p-ISSN 2685-9009; e-ISSN 2685-9580

ASIMTOT: JURNAL KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Volume 4 Nomor 1, Juni – November 2022, halaman 51 – 61

Tersedia Daring pada https://journal.unwira.ac.id/index.php/ASIMTOT

VALIDASI PENGARUH JUMLAH PARTISI DALAM PERHITUNGAN METODE INTEGRASI NUMERIK TERHADAP TINGKAT AKURASI DAN GALAT MENGGUNAKAN MATLAB (STUDI KASUS: RIEMANN KIRI DAN ATURAN TRAPESIUM)

VALIDATION OF THE EFFECT OF NUMBER OF PARTITIONS IN CALCULATION OF NUMERIC INTEGRATION METHODS ON ACCURACY AND ERROR LEVEL USING MATLAB (CASE STUDY: LEFT RIEMANN AND TRAPESIUM RULE)

Emir Dzakwan Kamal Zein[1)], Syamsurijal Rasimeng[2)], Ilham Dani[3)]

[1,2,3]Universitas Lampung

emirdzakwan02@gmail.com

Abstrak: Metode integrasi numerik digunakan sebagai solusi untuk menyelesaikan persoalan yang tidak bisa dikerjakan dengan cara biasa. Penelitian ini berfokus kepada metode integrasi Riemann kiri dan aturan trapesium dengan tujuan untuk mengetahui tingkat akurasi serta galat yang dipengaruhi oleh banyaknya partisi dalam proses perhitungan. Uji coba beberapa penyelesaian soal integral menggunakan software MATLAB dari suatu jenis fungsi polinomial, trigonometri, dan ekspnonen dilakukan untuk memvalidasi pengaruh banyaknya partisi terhadap tingkat keakuratan dan galat dari setiap metode integrasi numerik. Hasil yang didapatkan yakni tingkat keakuratan eksperimental dengan menggunakan metode integrasi Riemann kiri semakin mendekati nilai 1 seiring bertambahnya jumlah partisi, sedangkan jika menggunakan metode integrasi aturan trapesium mendekati nilai 2. Selain itu, secara umum nilai galat semakin kecil seiring bertambahnya jumlah partisi yang digunakan untuk komputasi numerik. Nilai galat yang dihasilkan metode integrasi aturan trapesium lebih kecil dibandingkan metode intergasi Riemann kiri pada jumlah partisi yang sama sehingga lebih baik.

Kata Kunci: Metode Riemann, Aturan Trapesium, Integrasi Numerik

Abstract: *Numerical integration method is used as a solution to solve problems that cannot be done in the usual way. This study focuses on the left Riemann integration method and the trapezoidal rule with the aim of knowing the level of accuracy and error that is influenced by the number of partitions in the calculation process. Trials of solving several integral problems using MATLAB software from a type of polynomial, trigonometric, and exponential functions were carried out to validate the effect of the number of partitions on the accuracy and error level of each numerical integration method. The results obtained are the level of experimental accuracy using the left Riemann integration method is getting closer to the value 1 as the number of partitions increases, whereas if using the trapezoidal rule integration method approaches the value 2. numeric. The error value generated by the trapezoidal rule integration method is smaller than the left Riemann integration method on the same number of partitions so it is better.*

Keywords*: Riemann Method, Trapezoidal Rule, Numerical Integration*

Cara Sitasi: Zein, E.D.K., Rasimeng, S., & Dani, I. (2022). Validasi Pengaruh Jumlah Partisi Dalam Perhitungan Metode Integrasi Numerik Terhadap Tingkat Akurasi dan Galat Menggunakan Matlab (Studi Kasus: Riemann Kiri Dan Aturan Trapesium). *Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika*, “4”(“1”), “51-61”

Metode numerik adalah cara penyelesaian suatu masalah dengan prinsip melakukan perhitungan secara berulang (iterasi) sehingga mendekati nilai aslinya (eksak) (Panjaitan, 2017). Beberapa kasus perhitungan tidak semua bisa dikerjakan secara mudah. Berdasarkan prinsip matematika perlu diketahui suatu permasalahan mempunyai solusi atau tidak. Oleh sebab itu, perhitungan biasa tidak bisa dipakai dalam menyelesaikan semua permasalahan (Hutagalung, 2017).

Integrasi numerik merupakan cara penyelesaian suatu permasalahan integral dengan menggunakan prinsip metode numerik (Maure dan Mungkasi, 2021). Bidang matematika terapan khususnya kimia komputasi dan fisika matematika paling sering memanfaatkan metode integrasi numerik (Bailey and Borwein, 2011; Zhao and Zhang, 2014). Solusi perkiraan hasil dari integral numerik yakni dengan cara mendekati fungsi anti turunan dengan fungsi polinomial yang didapatkan dari data yang ada (Triatmodjo, 2016). Terdapat berbagai metode integrasi numerik yakni diantaranya metode Riemann, metode Simpson 1/3, metode Simspon 3/8, dan metode aturan trapesium (Mettle, dkk., 2016).

Fungsi $y = f(x)$ adalah suatu grafik pada bidang xy serta fungsi kontinu dan tidak negatif pada rentang $a \leq x \leq b$. Jika terdapat area R dengan dibatasi grafik $y = f(x)$, $x = b$, $x = a$ dan $y = 0$. Maka untuk mencari luas area R di bawah grafik $y = f(x)$ pada rentang $a \leq x \leq b$ dapat dicari menggunakan persamaan berikut (Lumbantoruan, 2019):

$$A(M) = \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

Metode Riemann adalah suatu cara penyelesaian antiderivatif dengan rentang tertentu yang menggunakan konsep limit pada jumlahan Riemann terhadap fungsi yang ditentukan (Maure dan Mungkasi, 2021). Pengembangan solusi antiderivatif tertentu menggunakan konsep penjumlahan Riemann sebagai berikut (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \quad (2)$$

Suatu hampiran untuk integral dapat menggunakan sebarang jumlahan Riemann. Jika n merupakan bilangan asli serta $[a, b]$ terbagi atas n selang bagian dengan Panjang $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, maka didapatkan (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \quad (3)$$

Sebarang titik pada interval bagian ke-i merupakan x_i^* dengan $[x_{i-1}, x_i]$. Apabila $x_i^* = x_{i-1}$ merupakan titik ujung kiri selang ditentukan sebagai x_i^*, maka didapatkan persamaan jumlahan Riemann kiri sebagai berikut(Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \quad (4)$$

Metode aturan trapesium adalah suatu cara penyelesaian antiderivatif tertentu dari suatu fungsi dengan menggunakan pendekatan rumus luas trapesium. Menurut Maure (2019) bahwa kurva $f(x)$ dibagi menjadi $n + 1$ titik pada aturan aturan trapesium. Persamaan umum dari metode aturan trapesium yakni sebagai berikut (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) \quad (5)$$

Dimana $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ serta $x_i = a + i\Delta x$, dengan $i = 0,1,2,3, \ldots, n$ dan $f_i = f(x_i)$.

Data numerik merupakan taksiran, hamparan, atau pendekatan yang sesuai dengan nilai sebenarnya. Dengan kata lain, terdapat kesalahan (*error*) terhadap nilai eksak ketika menggunakan penyelesaian numerik (Atmika, 2016). Galat atau sesatan wajib diketahui saat melakukan komputasi numerik memakai computer (Muharam dan Bismo, 2009). Menurut Atmika (2016) terdapat hubungan antara nilai aproksimasi, nilai sebenarnya, dan kesalahan yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E_e = p - p^* \quad (6)$$

Dimana p adalah nilai sebenarnya, p^* adalah nilai aproksimasi, dan E_e adalah kesalahan terhadap nilai sebenarnya yang disebut sebagai kesalahan mutlak. Adapun tingkat kesalahan relatif biasa dinyatakan dalam bentuk persen yang dicari dengan membandingkan kesalahan mutlak dengan nilai sebenarnya sehingga dapat dirumuskan sebagai:

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{p} \times 100\% \quad (7)$$

Tingkat akurasi metode integrasi numerik terbagi menjadi tingkat keakuratan eksperimental dan tingkat keakuratan formal. Tingkat keakuratan formal untuk metode integrasi Riemann tengah dan aturan trapesium yakni bernilai 2. Adapun tingkat keakuratan formal untuk metode integrasi Riemann kiri dan Riemann kanan bernilai 1 (Maure dan Mungkasi, 2021). Tingkat keakuratan eksperimental metode integrasi numerik dapat dihitung menggunakan persamaan berikut (Hidayat dkk., 2014):

$$R_t = \frac{\log(\frac{E_i}{E_{i+1}})}{\log(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}})} \quad (8)$$

Dimana E_i merupakan galat metode integrasi numerik pada saat diksritisasi domainnya memakai langkah diskrit Δx_i.

Metode Penelitian

Pelaksanaan penelitian dilakukan melalui beberapa tahapan yang meliputi penentuan soal integral, pengolahan data, dan analisa data. Jumlah soal integral yang digunakan untuk pengambilan data dalam penelitian sebanyak 3 buah. Soal-soal yang ada merupakan integral dari suatu fungsi trigonometri, polinomial, dan eksponen. Selanjutnya, pengolahan data dilakukan menggunakan *software* MATLAB. Proses analisis data dilakukan untuk memperoleh nilai eksak, nilai aproksimasi, nilai galat mutlak serta galat rlatif, dan tingkat keakuratan eksperimental.

Pengolahan data dilakukan dengan membuat suatu *script* pemrograman. Teknik komputasi numerik menggunakan *software* MATLAB diterapkan dalam penelitian ini yang bertujuan untuk mendapatkan hasil yang akurat, efektif serta efisien. Pengolahan data dijalankan oleh sebuah *script* berisi sebuah pemrograman yang mengacu pada persamaan umum perhitungan metode Riemann kiri dan aturan trapesium. Hasil akhir dari pengolahan data ini berupa suatu nilai aproksimasi serta *plotting* suatu kurva perhitungan integral tentu dengan pengaplikasian metode integral Riemann kiri dan aturan trapesium. Selanjutnya, dilakukan analisa data dari hasil perhitungan integrasi numerik untuk mengetahui tingkat akurasi dan kesalahan perhitungan yang dihasilkan. Selain itu, kurva hasil perhitungan integral tentu dengan pengaplikasian metode integral Riemann kiri dan aturan trapesium dibandingkan untuk mendukung tahap analisa data.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

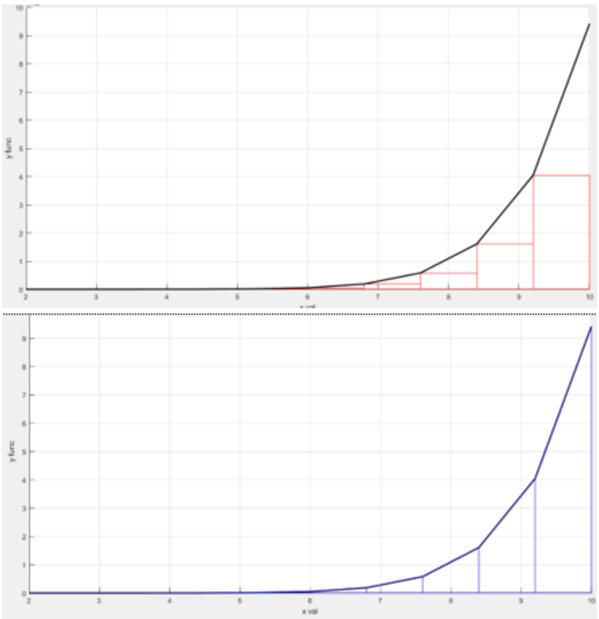
Adapun pengujian tingkat akurasi dan galat dengan tiga jenis integral fungsi yang berbeda menggunakan metode integrasi numerik dapat dilihat pada **Tabel 1**. Pengujian ini dilakukan dengan menggunakan jumlah partisi yang bervariasi. Hal tersebut dilakukan untuk mengetahui pengaruh banyaknya jumlah partisi terhadap tingkat akurasi dan galat.

Tabel 1. Data Pengujian dan Validasi Integrasi Numerik

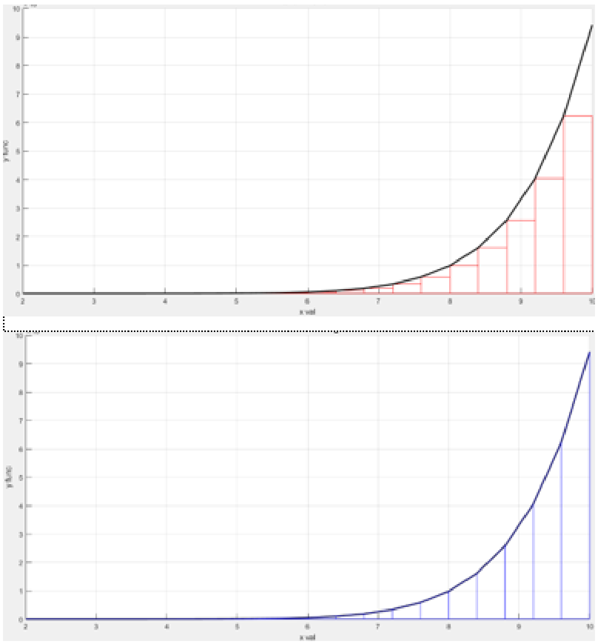
Soal	Metode	Jumlah Partisi	Nilai Eksak	Nilai Aproksimasi	Galat Multak	Galat Relatif	Akurasi	Δx
$\int_{2}^{10} (-x^5 + 3x^3 - 2x - 1)^2 dx$	Riemann Kiri	10	8442893706	5181859543	3261034162	0.386246028	0.8931802	0.8
		20	8442893706	6687068357	1755825349	0.207964877	0.9489031	0.4
		40	8442893706	7533330226	909563479.3	0.107731248	0.975051	0.2
		80	8442893706	7980178894	462714811.5	0.054805239	0.9876776	0.1
		160	8442893706	8209551757	233341949	0.027637675	0.9938771	0.05
	Aturan Trapesium	10	8442893706	8947089252	504195546.5	0.059718334	1.991548	0.8
		20	8442893706	8569683211	126789505.2	0.015017304	1.9978819	0.4
		40	8442893706	8474637654	31743947.87	0.003759842	1.9994701	0.2
		80	8442893706	8450832608	7938902.126	0.000940306	1.9998675	0.1
		160	8442893706	8444878614	1984907.798	0.000235098	1.9999669	0.05
$\int_{-5}^{15} 2\cos^2(2x) \cdot 5\sin^2(7x)\, dx$	Riemann Kiri	5	50.2306669366892	74.605615045658	24.374948108968800	0.485260292	2.471853919	4
		10	50.2306669366892	54.6244794886865	4.393812551997300	0.08747271	2.114258572	2
		20	50.2306669366892	49.2158533425133	1.014813594175900	0.020203068	-1.14792773	1
		40	50.2306669366892	47.9818870100819	2.248779926607300	0.044769064	2.282782205	0.5
		80	50.2306669366892	50.6927936127128	0.462126676023601	0.00920009	1.88483	0.25
	Aturan Trapesium	5	50.2306669366892	72.4722723539888	22.2416054172996	0.442789371	2.740905925	4
		10	50.2306669366892	53.5578081428519	3.3271412061627	0.066237249	1.103738519	2
		20	50.2306669366892	48.682517669596	1.5481492670932	0.030820799	-0.700270653	1
		40	50.2306669366892	47.7152191736233	2.51544776306590	0.050077929	2.935564804	0.5
		80	50.2306669366892	50.5594596944835	0.3287927577943	0.006545658	2.491516138	0.25
$\int_{0}^{1} e^{x^2} \cdot 7^{2x^2-3} dx$	Riemann Kiri	100	0.046105732062249	0.044210333195285	0.001895398866964	0.041109831	0.988005157	0.01
		200	0.046105732062249	0.045150120427852	0.000955611634397	0.020726526	0.994038143	0.005
		400	0.046105732062249	0.045625947653731	0.000479784408518	0.010406177	0.997028082	0.0025
		800	0.046105732062249	0.045865345176328	0.000240386885921	0.005213818	0.998516308	0.00125
		1600	0.046105732062249	0.045985414946759	0.000120317115490	0.002609591	0.999258723	0.000625
	Aturan Trapesium	100	0.046105732062249	0.046137385813281	0.000031653751032	0.000686547	1.999774529	0.01
		200	0.046105732062249	0.04611364673685	0.000007914674601	0.000171664	1.999943618	0.005
		400	0.046105732062249	0.046107710808229	0.000001978745980	4.29176E-05	1.999985902	0.0025
		800	0.046105732062249	0.046106226753578	0.000000494691329	1.07295E-05	1.999996480	0.00125
		1600	0.046105732062249	0.046105855735383	0.000000123673134	2.68238E-06	1.999999137	0.000625

Plotting kurva penyelesaian kasus integrasi numerik dapat dibuat menggunakan bantuan MATLAB. Kurva yang dihasilkan dapat dianalisis dengan melihat jumlah partisi yang mengisi luas area suatu persoalan integral tentu. Dengan demikian validasi tingkat akurasi dan galat dari suatu metode integrasi numerik juga dapat dilakukan berdasarkan tampilan plotting kurva yang dihasilkan.Untuk memvalidasi pengaruh banyaknya partisi terhadap tingkat akurasi dan galat pada metode Riemann kiri dan aturan trapesium perlu melakukan analisis. Data yang dianalisis berupa nilai komputasi numerik dan kurva. Dalam **Tabel 1** terdapat 3 jenis persoalan integral fungsi yang dilakukan perhitungan untuk mendapatkan nilai eksak, nilai aproksimasi, galat, dan tingkat akurasinya.

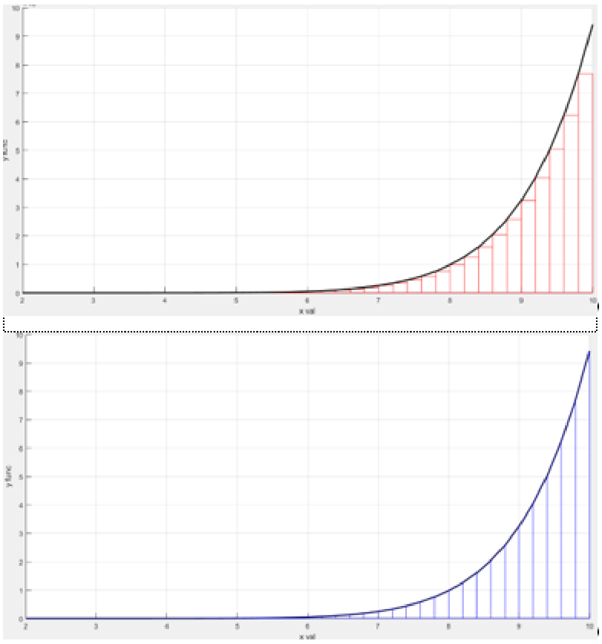
Pada kasus pertama berupa persoalan dari suatu integral fungsi polinomial. Uji coba yang dilakukan menggunakan 10, 20, 40, 80, dan 160 partisi. Nilai eksak pada kasus ini yakni 8442893705.71774. Berdasarkan hasil uji coba pada **Tabel 1** diperoleh tingkat akurasi dan nilai galat yang bervariasi.



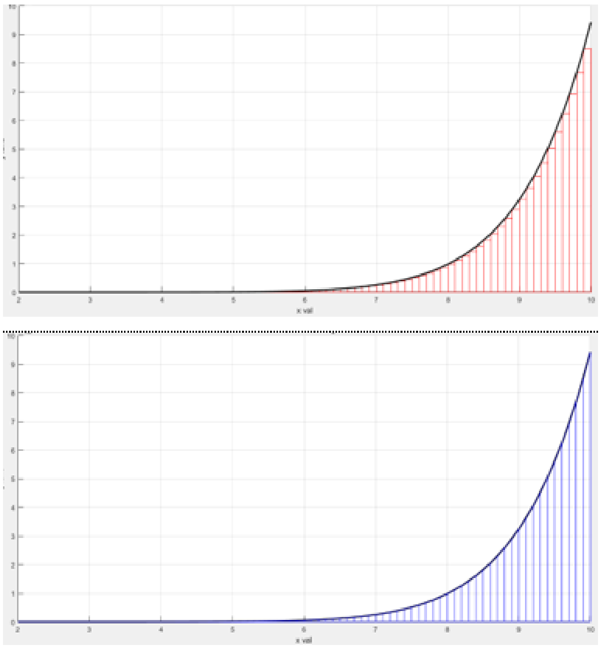
Gambar 1. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Polinomial dengan 10 Partisi



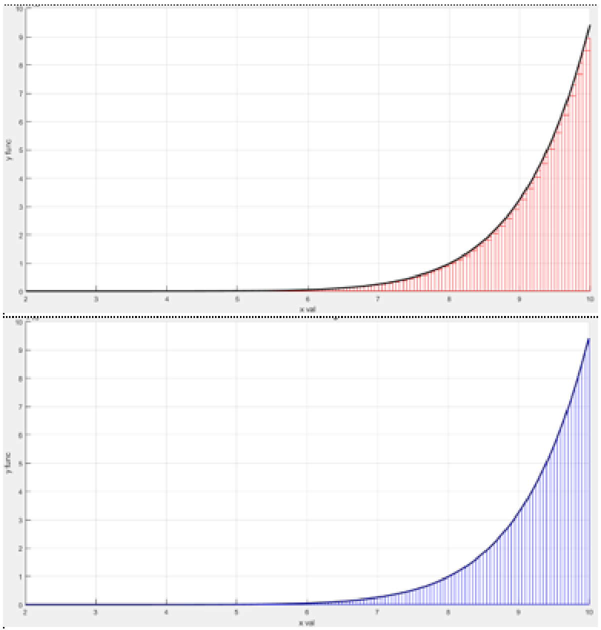
Gambar 2. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Polinomial dengan 20 Partisi



Gambar 3. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Polinomial dengan 40 Partisi



Gambar 4. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Polinomial dengan 80 Partisi

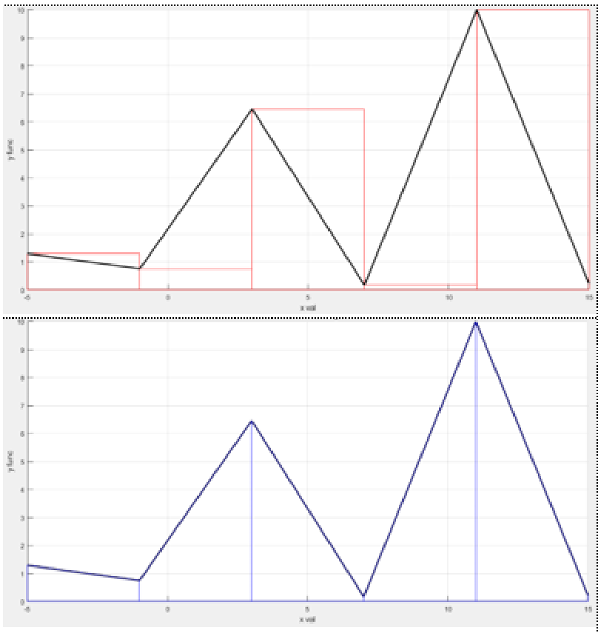


Gambar 5. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Polinomial dengan 160 Partisi

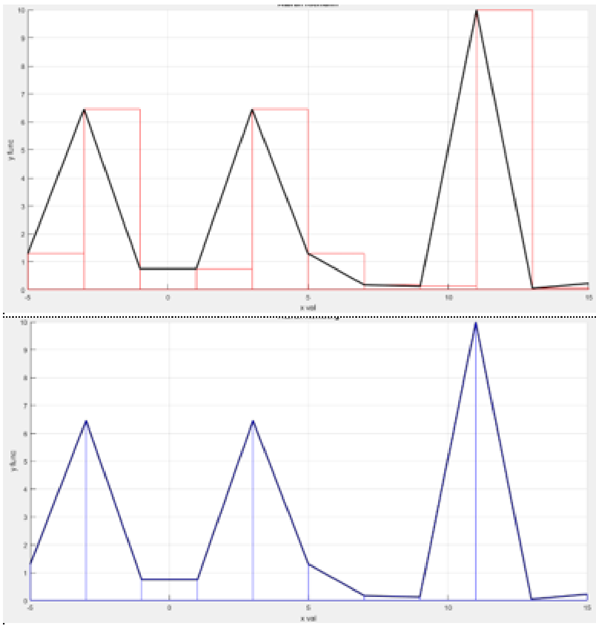
Penyelesaian kasus pertama dengan menggunakan metode integrasi Riemann kiri menghasilkan nilai galat yang semakin kecil seiring meningkatnya jumlah partisi yang digunakan. Selain itu, tingkat akurasi semakin mendekati nilai 1 seiring bertambahnya jumlah partisi. Hal ini juga dibuktikan dengan perolehan *plotting* kurva penyelesaian soal integral dengan metode Riemann kiri serta aturan trapesium pada **Gambar 1**, **Gambar 2**, **Gambar 3**, **Gambar 4**, dan **Gambar 5**. Berdasarkan *plotting* kurva-kurva tersebut terlihat jika semakin banyak jumlah partisi yang digunakan dalam proses perhitungan maka akan semakin mendekati luas daerah sesungguhnya dari suatu integral tentu fungsi polinomial. Hasil *plotting* kurva pada **Gambar 1**, **Gambar 2**, **Gambar 3**, **Gambar 4**, dan **Gambar 5** juga terlihat jika nilai aproksimasi metode integrasi aturan trapesium lebih mendekati luas daerah sesungguhnya dari suatu integral tentu fungsi polynomial. Dengan demikian pada kasus pertama terbukti jika nilai aproksimasi yang dihasilkan metode integrasi Riemann kiri semakin mendekati nilai sebenarnya seiring bertambahnya jumlah partisi yang digunakan para proses komputasi numerik.

Begitupun dengan penyelesaian kasus pertama menggunakan metode integrasi aturan trapesium yang mana nilai galat semakin kecil seiring bertambahnya jumlah partisi yang digunakan pada proses perhitungan. Selain itu, tingkat akurasi semakin bertambah mendekati nilai 2 seiring bertambahnya jumlah partisi. Dari hasil uji coba penggunaan jumlah partisi yang sama dalam perhitungan menggunakan metode integrasi Riemann kiri dan aturan trapesium terlihat bahwa metode integrasi aturan trapesium lebih unggul dibandingkan metode Riemann kiri. Hal ini dibuktikan dengan perolehan nilai galat yang lebih kecil pada jumlah partisi yang sama.

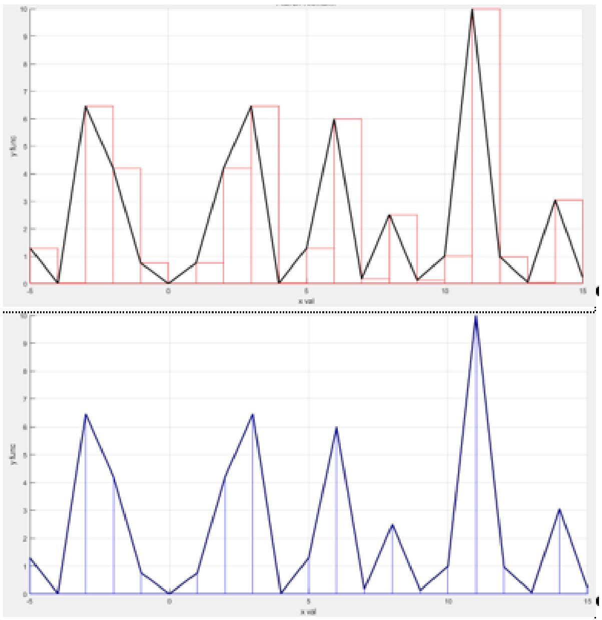
Adapun kasus kedua berupa persoalan dari suatu integral fungsi trigonometri. Uji coba yang dilakukan menggunakan 5, 10, 20, 40, dan 80 partisi. Nilai eksak pada kasus kedua yaitu 50.2306669366892. Dari hasil uji coba pada **Tabel 1** diperoleh tingkat akurasi dan nilai galat yang bervariasi.



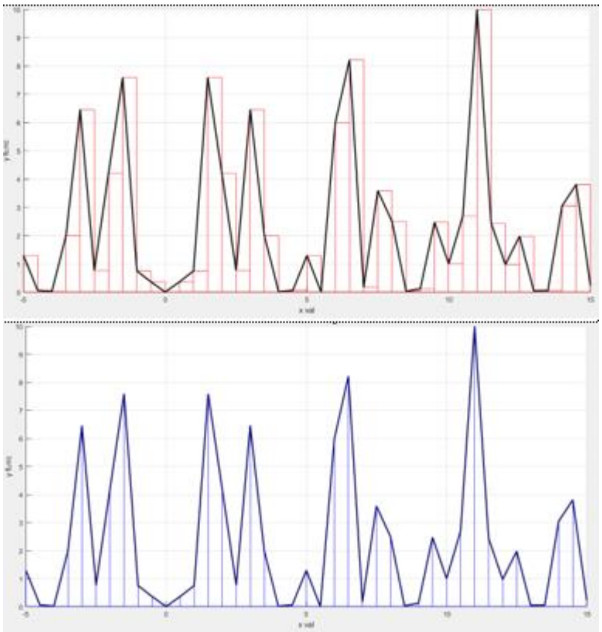
Gambar 6. ***Plot*** **Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Trigonometri dengan 5 Partisi**



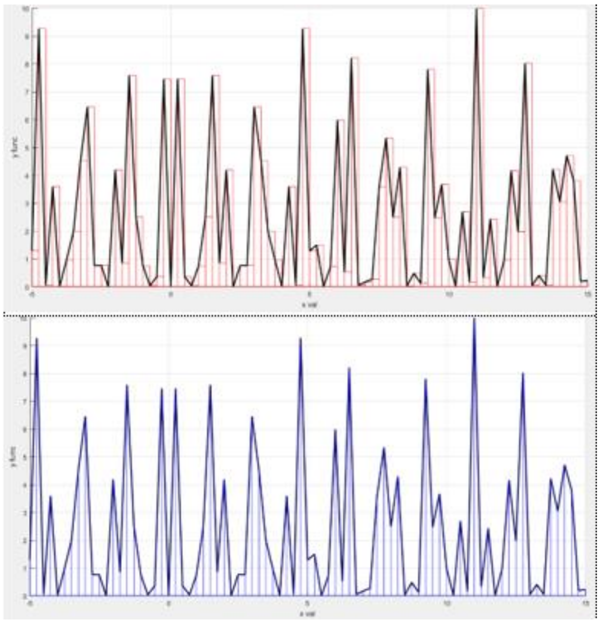
Gambar 7. ***Plot*** **Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Trigonometri dengan 10 Partisi**



Gambar 8. ***Plot*** **Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Trigonometri dengan 20 Partisi**



Gambar 9. ***Plot*** **Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Trigonometri dengan 40 Partisi**

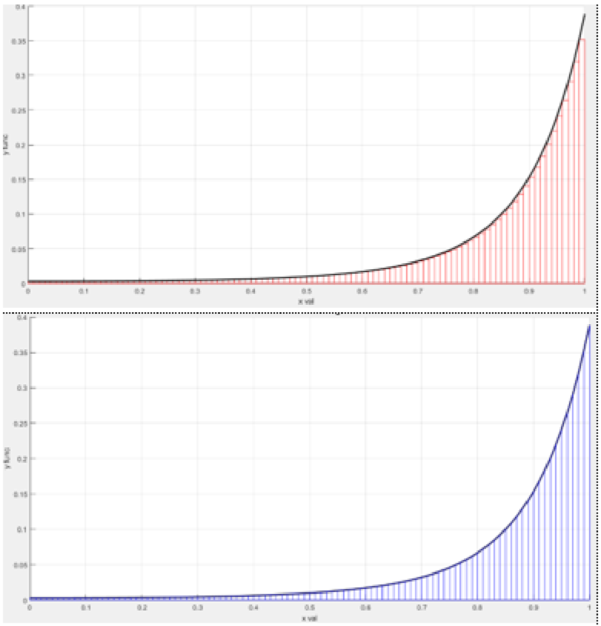


Gambar 10. ***Plot*** **Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Trigonometri dengan 80 Partisi**

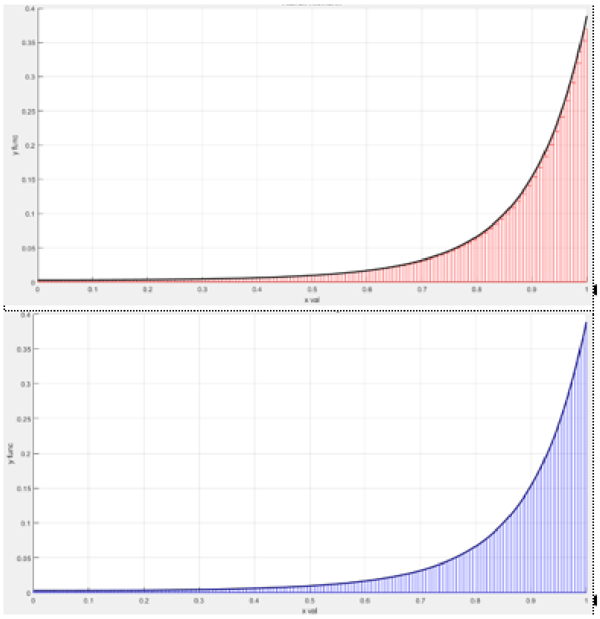
Penyelesaian kasus kedua dengan menggunakan metode integrasi Riemann kiri menghasilkan nilai galat yang semakin kecil seiring meningkatnya jumlah partisi yang digunakan. Tingkat akurasi cenderung semakin mendekati nilai 1 seiring bertambahnya jumlah partisi. Namun, terdapat tingkat akurasi yang bernilai negatif yakni -1.14792773 atau menurun seiring bertambahnya jumlah partisi yang digunakan. Hal ini mungkin disebabkan karena adanya pengaruh nilai hampiran yang semakin menjauh dari nilai sebenarnya sehingga diperlukan penambahan jumlah partisi hingga tingkat keakuratan eksperimental mendekati nilai 1. Dari hasil perolehan *plotting* kurva penyelesaian soal integral dengan metode Riemann kiri dan aturan trapesium pada **Gambar 6**, **Gambar 7**, **Gambar 8**, **Gambar 9**, dan **Gambar 10** terlihat jika semakin banyak jumlah partisi yang digunakan dalam proses perhitungan maka akan semakin mendekati luas daerah sesungguhnya dari suatu integral tentu fungsi trigonometri. Pada kasus kedua terbukti jika nilai hampiran yang dihasilkan metode integrasi Riemann kiri semakin mendekati nilai sebenarnya seiring bertambahnya jumlah partisi yang digunakan para proses komputasi numerik.

Sama halnya dengan penyelesaian kasus kedua menggunakan metode integrasi Riemann kiri, pada metode integrasi aturan trapesium menghasilkan nilai galat yang semakin kecil beriringan dengan bertambahnya jumlah partisi yang digunakan pada proses perhitungan. Tingkat akurasi cenderung semakin mendekati nilai 2 seiring bertambahnya jumlah partisi. Ditemukan pula kasus yang sama dimana tingkat akurasi bernilai negatif yakni -0.700270653. Berdasarkan hasil uji coba penggunaan jumlah partisi yang sama dalam perhitungan menggunakan metode integrasi Riemann kiri dan aturan trapesium terlihat bahwa metode integrasi aturan trapesium lebih unggul dibandingkan metode Riemann kiri yang dbuktikan dengan nilai galat yang lebih kecil serta nilai aproksimasi metode integrasi aturan trapesium lebih mendekati luas daerah sesungguhnya dari suatu integral tentu fungsi trigonometri.

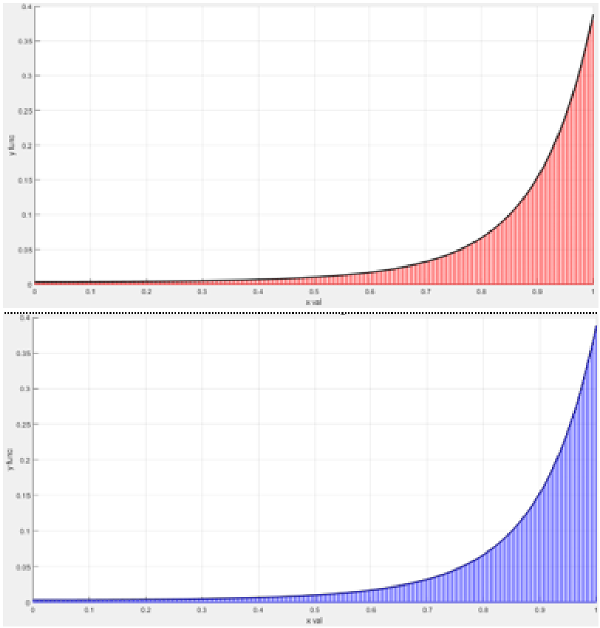
Adapun kasus ketiga berupa persoalan dari suatu integral fungsi eksponen. Uji coba yang dilakukan menggunakan 100, 200, 400, 800, dan 1600 partisi. Nilai eksak pada kasus kedua yaitu 0.046105732062249. Dari hasil uji coba pada **Tabel 1** didapatkan tingkat akurasi dan nilai galat yang bervariasi.



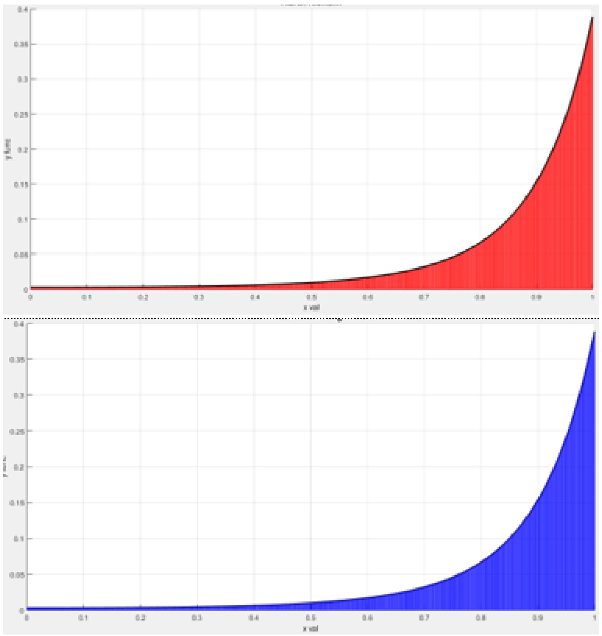
Gambar 11. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Eksponen dengan 100 Partisi



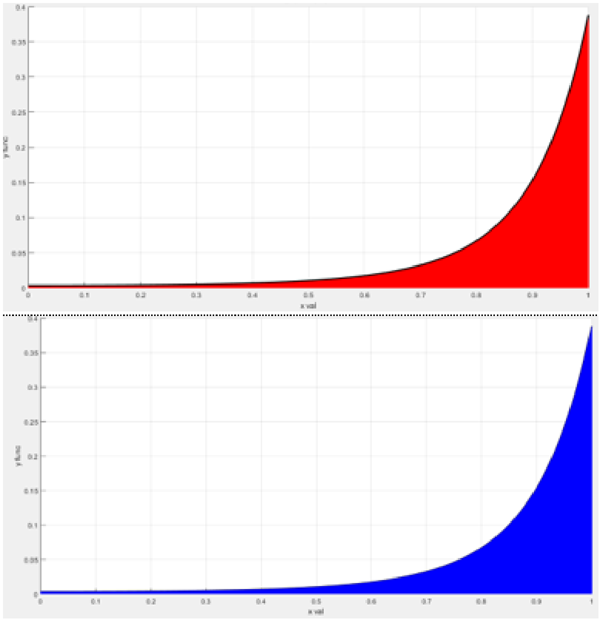
Gambar 12. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Eksponen dengan 200 Partisi



Gambar 13. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Eksponen dengan 400 Partisi



Gambar 14. *Plot* Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Eksponen dengan 800 Partisi



Gambar 15. ***Plot*** **Kurva Riemann Kiri (Merah) dan Aturan Trapesium (Biru) Kasus Integral Fungsi Eksponen dengan 800 Partisi**

Penyelesaian kasus ketiga dengan menggunakan metode integrasi Riemann kiri menghasilkan nilai galat yang semakin kecil seiring meningkatnya jumlah partisi yang digunakan. Tingkat akurasi cenderung semakin mendekati nilai 1 seiring bertambahnya jumlah partisi. Dari hasil perolehan *plotting* kurva penyelesaian soal integral dengan metode Riemann kiri serta aturan trapesium pada **Gambar 11**, **Gambar 12**, **Gambar 13**, **Gambar 14**, dan **Gambar 15** terlihat jika semakin banyak jumlah partisi yang digunakan dalam proses perhitungan maka akan semakin mendekati luas daerah sebenarnya dari suatu integral tentu fungsi eksponen. Pada kasus ketiga terbukti bila nilai aproksimasi yang dihasilkan perhitungan metode integrasi Riemann kiri semakin mendekati nilai eksak seiring bertambahnya jumlah partisi yang digunakan para proses perhitungan.

Pada kasus ketiga penggunaan metode integrasi aturan trapesium menghasilkan nilai galat yang semakin kecil seiring dengan bertambahnya jumlah partisi yang digunakan pada proses perhitungan. Tingkat akurasi cenderung semakin mendekati nilai 2 seiring bertambahnya jumlah partisi. Dari hasil uji coba terlihat bahwa metode integrasi aturan trapesium lebih unggul dibandingkan metode Riemann kiri yang dbuktikan berdasarkan nilai galat yang diperoleh lebih kecil serta nilai hampiran metode integrasi aturan trapesium lebih mendekati luas daerah sebenarnya dari suatu integral tentu fungsi eksponen dengan penggunaan jumlah partisi yang sama selama perhitungan.

Simpulan dan Saran

Simpulan

Berdasarkan uji coba penyelesaian beberapa soal integral dari suatu jenis fungsi polinomial, trigonometri, dan eksponen menggunakan metode integrasi Riemann kiri dan aturan trapesium terbukti bahwa semakin banyak jumlah partisi yang digunakan pada proses komputasi numerik maka tingkat keakuratan meningkat serta nilai galat yang semakin kecil.

Saran

Diperlukan penelitian lebih mengenai tingkat keakuratan dan galat dari berbagai metode integrasi untuk mendekati nilai sebenarnya.

Daftar Pustaka

Atmika, I. K. A. (2016). METODE *NUMERIK*.

Bailey, D. H., & Borwein, J. M. (2011). High-precision numerical integration: Progress and challenges. *Journal of Symbolic Computation*, *46*(7), 741-754.

Hidayat, N., Suryanto, A., & Mungkasi, S. (2014). The significance of spatial reconstruction in finite volume methods for the shallow water equations. *Applied Mathematical Sciences*, *8*(29), 1411-1420.

Hutagalung, S. N. (2017). Emahaman Metode Numerik (Studi Kasus Metode New-rhapson) Menggunakan Pemprogrman Matlab. *(JurTI) Jurnal Teknologi Informasi*, *1*(1), 95-100.

Lumbantoruan, J. H. (2019). Integral Tentu Jilid II.

Maure, O. P. (2019). Aspek Matematis dan Aspek Pendidikan pada Suatu Model Pemurnian Air dalam Sistem Osmosis Terbalik. *Unpublished master's thesis in Indonesian language, Sanata Dharma University, Yogyakarta*.

Maure, O. P., & Mungkasi, S. (2021). VERIFIKASI TINGKAT KEAKURATAN BEBERAPA METODE INTEGRASI NUMERIK FUNGSI ATAS SATU PEUBAH BEBAS. *JURNAL SILOGISME: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, *6*(1), 58-64.

Mettle, F. O., Quaye, E. N., Aseidu, L., & Darkwah, K. A. (2016). A proposed method for numerical integration. *Br J Math Comput Sci*, *17*(1), 1-15.

Muharam, Y & Bismo, S. 2009. *METODE NUMERIK: KOMPUTASI DENGAN FORTRAN 77 DAN TURBO PASCAL*

Panjaitan, M. (2017). Pemahaman Metode Numerik Menggunakan Pemprogrman Matlab (Studi Kasus: Metode Secant). *(JurTI) Jurnal Teknologi Informasi*, *1*(1), 89-94.

Stewart, J. (2016). *Calculus: early transcendentals 8th edition*. Cengage Learning.

Triatmodjo, B. (2016). *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset Yogyakarta

Zhao, W., & Zhang, Z. (2014). Derivative-based trapezoid rule for the Riemann-Stieltjes integral. *Mathematical Problems in Engineering*, *2014*.