LAPORAN KEMAJUAN PENELITIAN MANDIRI
UNIVERSITAS LAMPUNG

KESTABILAN MODEL PREDATOR PREY DENGAN WAKTU TUNDAAN

TIM PENGUSUL

Agus Sutrisno, M.Si. (NIDN/SINTA ID: 0031017002/6156956)
Dra Dorrah Azis, M.Si. (NIDN/SINTA ID : 0028016103/6156830)

KATEGORI
Penelitian Mandiri

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2023

HALAMAN PENGESAHAN PENELITIAN MANDIRI
UNIVERSITAS LAMPUNG

Judul Pengabdian	: Kestabilan model predator Prey dengan waktu tundaan
Manfaat Sosial Ekonomi	: Pengembangan IPTEKS
Ketua Pengusul	
a. Nama Lengkap	: Agus Sutrisno, M.Si.
b. Jabatan Fungsional	: Lektor
c. Program Studi	: Matematika
d. SINTA ID	: 6156956
e. No HP	: 081369166400
f. Alamat surel	: agus.sutrisno@fmipa.unila.ac.id

Jumlah mahasiswa yang terlibat	: 1 orang
Jumlah alumni yang terlibat	: 1orang
Jumlah staf yang terlibat	: -
Lokasi kegiatan	: Laboratorium Matematika dan Statistika Jur FMIPA Unila.
Lama Kegiatan	: 6 (enam) bulan
Biaya Kegiatan	: Rp. 5.000.000,- (*Lima juta rupiah*)
Sumber Dana	: -

Bandar Lampung, 5 April 2023

Mengetahui,
Dekan FMIPA Unila

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
197110012005011002

Ketua Pelaksana,

Agus Sutrisno, M.Si.
NIP.19700831 1999031002

Menyetujui
Ketua LPPM Universitas Lampung

Dr. Habibullah Jimad, S.E., M.S.
197111211995121001

KESTABILAN MODEL PREDATOR PREY DENGAN WAKTU TUNDAAN

ABSTRAK

Melalui model matematika dapat diketahui pola pertumbuhan populasi dari predator dan prey secara kompleks. Perilaku sistem dapat diasumsikan dengan mengubah nilai parameter sehingga mampu mengestimasi jumlah populasi pada waktu tertentu. Model matematika dengan waktu tunda (τ), menentukan titik kesetimbangan dari sistem persamaan serta menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan.

Kata kunci: model, predator-prey, titik kesetimbangan, kestabilan.

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semua bidang ilmu matematika mempelajari persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan fungsi, variabel bebas dan variabel terikat. Banyaknya variabel bebas dari suatu persamaan diferensial ini yang membedakan jenis persamaan diferensial. Sebuah persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial biasa jika variabel bebas hanya satu, sedangkan persamaan diferensial yang memuat variabel bebas lebih dari satu disebut persamaan diferensial parsial. Sistem persamaan diferensial merupakan gabungan dari beberapa persamaan diferensial (baik itu biasa atau parsial).

Persamaan diferensial ini seringkali dijumpai penerapannya pada bidang-bidang ilmu pengetahuan yang lain, seperti bidang teknik, pertanian, sosial, biologi dan ekonomi. Perkembangan persamaan diferensial ini terutama pada hubungan yang bersifat deterministik yang melibatkan jumlah yang terus berubah bergantung dengan variabel lain.

Model matematika yang sering digunakan untuk menjelaskan predasi disebut dengan model Lotka-Volterra yang diperkenalkan secara terpisah oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vito Volterra pada tahun 1926. Dalam perkembangan sains, model matematika banyak digunakan dalam beberapa fenomena seperti dalam ilmu kedokteran, biologi dan fisika. Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan ke dalam matematika adalah penyakit predator. Predator adalah istilah umum untuk pertumbuhan sel tidak normal, dimana sel telah kehilangan pengendalian dari mekanisme normalnya. Sehingga, sel mengalami pertumbuhan yang tidak normal, cepat dan tidak terkendali. Predator merupakan masalah kesehatan yang sangat serius sebagai penyebab kematian utama di dunia.

Setiap makhluk hidup yang ada di bumi saling berhubungan dan berkaitan satu sama lain dalam suatu ekosistem. Interaksi antara makluk hidup dapat terjalin dengan makhluk hidup lainnya pada populasi yang berbeda yang dapat berdampak positif maupun negatif. Salah satu interaksinya adalah *predasi*, yaitu hubungan antara pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*). Pemangsa merupakan spesies yang pada umumnya memiliki ukuran lebih besar dibandingkan dengan mangsa, sedangkan mangsa adalah spesies yang pada umumnya memiliki ukuran lebih kecil dari pada pemangsa.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. bagaimana menentukan parameter parameter sistem dari model predator-prey dengan waktu tunda,
2. bagaimana mengkonstruksi sistem dari model,
3. menentukan titik kritis dari model tersebut,
4. Menganalisis kestabilan sistem,

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk

1. Mendapatkan kontruksi model waktu tundaan
2. Menentukan titik kritis
3. Menganalisis kestabilan titik kritis
4. Mengekplorasi dan menggambarkan siklus sehingga dapat memberikan penjelasan yang lebih spesifik.

1.4 Urgensi dan Kontribusi Penelitian

Subjek penelitian ini adalah system Waktu tundaan dengan menganalisis dinamika kstabilan system tersebut. Penelitian ini merupakan penelitian yang dapat diterapkan dan dimanfaatkan oleh penelitian terapan khususnya dinamika sistem. Dalam Gambar 1. diperlihatkan eksistensi penelitian yang dilakukan. Sedangkan peta jalannya penelitian ini dapat dilihat dalam Gambar 2. Hasil dari penelitian ini akan memberikan sebuah wawasan tentang model waktu tundaan. Hasil lain dari penelitian ini adalah penelitian ini diharapkan dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan dinamika sistem ketika parameter bervariasi. Dengan terlaksananya kegiatan dan tercapainya tujuan penelitian ini, kontribusi yang diberikan antara lain;

1. Kepada pengembangan ilmu matematika itu sendiri dan aplikasinya dalam hal pengembangan konsep aliran panas,
2. Dapat dijadikan sebagai referensi utama dan/atau pendukung bagi penelitian lanjutan dan/atau aplikasi dalam menganalisa dinamika

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. *State of The Art*

Sebuah sistem persamaan yang salah satu persamaannya tidak memuat bentuk linear disebut sebagai sistem persamaan non linier.

Model Lotka-Volterra adalah model dengan dua spesies yang berinteraksi dengan bersaing untuk persediaan makanan atau sumber alami lainnya. Model dua spesies ini dikenal dengan Model Lotka-Volterra klasik [1, h. 503] yang memuat sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = hx - ixy, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -jy + kxy, \tag{2}$$

dimana x(t) adalah jumlah populasi mangsa pada waktu t, y(t) adalah jumlah populasi pemangsa pada waktu t, h adalah laju pertumbuhan alami mangsa tanpa adanya pemangsa, i adalah pengaruh predasi terhadap mangsa, j adalah laju kematian alami pemangsa tanpa adanya mangsa, k adalah laju penyebaran pemangsa. Model Lotka-Volterra klasik menggambarkan adanya persaingan individu antar dua spesies untuk memperoleh persediaan makanan yang terbatas, dimana persediaan makanan diperoleh dari lingkungan. Persamaan (1) dan (2) diselesaikan dengan persamaan terpisahkan [4, h. 18] sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-j + kx)}{x(h - iy)}. \tag{3}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (3) diperoleh

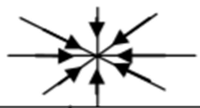
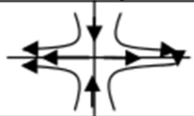
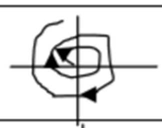
$$\begin{aligned} \int x(h - iy)dy &= \int y(-j + kx)dx, \\ \int \frac{(h - iy)}{y}\, dy &= \int \frac{(-j + kx)}{x}\, dx, \\ h \int \frac{dy}{y} - i \int y\, \frac{dy}{y} &= -j \int \frac{dx}{x} + k \int x\, \frac{dx}{x}, \\ h \ln y - iy + C_1 &= -j \ln x + kx + C_2, \\ h \ln y - iy + j \ln x - kx &= C, \end{aligned}$$

dimana C adalah konstanta integrasi. Model mangsa-pemangsa yang dibahas adalah tiga spesies, dimana x merupakan mangsa paling bawah dimangsa spesies y pada level kedua. Selanjutnya

spesies y dimangsa oleh spesies z pada level paling atas. Model Lotka-Volterra tiga spesies telah dikembangkan dengan memperhatikan berbagai faktor lain dari populasi dan lingkungan.
Model Goodwin analog dengan model Lotka-Volterra.

Kestabilan system

Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika untuk sebarang syarat awal yang cukup dengan titik kesetimbangan maka orbit (trayektori) dari penyelesaian tetap dekat dengan penyelesaian di titik kesetimbangannya. Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangan tersebut stabil dan trayektori dari penyelesaian yang dekat menuju titik kesetimbangan untuk t menuju tak hingga.

$x' = Ax$ Nilai eigen	$\det(\lambda - A) = 0$ Tipe titik kesetimbangan	$\det A \neq 0$ stabilitas	Ruang Fase
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil	
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik	
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik pelana	Tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a > 0$	Titik spiral	Tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik	
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Pusat atau titik spiral (fokus)	Tak tentu	

2.2. Hasil Penelitian Terdahulu

Metode Heun merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan pada berbagai permasalahan mencari solusi system persamaan diferensial nonlinear yang mempunyai masalah nilai awal. Metode ini juga merupakan salah satu metode satu langkah didalam metode numerik.

(Renshaw 1991) Permodelan populasi adalah pengaplikasian permodelan matematika kepada pembelajaran pada dinamika populasi. Permodelan populasi dilakukan dengan tujuan agar kita dapat mengerti lebih jauh mengenaik kompleksitas iteraksi dan juga prises yang ada pada sebuah populasi mempengahuri populasi tersebut. Hasil dari permodelan ini dapat digunakan sebagai dasar pemahaman bagaimaa perubahan pada sebuah populasi. Permodelan populasi secara ekologikal membuat permodel yang memperhatikan perubahan pada jumlah populasi yang merupakan akibat dari interaksi antara organisme dengan organisme lain sejenis dan tidak sejenis serta keadaan lingkungan sekitar seperti makanan, mangsa, ataupun pemangsa. Permodelan populasi bermula pada akhir abad ke-18 pada saat ilmuwan biologi mencoba memahami dinamika pertumbuhan dan pengurangan populasi pada mahluk hidup. Thomas Malthus adalah orang pertama yang mengemukakan mengenai pertubuhan populasi memiliki pola geometri. Loncatan besar pada permodelan ini terjadi pada tahun 1838 ketika Pierre Francois Verhulst berhasil menuangkan permodelan biologi pada Logistic model of population growth. Pada tahun 1921 Raymond Pearl mengikutsertakan A.J Lotka pada proyek permodelan populasi. A.J Lotka mengembangkan persamaan differensial parasit pada mangsa. Vito Volterra seorang matematikawan lalu membuat persamaan hubungan antara 2 spesies yang berhubungan pada differensial A.J Lotka. Bersama, mereka berdua membentuk LotkaVolterra Model yang memodelkan kompetisi, predatorisasi dan parasitisasi pada mahluk hidup secara logis.

Model Ekonomi (Baumol 1982) Permodelan pada bidang ekonomi adalah pembangunan model secara teoritis yang merepresentasikan proses ekonomi berdasarkan set variabel, logika dan juga hubungan kuantitatif dari variabel-variabel dan logika-logika yang ada. Model ekonomi adalah framework simple yang dibuat untuk menggambarkan proses kompleks yang tidak selalu berdasar pada perhitungan dengan tehnik matematika. Pada permodelan ekonomi, sebuah model bergantung pada sebuah parameter yang dapat berubah bergantung kepada berbagai keadaan parameter lain

2.3. Renstra Dan Peta Jalan Penelitian Perguruan Tinggi Universitas Lampung

Berpedoman kepada RIP LPPM Universitas Lampung periode 2016-2020, fokus riset pengembangan TIK secara umum dan pengembangan sistem predator-prey dengan waktu tundaan yang mengkontruksikan model pada dunia nyata. Untuk model-model matematis seperti ini, upaya menyelesaikan model adalah penting. Dengan keadaan ini, penelitian yang diajukan dapat digunakan sebagai referensi dalam mengkaji keadaan yang dapat diselesaikan dengan metode analitik dan numerik.

Berdasarkan informsi di atas, penelitian yang diajukan ini merupakan bagian dari penguatan ilmu-ilmu dasar untuk pengembangan ilmu-ilmu terapan. Hasil penelitian ini dapat berupa Ilmu Pengetahuan dan Teknologi (Iptek) unggulan/baru Universits Lampung yang terpublikasikan pada jurnal terakreditasi di luar negeri. Luaran hasil penelitian ini sangat mungkin dapat memenuhi sasaran yang ditetapkan pada Renstra LPPM Universitas Lampung periode 2016-2020 terutama diarahkan pada daya saing institusi, jumlah publikasi internasional bereputasi dan buku referensi, serta dapat dikembang oleh kelompok masyarakat (mahasiswa KKN tematik Unila, misalnya) yang menerapkan ipteks sebagai bagian dalam pengabdian kepada masyarakat.

Dengan kata lain, penelitian yang akan dilakukan ini dapat:

1. Meningkatkan kemampuan dan keterampilan dosen Unila dalam meneliti dan mempublikasikan karya ilmiah di tingkat nasional dan internasional.
2. Meningkatkan jumlah penelitian, kualitas karya ilmiah dan publikasi ilmiah, termasuk di antaranya buku ajar dan referensi.
3. Menambah jumlah dan frekuensi dosen Unila sebagai pemakalah/pembicara utama/undangan maupun sebagai dosen tamu/*visiting lecturer*/professor yang mempresentasikan hasil pemikirannya dalam forum ilmiah bermutu baik pada tingkat lokal, nasional, regional maupun internasional.

	Jangka Pendek (Januari-April 2022)	Jangka Menengah (Mei-Agustus 2022)	Jangka Panjang (September-Desember 2022)
Tahap Lanjut			*Mengeksplorasi dan menggambarkan iklus* Mengembangan sistem waktu tundaan dan mengkontruksikan model pada dunia nyata
Tahap Pengembangan		*Analisis dinamika model* *Mencari titik kritis, menguji kstabilan titik kritis* *Mensimulasi parameter ke model*	
Tahap Inisiasi	*Studi dan Observasi bentuk model Waktu tundaan.* *Mengeksplorasi model*		

Gambar 2. *Road Map* Penelitian yang dilakukan dalam penelitian yang direncanakan.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1. Tempat dan Waktu

Penelitian akan dilakukan di Jurusan Matematika dan Laboratorium Matematika dan Statistika Terapan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung. Lamanya waktu yang diperlukan adalah 1 (satu) tahun pada tahun anggaran ***2023.***

3.2. Bahan dan Alat

Bahan penelitian adalah buku dan jurnal matematika, analisis numerik, dan komputasi. Sedangkan alat yang digunakan (dipersiapkan untuk proses komputasi dan simulasi menggunakan program komputer) adalah seperangkat komputer *Notebook Core i5* yang berisikan *software* MATHEMATICA versi 9.

3.3. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode pendekatan studi literatur terhadap persoalan yang akan di selesaikan. Artikel (jurnal dan/atau prosiding), buku teks, pendapat pakar yang resmi dan legal dijadikan sebagai bahan penelitian. Sedangkan alat yang digunakan dalam penelitian disertasi ini adalah seperangkat komputer PC dengan perangkat lunak MATHEMATICA.

Dalam penelitian yang diusulkan ini, kami akan melakukan tahapan-tahapan penelitian sebagaimana diilustrasikan dalam Gambar 3. Secara deskriptif, alur penelitian dalam Gambar 3. dijelaskan sebagai berikut ini:

- **Tahap Pertama.**

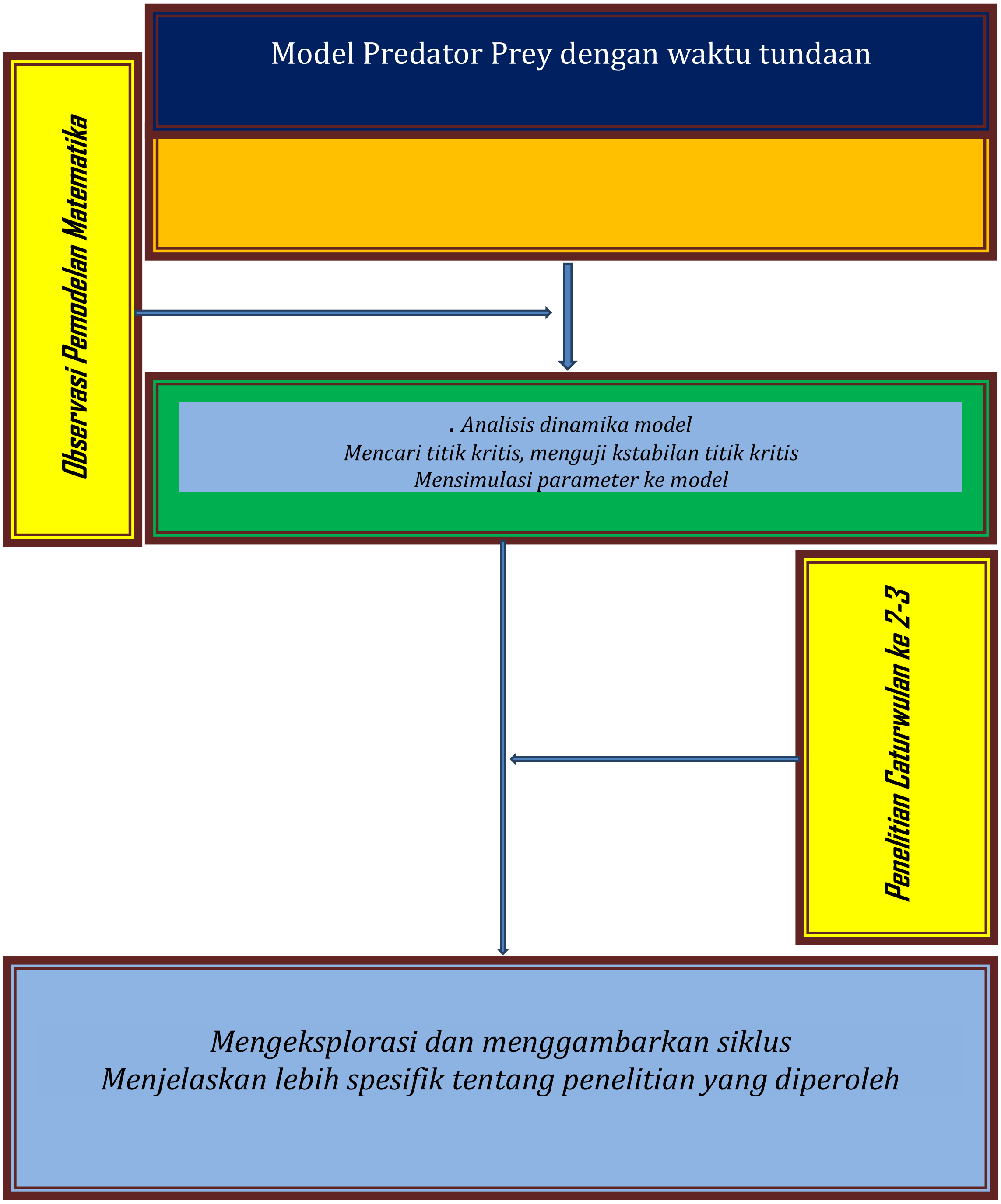
  Dalam tahapan ini dilakukan pengumpulan bahan pustaka/referensi berupa hasil-hasil penelitian yang dipaparkan pada jurnal–jurnal internasional terdahulu untuk kemudian dikaji dan diobservasi bentuk umum persamaan panas.

- **Tahap Kedua.**

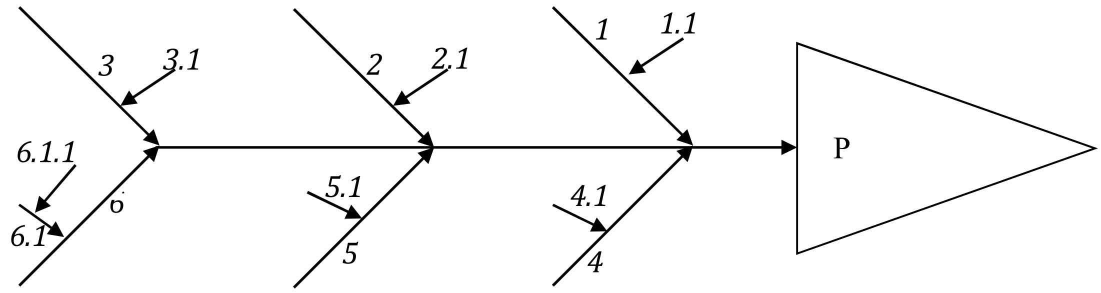
  Dalam tahapan kedua ini, akan formulasikan model predator prey dengan waktu tundaan.

- **Tahap Ketiga.**

  Dalam tahapan ketiga ini, kajian penyelesaian model.



Gambar 3. Tahapan Penelitian yang Direncanakan



Keterangan:

P: Kajian model Goodwin dan bagaimana keadaan sistem tersebut, misalnya keadaan di sekitar titik tetap/*equilibrium* untuk jangka waktu yang lama,.

1. Mengidentifikasi semua besaran yang terlibat

1.1. Penegasan lambang pada semua lambang yang terlibat

1.2. Menentukan satuan besaran yang terlibat

2.1 Membedakan antara besaran yang merupakan konstanta maupun variabel,.

3. Menentukan hukum yang mengendalikan,

4. Memanfaatkan asumsi – asumsi dan teori yang ada untuk mendapatkan persamaan.

5. Menentukan hubungan konstanta dan variabel sehingga dapat disusun menjadi model matematika.

6. Menyelesaikan persamaan yang telah dimodelkan dengan sehingga ditemukan suatu solusi.

6.1. Simulasi model dengan menggunakan program Mathematica

6.1.1 Perbandingan solusi analitik dan numerik.

Gambar 4. Diagram *Fishbone* (*cause-effect diagram*) Penelitian yang Direncanakan

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Model Lotka-Voltera

Sistem dinamika populasi *predator-prey* (pemangsa-mangsa) merupakan model sederhana yang dianalis menggunakan konsep Lotka-Voltera. *Predator-prey system* terjadi ketika satu organisme, mangsa, menjadi makanan bagi organisme lain, atau *predator*. Hubungan ini menguntungkan bagi populasi *predator*; misalnya *predator* memperoleh banyak makanan, mereka dapat berkembang biak lebih banyak. Model Lotka Voltera disebut juga sebagai model *feddback* : Populsi *prey* memberikan pengaruh secara positif terhadap ukuran populasi *predator*, sebaliknya populasi *predator* memberikan efek negatif terhadap *prey.* Contoh klasik *predator-prey system* adalah rubah (*predator*) dan kelinci (*prey*). Jika kelinci tidak ada, maka populasi rubah akan menurun secara eksponensial, dan jika rubah tidak ada maka populasi kelinci juga akan tumbuh secara eksponensial. Karena populasi rubah besar, maka populasi kelinci berkurang, dan kemudian rubah kekurangan makanan. Kemudian populasi rubah juga akan berkurang, dan apa yang terjadi, populasi kelinci akan meningkat. Kemudian jumlah rubah akan meningkat lagi sedangkan kelinci akan menurun, dan begitu seterusnya. Proses peningkatan dan penurunan ini menyebabkan variasi berkala dalam kedua populasi. Formulasi sistem di atas dan kemampuannya untuk memprediksi apa yang diamati adalah suatu sukses utama dalam bidang biologi matematika.

4.2. Perasamaan Diferensial Tundaan

Suatu jensis persamaan diferensial fungsonal yang sederhana dan sering muncul dalam persoalan nyata adalah persamaan diferensial tunda. Hal ini berarti bahwa persamaan yang menyatakan beberapa turunan dari x pada waktu t, terhadap x dan turunan-turunannya yang lebih rendah pada t, dan pada beberapa waktu sebelumnya.

Persamaan diferensial tundaan diberikan oleh

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_n), \qquad t \geq t_0$$

$$x(t) = \varphi(t), \qquad t \geq t_0$$

dengan τ menyatakan besarnya waktu tunda.

Tundaan waktu (*time delay atau time lag*) penting dalam pemodelan masalah nyata sebab keputusan dibuat berdasarkan informasi pada keadaannya sebelumnya. Contoh, laju pertumbuhan populasi manusia pada saat sekarang bergantung pada jumlah populasi 9 bulan yang lalu sebab seorang ibu membutuhkan waktu 9 bulan untuk melahirkan anak. Jadi jumlah populasi manusia bergantung pada kapan seorang wanita positif hamil (Forys & Czochra, 2003).

4.3 Model Logistik dengan Waktu Tunda

Model pertumbuhan populasi logistik dengan waktu tunda adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \quad \text{.......(2)}$$

Dengan $\tau \epsilon \boldsymbol{\mathcal{R}}$ adalah sebuah waktu tunda dan bernilai positif. Suatu titik kesetimbangan positif dari model ini adalah K. Hal ini diusulkan oleh Hutchinson dan Gopalsamy. Model (12) bisa digunakan pada model pertumbuhan populasi jenis dinamik tunggal terhadap ketahanan level K, dengan sebuah konstanta laju pertumbuhan intrinsik r.

Bentuk $\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)$ pada model (2) merupakan sebuah kepadatan tergantung pada mekanisme pengaruh arus balik yang mengambil τ satuan waktu untuk menanggapi perubahan pada kepadatan populasi diwakili pada model (2) oleh x. Model logistik dengan waktu tunda (12) dikenal sebagai persamaan tundaan Verhulst atau persamaan Hutchinson.

Selanjutnya akan dianalisis stabilitas dari titik kesetimbangan. Untuk menganalisis, digunakan sebuah metode standar yaitu metode linearisasi disekitar titik kesetimbangan. Misalkan $u(t) = x(t) - K$, maka $\frac{du(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$. Subtitusi $x(t) = u(t) + K$ ke persamaan (12) dan diperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{-r}{K}u(t)u(t-\tau) - ru(t-\tau) \quad \text{.......(3)}$$

Karena $x(t)$ cukup dekat ke K, maka $u(t)u(t-\tau)$ dapat dihilangkan. Selanjutnya didapatkan suatu model linier

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t-\tau) \quad \text{.......(4)}$$

Untuk memahami stabilitas titik tetap dari model (2). dipertimbangkan persamaan karakteristik pada model (4). Misalkan λ adalah nilai karakteristik dari persamaan (4) maka dengan mensubtitusikan $u(t) = e^{\lambda t}$ ke model (14) menghasilkan persamaan karakteristik,
$\lambda e^{\lambda t} = -re^{\lambda(t-\tau)}$

maka
$\lambda + re^{-\lambda t} = 0$ ....(5)

Untuk $r > 0$ dan $\tau > 0$, jika $\tau \leq \frac{1}{re}$ maka persamaan (5) memiliki akar-akar persamaan karakteristik negatif. Jika $r > 0$, $\tau > 0$ dan $\frac{1}{re} < \tau < \frac{\pi}{2r}$ maka akar dari persamaan karakteristik (15) adalah komplek konjugat dengan bagian rill negatif.
Analisis ini dikenal dengan analisis kestabilan Hutchinson, sehingga memberikan Teorema Hutchinson sebagai berikut (Ruan, 2006:4):

i. Jika $0 \leq r\pi < \frac{\pi}{2}$, maka titik tetap positif $x = K$ dari persamaan (12) stabil asimtotik.
ii. Jika $r\tau > \frac{\pi}{2}$ maka titik tetap positif $x = K$ dari persamaan (12) tidak stabil.
iii. Jika $r\tau = \frac{\pi}{2}$ maka terjadi bifurkasi *Hopf* pada titik tetap $x = K$.

4.5. Sistem Persamaan Lotka-Volterra

Model Lotka-Voltera tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan *predator-prey* dalam kasus yang paling sedehana. Model ini membuat beberapa asumsi:

1. Populasi *prey* akan tumbuh secara eksponen ketika tidak adanya *predator*.
2. Populasi *predator* akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi *prey*.
3. Predator dapat mengkonsumsi *prey* dengan jumlah yang tak terhingga.
4. Tidak adanya lingkungan yang lengkap (dengan kata lain, kedua populasi berpindah secara acak melalui sebuah lingkungan yang homogen).

Selanjutnya bentuk verbal ini diterjemahkan ke dalam sebuah sistem persamaan diferensial. Diasumsikan bahwa populasi *prey* berkurang ketika *predator* membunuhnya dan bertahan hidup (tidak mengurangi populasi *prey*) ketika *predator* hanya menyerangnya.
Model dengan laju perubahan dari populasi *prey* (x) dan populasi *predator* (y) adalah:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

dengan x, y ∈ R dan parameter model diatas yaitu

K = daya kapasitas

r = laju pertumbuhan intrinsik *prey*

c = laju kematian jika *predator* tanpa *prey*

α= laju perpindahan dari *prey* ke *predator*

β= laju perpindahan dari *predator* ke *prey*

Model di atas dibentuk dengan analisis sebagai berikut ini:

Dimulai dengan memperhatikan apa yang terjadi pada populasi *predator* ketika tidak adanya *prey*, tanpa sumber makanan, bilangannya diharapkan berkurang secara eksponensial, dideskripikan oleh persamaan di bawah ini:

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

Persamaan ini menggunakan hasil kali dari bilangan *predator* (y) dan kelajuan kematian *predator* (c). Untuk mendeskripsikan penurunan kelajuan (karena tanda negatif pada bagian kanan persamaan) dari populasi *predator* dengan pengaruh waktu. Dengan adanya *prey* bagaimanapun juga pengurangan ini dilawan oleh laju kelahiran *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi (βxy). Dimana laju penyerangan (β) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan *predator* dan *prey* naik ketika pertemuan predator dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (β). Persamaan populasi *predator* menjadi :

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Perkalian βy adalah tanggapan *predator* secara numerik atau peningkatan perkapita dari fungsi *prey* yang melimpah. dan untuk perkalian βxy menunjukkan bahwa kenaikan populasi *predator* sebanding dengan perkalian dan *prey* yang melimpah. Pada populasi *prey* tanpa serangan *predator*, bilangan *prey* akan naik secara eksponensial.

Persamaan di bawah ini mendeskripsikan laju kenaikan populasi *prey* dengan pengaruh waktu, dimana r adalah laju pertumbuhan intrinsik *prey* dan x adalah jumlah dari populasi *prey*.

$$\frac{dy}{dt} = rx$$

Di hadapan *predator*, bagaimanapun juga populasi *prey* dicegah dari peningkatan eksponensial secara terus-menerus. Karena model *predator prey* memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik. Jadi persamaan di atas menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

Dengan adanya *predator* bagaimanapun juga kenaikan ini dilawan oleh laju kematian *prey* karena adanya penyerangan dari predator, yang ditentukan oleh laju konsumsi (αxy). Di mana laju penyerangan (α) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan *predator* dan *prey* turun ketika pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (α). Persamaan populasi *prey* menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy$$

a. Mengkontruksi model Waktu tundaan

Misalkan pada waktu t, I(t) menunjukkan banyaknya prey dan T(t) menunjukkan banyaknya predator. d_1 menujukkan laju prey yang mati dalam keadaan normal atau tidak adanya interaksi antara predator dan prey. Model *predator-prey*. a merupakan laju pertumbuhan intrinsik predator yang tidak diikuti adanya respon dari prey.

Pertumbuhan $I(t)$ dan $T(t)$ di modelkan sebagai berikut:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{rI(t)T(t)}{\sigma+T(t)} \quad \text{.....(16)}$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = aT(t)\big(1 - bT(t)\big) \quad \text{.....(17)}$$

Suatu konstanta positif dari model ini adalah r dan σ. Persamaan (17) merupakan model pertumbuhan predator. Asumsikan bahwa pertumbuhan predator mengalami proses penundaan (τ) sehingga persamaan (17) berubah menjadi

$$\frac{dT(t)}{dt} = aT(t)\big(1 - bT(t-\tau)\big) \text{ ....(18)}$$

Persamaan (18) merupakan model persamaan pertumbuhan predator dengan waktu tunda (τ). Adanya interaksi antara prey dan predator mengakibatkan matinya predator (penonaktifan prey). Selanjutnya dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -c_1 I(t)T(t) \text{ ....(19)}$$

$$\frac{\mathrm{dT(t)}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{c_2 I(t)T(t)} \text{...(20)}$$

b. Mengidentifikasi parameter yang terlibat

Berdasarkan model yang terlihat pada persamaan diatas parameter yang terlibat adalah adalah, : capital output ratio, α produktivitas tenaga kerja, β tingkat pertumbuhan angkatan kerja. Sehingga model yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = u(-(\alpha + (\rho - \gamma) + (\rho v)) \qquad (4.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = v\left(\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta)\right) - \left(\frac{1}{\sigma}u\right)\right) \qquad (4.2)$$

c. Titik keseimbangan

Titik keseimbangan sistem persamaan di atas, diperoleh dengan membuat nol ruas kiri persamaan, Perhatikan untuk u dan v

$$0 = u(-(\alpha + (\rho - \gamma) + (\rho v))$$

$$0 = v\left((-(\alpha+\beta)) - (\frac{1}{\sigma}u)\right)$$

Maka,

$u = 0$ dan $v = 0$. Sehingga titik keseimbangan pertama (0,0).

Selanjutnya

$$\left(\frac{1}{\sigma} - (\alpha+\beta)\right) - \left(\frac{1}{\sigma}u\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma}(1-u)-(\alpha+\beta)=0$$

$$\frac{1}{\sigma}(1-u)=(\alpha+\beta)$$

$$u=1-(\alpha+\beta)\sigma$$

dan

$$(-(\alpha+(\rho-\gamma)+(\rho v)=0$$

$$\alpha+(\rho-\gamma)=\rho v$$

$$v=\frac{\alpha+(\gamma-\rho)}{\rho}$$

Maka titik keseimbangan ke 2

$$(u,v)=\left(1-(\alpha+\beta)\sigma,\frac{\alpha+(\gamma-\rho)}{\rho}\right)$$

d. Kestabilan di Titik Kesetimbangan

Kestabilan dari sistem persamaan (4.1) dan (4.2) dapat diperoleh dengan membuat matriks Jacobinya. Misal persamaan (4.1) dan (4.2) kita misalkan sebagai $f(u,v)$dan $g(u,v)$

$$\frac{du}{dt}=f(u,v)=u(-(\alpha+(\rho-\gamma)+(\rho v)) \qquad (4.3)$$

$$\frac{dv}{dt}=g(u,v)=v\left(\left(\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right)-\left(\frac{1}{\sigma}u\right)\right) \qquad (4.4)$$

Diperoleh matriks Jacobi untuk system persamaan di atas adalah

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-(\alpha+(\rho-\gamma)+\rho v & u\rho\\ -\frac{1}{\sigma}v & \left(\frac{1}{\sigma}-(\alpha+\beta)\right)-\left(\frac{1}{\sigma}u\right)\end{bmatrix}$$

DAFTAR PUSTAKA

Black, Fischer dan Scholesin, Myron. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities.*Journal of Political Economy,81*(3).

Baumol, William & Blinder, Alan. Economics: Principles and Policy (2nd ed.),. New York

Harcourt Brace Jovanovich, 1982. Ince, E.L. Ordinary Differential Equations. Dover Publications, 1956

Oktaviani, R, Prihandono, Bayu & Helmi, (2014). Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster) Vol. 03, No 1. Hal 29-38

Renshaw, Eric. (1991). Modeling Biological Populations in Space and Time. Cambridge: Cambridge University Press.

Strauss, A. W. (1992). *Partial Differential Equations: An Introduction*. New York: John Wiley and Sons.