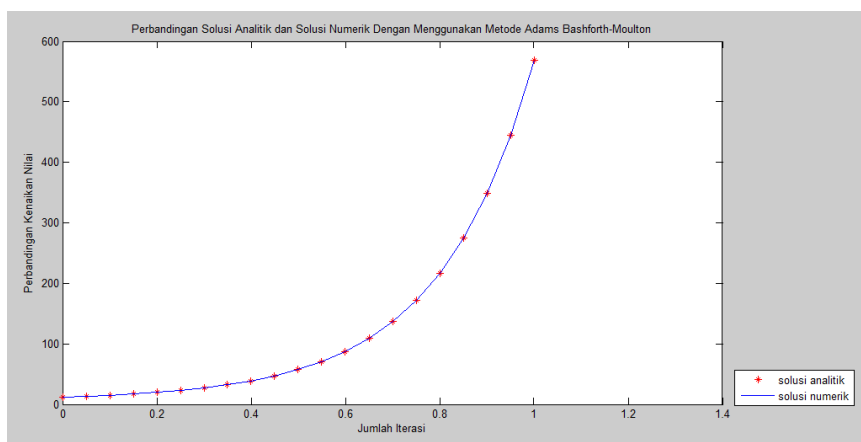
$$E_{Y_{(i)}} = |Y(t_{(i)}) - \hat{Y}_{0(i)}|$$

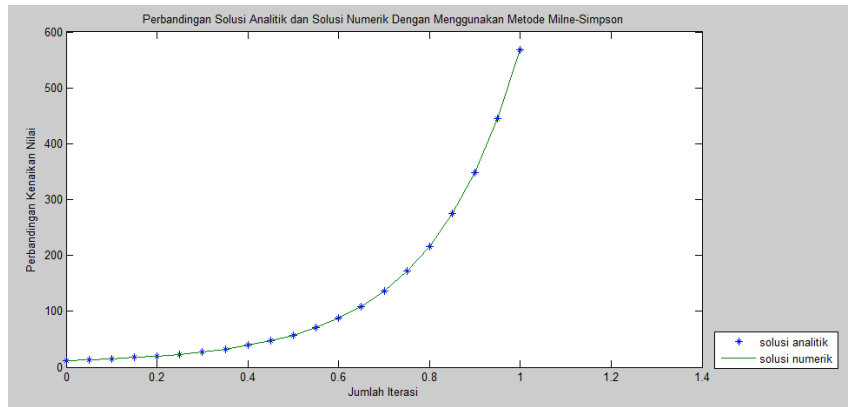
didapatkan solusi analitik dan solusi numerik dari contoh kasus 2 persamaan diferensial Euler orde-8 sebagai berikut :

**Tabel 4.4.** Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 2 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Milne-Simpson

i	$t_{(i)}$	Solusi Numerik MS ( $\hat{Y}_{0(i)}$ )	Solusi Analitik ( $Y(t_{(i)})$ )	Galat (Error) ( $E_{Y(i)}$ )
0	0	12.0000000000000	12.0000000000000	0.0000000000000
1	0.05	13.4111033059896	13.4111337830808	0.0000304770912
2	0.10	15.1422635610499	15.1423424266375	0.0000788655877
3	0.15	17.2767083056203	17.2768613001565	0.0001529945362
4	0.20	19.9209745040050	19.9211942018391	0.0002196978342
5	0.25	23.2114728188767	23.2118253294148	0.0003525105381
6	0.30	27.3233836126020	27.3238973047029	0.0005136921008
7	0.35	32.4816679091208	32.4824360407517	0.0007681316309
8	0.40	38.9757680798519	38.9768757474937	0.0011076676418
9	0.45	47.1782508172365	47.1798613256007	0.0016105083641
10	0.50	57.5692824286226	57.5715961933444	0.0023137647218
11	0.55	70.7680361636050	70.7713812430724	0.0033450794673
12	0.60	87.5736414406642	87.5784811589605	0.0048397182963
13	0.65	109.0180267070998	109.0250915942196	0.0070648871198
14	0.70	136.4346159593168	136.4450087307618	0.0103927714451
15	0.75	171.5472258240373	171.5626788021488	0.0154529781114
16	0.80	216.5855049800691	216.6087037708262	0.0231987907572
17	0.85	274.4345407001467	274.4696974832635	0.0351567831168
18	0.90	348.8290742070952	348.8827504837690	0.0536762766737
19	0.95	444.6054175209614	444.6878355186185	0.0824179976572
20	1.00	568.0284993485176	568.1554834546089	0.1269841060913

Berikut adalah gambar grafik perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik untuk contoh kasus 2 persamaan diferensial Euler orde-8 dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson :





**Gambar 4.2.** Grafik Perbandingan Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dari Contoh Kasus 2 Persamaan Diferensial Euler Orde-8 dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson

## PEMBAHASAN

Metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat digunakan untuk penyelesaian solusi analitik dan solusi numerik persamaan diferensial Euler orde-8 dengan akar-akar karakteristiknya riil berbeda. Terlihat pada Table 4.1, Tabel 4.2, Tabel 4.3 serta Tabel 4.4 bahwa nilai solusi numerik dari hasil metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson semakin mendekati nilai solusi analitiknya, serta dari Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 bahwa gambar grafik perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik kedua metode terlihat berhimpitan.

Diketahui dari Table 4.5 bahwa metode Adams Bashforth-Moulton lebih mendekati nilai solusi analitik dibandingkan metode Milne-Simpson serta dilihat dari jumlah perbandingan galat yang didapatkan bahwa untuk kedua kasus galat metode Adams Bashforth-Moulton lebih kecil dibandingkan metode Milne-Simpson, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Adams Bashforth-Moulton lebih akurat dibandingkan metode Milne-Simpson untuk kedua contoh kasus tersebut. Berikut adalah perbandingan galat yang didapatkan dari kedua contoh kasus :

**Tabel 4.5.** Jumlah Perbandingan Galat (Error) Antara Solusi Analitik dan Solusi Numerik dengan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson Untuk Contoh Kasus 1 dan Contoh Kasus 2

<i>ABM CK 1</i>	<i>MS CK 1</i>	<i>ABM CK 2</i>	<i>MS CK 2</i>
0.127073791	0.248146933	0.26	0.369678

Keterangan :

ABM CK1 = Jumlah galat metode Adams Bashforth-Moulton dari contoh kasus 1

MS CK 1 = Jumlah galat metode Milne-Simpson dari contoh kasus 1

ABM CK 2 = Jumlah galat metode Adams Bashforth-Moulton dari contoh kasus 1

MS CK 2 = Jumlah galat metode Milne-Simpson dari contoh kasus 2

Untuk efisiensi dapat dibandingkan dengan menghitung lama waktu program berjalan hingga diperoleh solusi numerik. Berikut adalah tabel perbandingan perhitungan dari kedua metode tersebut :

**Tabel 4.6.** Perbandingan Lama Waktu Proses Iterasi dengan Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson

<i>ABM CK1</i>	<i>MS CK1</i>	<i>ABM CK 2</i>	<i>MS CK 2</i>
0.335147 s	0.020519 s	0.307962 s	0.020490 s

Terlihat bahwa untuk kedua kasus tersebut metode Milne-Simpson dalam melakukan iterasi lebih cepat dibandingkan dengan metode Adams Bashforth-Moulton. Sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Milne-Simpson lebih efisien daripada metode Adams Bashforth-Moulton.

## 5. SIMPULAN

Adapun kesimpulan yang didapatkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Persamaan diferensial Euler orde-8 dapat ditransformasikan kedalam bentuk sistem persamaan diferensial orde-1 dengan menggunakan transformasi  $x = e^t, x > 0$ .
2. Hasil perbandingan antara metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat disimpulkan bahwa :
  - a. Metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.
  - b. Solusi numerik dari kedua metode tersebut mendekati solusi analitik dari kedua contoh kasus yang telah diselesaikan.
  - c. Metode Milne-Simpson lebih efisien dibandingkan dengan metode Adams Bashforth-Moulton.
  - d. Metode Adams Bashforth-Moulton lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde- 8 karena lebih akurat terlihat dari jumlah perbandingan galatnya.

## KEPUSTAAKAN

- [1] Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya : Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- [2] Prayudi. 2006. *Matematika Teknik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- [3] Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik : Revisi Kedua*. Penerbit Informatika, Bandung.
- [4] Mathews, John H., and Kurtis D. Fink. 2004. *Numerical Methods Using MATLAB*. Pearson Education, Inc, United States of America.