SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF
SNMK 2017
JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UNILA

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF

SNMK 2017

PENGGUNAAN MATEMATIKA, STATISTIKA, DAN KOMPUTER DALAM BERBAGAIDISIPLIN ILMU UNTUK MEWUJUDKAN KEMAKMURAN BANGSA

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

SEMINAR NASIONAL

METODE KUANTITATIF

2017

PROSIDING
Seminar Nasional
Metode Kuantitatif 2017

ISBN No. 978-602-98559-3-7

Penggunaan Matematika, Statistika, dan Komputer dalam Berbagai Disiplin Ilmu
untuk Mewujudkan Kemakmuran Bangsa

Editor :
Prof. Mustofa Usman, Ph.D
Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.

Layout & Design :
Shela Malinda Tampubolon

Alamat :
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Dr. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung
Telp. 0721-701609/Fax. 0721-702767

KATA SAMBUTAN
KETUA PELAKSANA
SEMINAR NASIONAL METODE KUANTITATIF 2017

Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2017 diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung yang dilaksanakan pada tanggal 24 – 25 November 2017. Seminar terselenggara atas kerja sama Jurusan Matematika FMIPA, Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Unila, dan Badan Pusat Statistik (BPS).

Peserta dari Seminar dihadiri lebih dari 160 peserta dari 11 institusi di Indonesia, diantaranya : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan, Badan Pusat Statistik, Universitas Indonesia, Institut Teknologi Bandung, Universitas Sriwijaya, Universitas Jember, Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Djati, Universitas Cendrawasih, Universitas Teknokrat Indonesia, Universitas Malahayati, dan Universitas Lampung. Dengan jumlah artikel yang disajikan ada sebanyak 48 artikel hal ini merefleksikan pentingnya seminar nasional metode kuantitatif dengan tema "pengunaan matematika, statistika dan computer dalam berbagai disiplin ilmu untuk mewujudkan kemakmuran bangsa".

Kami berharap seminar ini menjadi tempat untuk para dosen dan mahasiswa untuk berbagi pengalaman dan membangun kerjasama antar ilmuan. Seminar semacam ini tentu mempunyai pengaruh yang positif pada iklim akademik khususnya di Unila.

Atas nama panitia, kami mengucapkan banyak terima kasih kepada Rektor, ketua LPPM Unila, dan Dekan FMIPA Unila serta ketua jurusan matematika FMIPA Unila dan semua panitia yang telah bekerja keras untuk suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Dan semoga seminar ini dapat menjadi agenda tahunan bagi jurusan matematika FMIPA Unila`

Bandar Lampung, Desember 2017

Prof. Mustofa Usman,Ph.D

Ketua Pelaksana

DAFTAR ISI

REPRESENTASI OPERATOR LINEAR DARI RUANG BARISAN l_{13} KE RUANG BARISAN $l_{13/_{12}}$

Amanda Yona Ningtyas[1], Muslim Ansori[2], Subian Saidi[3], Amanto[4]
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung
Jalan Prof. Dr. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
E-Mail : yonamanda26@gmail.com
[1)]Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
[2,3,4)]Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

ABSTRAK

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator. Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga. Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_{13} \to l_{13/_{12}}$, *dengan* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $l_{13} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{13})^{\frac{1}{13}} < \infty \right\}$ *dan* $l_{13/_{12}} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{12}{13}} < \infty \right\}$ *merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya dikontruksikan operator A dari ruang barisan* l_{13} *ke ruang barisan* $l_{13/_{12}}$ *dengan basis standar* $\{e_k\}$ *dengan* $e_k = (0,0,\dots,1_{(k)},\dots)$*.dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang Banach.*

Kata Kunci *: Operator, Ruang Barisan Terbatas*

1. PENDAHULUAN

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_{13} \to l_{13/_{12}}$ dengan $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$,

$l_{13} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{13})^{\frac{1}{13}} < \infty \right\}$ dan

$l_{13/_{12}} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{12}{13}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \in l_{13}$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul suatu permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_{13/_{12}}$. Oleh karena itu, penelitian akan difokuskan pada permasalahan tersebut.

2. LANDASAN TEORI

OPERATOR

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator [1].

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap x, y ∈ X dan setiap skalar α berlaku A(αx) = αAx dan A(x + y) = Ax + Ay.

BARISAN

Definisi 2.2.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka x_1, x_2,...,x_n,... dikatakan barisan.

Teorema 2.2.3

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas [2].

Definisi 2.2.4

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega: \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{\bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty\right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

Definisi 2.2.5

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$ [3].

$$\left(x_j y_j\right)_{j \in N} \in l^\infty \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|^p \|y\|^q \qquad (3)$$

RUANG VEKTOR

Definisi 2.3.1

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku:

i. $x + y = y + x$
ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$
iv. ada $-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$
v. $1 \cdot x = x$
vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$
vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

[3]

BASIS

Definisi 2.4.1

Ruang vektor V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor *V*.

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \tag{4}$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$$

Definisi 2.4.2

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear [3].

Definisi 2.4.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n [3].

RUANG BERNORMA

Definisi 2.5.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi $x \in X \to \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor *x*. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau *X* saja asalkan normanya telah diketahui [3].

RUANG BANACH

Definisi 2.6.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen [3].

3. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkonstruksikan operator A dari ruang barisan terbatas l_{13} ke ruang barisan $l_{\frac{13}{12}}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\dots,1_{(k)},\dots\right)$.
2. Mengkonstruksikan norma operator A
3. Menyelidiki apakah koleksi semua operator A membentuk ruang Banach
4. Merepresentasikan operator A sebagai matriks takhingga yang dikerjakan dari ruang barisan terbatas l_{13} ke ruang barisan $l_{\frac{13}{12}}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\dots,1_{(k)},\dots\right)$.

4. PEMBAHASAN

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, yang dimaksud dengan ruang barisan terbatas l_{13} dapat didefinisikan sebagai :

$$l_{13} = \left\{ x = (x_i) \middle| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{13} \right)^{\frac{1}{13}} < \infty \right\}$$

dengan $(x_i) = (x_1, x_2, \dots)$ merupakan barisan bilangan real $\mathbb{R}$. Ruang barisan l_{13} merupakan ruang Banach dengan ruang dual $(l_{13})^* = \{x^*: l_{13} \to \mathbb{R}\}$ yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu pada l_{13}.

Untuk sebarang $x^* \in (l_{13})^*$ dan $x \in l_{13}$, penulisan $\langle x, x^* \rangle$ dimaksudkan sebagai fungsional x^* pada x atau $x^*(x)$. Barisan vektor $\{e_n\} \subset l_{13}$ dinamakan basis pada l_{13} jika untuk setiap vektor $x \in l_{13}$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{a_n\}$ sehingga

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Barisan $\{e_n^*\} \in (l_{13})^*$ dengan $\|e_n^*\| = 1$ untuk setiap n dikatakan biortonormal terhadap basis $\{e_n\} \subset l_{13}$ jika

$$\langle e_m, e_n^* \rangle = \delta_{mn}$$

dengan $\delta_{mn} = 1$ untuk $m = n$ dan $\delta_{mn} = 0$ untuk $m \neq n$. Selanjutnya, pasangan $\left\{\{e_n\},\{e_n^*\}\right\}$ disebut sistem biortonormal pada l_{13} maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

dengan $\langle x, e_n^* \rangle = a_n$.

Jika $A \in \mathcal{L}_c\left(l_{13}, l_{13/_{12}}\right)$ maka operator $A^* \in \mathcal{L}_c\left((l_{13})^*, \left(l_{13/_{12}}\right)^*\right)$ disebut operator pendamping A jika dan hanya jika untuk setiap $x \in l_{13}$ dan $y^* \in (l_{13})^*$, berlaku

$$\langle A(x), y^* \rangle = \langle x, A^*(y^*) \rangle$$

Jadi, jika $\{e_n\} \subset l_{13}$ dan $\{d_m^*\} \in \left(l_{13/_{12}}\right)^*$ diperoleh

$$\langle A(e_n), d_m^* \rangle = \langle e^n, A^*(d_m^*) \rangle$$

Jika$\{e_n\},\{f_n\} \subset l_{13}$ basis pada l_{13} dan $\{d_m\} \subset l_{13/12}$, maka untuk setiap $A \in \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/12})$ berlaku

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n, A^*(d_m^*)\rangle e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty}\langle A(e_n), d_m^*\rangle e_n^* \quad \text{(a)}$$

Dan

$$A^*(d_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle e_n, A^*(d_m^*)\rangle f_n^* = \sum_{n=1}^{\infty}\langle A(e_n), d_m^*\rangle f_n^* \quad \text{(b)}$$

Berdasarkan persamaan (a) dan (b) diperoleh

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), d_m^*\rangle e_k^*\right\| = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(f_k), d_m^*\rangle f_k^*\right\| \quad \text{(c)}$$

Berdasarkan persamaan (a), (b) dan (c) didefinisikan pengertian operator dari ruang barisan l_{13} ke ruang barisan $l_{13/12}$ sebagai berikut

Definisi 1.1 Operator $A \in \mathcal{L}_c\left(l_{13}, l_{13/12}\right)$ merupakan operator-SM jika

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), d_m^*\rangle e_k^*\right\| < \infty$$

Dengan $\{e_n\} \subset l_{13}$ basis pada l_{13}. Dan $\{d_m\} \subset l_{13/12}$ basis pada $l_{13/12}$.

Dapat dipahami bahwa bilangan$\|A\|$dengan

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\langle A(e_k), d_m^*\rangle e_k^*\right\| < \infty$$

Tidak bergantung pada pemilihan basis $\{e_n\}$ pada l_{13}.

Selanjutnya, notasi $SM(l_{13}, l_{13/12})$ menyatakan koleksi semua operator-SM dari ruang barisan l_{13} ke ruang barisan $l_{13/12}$.

Teorema 1.2 Untuk setiap $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ berlaku

i. $\|A\| \leq \|A\|_{SM}$
ii. $SM(l_{13}, l_{13/12})$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|.\|_{SM}$
iii. Jika$A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ maka A operator kompak.

Bukti :

i. Diambil sebarang $\{e_n\} \subset l_{13}$ basis pada l_{13}, $\{d_m\} \subset l_{13/12}$ basis pada $l_{13/12}$dan $x \in l_{13}$, maka berdasarkan (a), (b) dan (c) diperoleh

$$\|A\,(x)\| = \left\|\sum_{m=1}^{\infty}\langle A(x), d_m^*\rangle\, d_m\right\|$$
$$= \left\|\sum_{m=1}^{\infty}\langle x, A^*(d_m^*)\rangle\, d_m\right\|$$

$$\le \|x\| \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(d_m^*)\|$$

$$\|x\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

$$= \|x\| \|A\|_{SM}$$

Yang berakibat $\|A\| \le \|A\|_{SM}$.

ii. Pertama ditunjukkan bahwa $SM(l_{13}, l_{13/12})$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|.\|_{SM}$ sebab :

a.) Untuk setiap $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| \ge 0$$

dan

$$\|A\|_{SM} = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| = 0$$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* = A^*(d_m^*) = \theta$ (untuk setiap m)

$\Leftrightarrow A^* = 0$ (operator nol)

$\Leftrightarrow A = 0$ (operator nol)

b.) Untuk setiap $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dan skalar α, diperoleh

$$\|\alpha A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

$$= |\alpha| \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

$$= |\alpha| \|A\|_{SM}$$

c.) Jika diberikan $A_1, A_2 \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ maka

$$\|A_1 + A_2\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_1 + A_2)(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle \big((A_1)(e_k) + (A_2)(e_k)\big), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* + \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_2(e_k), d_m^* \rangle e_k^* \right\|$$

Dengan kata lain,

$$\|A_1 + A_2\|_{SM} \le \|A_1\|_{SM} + \|A_2\|_{SM}$$

Selanjutnya menunjukkan kelengkapan ruang $SM\ (l_{13}, l_{13/_{12}})$ sebagai berikut :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$ Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positif $i, j \geq n_0$, berlaku

$$\|A_i - A_j\|_{SM} \leq \frac{\varepsilon}{13}$$

Akan dibuktikan bahwa terdapat$A \in SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$ sehingga

$$\lim_{i\to\infty} \|A_i - A\|_{SM} = 0$$

Karena

$$\|A_i - A_j\|_{\mathcal{L}_c\left(l_{13}, l_{13/_{12}}\right)} \leq \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{13}$$

Untuk setiap $A_i, A_j \in SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$ dengan $i, j \geq n_0$, maka barisan $\{A_i\}$ juga merupakan barisan Cauchy di dalam $\mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/_{12}})$. Karena $\mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/_{12}})$ ruang lengkap maka terdapat $A \in \mathcal{L}_c\left(l_{13}, l_{13/_{12}}\right)$ sehingga $\lim_{j\to\infty} A_j = A$. Oleh karena itu,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_i - A)(e_k), d_m^*\right) e_k^* \right\|$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left((A_i - A)(e_k), d_m^*\right) e_k^* \right\|$$

$$= \lim_{j\to\infty} \|A_i - A_j\|_{SM} < \frac{\varepsilon}{13}$$

Untuk sebarang bilangan bulat $i \geq n_0$. Dengan kata lain, $A - A_i \in SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$, untuk $i \geq n_0$. Oleh karena itu, $A - A_{n_0} + A_{n_0} = A \in SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$ dan terbukti bahwa barisan $\{A_i\}$ konvergen ke suatu $A \in SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$. Jadi, $SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$ merupakan ruang bernorma yang lengkap atau ruang Banach.

iii. Jika$A \in SM(l_{13}, l_{13/_{12}})$ dan $x \in l_{13}$, maka

$$A(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan bulat positif n, dapat didefinisikan operator $A_n: l_{13} \to l_{13/_{12}}$dengan

$$A_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \langle A(x), d_m^* \rangle d_m$$

Jelas bahwa $A_n \in \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/_{12}})$ dan A_n merupakan operator berhingga. Dengan kata lain, A_n operator kompak. Karena$\{A_n\}$ konvergen ke K maka K operator kompak.

BerdasarkanTeorema 1.2 diperoleh

Akibat 1.3 $SM(l_{13}, l_{13/12}) \subset K\left(l_{13}, l_{13/12}\right) \subset \mathcal{L}_c(l_{13}, l_{13/12})$ dengan $K\left(l_{13}, l_{13/12}\right)$ koleksi operator kompak dari l_{13} ke $l_{13/12}$.

Operator $A \in SM(l_{13}, l_{13/12})$ dapat diwakili oleh matriks tak hingga $A = A_{\infty\times\infty}$. Oleh karena itu, dalam bentuk matriks tak hingga karakteristik operator-SM tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

Teorema 1.4 Suatu operator linear kontinu$A: l_{13} \to l_{13/12}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $\left(a_{ij}\right)$ yang memenuhi :

i.) $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right\} \in l_{13/12}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_{13}$

ii.) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^{13} < \infty$

iii.) $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| < \infty$

Bukti :

(Syarat perlu) karena $A: l_{13} \to l_{13/12}$ linear dan kontinu maka dengan sendirinya berlaku i) dan ii). Operator A dalam bentuk matriks $\left(a_{ij}\right)$ dikerjakan pada basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\ldots,1_{(k)},\ldots\right)$ berbentuk

$$Ae_k = \left(a_{jk}\right)_{j=1}^{\infty}$$

Karena$A = \left(a_{ij}\right)$ operator-SM maka

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(Ae_k, d_m^*)d_m\right\| = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}d_m\right\|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}\right\| < \infty$$

(Syarat cukup) berdasarkan i) dan ii) maka $A = \left(a_{ij}\right): l_{13} \to l_{13/12}$ linear dan kontinu.

Selanjutnya, berdasrkan iii) diperoleh

$$\|A\|_{SM} = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(Ae_k, d_m^*)d_m\right\| = \sum_{m=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}\right\| < \infty$$

Terbukti$A = \left(a_{ij}\right)$ merupakan operator-SM

Contoh 1.5 Matriks $A = \left(a_{ij}\right)$dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{i^{13/12}} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Merepresentasikan operator-SM $A: l_{13} \to l_{13/12}$sebab :

i.) Untuk setiap $x = \left(x_j\right) \in l_{13}$ berlaku

$$\|Ax\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{x_j}{j^{13/12}}\right|^{13/12}\right)^{\frac{12}{13}} < \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^{13/12}\right)^{\frac{12}{13}} < \infty$$

Jadi, $Ax \in l_{13/12}$

ii.) Bagian kedua terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^{13/12} = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{1}{i^{13/12}}\right|^{13/12} < \infty$$

iii.) Bagian ketiga terpenuhi sebab

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{13/12}} < \infty$$

5. SIMPULAN

Operator linear dan kontinu A : $l_{13} \to l_{13/12}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\} \in l_{13/12}$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_{13}$
2. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^{13/12} < \infty$
3. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}| < \infty$

Koleksi semua operator SM A : $l_{13} \to l_{13/12}$ yang dinotasikan dengan SM $(l_{13}, l_{13/12})$ membentuk ruang Banach.

KEPUSTAKAAN

[1] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.

[2] Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

[3] Darmawijaya, S. (2007). *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.