



PROSIDING

SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA,
DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAI DISIPLIN ILMU
UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA

SNMK 2017



**SEMINAR NASIONAL
METODE KUANTITATIF
2017**

**PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017**

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :
Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :
Shela Malinda Tampubolon

Alamat :
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN KETUA PELAKSANA SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema “penggunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa”.

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmuwan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

DAFTAR ISI

KATA SAMBUTAN	iii
KEPANITIAAN	iv
DAFTAR ISI	vi
Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen (<i>Fauzia Anisatul F, Suharsono S, dan Dorrah Aziz</i>)	1
Simulasi Interaksi Angin Laut dan Bukit Barisan dalam Pembentukan Pola Cuaca di Wilayah Sumatera Barat Menggunakan Model Wrf-Arw (<i>Achmad Raflie Pahlevi</i>)	7
Penerapan Mekanisme Pertahanan Diri (Self-Defense) sebagai Upaya Strategi Pengurangan Rasa Takut Terhadap Kejahatan (Studi Pada Kabupaten/Kota di Provinsi Lampung yang Menduduki Peringkat <i>Crime Rate Tertinggi</i>) (<i>Teuku Fahmi</i>).....	18
Tingkat Ketahanan Individu Mahasiswa Unila pada Aspek Soft Skill (<i>Pitojo Budiono, Feni Rosalia, dan Lilih Mufliahah</i>).....	33
Metode Analisis Homotopi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Linear Non Homogen Orde Satu (<i>Atika Faradilla dan Suharsono S</i>)	44
Penerapan Neural Machine Translation Untuk Eksperimen Penerjemahan Secara Otomatis pada Bahasa Lampung – Indonesia (<i>Zaenal Abidin</i>)	53
Ukuran Risiko Cre-Var (<i>Insani Putri dan Khreshna I.A.Syuhada</i>)	69
Penentuan Risiko Investasi dengan Momen Orde Tinggi V@R-Cv@R (<i>Marianik dan Khreshna I.A.Syuhada</i>).....	77
Simulasi Komputasi Aliran Panas pada Model Pengering Kabinet dengan Metode Beda Hingga (<i>Vivi Nur Utami, Tiryono Ruby, Subian Saidi, dan Amanto</i>).	83
Segmentasi Wilayah Berdasarkan Derajat Kesehatan dengan Menggunakan <i>Finite Mixture Partial Least Square</i> (Fimix-Pls) (<i>Agustina Riyanti</i>).....	90
Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan L 3/2 (<i>Risky Aulia Ulfa, Muslim Ansori, Suharsono S, dan Agus Sutrisno</i>).	99
Analisis Rangkaian Resistor, Induktor dan Kapasitor (RLC) dengan Metode Runge-Kutta Dan Adams Bashforth Moulton (<i>Yudandi K.A., Agus Sutrisno, Amanto, dan Dorrah Aziz</i>).	110

Representasi Operator Linier dari Ruang Barisan Ke Ruang Barisan L	13/12
(<i>Amanda Yona Ningtyas, Muslim Ansori, Subian Saidi, dan Amanto</i>)	116
Desain Kontrol Model Suhu Ruangan (<i>Zulfikar Fakhri Bismar dan Aang Nuryaman</i>)	126
Penerapan Logika Fuzzy pada Suara Tv Sebagai Alternative Menghemat Daya Listrik (<i>Agus Wantoro</i>)	135
Clustering Wilayah Lampung Berdasarkan Tingkat Kesejahteraan (<i>Henida Widyatama</i>).....	149
Pemanfaatan Sistem Informasi Geografis Untuk Valuasi Jasa Lingkungan Mangrove dalam Penyakit Malaria di Provinsi Lampung (<i>Imawan A.Q., Samsul Bakri, dan Dyah W.S.R.W.</i>)	156
Analisis Pengendalian Persediaan Dalam Mencapai Tingkat Produksi <i>Crude Palm Oil</i> (CPO) yang Optimal di PT. Kresna Duta Agroindo Langling Merangin-Jambi (<i>Marcelly Widya W., Hery Wibowo, dan Estika Devi Erinda</i>)	171
Analisis <i>Cluster Data Longitudinal</i> pada Pengelompokan Daerah Berdasarkan Indikator IPM di Jawa Barat (<i>A.S Awalluddin dan I. Taufik</i>).	187
Indek Pembangunan Manusia dan Faktor Yang Mempengaruhinya di Daerah Perkotaan Provinsi Lampung (<i>Ahmad Rifa'i dan Hartono</i>).	195
<i>Parameter Estimation Of Bernoulli Distribution Using Maximum Likelihood and Bayesian Methods</i> (<i>Nurmaita Hamsyiah, Khoirin Nisa, dan Warsono</i>).....	214
Proses Pengamanan Data Menggunakan Kombinasi Metode Kriptografi <i>Data Encryption Standard</i> dan <i>Steganografi End Of File</i> (<i>Dedi Darwis, Wamiliana, dan Akmal Junaidi</i>).	228
<i>Bayesian Inference of Poisson Distribution Using Conjugate A and Non-Informative Prior</i> (<i>Misgiyati, Khoirin Nisa, dan Warsono</i>).	241
Analisis Klasifikasi Menggunakan Metode Regresi Logistik Ordinal dan Klasifikasi Naïve Bayes pada Data Alumni Unila Tahun 2016 (<i>Shintia F., Rudi Ruswandi, dan Subian Saidi</i>)....	251
Analisis Model <i>Markov Switching Autoregressive</i> (MSAR) pada Data <i>Time Series</i> (<i>Aulianda Prasyanti, Mustofa Usman, dan Dorrah Aziz</i>)	263
Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8 (<i>Faranika Latip., Dorrah Aziz, dan Suharsono S</i>).	278
Pengembangan Ekowisata dengan Memanfaatkan Media Sosial untuk Mengukur Selera Calon Konsumen (<i>Gustafika Maulana, Gunardi Djoko Winarso, dan Samsul Bakri</i>).	293
Diagonalisasi Secara Uniter Matriks Hermite dan Aplikasinya pada Pengamanan Pesan Rahasia (<i>Abdurrois, Dorrah Aziz, dan Aang Nuryaman</i>)	308

Pembandingan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton dalam Penyelesaian Model Pertumbuhan Uang yang Diinvestasikan (<i>Intan Puspitasari, Agus Sutrisno, Tiryono Ruby, dan Muslim Ansori</i>)	328
Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linear Orde-N Non Homogen dengan Fungsi Green (<i>Fathurrohman Al Ayubi, Dorrah Aziz, dan Muslim Ansori</i>).....	341
Penyelesaian Kata Ambigu pada Proses Pos Tagging Menggunakan Algoritma <i>Hidden Markov Model</i> (HMM) (<i>Agus Mulyanto, Yeni Agus Nurhuda, dan Nova Wiyanto</i>).....	347
Sistem Temu Kembali Citra Daun Tumbuhan Menggunakan Metode Eigenface (<i>Supiyanto dan Samuel A. Mandowen</i>)	359
Efektivitas Model <i>Problem Solving</i> dalam Meningkatkan Kemampuan Berfikir Lancar Mahasiswa pada Materi Ph Larutan (<i>Ratu Betta Rudibyani</i>).....	368
<i>The Optimal Bandwidth for Kernel Density Estimation of Skewed Distribution: A Case Study on Survival Data of Cancer Patients</i> (<i>Netti Herawati, Khoirin Nisa, dan Eri Setiawan</i>).....	380
Karakteristik Larutan Kimia Di Dalam Air Dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear (<i>Titik Suparwati</i>).....	389
Bentuk Solusi Gelombang Berjalan Persamaan $\Delta\Delta$ mKdV Yang Diperumum (<i>Notiragayu, Rudi Ruswandi, dan La Zakaria</i>)	398
Pendugaan Blup Dan Eblup(Suatu Pendekatan Simulasi) (<i>Nusyirwan</i>)	403

REPRESENTASI OPERATOR LINEAR DARI RUANG BARISAN l_{13} KE RUANG BARISAN $l_{13/12}$

Amanda Yona Ningtyas¹⁾, Muslim Ansori²⁾, Subian Saidi³⁾, Amanto⁴⁾

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung

Jalan Prof. Dr. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145

E-Mail : yonamanda26@gmail.com

¹⁾Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

^{2,3,4)}Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

ABSTRAK

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator. Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga. Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_{13} \rightarrow l_{13/12}$, dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $l_{13} = \{x = (x_i) \mid (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{13})^{\frac{1}{13}} < \infty\}$ dan $l_{13/12} = \left\{x = (x_i) \mid \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{12}{13}} < \infty\right\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya dikonstruksikan operator A dari ruang barisan l_{13} ke ruang barisan $l_{13/12}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$. dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang Banach.

Kata Kunci : Operator, Ruang Barisan Terbatas

1. PENDAHULUAN

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ dengan $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$,

$l_{13} = \{x = (x_i) \mid (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{13})^{\frac{1}{13}} < \infty\}$ dan

$l_{13/12} = \left\{x = (x_i) \mid \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{12}{13}} < \infty\right\}$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \in l_{13}$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul suatu permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_{13/12}$. Oleh karena itu, penelitian akan difokuskan pada permasalahan tersebut.

2. LANDASAN TEORI

OPERATOR

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator [1].

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

- a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
- b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha x) = \alpha Ax$ dan $A(x + y) = Ax + Ay$.

BARISAN

Definisi 2.2.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dikatakan barisan.

Teorema 2.2.3

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas [2].

Definisi 2.2.4

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

- a. Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty \right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

Definisi 2.2.5

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^q$ [3].

$$(x_j y_j)_{j \in N} \in l^\infty \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|^p \|y\|^q \quad (3)$$

RUANG VEKTOR

Definisi 2.3.1

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan (+): $X \times X \rightarrow X$ dan fungsi perkalian skalar (·): $F \times X \rightarrow X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku:

- i. $x + y = y + x$
- ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
- iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$
- iv. ada $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = \theta$
- v. $1 \cdot x = x$
- vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

[3]

BASIS

Definisi 2.4.1

Ruang vektor V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor V .

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad (4)$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B , jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V , maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

Definisi 2.4.2

Diberikan ruang vektor V . Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear [3].

Definisi 2.4.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan \mathcal{F} . Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = |B|$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan \check{e}_k vektor di dalam R^n yang komponen ke- k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n [3].

RUANG BERNORMA

Definisi 2.5.1

Diberikan ruang linear X . Fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

- i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
- ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
- iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x . Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui [3].

RUANG BANACH

Definisi 2.6.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen [3].

3. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkonstruksikan operator A dari ruang barisan terbatas l_{13} ke ruang barisan $l_{\frac{13}{12}}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.
2. Mengkonstruksikan norma operator A
3. Menyelidiki apakah koleksi semua operator A membentuk ruang Banach
4. Merepresentasikan operator A sebagai matriks takhingga yang dikerjakan dari ruang barisan terbatas l_{13} ke ruang barisan $l_{\frac{13}{12}}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.

4. PEMBAHASAN

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, yang dimaksud dengan ruang barisan terbatas l_{13} dapat didefinisikan sebagai :

$$l_{13} = \left\{ x = (x_i) \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{13} \right)^{\frac{1}{13}} < \infty \right. \right\}$$

dengan $(x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ merupakan barisan bilangan real \mathbb{R} . Ruang barisan l_{13} merupakan ruang Banach dengan ruang dual $(l_{13})^* = \{x^*: l_{13} \rightarrow \mathbb{R}\}$ yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu pada l_{13} .

Untuk sebarang $x^* \in (l_{13})^*$ dan $x \in l_{13}$, penulisan $\langle x, x^* \rangle$ dimaksudkan sebagai fungsional x^* pada x atau $x^*(x)$. Barisan vektor $\{e_n\} \subset l_{13}$ dinamakan basis pada l_{13} jika untuk setiap vektor $x \in l_{13}$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{a_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Barisan $\{e_n^*\} \in (l_{13})^*$ dengan $\|e_n^*\| = 1$ untuk setiap n dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset l_{13}$ jika

$$\langle e_m, e_n^* \rangle = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$. Selanjutnya, pasangan $\{\{e_n\}, \{e_n^*\}\}$ disebut sistem biortonormal pada l_{13} maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

dengan $\langle x, e_n^* \rangle = a_n$.

Jika $A \in \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/\frac{13}{12}})$ maka operator $A^* \in \mathcal{L}_c((l_{13})^*, (l_{13/\frac{13}{12}})^*)$ disebut operator pendamping A jika dan hanya jika untuk setiap $x \in l_{13}$ dan $y^* \in (l_{13})^*$, berlaku

$$\langle A(x), y^* \rangle = \langle x, A^*(y^*) \rangle$$

Jadi, jika $\{e_n\} \subset l_{13}$ dan $\{d_m^*\} \in (l_{13/\frac{13}{12}})^*$ diperoleh

$$\langle A(e_n), d_m^* \rangle = \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle$$

Jika $\{e_n\}, \{f_n\} \subset l_{13}$ basis pada l_{13} dan $\{d_m\} \subset l_{13/12}$, maka untuk setiap $A \in \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/12})$ berlaku

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle e_n^* \quad (a)$$

Dan

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, A^*(d_m^*) \rangle f_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A(e_n), d_m^* \rangle f_n^* \quad (b)$$

Berdasarkan persamaan (a) dan (b) diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(f_k), d_m^* \rangle f_k^* \right\| \quad (c)$$

Berdasarkan persamaan (a), (b) dan (c) didefinisikan pengertian operator dari ruang barisan l_{13} ke ruang barisan $l_{13/12}$ sebagai berikut

Definisi 1.1 Operator $A \in \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/12})$ merupakan operator-SM jika

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| < \infty$$

Dengan $\{e_n\} \subset l_{13}$ basis pada l_{13} . Dan $\{d_m\} \subset l_{13/12}$ basis pada $l_{13/12}$.

Dapat dipahami bahwa bilangan $\|A\|$ dengan

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| < \infty$$

Tidak bergantung pada pemilihan basis $\{e_n\}$ pada l_{13} .

Selanjutnya, notasi $SM(l_{13}, l_{13/12})$ menyatakan koleksi semua operator-SM dari ruang barisan l_{13} ke ruang barisan $l_{13/12}$.

Teorema 1.2 Untuk setiap $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ berlaku

- i. $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$
- ii. $SM(l_{13}, l_{13/12})$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|\cdot\|_{SM}$
- iii. Jika $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ maka A operator kompak.

Bukti :

- i. Diambil sebarang $\{e_n\} \subset l_{13}$ basis pada l_{13} , $\{d_m\} \subset l_{13/12}$ basis pada $l_{13/12}$ dan $x \in l_{13}$, maka berdasarkan (a), (b) dan (c) diperoleh

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m \right\| \\ &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, A^*(d_m^*) \rangle d_m \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x\| \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m^*)\| \\ &= \|x\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \|x\| \|A\|_{SM} \end{aligned}$$

Yang berakibat $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$.

- ii. Pertama ditunjukkan bahwa $SM(l_{13}, l_{13/12})$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|\cdot\|_{SM}$ sebab :

- a.) Untuk setiap $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \geq 0$$

dan

$$\|A\|_{SM} = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* = A^*(d_m^*) = \theta \text{ (untuk setiap m)}$$

$$\Leftrightarrow A^* = 0 \text{ (operator nol)}$$

$$\Leftrightarrow A = 0 \text{ (operator nol)}$$

- b.) Untuk setiap $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dan skalar α , diperoleh

$$\begin{aligned} \|\alpha A\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= |\alpha| \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= |\alpha| \|A\|_{SM} \end{aligned}$$

- c.) Jika diberikan $A_1, A_2 \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ maka

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\|_{SM} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_1 + A_2)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle ((A_1)(e_k) + (A_2)(e_k)), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* + \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \end{aligned}$$

Dengan kata lain,

$$\|A_1 + A_2\|_{SM} \leq \|A_1\|_{SM} + \|A_2\|_{SM}$$

Selanjutnya menunjukkan kelengkapan ruang $SM(l_{13}, l_{13/12})$ sebagai berikut :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset SM(l_{13}, l_{13/12})$. Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positif $i, j \geq n_0$, berlaku

$$\|A_i - A_j\|_{SM} \leq \frac{\varepsilon}{13}$$

Akan dibuktikan bahwa terdapat $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ sehingga

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|A_i - A\|_{SM} = 0$$

Karena

$$\|A_i - A_j\|_{L_c(l_{13}, l_{13/12})} \leq \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{13}$$

Untuk setiap $A_i, A_j \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dengan $i, j \geq n_0$, maka barisan $\{A_i\}$ juga merupakan barisan Cauchy di dalam $L_c(l_{13}, l_{13/12})$. Karena $L_c(l_{13}, l_{13/12})$ ruang lengkap maka terdapat $A \in L_c(l_{13}, l_{13/12})$ sehingga $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = A$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A_i - A)(e_k), d_m^*) e_k^* \right\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A_i - A)(e_k), d_m^*) e_k^* \right\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_i - A\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{13} \end{aligned}$$

Untuk sebarang bilangan bulat $i \geq n_0$. Dengan kata lain, $A - A_i \in SM(l_{13}, l_{13/12})$, untuk $i \geq n_0$. Oleh karena itu, $A - A_{n_0} + A_{n_0} = A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dan terbukti bahwa barisan $\{A_i\}$ konvergen ke suatu $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$. Jadi, $SM(l_{13}, l_{13/12})$ merupakan ruang bernorma yang lengkap atau ruang Banach.

iii. Jika $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dan $x \in l_{13}$, maka

$$A(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan bulat positif n , dapat didefinisikan operator $A_n: l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ dengan

$$A_n(x) = \sum_{m=1}^n \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Jelas bahwa $A_n \in L_c(l_{13}, l_{13/12})$ dan A_n merupakan operator berhingga. Dengan kata lain, A_n operator kompak. Karena $\{A_n\}$ konvergen ke K maka K operator kompak.

Berdasarkan Teorema 1.2 diperoleh

Akibat 1.3 $SM(l_{13}, l_{13/12}) \subset K(l_{13}, l_{13/12}) \subset \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/12})$ dengan $K(l_{13}, l_{13/12})$ koleksi operator kompak dari l_{13} ke $l_{13/12}$.

Operator $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dapat diwakili oleh matriks tak hingga $A = A_{\infty \times \infty}$. Oleh karena itu,

dalam bentuk matriks tak hingga karakteristik operator-SM tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

Teorema 1.4 Suatu operator linear kontinu $A: l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks (a_{ij}) yang memenuhi :

- i.) $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\} \in l_{13/12}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_{13}$
- ii.) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{13} < \infty$
- iii.) $\sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| < \infty$

Bukti :

(Syarat perlu) karena $A: l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ linear dan kontinu maka dengan sendirinya berlaku i) dan ii).

Operator A dalam bentuk matriks (a_{ij}) dikerjakan pada basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0, 0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$ berbentuk

$$Ae_k = (a_{jk})_{j=1}^{\infty}$$

Karena $A = (a_{ij})$ operator-SM maka

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, d_m^*) d_m \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} d_m \right\| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \right\| < \infty \end{aligned}$$

(Syarat cukup) berdasarkan i) dan ii) maka $A = (a_{ij}): l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ linear dan kontinu.

Selanjutnya, berdasarkan iii) diperoleh

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, d_m^*) d_m \right\| = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} \right\| < \infty$$

Terbukti $A = (a_{ij})$ merupakan operator-SM

Contoh 1.5 Matriks $A = (a_{ij})$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i^{13/12}} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Merepresentasikan operator-SM $A: l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ sebab :

- i.) Untuk setiap $x = (x_j) \in l_{13}$ berlaku

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{x_j}{j^{13/12}} \right|^{13/12} \right)^{12/13} < \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^{13/12} \right)^{12/13} < \infty$$

Jadi, $Ax \in l_{13/12}$

ii.) Bagian kedua terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{13/12} = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i^{13/12}} \right|^{13/12} < \infty$$

iii.) Bagian ketiga terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{13/12}} < \infty$$

5. SIMPULAN

Operator linear dan kontinu $A : l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\} \in l_{13/12}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_{13}$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^{13/12} < \infty$
3. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$

Koleksi semua operator SM $A : l_{13} \rightarrow l_{13/12}$ yang dinotasikan dengan SM $(l_{13}, l_{13/12})$ membentuk ruang Banach.

KEPUSTAKAAN

- [1] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.
- [2] Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.
- [3] Darmawijaya, S. (2007). *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.