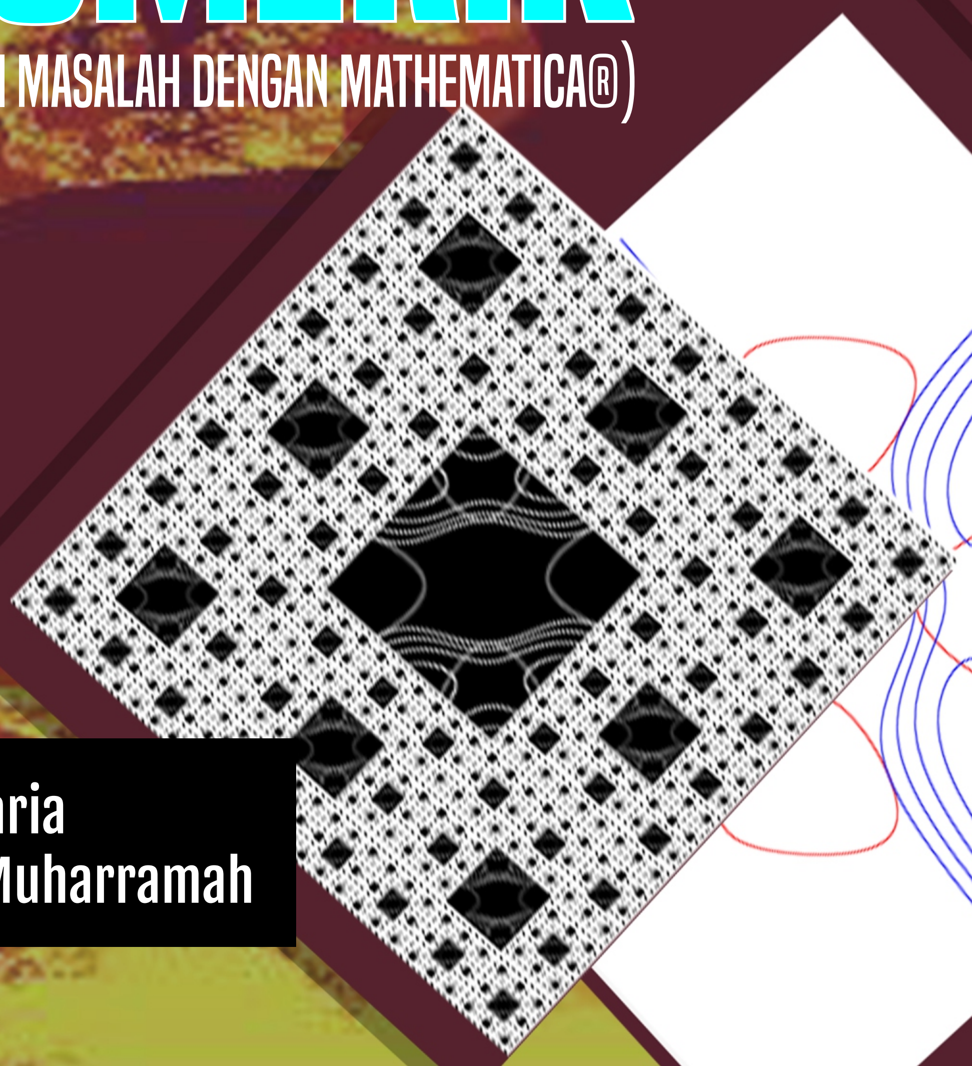
Pengantar METODE NUMERIK

(SOLUSI MASALAH DENGAN MATHEMATICA®)



La Zakaria
Ulfah Muharramah

Pengantar METODE NUMERIK

(SOLUSI MASALAH DENGAN MATHEMATICA®)

Pengantar
METODE NUMERIK
(SOLUSI MASALAH DENGAN MATHEMATICA®)

La Zakaria
Ulfah Muharramah

AURA
PUBLISHER

Perpustakaan Nasional RI:
Katalog Dalam Terbitan (KDT)

PENGANTAR METODE NUMERIK
(Solusi Masalah dengan MATHEMATICA®)

Penulis
La Zakaria
Ulfah Muharramah

Desain Cover & Layout
Team Aura Creative

Penerbit
AURA
CV. Anugrah Utama Raharja
Anggota IKAPI
No.003/LPU/2013

xii + 194 hal : 15.5 x 23 cm
Cetakan, Januari 2023

ISBN: 978-623-211-337-4

Alamat
Jl. Prof. Dr. Soemantri Brojonegoro, No 19 D
Gedongmeneng Bandar Lampung
HP. 081281430268
082282148711
E-mail : redaksiaura@gmail.com
Website : www.aura-publishing.com

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan “Alhamdulillahirrabbil ‘alamin..” sebagai ungkapan rasa syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, karunia, taufiq, iman, islam, dan ilmu pengetahuan sehingga buku yang diperuntukan bagi pembelajar tingkat dasar metode numerik berjudul "**Pengantar Metode Numerik (Solusi Masalah dengan MATHEMATICA®)**" berhasil dipublikasikan. Kemudian ucapan sholawat beriring salam senantiasa dilimpahkan kepada penghulu para nabi/rasul, Muhammad ***sallallahu*** *alayhi* ***wa sallam***, yang dengan ajarannya telah menuntun penulis untuk dapat berpartisipasi dalam menyampaikan ilmu pengetahuan yang dimiliki kepada masyarakat umumnya dan pengguna buku ini khususnya.

Buku ini dibuat dan dipublikasikan untuk para pembelajar konsep dan terapan metode numerik guna memenuhi kebutuhan bahan bacaan khususnya bidang yang melibatkan solusi masalah matematis dengan metode numerik. Kehadiran buku ini diharapkan dapat membantu/membimbing/mengarahkan para pembelajar dalam mempelajari dan memahami suatu konsep metode numerik dan pemakaiannya pada persamaan/model matematis.

Terdapat bagian dan subbagian penting tentang konsep metode numerik dalam buku ini. Bagian pertama (**Pendahuluan**) meliputi subbagian *Pengertian Metode Numerik*, *Bilangan dan Angka Signifikan*, *Konsep Dasar Kalkulus*, dan *Galat dan Toleransi dalam Metode Numerik*. Bagian kedua (**Metode Numerik Untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear**) meliputi subbagian *Metode Biseksi*, *Metode Iterasi*, *Metode Newton-Raphson*, dan *Metode Regula Falsi*. Bagian ketiga (**Interpolasi**) meliputi subbagian *Interpolasi*, *Selisih*, *Formula Newton untuk Interpolasi*, *Relasi Simbolik*, *Formula Interpolasi Selisih Tengah*, dan *Interpolasi dengan Titik-Titik Berjarak Tidak Sama*. Bagian keempat (**Deferensiasi dan Integrasi Numerik**) meliputi subbagian *Formula Newton untuk Deferensiasi Numerik*, *Nilai Maksimum dan Minimum dari suatu Daftar Nilai Fungsi*, *Aturan Trapezoida*, *Metode Simpson*, dan *Integrasi Romberg*. Bagian kelima (**Pengepasan Kurva**) terdiri dari subbagian *Pengertian Pengepasan Kurva dan Regresi*, *Prinsip-Prinsip Statistik (rata-rata & simpangan baku)*, *Metode Kuadrat Terkecil*, *Metode Kuadrat Terkecil untuk Kurva Linear*, *Linearisasi Kurva Tidak Linear*, *Regresi Polinomial*, dan *Regresi Linear dengan Banyak Variabel*. Bagian keenam (**Solusi Numerik Masalah Nilai Awal**) dengan subbagian terdiri dari *Pengertian* MNA *dan Metode Langkah Tunggal*, *Aproksimasi Deret Taylor sebagai Fungsi Solusi suatu* MNA, *Aprioksimasi fungsi solusi* MNA *dengan menggunakan Metode Picard*, *Metode Euler*, *Metode Runge-Kutta Orde Dua dan Empat*, *Metode Implisit Aturan Nilai Tengah*, dan *Metode Implisit Gauss Legendre Orde Empat*. Dan terakhir (bagian ketujuh- **Aplikasi Metode Numerik: Teknik Interpolasi Linear Untuk Belahan Poincaré**) terdapat subbagian *Pengertian Belahan Poincaré*, *Konsep Interpolasi Linear pada Bidang*, *Sistem Persamaan Diferensial dan Sistem Suspensi Mobil*, *Algoritma untuk Penyelesaian Masalah Sistem Suspensi Mobil dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat Bentuk Eksplisit*, dan *Eksperimen Numerik*.

Ada pihak-pihak yang telah turut membantu dalam hal sumbang saran, material, finansial, dan moral di dalam menyusun modul kuliah ini diantaranya:

1. **Sivitas Akademika Jurusan Matematika FMIPA Unila**, yang telah banyak membantu dalam kelancaran proses belajar mengajar terutama untuk mata kuliah pengantar metode/analisis numerik;
2. Keluarga tercinta terutama **Desova**, **Dilla**, **Amanda**, **Ilyas,** dan **Taufiq** yang telah menjadi motivasi jiwa dan pikiran penulis sehingga materi dalam buku ini dapat disampaikan kepada pembaca;

3. **Penulis dan Penerbit** buku-buku yang menjadi referensi buku ini;
4. Pihak-pihak lain yang secara tidak langsung berperan serta dalam menginspirasi penulis.

Kepada mereka semua diucapkan terima kasih. Semoga apa yang telah diperbuat menjadi bermanfaat bagi kehidupan kini dan generasi nanti serta mendapat Ridho Allah SW...Aamiinn.

Kritik atau saran atau tanggapan yang bersifat memperbaiki dan menyempurnakan akan sangat diperhatikan demi kemaslahatan ilmu pengetahuan umumnya dan matematika komputasi khususnya.

Bandar Lampung, Januari 2023
Penulis

DAFTAR ISI

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar diharapkan mampu menjelaskan alasan-alasan mengapa metode numerik perlu dipelajari dan dipahami serta konsep-konsep apa saja yang perlu diketahui agar pembelajaran pada bagian metode numerik dapat berlangsung tanpa hambatan yang datang dari lemahnya pengetahuan dasar (kalkulus dan pemrograman komputer) **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar diharapkan mampu: 1. Mendefinisikan dengan baik dan benar pengertian metode numerik 2. Menjelaskan dan memberi contoh macam bilangan dan angka signifikan 3. Menentukan tipe dan jenis galat dalam metode numerik 4. Menetukan batasan toleransi dalam metode numerik	**Pokok Bahasan** : Pendahuluan **Sub Pokok Bahasan** 1. Pengertian Metode Numerik 2. Bilangan dan Angka Signifikan 3. Konsep Dasar Kalkulus 4. Galat dan Toleransi dalam Metode Numerik

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. PENGERTIAN METODE NUMERIK

Penyelesaian masalah yang dilakukan melalui sebuah model matematika umumnya membutuhkan cara-cara praktis, efesien, dan efektif. Oleh karena itu penyelesaian masalah yang dimaksud selain diperoleh dalam bentuk simbolik juga perlu dalam bentuk numerik. Bahkan dalam pemakaian praktis penyelesaian akhir umumnya memerlukan bentuk numerik. Misalnya, diberikan tabulasi data pengamatan apa dan bagaimana sejumlah kesimpulan dapat dibuat dari gambaran data tersebut; atau bagaimana teknis untuk menyelesaikan masalah praktis untuk data pergerakan saham di bursa saham; atau bagaimana mengoptimalkan sumber daya pada suatu perusahaan yang permasalahannya dikonversikan dalam sebuah sistem persamaan linear atau nonlinear yang terbentuk. Metode/cara yang ditempuh dengan melibatkan data berupa bilangan/angka tertentu dikenal dengan sebutan metode numerik **(**ada juga yang menyebutnya dengan metode *heuristik***)**. Metode numerik merupakan satu-satunya metode alternatif yang ada dalam upaya menyelesaikan persoalan-persoalan matematis selain *metode analitik*. Pemakaian metode numerik umumnya dilengkapi dengan suatu algoritma agar penyelesaian masalah dapat dilakukan secara sistematis dan logis sehingga diperoleh jawaban numerik yang efesien dan efektif dari berbagai macam permasalahan yang diselesaikan. Ada dua alasan umum mengapa pilihan dijatuhkan kepada metode numerik. Alasan pertama metode ini memberikan keefisienan dan keefektifan di dalam menyelesaikan perpersolan-persoalan matematis dikarenakan berkembangnya perangkat keras dan lunak komputer. Alasan yang lain adalah metode numerik memungkinkan untuk mengkaji parametrik dari persoalan dengan medan yang bersifat sembarang. Alasan yang terakhir ini lebih bermakna ketidakmampuan metode analitik untuk menyelesaikan persolan-persoalan matematis aplikasi yang kompleks. Dalam banyak literatur analisis numerik diungkapkan bahwa di dalam metode numerik keputusan menerima atau menolak suatu solusi aproksimasi berdasarkan pada toleransi aproksimasi/hampiran yang disepakati. Toleransi yang dibuat menyangkut kesepakatan kesalahan/galat yang ditimbulkan oleh rumus/formula yang digunakan. Tentu semakin kecil kesalahan/galat hampiran yang ditimbulkan oleh penggunaan suatu rumus/formula maka semakin baik hampiran yang dihasilkan.

Kemajuan teknologi komputer saat ini memberi peluang besar untuk mendapatkan nilai aproksimasi yang cepat dan akurat yang pada akhirnya meringankan kerja si pengguna metode numerik. Hal ini didasari pada kenyataan bahwa metode-metode yang sudah ada maupun yang sedang dikembangkan memerlukan proses interasi yang cukup panjang. Oleh karena itu tidak cukup memadai bila dikerjakan dengan cara konvensional (melakukan proses komputasi dengan cara elaborasi menggunakan alat tulis dan kalkulator). Ada banyak contoh aplikasi matematika yang mengharuskan pilihan dijatuhkan kepada metode numerik ketimbang metode analitik. Contoh yang dimaksud tiga diantaranya adalah:

Contoh 1.1. (Disari dari Turner, 1988)

Diberikan sebuah sistem persamaan diferensial biasa/ordiner orde satu dalam bentuk :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A\sin z + C\cos y \pmod{\pi} \\
\frac{dy}{dt} &= B\sin x + A\cos z \pmod{\pi} \qquad (1.1) \\
\frac{dz}{dt} &= C\sin y + B\cos x \pmod{\pi}.
\end{aligned}
$$

Sistem ini dikenal dengan sebutan ABC (*Arnold–Beltrami–Childress*) *Flow*. Pada koordinat Kartesius, sistem tersebut periodik dengan periode 2π untuk x, y, dan z. Ketika A dan B sama dengan satu dan C sama dengan nol, sistem dalam persamaan (1.1) merupakan sebuah sistem terintegralkan.

Contoh 1.2. (Disari dari Sediawan dan Prasetya, 1997)

Karakteristik pompa sentrifugal yang digunakan untuk membantu proses pengaliran cairan dari sebuah tangki (L_1) ke tangki lain (L_2) melalui sebuah pipa berdiameter D adalah terletak pada hubungan antara *Head* pompa (H_m) dalam satuan sentimeter dengan debit cairan (Q) dalam satuan sentimeter kubik perdetik. Model matematika untuk karakteristik pompa yang dimaksud diberikan dalam bentuk :

$$H_m = 3718,5 - 2,3495\,Q + 7,84774^{-4}\,Q^2 - 9,5812\text{x}10^{-8}\,Q^3. \qquad (1.2)$$

Contoh 1.2 memberikan ilustrasi bahwa suatu model matematika yang dibentuk dari fenomena alam memerlukan jawaban numeris yang lebih memberi arti.

Contoh 1.3. (Disari dari Burden dan Faires, 2011))

Dalam teori penyebaran penyakit menular, sebuah persamaan diferensial dasar dapat digunakan untuk memprediksi jumlah individu infektif (terinfeksi) dalam populasi setiap waktu. Hal ini dapat dilakukan ketika asumsi penyederhanaannya dibuat dengan tepat. Secara khusus, asumsikan bahwa pada suatu negara semua individu dalam sebuah populasi ditetapkan memiliki peluang yang sama untuk mungkin terinfeksi dan tetap terinfeksi di negara tersebut. Misalkan $x(t)$ menunjukkan jumlah individu yang rentan terinfeksi untuk waktu t dan $y(t)$ menunjukkan jumlah infeksi. Cukup beralasan untuk mengasumsikan bahwa laju perubahan di jumlah yang terinfeksi sebanding dengan perkalian $x(t)$ dan $y(t)$. Karena tingkat ketergantungan pada kedua jumlah infeksi dan jumlah suspek hadir dalam waktu bersamaan. Jika populasi cukup besar maka diasumsikan bahwa $x(t)$ dan $y(t)$ merupakan peubah kontinu, dan model matematis masalah ini dapat dinyatakan sebagaimana persamaan berikut ini:

$$y'(t) = k\, x(t)\, y(t) \tag{1.3a}$$

dengan k adalah konstanta dan $x(t)+y(t)=m$ adalah total populasi. Persamaan (1.3a) dapat ditulis dalam bentuk lain yang hanya melibatkan $y(t)$, yaitu

$$y'(t) = k\left(m - y(t)\right) y(t)\,. \tag{1.3b}$$

Pandang persamaaan (1.3.b).

a. Asumsikan bahwa $m = 100.000$, $y(0) = 1000, k = 2\times 10^{-6}$, dan satuan waktu yang diukur dalam hari. Tentukan sebuah hampiran untuk angka individu terinfeksi pada hari ke-30.
b. Persamaan diferensial yang terbentuk dalam poin a disebut persamaan *Bernoulli* dan dapat diubah menjadi persamaan diferensial linear dalam peubah $u(t) = y(t)^{-1}$. Jika menggunakan teknik penyelesaian persamaan diferensial linear tereduksi akan didapat solusi analitik untuk permasalahan pada persamaan (1.3b). Selain itu, jika menggunakan asumsi yang sama seperti poin **a**, akan didapat solusi analitik dengan nilai awal yang diberikan (solusi eksak). Dengan demikian dapat dibandingkan solusi hampiran (point **a**) dan solusi eksak (point **b**). Selanjutnya dapat ditentukan nilai dari $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Pertanyaan lanjutan adalah apakah hal ini sesuai dengan intuisi Anda?

Dengan menggunakan metode numerik 3 (tiga) contoh permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan relatif sederhana dan efesien karena tersedianya banyak formula dan program komputasi. Sebaliknya metode analitik relatif lebih sulit digunakan untuk menyelesaikan ketiga persamaan yang diberikan dalam Contoh 1.1, Contoh 1.2, dan Contoh 1.3. Ilustrasi permasalahan yang diberikan oleh ketiga contoh di atas adalah cukup beralasan jika seorang *problem solver* yang menangani persoalan matematis harus memiliki kemampuan metode numerik dan keterampilan menggunakan media komputer sebagai alat bantu untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang relatif sulit diselesaikan secara analitik.

Hal yang hampir tidak mungkin tidak dilakukan jika menggunakan metode numerik adalah melibatkan alat komputasi (kalkulator atau komputer). Salah satu alasan yang paling tepat adalah karena dalam metode numerik senantiasa melibatkan proses iterasi yang panjang dan/atau berulang. Berikut ini sejumlah perangkat lunak yang dapat digunakan untuk membantu proses komputasi yang ada dalam setiap metode numerik yang akan digunakan :

PYTHON
R
C++
FORTRAN
PASCAL
MATHEMATICA®
SPREADSHEET
MATLAB
MAPLE

Materi pembelajaran pada mata kuliah Pengantar Dasar-Dasar Metode Numerik umumnya diberikan pada masa awal perkuliahan ditingkat pendidikan tinggi dimaksudkan untuk mempersiapkan/ membekali mahasiswa tentang konsep dasar dan teknik menggunakan metode numerik dalam menyelesaikan persoalan-persoalan matematis. Dari maksud ini, tujuan yang dapat dicapai adalah mahasiswa diharapkan mampu menggunakan metode numerik secara baik dan benar didalam menyelesaikan persoalan matematis yang dihadapi dan mampu mengembangkan wawasan pemikiran tentang konsep metode numerik lanjutan dan kegunaannya.

1.2. BILANGAN DAN ANGKA SIGNIFIKAN

Ada dua klasifikasi bilangan real $\mathbb{R}$ yang dikenal dengan mudah berdasarkan format penulisannya, yaitu bilangan **eksak** dan **non eksak**. Bilangan **eksak** terdiri dari bilangan *asli*, *bulat*, *rasional* dan sebagian bilangan *irasional* misalnya bilangan $\sqrt{2}$, π, dan e. Bilangan **non eksak** dikenal juga dengan sebutan bilangan **aproksimasi** yang merupakan bilangan hasil pembulatan dari suatu bilangan eksak irasional dalam bentuk bilangan desimal "terbatas". Bilangan-bilangan aproksimasi dinyatakan dengan bilangan yang mempunyai derajat ketelitian. Misalnya, bilangan π diaproksimasi menjadi 3,1416 (teliti hingga empat tempat desimal), atau 3,14159265 (teliti hingga delapan tempat desimal). Sementara itu nilai eksak dari π adalah bilangan desimal tak terbatas sehingga tidak memungkinkan untuk ditulis.

Angka-angka yang menyatakan suatu bilangan disebut angka-angka signifikan. Jadi bilangan-bilangan 3,1416; 0,66667 dan 4,0687 masing-masing memuat lima angka signifikan. Bilangan 0,0023 hanya mempunyai dua angka signifikan yaitu 2 dan 3, karena angka nol hanya menentukan tempat dari titik desimal.

Seringkali diinginkan untuk memperpendek/menyingkat penulisan bilangan-bilangan desimal yang tersusun panjang yang terdapat dibelakang tanda koma "**,**" (versi indonesia) atau tanda titik "**.**" (versi *western*) misalnya **12,345678912344** (versi indonesia) atau **12.345678912344** (versi *western*) yang memiliki **12** angka desimal. Proses pemotongan bilangan seperti itu umumnya disebut "pembulatan". Secara umum, bilangan-bilangan yang dibulatkan mengikuti aturan berikut:

Untuk membulatkan suatu bilangan sampai ke n angka signifikan, hilangkan semua bilangan yang ada setelah angka ke-$(n+1)$. Apabila angka ke-$(n+1)$ atau lebih besar darinya yang dihilangkan merupakan angka:

(a) kurang dari 5 (setengah satuan), maka angka ke n tidak berubah (tetap).

(b) lebih dari 5 (setengah satuan), maka angka ke n bertambah satu (satu satuan).

(c) sama dengan 5 (setengah satuan), maka angka ke n bertambah satu (satu satuan) bila angka ke **n ganjil**, selain itu tetap.

Bilangan hasil pembulatan, penyebutannya disisipi kalimat "*teliti sampai n angka signifikan*".

Contoh 1.4. Bilangan-bilangan berikut dibulatkan sampai empat angka signifikan :

1,6583	ke	1,658
30,0567	ke	30,06
0,859378	ke	0,8594
3,14159	ke	3,142

1.3. TEOREMA NILAI ANTARA DAN DERET TAYLOR

Dalam bagian ini dikemukakan beberapa teorema yang akan digunakan di dalam bagian berikutnya. Teorema diberikan tidak disertai pembuktian (bukti dapat dilihat pada buku-buku kalkulus yang disebutkan dalam daftar pustaka).

Teorema 1.1

Bila $f(x)$ kontinu dalam $a<x<b$ dan $f(a)$ dengan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(\alpha)=0$ untuk suatu bilangan α sedemikian hingga $a<\alpha<b$.

Teorema 1.2

Bila : (i) $f(x)$ kontinu dalam $a<x<b$

(ii) $f'(x)$ ada dalam $a<x<b$, dan

(iii) $f(a)=f(b)=0$

maka terdapat paling sedikit satu nilai $x = \alpha$ sedemikian hingga $f'(\alpha)=0$ dengan $a<\alpha<b$.

Teorema 1.3

Bila : (i) $f(x)$ kontinu dalam $a \le x \le b$

(ii) $f'(x)$ ada dalam $a < x < b$

maka, terdapat paling sedikit satu nilai $x = \alpha$, sedemikian hingga

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ dengan } a < \alpha < b$$

Bila $b = a + h$, teorema tersebut dapat dinyatakan dengan bentuk :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \text{ dengan } 0 < \theta < 1$$

Teorema 1.4

Bila $f(x)$ kontinu dan memiliki turunan ke n yang kontinu dalam suatu interval yang memuat $x = a$, maka di dalam interval tersebut berlaku

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \qquad (1.4)$$

dengan $R_n(x)$ adalah suku sisa (residu) yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha), \quad a < \alpha < x \qquad (1.5)$$

Deret dalam persamaan (1.4) dikenal dengan sebutan deret Taylor. Bila $a = 0$ maka deret Taylor (1.4) menjadi

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n-1)}(0) + \cdots \qquad (1.6)$$

Deret dalam dalam persamaan (1.6) dikenal dengan sebutan deret Maclaurin

Teorema 1.5 (Deret Taylor untuk fungsi dengan dua peubah).

Misalkan x_1 dan x_2 adalah dua peubah bernilai real. Deret Taylor dalam persamaan (1.4) dengan fungsi $f(x_1, x_2)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\Delta x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\Delta x_2)^2\right] + \cdots \tag{1.7}$$

1.4. GALAT DAN TOLERANSI DALAM METODE NUMERIK

1.4.1 Galat

Ketika metode numerik digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah biasanya dimulai dengan menetapkan sebarang nilai awal. Dengan nilai awal tersebut selanjutnya langkah-langkah komputasi numerik dilakukan sehingga diperoleh suatu penyelesaian yang diinginkan baik berupa bilangan atau model hampiran. Data numerik adalah suatu aproksimasi (hampiran) yang berasosiasi dengan sebuah toleransi (batasan yang diberlakukan) untuk beberapa angka signifikan yang diperlukan. Tidak jarang metode yang digunakan berupa sebuah aproksimasi. Oleh sebab itu galat dalam hasil perhitungan mungkin disebabkan oleh galat data atau galat di dalam pemakaian suatu metode atau kedua-duanya. Dalam bagian ini akan dibicarakan ide dasar tentang galat.

a. Tipe Galat

Galat Inheren (*Inherent Error*).

Galat *inheren* merupakan galat bawaan akibat penggunaan suatu metode numerik. Akibat perhitungan numerik yang sebagian besar adalah tidak eksak, dapat menyebabkan data yang diperoleh adalah data aproksimasi. Selain itu, keterbatasan dari alat komputasi seperti tabel matematika, kalkulator, dan komputer digital juga membuat perhitungan numerik tidak eksak. Karena keterbatasan tersebut, bilangan-bilangan yang diperoleh adalah hasil pembulatan. Di dalam perhitungan, galat inheren dapat diperkecil melalui penggunaan data yang besar, pemeriksaan galat yang jelas dalam data, dan penggunaan alat komputasi dengan ketelitan yang tinggi.

Galat Pemotongan (*Truncation Error*)

Galat ini disebabkan oleh adanya penghilangan sebarisan suku dari suatu deret/ekspansi untuk tujuan peringkasan pekerjaan perhitungan. Galat pemotongan adalah galat yang tak dapat dihindarkan dalam proses komputasi secara numerik.

b. Jenis Galat

Galat Mutlak

Galat mutlak adalah selisih numerik antara besar nilai sebenarnya dengan nilai aproksimasinya. Jadi, bila x besar nilai yang sebenarnya, dan x_1 nilai hampiranya maka galat mutlak (*absolut error*) E_a didefinisikan dengan

$$E_a = |x - x_1| = \delta x \tag{1.8}$$

Galat Relatif

Galat relatif E_r didefinisikan dengan

$$E_r = \frac{E_a}{x} = \frac{\delta x}{x}\ . \tag{1.9}$$

Sedangkan persentase galat relatif dihitung dari galat relatif yang diberikan dalam bentuk

$$P_E = 100 E_R \tag{1.10}$$

Galat Global

Misal $u = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ adalah fungsi dengan variabel banyak $x_i = \left(1, 2, \cdots, n\right)$, dan misalkan galat dari tiap x_i adalah Δx_i. Galat Δu dari u diberikan dalam bentuk

$$u + \Delta u = f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n\right)$$

Perluasan ruas kanan dari galat global tersebut oleh deret Taylor (Teorema 1.5) menghasilkan

$$u+\Delta u = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

$$+ \text{ semua suku yang memuat } \left(\Delta x_i\right)^2 \tag{1.11}$$

$$+ \text{ semua suku yang lain.}$$

Anggap bahwa galat dalam x_i adalah kecil dan $\frac{\Delta x_i}{x_i} \ll 1$. Kemudian semua suku setelah suku ke dua pada ruas kanan persamaan di atas diabaikan. Persamaan (1.4) menjadi

$$\Delta u \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{1.12}$$

Bila diperhatikan formula (1.12) bentuknya sama dengan diferensial total dari *u*. Formula untuk galat relatif adalah sebagai berikut:

$$E_r = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\Delta x_1}{u} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\Delta x_2}{u} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{\Delta x_n}{u} \tag{1.13}$$

Contoh berikut adalah ilustrasi dari penggunaan formula tersebut.

Contoh 1.5.

Pandang sebuah fungsi $u = \frac{5xy^2}{z^3}$. Dari fungsi tersebut dapat dituru

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5y^2}{z^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10xy}{z^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{15xy^2}{z^4}$, dan $\Delta u = \frac{5y^2.\Delta x}{z^3} + \frac{10xy.\Delta y}{z^3} - \frac{15xy^2.\Delta z}{z^4}$,

dengan $\Delta x, \Delta y,$ dan Δz dapat bernilai positif atau negatif. Karena itu diberikan nilai mutlak pada suku-suku di ruas kanan persamaan di atas, sehingga diperoleh

$$\left(\Delta u\right)_{maks} \approx \left|\frac{5y^2}{z^3}\Delta x\right| + \left|\frac{10xy}{z^3}\Delta y\right| + \left|\frac{15xy^2}{z^4}\Delta z\right|. \tag{1.14}$$

Bila $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,001$ dan $x = y = z = 1$, maka galat relatif maksimum adalah

$$\left(E_r\right)_{maks} = \frac{\left(\Delta u\right)_{maks}}{u} = \frac{0,03}{5} = 0,006 \tag{1.15}$$

Galat dalam Aproksimasi Deret Taylor

Galat yang ada dalam aproksimasi suatu deret dapat dievaluasi melalui sisa suku ke-n. Pandang deret Taylor untuk *f*(*x*) pada *x* = *a* yang diberikan dalam bentuk:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n(x). \tag{1.16}$$

Suku terakhir dalam deret di atas dikenal dengan sebutan suku sisa deret Taylor yang didefinisikan sebagai berikut :

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(\alpha), a < \alpha < x. \tag{1.17}$$

Untuk suatu barisan yang konvergen, suku-suku sisa akan mendekati nol untuk $n \to \infty$.

Jadi, bila fungsi *f*(*x*) diaproksimasi oleh *n* buah suku pertama dari deret tersebut maka galat maksimum yang dibuat dalam aproksimasi tersebut diberikan oleh suku sisa.

Contoh 1.6.

Ekspansi McLaurin untuk e^x diberikan oleh:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\alpha}, 0 < \alpha < x. \tag{1.18}$$

Tentukan nilai *n* yang merepresentasikan banyaknya suku sedemikian hingga jumlahnya sama dengan e^x teliti sampai 8 tempat desimal pada *x* = 1.

Dapat dicatat bahwa galat sukunya adalah $\frac{x^n}{n!}e^{\alpha}$, dan jika $\alpha = x$ maka akan diperoleh galat mutlak yang maksimum. Oleh karena itu galat relatif maksimumnya adalah $\frac{x^n}{n!}$.

Bila dihitung teliti hingga 8 desimal di x = 1, maka akan diperoleh:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-8} \tag{1.19}$$

yang memberikan nilai n = 12. Jadi, diperlukan 12 suku dari deret McLaurin untuk fungsi eksponensial dalam urutan itu yang nilai komputasi numeriknya akan teliti hingga 8 desimal.

1.4.2 Toleransi

Dalam menyikapi galat yang diperoleh dari sebuah proses aproksimasi perlu adanya batasan nilai galat yang diterima yang disebut dengan **nilai toleransi**. Toleransi (**Tol**) didefinisikan sebagai batas penerimaan suatu galat. Dari pengertian ini yang dimaksud dengan Toleransi Galat Mutlak adalah *nilai mutlak dari selisih nilai eksak (nilai sebenarnya) dengan nilai aproksimasi* dan dinotasikan dengan :

$$\left| x - x_1 \right| \leq \Delta x \tag{1.20}$$

Selain itu ukuran ketelitian relatif di notasikan dengan

$$\frac{\Delta x}{|x|} \approx \frac{\Delta x}{|x_1|} . \tag{1.21}$$

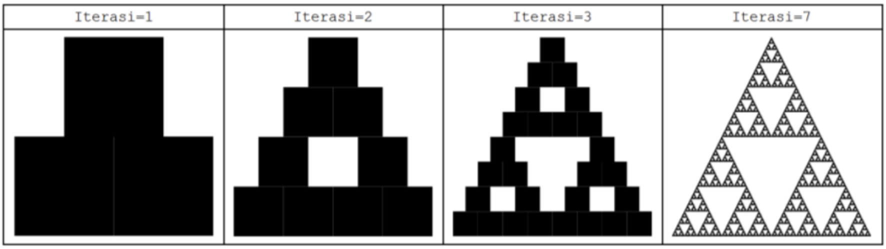
Contoh 1.7.

Bila x adalah bilangan yang dibulatkan ke N tempat desimal, maka $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-N}$. Bila $x < 0.51$ maka x teliti sampai 2 tempat desimal, sehingga $\Delta x = \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.005$ dan ketelitian relatifnya adalah $\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0.005}{0.51} \approx 0.98\%$.

1.5. ALAT KOMPUTASI MODERN UNTUK SOLUSI NUMERIK

Suatu permasalahan yang diselesaikan dengan metode numerik senantiasa membutuhkan alat komputasi yang berkarakter sederhana, cepat, akurat, dan mudah diinterpretasikan. Salah satu alat komputasi modern dikenal dengan *Mathematica* yang ditulis dengan bahasa *Wolfram*. *Mathematica* didesain untuk memiliki kemampuan komputasi tingkat tinggi. *Mathematica* kini dapat dijumpai dengan kemampuan sebagai *machine learning* terintegrasi yang canggih, dari fungsi yang sangat otomatis seperti *Predict* dan *Classify* hingga fungsi berdasarkan metode dan diagnostik tertentu, termasuk pendekatan jaringan saraf terbaru. Fungsinya bekerja pada banyak jenis data, termasuk numerik, kategoris, deret waktu, tekstual, gambar, dan audio. Apa dan bagaimana *Mathematica* bekerja secara lengkap akan dibahas pada bagian akhir buku ini. Ilustrasi sederhana kemampuan *Mathematica* untuk menyelesaikan persoalan komputasi dapat diikuti pada bagian berikut ini.

Pandang susunan segi empat sebagaimana diberikan dalam Gambar 1.1.



Gambar 1.1. Empat buah susunan segi empat berbentuk segitiga.

Susunan segi empat berbentuk segitiga sebagaimana diberikan dalam Gambar 1.1. dikenal dengan sebutan Segitiga Sierpiński. Segitiga Sierpiński dapat dikonstruksi menggunakan konsep Sistem Fungsi Iterasi (SFI)/ *Iterated Function Systems* (IFS). SFI merupakan sebuah metode untuk mengkonstruksi sebuah fraktal. Fraktal yang dihasilkan dengan metode ini cendrung mirip dengan dirinya sendiri. Oleh karena itu, bentuk fraktal SFI terdiri dari beberapa salinan kecil dari dirinya sendiri, yang masing-masing juga terdiri dari salinan dirinya sendiri (*ad infinitum*). Secara deskriptif algoritma untuk mengkonstruksi segitiga Sierpiński dimulai dari sebuah bidang segitiga penuh (berwarna). Segitiga tersebut dibagi menjadi sembilan persegi yang lebih kecil dan sebangun satu sama lain. Pusat persegi merupakan persegi yang ada ditengah yang dihilangkan atau dihapus (tanpa warna). Lalu pada masing-masing persegi dari delapan persegi lainnya dibagi lagi menjadi sembilan persegi didalamnya (*self-iterating*). Lakukan hal yang sama seperti pada bidang persegi awal hingga iterasi yang ditentukan. Setiap iterasi menghasilkan subhimpunan awal dengan skala semakin kecil.

Secara matematis, pandang himpunan pada iterasi pertama yang dinyatakan sebagai gabungan sembilan subhimpunan dengan skala faktor 1/3. Dengan kata lain terdapat subhimpunan $k = 9$ dan skala faktor $s = 1/3$. Pada iterasi kedua merupakan pengulangan iterasi yang pertama pada masing-masing subhimpunan yang ada. Hasilnya merupakan sebuah persegi dalam pola segitiga serupa dengan iterasi pertama tetapi dengan skala semakin kecil. Dalam Gambar 1.1 diperlihatkan masing-masing persegi berwarna hitam tanpa iterasi (iterasi = 0), iterasi = 1, iterasi = 2, iterasi = 3, dan iterasi = 7. Pola ini dinamakan pola motif persegi pada segitiga Sierpiński.

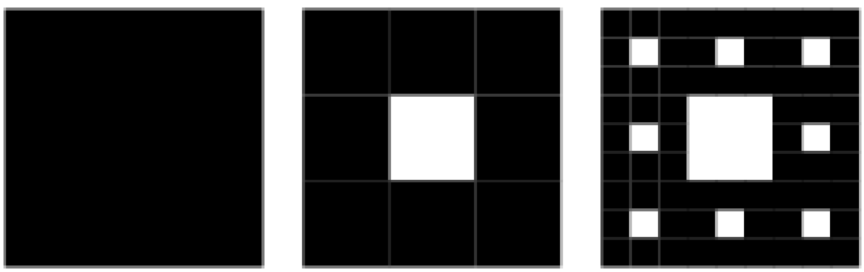
Selain pola motif empat persegi pada segitiga Sierpiński, dapat juga dikonstruksi pola motif empat persegi pada segi empat Sierpiński yang dikenal dengan sebutan Karpet Sierpiński. Untuk mendapatkan pola motif persegi pada karpet Sierpiński dengan iterasi yang bervariasi atau lebih tinggi dapat digunakan alat bantu komputer, misalnya *Matlab* atau *Mathematica.* Berikut ini skrip pemrograman komputer menggunakan *Mathematica.*

Input:

```
w1[x_]:=(Translate[Scale[x,0.5],{0,0}]);
w2[x_]:=(Translate[Scale[x,0.5],{0.25,0.5}]);
w3[x_]:=(Translate[Scale[x,0.5],{0.5,0}]);
w[a_]:=Union[{w1[a],w2[a],w3[a]}];
Iteration=7;
sierpinski1=Graphics[Nest[w,Polygon[{{0,0},{0,1},{1,1},{1,0}}],1]];
sierpinski2=Graphics[Nest[w,Polygon[{{0,0},{0,1},{1,1},{1,0}}],2]];
```

```
sierpinski3=Graphics[Nest[w,Polygon[{{0,0},{0,1},{1,1},{1,0}}],3]];
sierpinski7=Graphics[Nest[w,Polygon[{{0,0},{0,1},{1,1},{1,0}}],7]];
Grid[{{TextCell["Iterasi=1"],TextCell["Iterasi=2"],TextCell["Iterasi=
3"],TextCell["Iterasi=7"]},{Show[sierpinski1],Show[sierpinski2],Sho
w[sierpinski3],Show[sierpinski7]}},Frame->All]
```

Output:



Gambar 1.2. Tiga buah susunan segi empat Karpet Sierpiński.

Secara umum ilustrasi matematis dari konstruksi pola karpet Sierpiński menggunakan *Iterated Function Systems* (*IFS*) adalah melalui pemetaan linear berikut ini.

$$H_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \tag{1.22}$$

dengan $i=1,2,\cdots,n$.

Untuk $n=8$ pemetaan linear (1.22) dapat ditulis sebagai berikut:

$$H=\bigcup_{i=1}^{8}H_i \tag{1.23}$$

dengan

$$H_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$H_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1/3\end{pmatrix}$$

$$H_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2/3\end{pmatrix}$$

$$H_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$H_5\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$H_6\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$H_7\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\0\end{pmatrix}$$

$$H_8\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix}$$

Cara lain untuk mengkonstruksi karpet Sierpiński dapat menggunakan *string* dengan sel 0 dan 1 dengan aturan iterasinya sebagai berikut:

$$\left\{0 \longrightarrow \begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}, 1 \longrightarrow \begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{Vmatrix}\right\}.$$

Terhadap karpet Sierpiński dalam Gambar 3 dapat dikalkulasi jumlah persegi warna hitam (N_n), panjang sisi kotak putih (L_n), dan pembagian wilayah dari kotak hitam setelah iterasi ke-n (A_n) dengan menggunakan hubungan berikut ini:

$$N_n = 8^n \tag{1.24}$$
$$L_n = \frac{1}{3^n} \quad .$$
$$A_n = \left(N_n\right)^2 \times N_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Dengan menggunakan hubungan (1.24), jumlah sel kotak hitam pada sebuah karpet Sierpiński untuk iterasi ke-n dengan $n = 0, 1, 2, \cdots$ masing-masing berjumlah 1, 8, 64, 512, 4096, 32768, 262144, dan seterusnya. Sementara itu, untuk dimensi kapasitasnya dapat dikalkulasi dengan menggunakan formula berikut:

$$d_k = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n} = \frac{3\ln 2}{\ln 3} \approx 1.8927896 \tag{1.25}$$

Soal-soal latihan.

1. Tentukan hampiran dari bilangan 48,21416 , 2,3742, dan 52,275 dengan cara pembulatan (*rounded*) menjadi bilangan dengan dua tempat desimal.
2. Tentukan hampiran dari bilangan 0,70029 , 38,46235, dan 0,00222218 ke 4 angka signifikan
3. Diketahui $u = 3v^7 - 6v$. Tentukan persentase galat dalam u pada v = 1 bila galat dalam v adalah 0,05.
4. Tentukan banyaknya suku dari deret eksponensial sedemikian hingga jumlahnya adalah nilai dari e^x teliti sampai lima tempat desimal untuk semua nilai x dalam $0 \le x \le 1$.
5. Ekspansi dari $f(x) = \tan^{-1} x$ adalah
   $$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$
   Tentukan n buah suku deret McLaurin sedemikian sehingga deret fungsi $\tan^{-1}(1)$ dapat ditentukan teliti hingga 8 angka signifikan.

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu menjelaskan konsep dan penggunaan metode-metode iteratif untuk menyelesaikan persamaan aljabar dan/atau transenden. **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu menentukan solusi persamaan aljabar dan/atau transenden dengan metode: 1. Biseksi 2. Iterasi 3. Newton Raphson 4. Regula Falsi	**Pokok Bahasan** : Metode Numerik Untuk Menyelesaikan Persamaan aljabar dan/atau Transenden: **Sub Pokok Bahasan** : Metode Biseksi; Metode Iterasi. Metode Newton-Raphson Metode Regula Falsi

BAB II
METODE NUMERIK UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINEAR

Dalam pembentukan model matematika sering dijumpai model dalam bentuk persamaan nonlinear. Menyelesaikan persamaan nonlinear secara numerik dapat dilakukan dengan beberapa metode.

Pandang sebuah persamaan nonlinear yang dinyatakan dalam bentuk berikut:

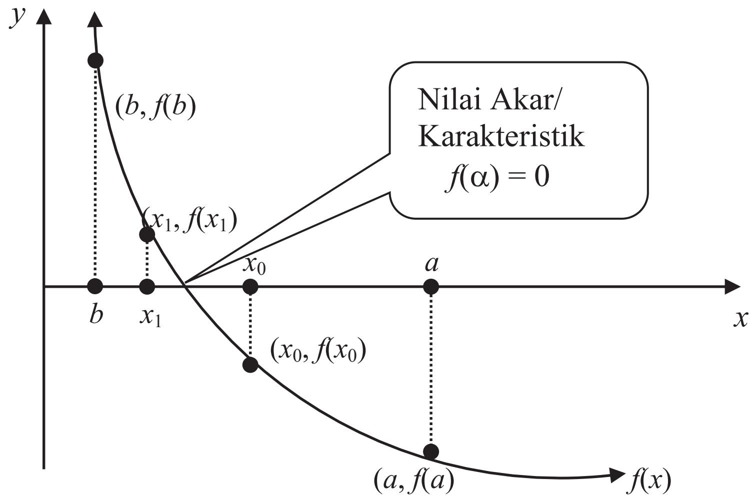
$$f(x)=0. \tag{2.1}$$

Menyelesaikan persamaan nonlinear (2.1) diartikan sebagai upaya mencari suatu nilai $x=x_s$ sedemikian sehingga persamaan tersebut bernilai benar. Nilai $x=x_s$ biasanya dinamakan dengan nilai-nilai akar. Beberapa contoh persamaan $f(x)=0$ nonlinear adalah $1+\cos(x)-5x=0$, $x\tan(x)-\cosh(x)=0$, dan $e^x-\sin(x)=0$. Solusi persamaan-persamaan nonlinear tersebut menjadi lebih sederhana dan relatif mudah jika diselesaikan dengan metode numerik. Pada bagian berikut ini didiskusikan beberapa metode numerik untuk mendapatkan solusi hampiran persamaan nonlinear (2.1).

2.1. METODE BISEKSI

Metode Biseksi (*bisection*) dinamakan demikian karena cara kerja metode ini dalam menghampiri nilai akar yang diinginkan adalah dengan menetapkan dua buah titik dalam sebuah interval yang memuat nilai akar yang diinginkan untuk kemudian dibagi menjadi dua bagian untuk dijadikan sebagai nilai akar yang diharapkan. Bila belum mencapai nilai akar yang diharapkan maka proses membagi interval terus dilakukan. Jaminan cara kerja metode Biseksi akan sampai pada nilai akar yang harapkan adalah Teorema 1.1. Berdasarkan Teorema 1.1 yang menyatakan bahwa bila fungsi $f(x)$ kontinu di sepanjang interval (a,b), dan $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(\alpha)=0$ untuk suatu bilangan α sedemikian hingga $a<\alpha<b$.

Dengan metode Biseksi, nilai α dihampiri pertama kali dengan memilih x_0 yang ditetapkan dengan $x_0=\frac{a+b}{2}$. Bila $f(x_0)=0$ atau $f(x_0)$ "dekat" kepada nilai 0 untuk suatu nilai toleransi yang diberikan maka x_0 adalah nilai akar dari $f(x)=0$. Sebaliknya bila $f(x_0)\neq 0$ atau $f(x_0)$ "dekat" kepada nilai 0 tetapi tidak memenuhi suatu nilai toleransi yang diberikan, maka berdasarkan Teorema 1.1 ada dua kemungkinan yakni nilai akar berada di antara *a* dan x_0 atau nilai akar berada di antara x_0 dan *b*. Dari salah satu kemungkinan ini, metode Biseksi kembali akan digunakan dengan hampiran kedua yaitu dengan memilih kondisi $x_1=\frac{x_0+a}{2}$ atau $x_1=\frac{x_0+b}{2}$. Secara geometris, metode Biseksi yang dikemukakan diatas diilustrasikan melalui Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Ilustrasi Geometris Metode Biseksi

Contoh 2.1

Dapatkan nilai akar dari persamaan $f\left(x\right)=x^{3}-x-1=0$. dengan menggunakan metode Biseksi.

Penyelesaian:

Pilih a = 1 dan b = 2. Karena $f\left(1\right)$ negatif dan $f\left(2\right)$ positif sehingga $f\left(2\right)\cdot f\left(2\right)<0$ maka salah satu akar terletak antara 1 dan 2 (Teorema 1.1.). Oleh karena itu $x_{0}=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}=1,5$. Kemudian, karena $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}-\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{7}{8}$ (positif) maka akar karakteristik terletak antara 1 dan 1,5. Kondisi ini memberikan $x_{1}=\dfrac{1+1,25}{2}=1,25$.

Karena $f\left(x_{1}\right)=f\left(1,25\right)=-\dfrac{19}{64}$ (negatif), nilai akar yang dicari terletak diantara 1,25 dan 1,5. Sehingga diperoleh

$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375$. Bila prosedur di atas diulang kembali hingga x_5 diperoleh nilai-nilai hampiran berikut:

$$x_3 = 1,3125,\ x_4 = 1,34375,\ x_5 = 1,328125.$$

2.2. METODE ITERASI

Iterasi dimaksudkan sebagai sebuah proses tetap yang berulang sehingga mencapai tujuan yang diinginkan. Dalam konteks metode numerik proses iterasi dimulai dengan aproksimasi x_0 untuk suatu nilai akar α, kemudian menggunakan nilai tersebut untuk melakukan aproksimasi x_1. Kemudian nilai x_1 digunakan untuk mengaproksimasi nilai x_2 demikian seterusnya. Dengan proses yang iteratif seperti ini nilai-nilai aproksimasi $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$ akan mendekati nilai akar α. Proses tersebut diteruskan sehingga aproksimasi dengan ketelitian yang diinginkan diperoleh. Dapat dicatat bahwa untuk sebuah proses iterasi yang dilakukan diperlukan dua hal berikut :

(i) Nilai awal x_0, dan

(ii) Skema/formula untuk memperoleh aproksimasi x_{n+1} dengan melibatkan nilai aproksimasi sebelumnya yaitu x_n dimana $n = 0,1,\ldots,N$.

2.2.1. Metode Iterasi Sederhana

Pandang persamaan (2.1) sebagai permasalahan yang ingin diselesaikan. Ubahlah persamaan tersebut sehingga berbentuk

$$x = F(x) \qquad (2.2)$$

Tetapkan nilai toleransi galat *Tol* sebagai batasan hampiran yang diinginkan, misalnya *Tol* = 10^{-3}. Untuk iterasi pertama, x_1, tetapkan sebarang nilai awal λ untuk x_0 kemudian subsitusikan ke $F(x = x_0)$ dalam persamaan (2.2) sehingga menjadi

$$x_1 = F(x_0). \tag{2.3}$$

Analog proses untuk iterasi berikutnya akan memberikan sebarisan nilai-nilai $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$. Untuk nilai terakhir dari barisan ini, berdasarkan hasil (2.3) diperoleh hubungan

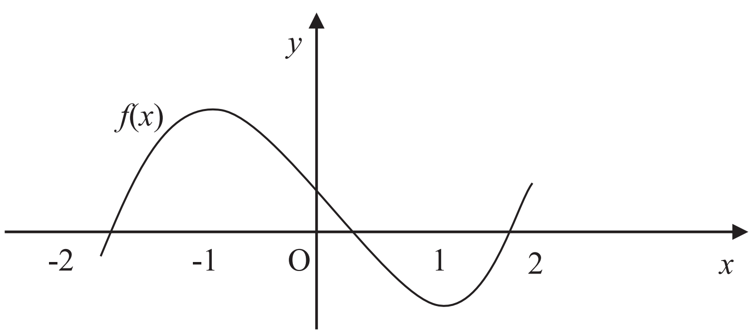
$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{2.4}$$

Cara penyelesaian persaman (2.1) dengan menggunakan formula (2.3) dikenal dengan sebutan metode iterasi sederhana sedangkan persamaan yang diberikan dalam (2.4) dikenal dengan persamaan rekursif. Proses iterasi dalam metode ini dihentikan ketika kondisi

$$|x_{n+1} - x_n| \le Tol \tag{2.5}$$

Contoh 2.2

Tentukan nilai akar dari persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ yang sketsa grafik fungsinya diperlihatkan dalam Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Sebuah grafik fungsi (kurva) $f(x) = 2x^3 - 7x + 2$

Penyelesaian:

Pandang persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$. Dari sketsa grafik terlihat bahwa akar positifnya terletak antara 0 dan 1, dan yang lainnya terletak diantara 1 dan 2. Ubah persamaan menjadi $x = F(x)$ dengan $F(x) = \frac{2}{7}(x^3 + 1)$. Oleh karena itu dalam bentuk formula persamaan (2.4) diperoleh

$$x_{n+1} = \frac{2}{7}\left(x_n{}^3 + 1\right). \tag{2.6}$$

Kemudian untuk nilai akar yang berada diantara 0 dan 1, tetapkan nilai awal $\lambda = 1 = x_0$.

Dengan formla dalam persamaan (2.6) diperoleh:

$$x_1 = \frac{2}{7}\left(1^3 + 1\right) = 0,571$$ (dibulatkan hingga tiga tempat desimal)

Subsitusikan nilai $x_1 = 0,571$ ke dalam persamaan (2.6) kembali diperoleh:

$$x_2 = 2/7\left[\left(0,571\right)^3 + 1\right] = 0,339.$$

Dengan cara yang sama menghasilkan nilai-nilai aproksimasi sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Daftar nilai x_n yang berasal dari persamaan (2.6) untuk *n* = 0 hingga 4.

n	x_n	$x_n{}^3$	$x_{n+1} = 2/7\left(x_n{}^3 + 1\right)$
0	1	1	0,571
1	0,571	0,186	0,339
2	0,339	0,039	0,297
3	0,297	0,026	0,293
4	0,293	0,025	0,293

Dari Tabel 2.1. diperoleh informasi bahwa nilai x_n akan konvergen ke 0,293 (pembulatan hingga tiga tempat desimal). Sementara itu, nilai akar eksak dari $2x^3 - 7x + 2 = 0$ adalah $1 - 1/2\sqrt{2} = 0,292893\cdots$. Ketelitian yang lebih tinggi untuk solusi dengan cara iterasi dapat diperoleh bila angka-angka signifikan dipakai lebih banyak dalam komputasi yang dilakukan. Misalnya, bila dipakai empat tempat desimal, hasil yang diperoleh adalah sebagai mana diberikan dalam Tabel 2.2.

Tabel 2.2. Hasil komputasi lanjutan Tabel 2.1 untuk ketelitian hingga empat desimal.

n	x_n	$x_n^{\ 3}$	$2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$
5	0,2929	0,0251	0,2929

Catatan : nilai untuk x_5 digunakan pembulatan sampai empat desimal dari hasil perhitungan $2/7\left[(0,293)^3+1\right]$.

Tinjau kembali Gambar 2.2. Persamaan $2x^3-7x+2=0$ mempunyai akar positif lain yang terletak diantara 1 dan 2. Dengan menggunakan formula iteratif yang sama seperti sebelumnya, yaitu $x_n=2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$ dan dengan nilai awal $x_0=2$ diperoleh hasil berikut (dibulatkan sampai tiga desimal) :

Tabel 2.3. Daftar nilai aproksimasi dengan nilai awal $x_0=2$.

n	x_n	$x_n^{\ 3}$	$x_{n+1}=2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$
0	2	8	2,571
1	2,571	16,994	5,141
2	5,141	135,876	39,107

Dalam Tabel 2.3 nilai akar yang diinginkan semakin jauh dari yang diharapkan. Proses tersebut menghasilkan suatu kedivergenan. Ilustrasi tersebut menunjukkan bahwa tidak semua proses iteratif adalah konvergen. Proses iterasi yang baru saja dikemukakan tidak dapat dipakai, oleh karena itu perlu dicari proses iterasi lain untuk persamaan yang diketahui. Berikut adalah iterasi lain yang dimaksud.

Persamaan yang diketahui yaitu $2x^3-7x+2=0$ dapat ditulis dalam bentuk :

$$x = \frac{7x - 2}{2x^{2}} \text{, untuk } x_0 \neq 0$$

Dan proses iterasinya ditentukan dalam bentuk persamaan rekursif berikut:

$$x_{n+1} = \frac{7x_n - 2}{2x_n^2} \tag{2.7}$$

Dimulai dengan nilai awal $x_0 = 2$, hasil yang diperoleh sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 2.4 berikut ini (pembulatan angka dilakukan sampai dengan tiga tempat desimal):

Tabel 2.4. Hasil iterasi menggunakan persamaan rekursif (2.7)

n	x_n	x_n^2	$7x_n - 2$	$2x_n^2$	$x_{n+1} = \frac{7x_n - 2}{2x_n^2}$
0	2	4	12	8	1,5
1	1,5	2,25	8,5	4,50	1,889
2	1,889	3,568	11,223	7,136	1,573
3	1,573	2,474	9,011	4,948	1,821
...	...	...	...	...	...
22	1,709	2,922	9,963	5,844	1,705
23	1,705	2,908	9,935	5,816	1,708
24	1,708	2,918	9,956	5,836	1,706
25	1,706	2,911	9,942	5,822	1,708

Dari hasil yang ditampilkan dalam Tabel 2.7 diperoleh informasi bahwa proses iterasi menghasilkan suatu kekonvergenan, walaupun dengan tiga tempat desimal masih belum sempurna. Apabila dipakai lebih banyak angka signifikan akan diperoleh hasil yang lebih baik lagi. Bandingkan dengan nilai akar eksak yakni $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1,707106$.

Bentuk lain persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ dapat pula ditulis sebagai

$$x = \left(\frac{7x - 2}{2x}\right)^{1/2} \quad \text{dan} \quad x = \left(\frac{7x - 2}{2}\right)^{1/3}$$

Formula iterasi (persamaan rekursi) untuk masing-masing persamaan tersebut adalah

$$x_{n+1} = \left(\frac{7x_{n+1} - 2}{2x_n} \right)^{1/2} \text{ dan } x_{n+1} = \left(\frac{7x_n - 2}{2} \right)^{1/3}. \tag{2.8}$$

Dari keempat formula iterasi (2.6)–(2.8), hasil iterasinya dapat dibandingkan seperti ditunjukkan pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5. Hasil iterasi formula (2.6), (2.7), dan (2.8) berkenaan dengan nilai awal yang dipilih dan kekonvergenannya.

Formula Iterasi (Persamaan Rekursi)	Nilai Awal x_0	Hasil
$x_n = 2/7\left(x_n^{\ 3} + 1\right)$	1 2	Konvergen pada akar 0,292893 Divergen
$x_n = \left(\frac{7x_n - 2}{2x_n^2} \right)$	1 2	Konvergen pada akar 1,707106 Konvergen pada akar 1,707106
$x_n = \left(\frac{7x_n - 2}{2x_n} \right)^{1/2}$	1 2	Konvergen pada akar 1,707106 Konvergen pada akar 1,707106
$x_n = \left(\frac{7x_n - 2}{2} \right)^{1/3}$	1 2	Konvergen pada akar 1,707106 Konvergen pada akar 1,707106

2.2.2. Metode Iterasi Konvergen

Dalam metode iterasi konvergen penyelesaian $x = F(x)$ oleh formula iterasi $x_{n+1} = f(x_n)$ akan konvergen ke akarnya, bila $|F'(x)| < 1$.

Teorema 2.1.

Misal $x = \alpha$ adalah nilai akar dari $f(x) = 0$ dan I adalah sebuah interval yang memuat titik $x = \alpha$. Misal $F(x)$ dan $F'(x)$ kontinu dalam I dengan $F(x)$ didefinisikan oleh persamaan $x = F(x)$ yang ekuivalen dengan $f(x) = 0$. Maka bila

$$|F'(x)| < 1, \tag{2.9}$$

untuk setiap x dalam I, barisan nilai-nilai aproksimasi $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ yang didefinisikan oleh $x_{n+1} = f(x_n)$ akan konvergen ke akar α, dengan aproksimasi awal x_0 dipilih dalam interval I.

Bukti :

Karena α adalah akar dari persamaan $x = f(x)$ maka berlaku:

$$\alpha = F(x). \tag{2.10}$$

Dari hubungan $x_{n+1} = F(x_n)$ dapat ditentukan aproksimasi nilai x_1 yaitu:

$$x_1 = F(x_0). \tag{2.11}$$

Eliminasi (2.10)-(2.11) menghasilkan

$$\alpha - x_1 = F(\alpha) - F(x_0). \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan Teorema 1.3, ruas kanan dari persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai

$$(\alpha - x_1)F'(\alpha_0), \text{ untuk } x_0 < \alpha < \alpha_0$$

Oleh karena itu berlaku hubungan berikut:

$$\alpha - x_1 = (\alpha - x_0)F'(\alpha_0), x_0 < \alpha_0 < \alpha \tag{2.13}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - x_2 = (\alpha - x_1)F'(\alpha_1), x_1 < \alpha_1 < \alpha \\ \alpha - x_3 = (\alpha - x_2)F'(\alpha_2), x_2 < \alpha_2 < \alpha \\ \dots \\ \alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)F'(\alpha_n), x_n < \alpha_n < \alpha \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

Dengan cara yang sama diperoleh hubungan-hubungan berikut

Misalkan,

$$\left|F'(\alpha_i)\right| \le K < 1 \text{, untuk semua } i. \tag{2.15}$$

Dari persamaan (2.13) – (2.15) memberikan

$$|\alpha - x_1| \le |\alpha - x_0|,\ |\alpha - x_2| \le |\alpha - x_1| \text{, dan seterusnya.}$$

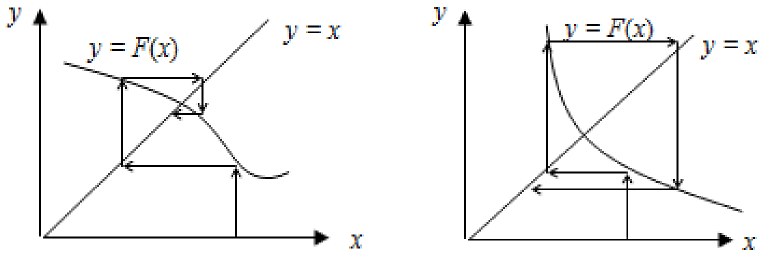
Hasil ini menunjukkan bahwa tiap-tiap aproksimasi senantiasa berada dalam *I* dengan aproksimasi awal x_0 juga dipilih dalam I. Subsitusi (2.13) ke persamaan pertama dalam (2.14), kemudian hasilnya disubsitusikan ke persamaan berikutnya dalam (2.15) menghasilkan :

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_0)F'(\alpha_0)F'(\alpha_1)...F'(\alpha_n) \tag{2.16}$$

Karena $\left|F'(x_i)\right| < K$, maka persamaan (2.16) memberikan

$$|\alpha - x_{n+1}| \le K^{n+1}|\alpha - x_0| \tag{2.17}$$

Untuk $n \to \infty$, ruas kanan dari (2.17) akan mendekati nol, dan selanjutnya barisan dari aproksimasi $x_0, x_1, ...$ konvergen ke akar-akar α bila K<1.
Secara geometris, metode iterasi konvergen dapat dipresentasikan sebagai berikut.
Perhatikan diagram dalam Gambar 2.3 yang memperlihatkan bahwa proses iteratif mendekat ke sebuah titik potong kurva $y = F(x)$ dan $y = x$. Titik potong yang dimaksud dikenal dengan sebutan titik tetap (*fixed point*). Proses iteratif serupa ini dinamakan iterasi *konvergen*. Sebaliknya, diagram yang diperlihatkan dalam Gambar 2.4 memberikan informasi bahwa proses iteratif menjauh dari sebuah titik potong kurva $y = F(x)$ dan $y = x$. Proses iteratif serupa ini dinamakan iterasi *divergen*.



Gambar 2.3. Ilustrasi iterasi menuju titik tetap. Iterasi konvegen (kiri) dan tidak konvergen (kanan)

Contoh 2.3.

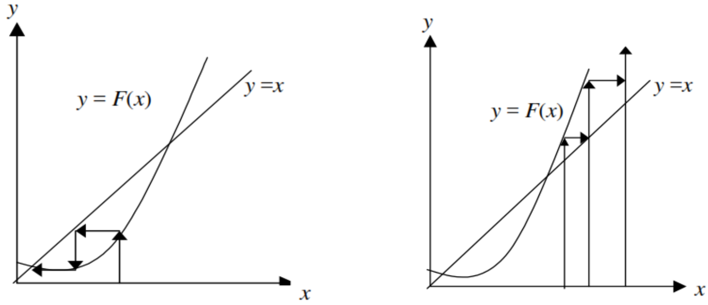
Tentukan nilai akar real dari persamaan $f(x)=2x^3-7x+2=0$ dengan menggunakan metode iterasi konvergen,

Penyelesaian:

Untuk masing-masing bentuk formula iteratif dari $f(x)=2x^3-7x+2=0$ yakni:

(i) Untuk formula iteratif (2.6):

$F_1(x)=\frac{2}{7}(x^3+1)$ dan $F_1'(x)=\frac{6}{7}x^2$. Oleh karena itu untuk nilai-nilai x di dalam [0,1], $F'(x)<1$. Dengan demikian formula tersebut dapat digunakan dengan nilai awal x_0 sembarang di dalam interval guna menentukan akar tersebut. Untuk nilai $x_0=1$, ilustrasi proses iterasi konvergen dapat dilihat pada Gambar 2.5. Andaikan pilihan $x_0=0,2928$, sehingga $F'_1(0,2928)=0,0735$ ... yang jauh lebih kecil dari 1. Proses iterasi akan menjadi sangat cepat. Tetapi, untuk nilai akar lain yakni α yang menyatakan akar positif terbesar $(\alpha\approx1,7)$, formula iteratif (2.6) memberikan ($F'_1(x)>1$ untuk semua $x>\sqrt{7/6}\approx1,7$). Akibatnya, formula (2.6) tidak akan memberikan proses yang konvergen untuk nilai awal $x_0 > 1,7$. Untuk menunjukkan ini, pilih $x_0 = 2$ yang menghasilkan iterasi yang divergen. Prosesnya diilustrasikan secara grafik pada Gambar 2.6

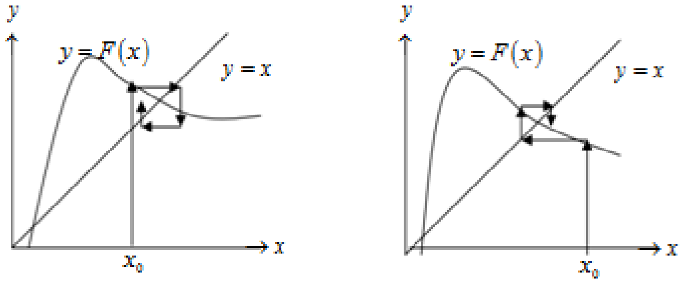


Gambar 2.4. Ilustrasi iterasi menuju titik tetap untuk persamaan rekursif $x_{n+1} = \frac{2}{7}\left(x_n^{\ 3} + 1\right)$. Iterasi konvegen (kiri) dan divergen (kanan)

(ii) Untuk formula iteratif (2.7):

Misalkan $F_2\left(x\right) = \dfrac{7x - 2}{2x^2}$. Karenanya $F'_2\left(x\right) = \dfrac{4 - 7x}{2x^3}$. Dapat diperiksa bahwa untuk tiap x di dalam interval [0,1/2] diperoleh $\left|F'_2\left(x\right)\right| > 1$. Jadi formula iteratif $x_{n+1} = F_2\left(x_n\right)$ tidak bisa dipakai untuk menentukan nilai akar dalam interval tersebut. Pilih $x_0 = 1$. Proses iterasi tersebut tidak konvergen ke akar tersebut, dan proses itu diperlihatkan pada

Gambar 2.7. Tetapi dapat ditunjukkan bahwa $\left|F'_2\left(x\right)\right| < 1$ untuk setiap x di dalam [3/2 , 2] dan untuk suatu nilai awal x_0 dalam interval tersebut formula $x_{n+1} = F_2\left(x_n\right)$ akan memberikan proses yang konvergen ke akar persamaan yang diberikan. Kita peroleh hasil yang konvergen ke akar persamaan tersebut dengan nilai awal $x_0 = 2$. proses tersebut diperlihatkan oleh grafik pada Gambar 2.8.



Gambar 2.5. Ilustrasi iterasi menuju titik tetap untuk persamaan rekursif $x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 2}{2x_n{}^2}$. Iterasi konvegen untuk dua nilai awal yang berbeda tetapi konvergen untuk masing- masing nilai awal yang dipilih.

(iii) Untuk formula iteratif $x_{n+1} = \left(\dfrac{7x_n - 2}{2x_n} \right)^{1/2}$.

Diketahui bahwa turunan pertama $F_3(x) = \left[\dfrac{(7x-2)}{2x} \right]^{1/2}$ adalah $F'_3(x) = \dfrac{1}{2x^2} \left(\dfrac{2x}{7x-2} \right)^{1/2}$. Formula iteratif tersebut tidak dapat dipakai di dalam interval $0 < x < 2/7$, karena untuk setiap x di dalam interval tersebut akan diperoleh akar pangkat dua dari bilangan negatif. Demikian pula, untuk setiap x di dalam interval (2/7,1/2) akan diperoleh $\left| F'_3(x) \right| > 1$. Jadi formula $x_{n+1} = F_3(x_n)$ tidak dapat dipakai untuk menghitung akar terkecil. Tetapi apabila dilakukan pada x di dalam interval [3/2, 2] yang memuat akar terbesar, formula iteratif $x_{n+1} = F_3(x_n)$ akan memberikan proses yang konvergen untuk akar terbesar.

(iv) Untuk formula iteratif $x_{n+1}=\left(\frac{7x_n-2}{2}\right)^{1/3}$.

Misalkan $F_4(x)=\left(\frac{7x-2}{2}\right)^{1/3}$. Turunan pertama fungsi ini adalah $F'_4(x)=\frac{7}{6}\left(\frac{2}{7x-2}\right)^{2/3}$. Bila diperiksa ternyata $\left|F'_4(x)\right|>1$ untuk setiap x di dalam interval (2/7,1/2). Jadi formula $x_{n+1}=F_4(x_n)$ tidak dapat dipakai untuk menentukan akar terkecil. Tetapi dapat ditunjukkan bahwa | $\left|F'_4(x)\right|<1$ untuk setiap x di dalam [3/2,2] yang memuat akar terbesar. Atas dasar itu, untuk nilai awal x_0 dalam [3/2,2], formula $x_{n+1}=F_4(x_n)$ akan memberi proses konvergen untuk akar terbesar.

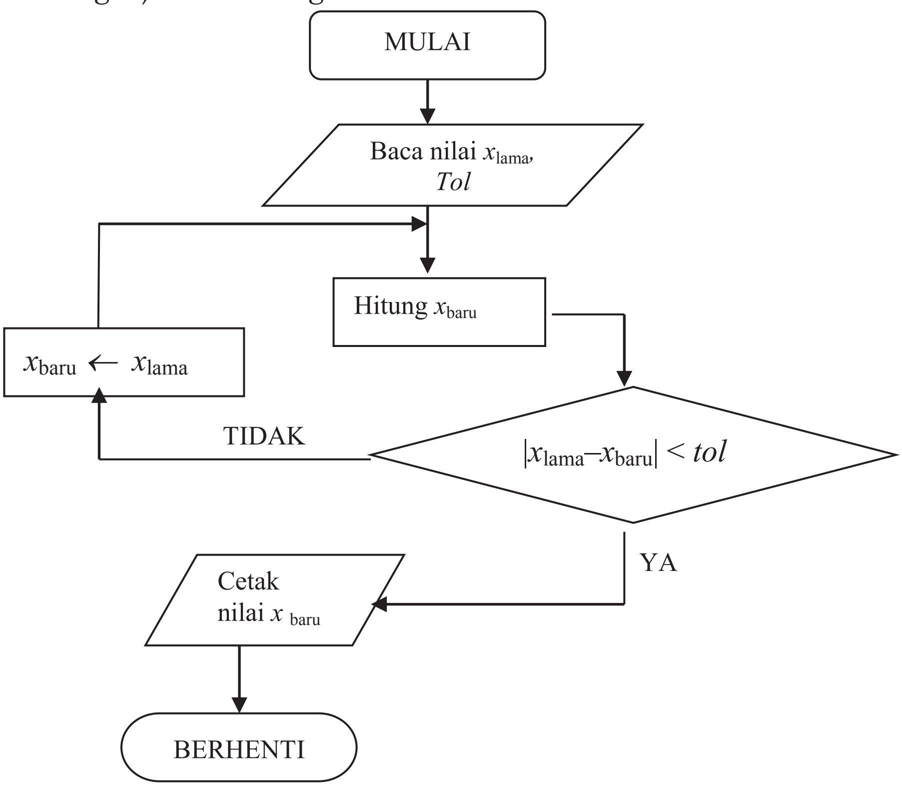
Dari hasil perhitungan di atas dapat dikemukakan hal-hal sebagaimana ditunjukan dalam Tabel 2.6. berikut :

Tabel 2.6. Beberapa formula iteratif berkenaan dengan persamaan $2x^3-7x+2=0$ **dengan menggunakan iterasi konvergen.**

Formula Iterasi	$F'(x)$	Interval I	$F'(x)$	Hasil
$x_{n+1}=2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$	$6/7\,x^2$	[0,1] [1,2]	<1 >1	Konvergen ke akar dalam I untuk sembarang nilai awal dalam I. Divergen
$x_{n+1}=\frac{7x_n-2}{2x_n^2}$	$\frac{4-7x}{2x^3}$	[0,1/2] [3/2,2]	>1 <1	Divergen Konvergen ke akar dalam I untuk sembarang nilai awal dalam I

$X_{n+1} = \left(\frac{7x_n - 2}{2}\right)^{1/3}$	$\left(\frac{2}{7x-2}\right)^{2/3}$	[2/7,1/2] [3/2,2]	>1 <1	Divergen Konvergen ke akar dalam *I* untuk sembarang nilai awal dalam I.

Diagram alur (*Flow Chart*) untuk proses iterasi (metode iterasi konvergen) adalah sebagai berikut

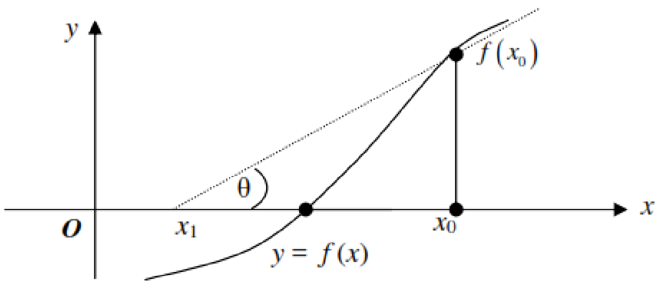


Gambar 2.6. Diagram alir (*flow chart*) proses penentuan nilai akar persamaan dengan menggunakan metode iterasi konvegen.

2.3. METODE NEWTON

Metode **Newton** didasarkan pada aproksimasi linear fungsi dan menggunakan prinsip kemiringan (*Tangen*) kurvanya (lihat Gambar 2.7).

Kalkulasi dengan metode Newton diawali dengan x_0 yang tidak terlalu jauh dari sebuah akar, bergerak sepanjang garis linear (kemiringan atau tangen garis) ke perpotongannya di sumbu-x, dan mengambilnya sebagai titik aproksimasi untuk yang berikutnya. Perlakuan ini diteruskan hingga nilai-nilai x dirasakan sukses cukup dekat ke fungsi bernilai nol.



Gambar 2.7. Ilustrasi metode Newton untuk penentuan nilai akar persamaan.

Pandang diagram dalam Gambar 2.7. Skema kalkulasinya mengikuti segitiga yang dibangun dengan sudut inklinasi dari kemiringan garis pada kurva di $x = x_0$ yaitu

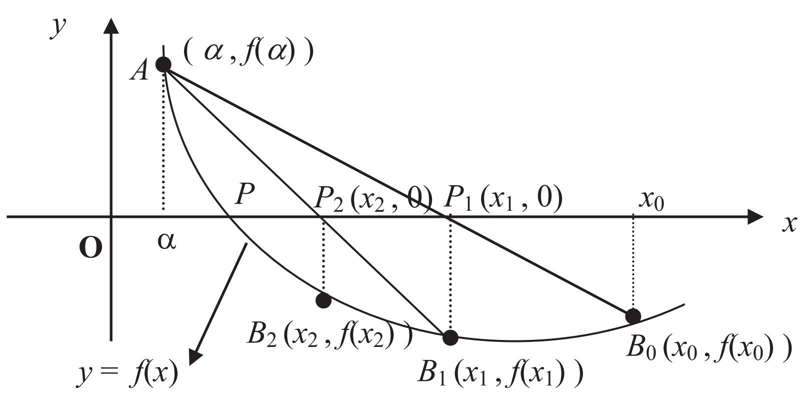
$$\tan(\theta) = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} \text{ atau } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (2.18)$$

Aproksimasi berikutnya diteruskan dengan menghitung x_2 dengan skema yang sama dimana nilai x_0 digantikan oleh x_1. Secara umum metode Newton dirumuskan oleh skema berikut ini:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2.19)$$

2.4. METODE UBAH POSISI (REGULA FALSI)

Untuk menentukan nilai akar dari $f(x)=0$ dapat digunakan metode Perubahan Posisi /*Regula Falsi* (RF). Aturan dari metode RF diterangkan secara geometri dalam Gambar 2.8. Dalam gambar yang dimaksud, sketsa grafik dari kurva dinyatakan oleh persamaan $y=f(x)$. Akar dari $f(x)=0$ yang dicari dinyatakan oleh koordinat x dari titik P yang merupakan perpotongan dari kurva $y=f(x)$ dengan sumbu x . Untuk menggunakan aturan RF, diperlukan dua titik, $A(\alpha, f(\alpha))$ dan $B_0(x_0, f(x_0))$ misalnya, sedemikian sehingga garis lurus AB_0 memotong sumbu x di titik $P_1(x_1, 0)$.



Gambar 2.8. Diagram prosedur metode *regula falsi* untuk hampiran nilai akar $f(x)=0$

Proses selanjutnya adalah menentukan nilai x_1 melalui persamaan garis AB_0 yang memotong sumbu x di titik P_1. Setelah itu dengan menggunakan koordinat titik P_1 yakni $(x_1, 0)$ dapat ditentukan titik B_1 dengan koordinat $(x_1, f(x_1))$. Dengan demikian garis AB_1 akan memotong sumbu x di titik P_2 dengan koordinat $(x_2, 0)$. Demikian proses ini terus dilakukan hingga diperoleh kondisi P_n sangat dekat ke P yakni $|P_n - P| < toleransi$. Dari proses pencapaian nilai akar di titik P, dihasilkan barisan nilai-nilai $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang diharapkan akan konvergen ke absis x pada titik P, yaitu nilai akar yang menjadi solusi persamaan yang diberikan ($f(x)=0$).

Penjelasan geometris dari metode RF adalah sebagai berikut :
Persamaan garis AB_0 adalah

$$y-f(\alpha)=\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}(x-\alpha) \tag{2.20}$$

Persamaan (2.19) melalui titik $P_1(x_1,0)$. Oleh karena itu diperoleh

$$-f(\alpha)=\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}(x_1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1=\frac{\alpha f(x_0)-x_0\cdot f(\alpha)}{f(x_0)-f(\alpha)} \tag{2.21}$$

Demikian juga dengan persamaan garis AB_1 yakni

$$y-f(\alpha)=\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}(x-\alpha), \tag{2.22}$$

persamaan (2.22) melalui titik $P_2(x_2,0)$. Oleh karena itu diperoleh

$$x_2=\frac{\alpha f(x_1)-x_1\cdot f(\alpha)}{f(x_1)-f(\alpha)} \tag{2.23}$$

Demikian proses ini diulang hingga mencapai titik P atau sangat dekat dengan titik P (titik yang mengandung nilai akar yang dicari).
Secara umum, formula (2.21) dan (2.23) adalah

$$x_{n+1}=\frac{\alpha\cdot f(x_n)-x_n\cdot f(\alpha)}{f(x_n)-f(\alpha)} \tag{2.24}$$

Contoh 2.4
Gunakan metode RF untuk mendapatkan nilai akar-akar positif dari persamaan $2x^3-7x+2=0$. (Catatan: gunakan ketelitian hingga tiga tempat desimal).

Penyelesaian:

Pilih $\alpha = 0$ dan $x_0 = 1$. Oleh karena itu $f(\alpha = 0) = 2$. Selanjutnya gunakan formula (2.23) guna mendapatkan persamaan rekursifnya, yaitu

$$x_{n+1} = \frac{0 \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(0)}{f(x_n) - 2} = \frac{0 - x_n,(2)}{2x_n^{\ 3} - 7x_n + 2 - 2} = \frac{-2x_n}{2x_n^{\ 3} - 7x_n}$$

$$= \frac{-2}{2x_n^{\ 2} - 7}\,, \tag{2.25}$$

untuk $x_n \neq 0$.

Persamaan (2.25) jika dikaitkan dengan formula iteratif konvergen memberikan keadaan:

$F(x) = \dfrac{-2}{2x^2 - 7}$ sehingga $F'(x) = \dfrac{8x}{(2x^2 - 7)^2}$. Dari bentuk ini dapat diketahui bahwa $8x$ nilainya bertambah dari 0 ke 8, sedangkan $(2x^2 - 7)^2$ nilainya berkurang dari 49 ke 25, bila x bergerak dari 0 ke 1. Jadi nilai maksimum dari $|F'(x)| < 1$ untuk x dalam [0,1] dan juga proses iteratif adalah konvergen untuk nilai awal $x_0 = 1$ dalam [0,1]. Dengan $x_0 = 1$ diperoleh hasil perhitungan sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 2.7. berikut :

Tabel 2.7. Tabel hasil komputasi penggunaan formula (2.24) terhadap penentuan nilai akar dari persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$.

n	x_n	$2x_n^{\ 2}$	$2x_n^{\ 2} - 7$
0	1,000	2,000	-5,000
1	0,400	0,320	-6,680
2	0,299	0,179	-6,821
3	0,293	0,172	-6,828

Jadi akar positif pertama dari $2x^3 - 7x + 2 = 0$ adalah 0,293 (teliti sampai tiga desimal). Dengan cara yang sama hitung akar positif yang kedua yang terletak di antara 1 dan 2, dengan mengambil $\alpha = 2$ dan $x_0 = 0$. Hasilnya akan diperoleh bahwa akar positif yang kedua dari $2x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah 1,707 (teliti sampai tiga tempat desimal).

2.5. CONTOH SOLUSI NUMERIK DENGAN MATHEMATICA (PERSAMAAN DENGAN FUNGSI EKSPONENSIAL)

Bagian ini dideskripsi secara singkat penyelesaian masalah persamaan nonlinear yang melibatkan bentuk fungsi eksponensial.

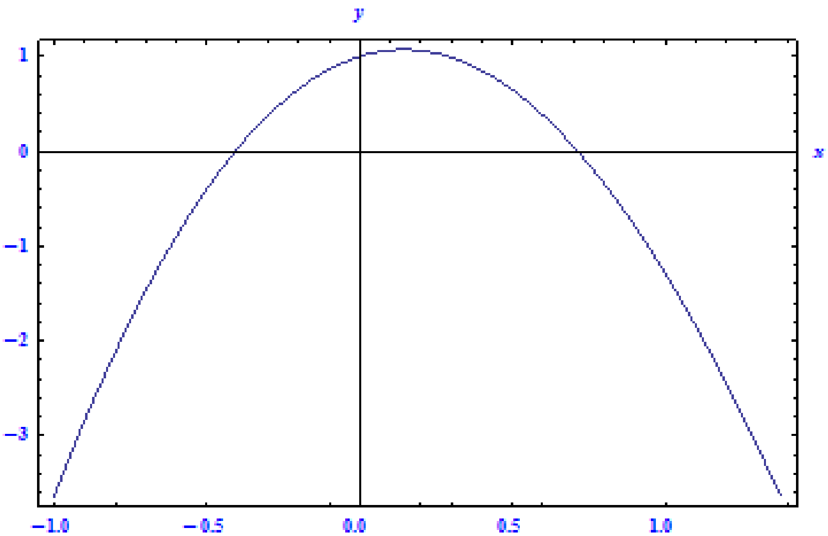
Contoh 2.5

Tentukan solusi numerik persamaan $f(x) = e^x - 4x^2 = 0$ dengan menggunakan metode Biseksi dan metode Newton.

Solusi:

Penyelesaian masalah dapat dilakukan dengan terlebih dahulu melihat bentuk grafik fungsi $f(x)$. Tujuannya agar pemilihan dua nilai awal a dan b tepat dilakukan. Dengan menggunakan skrip *Mathematica* berikut ini dapat dilihat bentuk grafik fungsi $f(x) = e^x - 4x^2 = 0$.

```
Plot[Exp[x]-4x^2, {x, -1, 1.38}, AxesLabel->{x,y},LabelStyle->Directive[Blue,Bold], Frame-> True]
```



Gambar 2.9. Grafik fungsi $f\left(x\right)=e^{x}-4x^{2}=0$ **untuk** $x\in\left[-1,1.38\right]$

Informasi yang diperoleh dari Gambar 2.9. terdapat dua solusi (titik yang berada pada absis (garis-*x*) yaitu di sekitar nilai -0.5 dan disekitar 1.0. Untuk mendapatkan nilai numerik dengan akurasi tinggi dapat menggunakan alat komputasi (kalkulator). Namun demikian pemakaian alat tersebut dan langkah-langkah peyelesaiannya kita abaikan dalam bagian ini dan kita ganti dengan pemakaian alat komputasi komputer dengan platform *Mathematica*. Dengan menggunakan skrip *Mathematica* berikut, akan diperoleh solusi yang diinginkan.

```
{* Metode Biseksi *}
f[x_] := Exp[x]-4x^2;
{a,b, c} = {0.5, 1, (a+b)/2};
i = 0;
tol = 0.00000001;
For[i=0;Abs[f[c]]>tol && f[a]*f[b]<0 ,i<20,i++;If[f[a]*f[c]<0,{a, b}={a, c}, {a, b}={c, b}]; c=(a+b)/2;Print[i, " ", N[a, 11], " ", N[b,11], " ", N[c, 11]," ", N[f[c], 8]]]
ClearAll;
```

```
{* Metode Newton*}
a = 1.5;
i = 0;
tol = 0.0000000001;
f[x_] := Exp[x]-4x^2;
df[x_] := Exp[x]-8x;
For[i=0;Abs[f[a]]>tol && df[a]0 ,i<10,i++; c=a-(f[a]/df[a]); a=c;
  Print[i, " ", N[c]]];
ClearAll;

{* Metode Iterasi Titik Tetap*}
f[x_]:= Exp[x]-4x^2;
a=1;
i=0;
tol=0.00000001;
g[x_]:=(1/2)* √exp[x] ;
f[x_]:= x-g[x];
For[i=0;Abs[f[a]]>tol ,i<12,i++; c=g[a]; a=c; Print[i,"  ",N[a,11],"
",N[g[a],11],"  ",N[c,11]"  ",N[f[c],11]]]; ClearAll;
```

Silahkan Anda coba *running* skrip-skrip di atas. Anda akan dapat jawaban solusi di sebelah kanan sumbu-*x* adalah $x = 0.714806$.

Catatan:

1. Silahkan modifikasi nilai awal *a* atau *b* yang ada untuk mendapatkan solusi (nilai akar) lain yang ada.
2. Gunakan *command* **While** atau **Do** untuk menghasilkan solusi serupa dengan pemakaian **For**. Tentang efesiensi, mana yang lebih efesien penggunaan *command* **While** atau **Do** atau **For**? Mengapa?

2.6. TENTANG SISTEM PERSAMAAN NONLINEAR DAN SOLUSINYA MENGGUNAKAN

2.6.1 Metode Iterasi Titik Tetap (*Fixed-Point Iteration Method*)

Pandang sebuah sistem persamaan nonlinear sebagaimana diberikan dalam Contoh 2.6.

Contoh 2.6

Gunakan metode iterasi titik tetap dengan $\varepsilon_s = 0,0001$ untuk menemukan solusi persamaan sistem nonlinear:

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 10$$

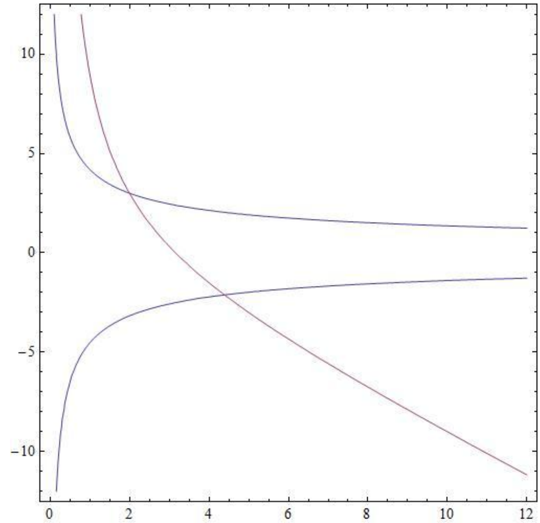
$$x_2 + 3x_1 x_2^2 = 57$$

Untuk mendapatkan nilai numerik dengan tingkat akurasi tinggi dapat menggunakan alat komputasi. Solusi permasalahan dalam Contoh 2.6, untuk penyelesaian masalah yang diberikan, perlu terlebih dahulu dilihat grafik fungsi dari masing-masing persamaan. Keperluan ini dimaksudkan agar pengambilan nilai awal sedekat mungkin dengan nilai akar (solusi) sistem. *Common Mathematica* yang digunakan untuk keperluan ini adalah **ContourPlot[ ]**. Berikut skrip lengkap untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan di atas.

In[ ] :=

```
ContourPlot[{x1^2+x1*x2==10,x2+3 x1*x2^2==57},{ x1,0,12},{ x2,-
12,12}]
```

Output[ ] =



Gambar 2.10 Grafik sistem persamaan $x_1^2 + x_1x_2 = 10$ **dan** $x_2 + 3x_1x_2^2 = 57$

Dari diagram yang diperlihatkan dalam luaran *Mathematica* diatas diperoleh dua titik potong kurva (dua nilai akar/solusi untuk sistem yang diberikan) masing-masing didekat koordinat $(x_1, x_2) = (1.25, 3.75)$ dan $(x_1, x_2) = (6.0, -1.25)$. Solusi numerik dengan menggunakan metode iterasi titik tetap untuk nilai awal $(x_1, x_2) = (1.25, 3.75)$ sebagaimana diberikan dalam skrip berikut.

Skrip Mathematica®

In[ ] :=

```
tabelnilaix1x2={{1.25,3.75}};
tabelnilaigalat={1};
batasakhiriterasi=100;
nilaitoleransi=0.000001;
i=2;
While[And[tabelnilaigalat[[i-1]]>nilaitoleransi,i<
batasakhiriterasi,Element[tabelnilaix1x2[[i-1]],Reals]],
x1baru=Sqrt[10-tabelnilaix1x2[[i-1,1]]*tabelnilaix1x2[[i-1,2]]];
```

```
x2baru=Sqrt[(57-tabelnilaix1x2[[i-1,2]])/(3*x1baru)];
xbaru={x1baru,x2baru};
tabelnilaix1x2=Append[tabelnilaix1x2,xbaru];
galat=Norm[xbaru-tabelnilaix1x2[[i-1]]]/Norm[xbaru];
tabelnilaigalat=Append[tabelnilaigalat,galat];i=i+1];
Title={"Iterasi","x1_lama","x2_lama","x1_baru","x2_baru","Galat"};
T2=Table[{i,tabelnilaix1x2[[i,1]],tabelnilaix1x2[[i,2]],tabelnilaix1x2[[i+1,
1]],tabelnilaix1x2[[i+1,2]],tabelnilaigalat[[i+1]]},{i,1,Length[tabelnilaix1x
2]-1}];
T2=Prepend[T2,Title];
T2//MatrixForm
```

Out[ ] =

Iterasi	x1_lama	x2_lama	x1_baru	x2_baru	Galat
1	1.25	3.75	2.30489	2.77507	0.398181
2	2.30489	2.77507	1.89836	3.08567	0.141214
3	1.89836	3.08567	2.03526	2.97154	0.0494861
4	2.03526	2.97154	1.988	3.00983	0.0168633
5	1.988	3.00983	2.00411	2.99665	0.00577401
6	2.00411	2.99665	1.9986	3.00115	0.00197277
7	1.9986	3.00115	2.00048	2.99961	0.000674475
8	2.00048	2.99961	1.99984	3.00013	0.000230543
9	1.99984	3.00013	2.00006	2.99995	0.0000788085
10	2.00006	2.99995	1.99998	3.00002	0.000026939
11	1.99998	3.00002	2.00001	2.99999	9.20864×10^{-6}
12	2.00001	2.99999	2.	3.	3.1478×10^{-6}
13	2.	3.	2.	3.	1.07602×10^{-6}
14	2.	3.	2.	3.	3.67817×10^{-7}

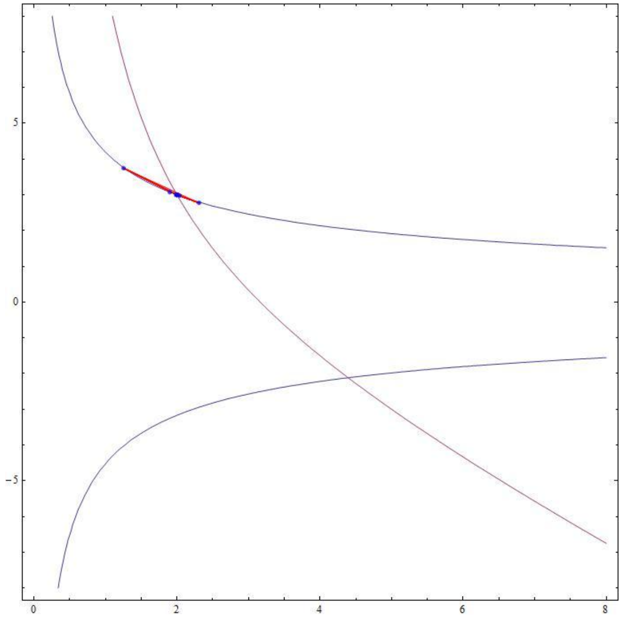
Kita dapat juga melihat pergerakan setiap iterasi menuju titik potong kurva (solusi/nilai akar) yang diinginkan melalui skrip *Mathematica* berikut:

In[ ] :=

```
g1=ContourPlot[{x1^2+x1*x2==10,x2+3 x1*x2^2==57},{x1,0,8},{x2,-
8,8}];
Data0=Table[{tabelnilaix1x2[[i,1]],tabelnilaix1x2[[i,2]]},{i,1,Length[tab
elnilaix1x2]-1}];
```

g2=Graphics[{Opacity[0.7],Red,Line[Tuples[Data0,2]],Blue,PointSize [0.0075],Point[Data0]},Frame True]; Show[g1,g2, ImageSize→Large]

Out[ ]:=



Gambar 2.11 Diagram pergerakan solusi numerik sistem $x_1^2 + x_1x_2 = 10$ dan $x_2 + 3x_1x_2^2 = 57$.

Mengganti potongan skrip "tabelnilaix1x2={{1.25,3.75}}; " dengan" tabelnilaix1x2={{6.0,-1.5}};
" pada skrip yang sama akan diperoleh nilai akar (solusi) lain. Berikut luaran dari program yang dibuat.

Iterasi	x1_lama	x2_lama	x1_baru	x2_baru	galat
1	6.	-1.5	4.67169	-2.00879	0.279714
2	4.67169	-2.00879	4.40451	-2.11165	0.0586139
3	4.40451	-2.11165	4.39376	-2.11777	0.00253407
4	4.39376	-2.11777	4.39374	-2.11778	4.66059×10^{-6}
5	4.39374	-2.11778	4.39374	-2.11778	1.5799×10^{-11}

Common Mathematica yang dapat digunakan untuk keperluan memeriksa solusi yang dikalkulasi sebelumnya adalah **Solve[ ]** atau **FixedPointList[ ]**. Berikut skrip untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan secara langsung.

In [ ] :=
```
Solve[{x1^2+x1*x2==10,x2+3 x1*x2^2==57},{x1,x2},Reals];
```

Out [ ] =
```
{{x1→2., x2 →3.},{x1→4.39374,x2 → -2.11778}}
```

In [ ] :=
```
g[x_]:=(x1=Sqrt[10-x[[1]]*x[[2]]];{x1,Sqrt[(57-x[[2]])/3/x1]})
FixedPointList[g[#]&,{1.5,3.5},20]
```

Out [ ] =
```
{{1.5,3.5},{2.17945,2.86051},{1.94053,3.04955},{2.02046,2.9834},{1.9930
3,3.0057},{2.00239,2.99805},{1.99918,3.00067},{2.00028,2.99977},{1.99
99,3.00008},{2.00003,2.99997},{1.99999,3.00001},{2.,3.},{2.,3.},{2.,3.},{
2.,3.},{2.,3.},{2.,3.},{2.,3.},{2.,3.},{2.,3.},{2.,3.}}
```

2.6.2 Sistem Persamaan Nonlinear: Newton-Raphson

CONTOH :

Gunakan metode Newton-Raphson dengan $\varepsilon_s = 0.0001$ untuk mencari solusi sistem persamaan nonlinier berikut:

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 10 \quad x_2 + 3x_1 x_2^2 = 57$$

SOLUSI

Skrip Mathematica®

Input :
```
FindRoot[{x1^2+x1*x2-10==0,x2+3*x1*x2^2==57},{{x1,1.5},{x2,3.5}}]
```

Output :
```
{2.□2.,x2□3.}
```

Skrip Mathematica®

Input :

```
x={x1,x2};
f1=x1^2+x1*x2-10;
f2=x2+3 x1*x2^2-57;
f={f1,f2};
K=Table[D[f[[i]],x[[j]]],{i,1,2},{j,1,2}];
K//MatrixForm
tabelnilaix1x2={{1.5,3.5}};
pengaturanx={{x1->tabelnilaix1x2[[1,1]],x2->tabelnilaix1x2[[1,2]]}};
tabelnilaigalat={1}
batasakhiriterasi=100;
i=1;
nilaitoleransi=0.000001
While[And[tabelnilaigalat[[i]]>nilaitoleransi,i<=batasakhiriterasi],delt
a=-(Inverse[K].f)/.pengaturanx[[i]];
tabelnilaix1x2=Append[tabelnilaix1x2,delta+tabelnilaix1x2[[Length[ta
belnilaix1x2]]]];
pengaturanx=Append[pengaturanx,{x1-
>tabelnilaix1x2[[Length[tabelnilaix1x2],1]],x2-
>tabelnilaix1x2[[Length[tabelnilaix1x2],2]]}];
galat=Norm[delta]/Norm[tabelnilaix1x2[[i+1]]];tabelnilaigalat=Appen
d[tabelnilaigalat,galat];i++]
Title={"Iterasi","x1_lama","x2_lama","x1_baru","x2_baru","galat"};
T2=Table[{i,tabelnilaix1x2[[i,1]],tabelnilaix1x2[[i,2]],tabelnilaix1x2[[i+1,
1]],tabelnilaix1x2[[i+1,2]],tabelnilaigalat[[i+1]]},{i,1,Length[tabelnilaix1x
2]-1}];
T2=Prepend[T2,Title];
T2//MatrixForm
```

Output:

Iterasi	x1_lama	x2_lama	x1_baru	x2_baru	galat
1	1.5	3.5	2.03603	2.84388	0.242238
2	2.03603	2.84388	1.9987	3.00229	0.0451245
3	1.9987	3.00229	2.	3.	0.000730046
4	2.	3.	2.	3.	1.62758×10^{-7}

2.6.3 Interpolasi Polinomial Newton Terhadap Data

Pandang pasangan data berikut :

data={{1,3},{4,5},{5,6},{6,8},{7,8}}

Relatif mudah untuk mendapatkan fungsi polinom menggunakan *Matheamtica*. Berikut skripnya.

Skrip Mathematica®

Input :

```
Data={{1,3},{4,5},{5,6},{6,8},{7,8}};
f[anydata_]:=If[Length[anydata]==1,anydata[[1,2]],If[Length[anydata
]==2,(anydata[[2,2]]-anydata[[1,2]])/(anydata[[2,1]]-
anydata[[1,1]]),(f[Drop[anydata,1]]-f[Drop[anydata,-
1]])/(anydata[[Length[anydata],1]]-anydata[[1,1]])]]
NP[anydata_]:=Sum[f[anydata[[1;;i]]]*Product[(x-anydata[[j,1]]),{j,1,i-
1}],{i,1,Length[anydata]}]
(*Using the Newton polynomial function*)
y=Expand[NP[Data]]
(*Using the interpolating polynomial built-in function*)
y2=Expand[InterpolatingPolynomial[Data,x]
```

Output:

-(32/3)+(775 x)/36-(677 x^2)/72+(59 x^3)/36-(7 x^4)/72

Soal-Soal Latihan

1. Dapatkan nilai akar dari fungsi berikut ini:

   a. $y = f(x) = \left(\dfrac{0,3375x^3 - 2,5625x^2 + 5.9275x - 4,025}{1,35x - 3,5} \right)$

   b. $\cos\left[\dfrac{x^2 - \sqrt{\sin(x) + 3}}{4 + (x)^2} \right] + \sin(3x - 1) = 0,934$

   c. $\exp\left\{ \cos\left[(x^3) - 3 \right] \right\} + \tan\left[x(0,08 + \cos x) = 1,79 \right]$

dengan tiga metode numerik yang telah disampaikan pada bagian sebelumnya.
Berikan komentar anda tentang hasil pemakaian metode-metode tersebut.

2. Ubahlah bentuk persamaan $e^{-x} - x = 0$ dan $x^3 - x - 1 = 0$ sedemikian hingga metode iterasi sederhana dan konvergen dapat digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai akar masing-masing persamaan tersebut.

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu memahami dan menjelaskan konsep interpolasi, galat hasil interpolasi, dan selisih/beda. **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar diharapkan mampu: 1. Memahami arti interpolasi dan menentukan galatnya 2. Menggunakan konsep selisih 3. Menggunakan formula Newton untuk interpolasi dan 4. Menggunakan konsep relasi simbolik 5. Memahami arti interpolasi selisih tengah/center dan menggunakannya. 6. Memahami arti interpolasi titik-titik berjarak tidak sama dan menggunakannya	**Pokok Bahasan** : Interpolasi : Pengertian Interpolasi dan Galatnya; Selisih **Sub Pokok Bahasan** 1. Pengertian Interpolasi dan Galatnya 2. Selisih 3. Formula Newton untuk Interpolasi 4. Relasi Simbolik 5. Formula Interpolasi Selisih Tengah 6. Interpolasi dengan Titik-Titik Berjarak Tidak Sama

BAB III
INTERPOLASI

3.1. INTERPOLASI FUNGSI POLINOMIAL

3.1.1. Pengertian Interpolasi

Ketika seseorang berinteraksi dengan matematika seringkali berhadapan dengan notasi yang dinyatakan dalam bentuk " $y = f(x), x_0 \le x \le x_n$ ". Notasi tersebut dapat dibuat sebuah kalimat, misalnya "untuk setiap nilai x yang berada dalam interval tertutup $[x_0, x_n]$ memiliki hanya satu nilai dari y ". Asumsikan bahwa $f(x)$ bernilai tunggal, kontinu, dan diketahui dalam bentuk eksplisit, maka nilai-nilai $f(x)$ berkorespondensi dengan tepat dari nilai-nilai x yang diberikan, sebutlah $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, yang dapat dihitung dan ditabulasi dengan mudah.

Ide interpolasi dalam numerik muncul ketika pernyataan konversi berikut ini memerlukan tanggapan. "Diberikan/diketahui (n + 1) buah pasangan berurutan nilai suatu data, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ dengan $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Asumsikan data memenuhi relasi $y = f(x)$ dengan bentuk eksplisit $f(x)$ tak diketahui. Untuk suatu nilai x^* yang tidak terdata tetapi nilai tersebut berada diantara nilai x_0 dan x_n, berapa nilai y^* yang bersesuaian? Selain itu, bagaimana bentuk fungsi yang dapat menggantikan fungsi sesungguhnya yang tidak diketahui?" Kondisi pertama sering ditemukan pada data pengamatan langsung sebagai akibat kendala teknis sehingga data yang diperoleh tidak lengkap. Sementara itu untuk kondisi kedua perlu ditentukan bentuk fungsi, sebutlah $\varnothing(x)$, sedemikian sehingga $f(x)$ dan $\varnothing(x)$ bersesuaian pada set dari daftar titik-titik tersebut. Proses untuk menetukan bentuk $\varnothing(x)$ atau nilai fungsinya disebut ***interpolasi*** (sebutan *regresi* dalam konteks statistika).

3.1.2. Interpolasi dengan Fungsi Polinomial

Pandang sebuah fungsi $\varnothing(x)$ dalam bentuk suatu fungsi polinomial yang digunakan sebagai fungsi aproksimasi dalam sebuah proses interpolasi. Proses demikian disebut *interpolasi polinom* dan $\varnothing(x)$ disebut *penginterpolasi polinom.* Selain polinom, bentuk interpolasi $\varnothing(x)$ dapat juga berupa deret trigonometri terhingga, deret dari fungsi Bessel, dan lain sebagainya. Di bagian ini diskusi dibatasi pada interpolasi polinom.

Sebagai dasar untuk melakukan aproksimasi suatu fungsi yang tidak diketahui oleh suatu polinom dapat mengacu kepada teorema Weierstrass (1885) berikut ini:

"Bila $f(x)$ kontinu dalam $x_0 \le x \le x_n$, maka untuk $\varepsilon > 0$, terdapat sebuah fungsi polinomial $P(x)$ sedemikian sehingga $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, untuk tiap x dalam (x_0, x_n)".

Misalkan fungsi $y(x)$ kontinu dan dapat didiferensialkan disetiap titik dalam suatu interval yaitu $x \in [a,b]$. Misalkan dipunyai $n+1$ pasang titik yang didefinisikan oleh titik-titik (x_i, y_i), $i = 0,1,2,\ldots n$. Asumsikan polinom $\varnothing(x)$ dengan derajat kurang dari atau sama dengan n digunakan sebagai fungsi aproksimasi untuk $y(x)$ yaitu:

$$y(x) \approx \varnothing(x) \tag{3.1}$$

Oleh karena itu berlaku :

$$\varnothing(x_i) = y_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.2}$$

Aproksimasi yang diberlakukan dalam persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai:

$$E(x) = y(x) - \varnothing(x) \tag{3.3}$$

dengan $E(x)$ adalah galat yang diperoleh.

Galat dalam persamaan (3.3) dapat dinyatakan sebagai

$$E(x) = y(x) - \varnothing(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)L \tag{3.4}$$

$$y(x) - \varnothing(x) = L\,\Pi(x) \tag{3.5}$$

dengan $\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ dan L adalah bilangan tertentu yang belum diketahui.

Sementara itu dari persamaan (3.5), jika $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ maka $y(x) - \varnothing(x) = 0$. Ini berarti fungsi $\varnothing(x)$ bernilai eksak yaitu, $\varnothing(x) = y(x)$.

Pandang persamaan (3.5). Diferensialkan terhadap x sebanyak n+1 kali diperoleh

$$y^{(n+1)}(x) - 0 = L(n+1)! \qquad \text{atau} \qquad L = \frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \tag{3.6}$$

Dari persamaan (3.6), persamaan (3.5), dan persamaan (3.3) diperoleh:

$$E(x) = \Pi(x)\frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

atau

$$E(x) = \Pi(x)\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{3.7}$$

dengan $x = \xi, x_0 < \xi < x_n$.

3.2. SELISIH (*DIFFERENCE*)

Selisih atau beda dalam konteks metode numerik khususnya interpolasi dimaksudkan sebagai selisih dua bilangan yang berdekatan dalam suatu barisan pasangan nilai data $\left(x_i, y_i\right), i=0,1,2,\cdots,n+1$ yang nilai peubah bebasnya telah terurut naik. Umumnya operator selisih menggunakan huruf G*reek sebagai* notasi misalnya δ, ∇, atau Δ yang dibaca "*delta*". Konsep selisih memainkan peranan penting dalam melakukan sebuah interpolasi. Ada beberapa konsep selisih yang dikenal dalam metode numerik. Dalam bagian berikutnya akan dideskripsikan secara detail.

3.2.1 Selisih Maju (*Forward Difference*)

Pandang suatu barisan $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ yang merupakan representasi nilai-nilai dari *y*. Kemudian misalkan

$$\left(y_1 - y_0\right), \left(y_2 - y_1\right), \left(y_3 - y_2\right), \ldots, \left(y_n - y_{n-1}\right)$$

merupakan selisih-selisih dari barisan nilai yang dimaksudkan di atas. Jika selisih tersebut berturut-turut ditulis sebagai $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots \Delta y_{n-1}$, maka pengertian selisih maju dapat dibaca sebagaimana hal berikut ini:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Simbol Δ merupakan notasi untuk *operator selisih maju*. Operator selisih maju pada nilai-nilai y_i yang dinotasikan dengan $\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_{n-1}$ disebut *selisih maju pertama*. Selisih dari selisih maju pertama disebut *selisih maju kedua* dan ditulis $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \ldots, \Delta^2 y_{n-2}$ dengan cara yang sama, dapat didefinisikan *selisih maju ketiga*, dan *selisih maju keempat* yaitu:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - \left(y_1 - y_0\right) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - \left(y_2 - 2y_1 + y_0\right)$$

$$= \quad y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

dan

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_0 &= \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 \\ &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \\ &= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0\end{aligned}$$

Untuk selisih tingkat yang lebih tinggi dengan mudah dapat ditentukan karena koefisien pada ruas kanan yang mengikuti sebuah pola angka yang biasa disebut *koefisien binomial* (segitiga *Pascal*). Dalam Tabel 3.1 diperlihatkan selisih maju dari tingkat ke-1 hingga tingkat ke-6 yang dapat dibentuk.

Tabel 3.1. Skema tabel selisih maju

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	x_0	y_0						
			Δy_0					
1	x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$				
2			Δy_1					
	x_2	y_2			$\Delta^3 y_0$			
				$\Delta^2 y_1$				
3			Δy_2			$\Delta^4 y_0$		
	x_3	y_3			$\Delta^3 y_1$			
4				$\Delta^2 y_2$			$\Delta^5 y_0$	
			Δy_3			$\Delta^4 y_1$		
	x_4	y_4			$\Delta^3 y_2$			$\Delta^6 y_0$
5							$\Delta^5 y_1$	
				$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$		
			Δy_4					
6	x_5	y_5			$\Delta^3 y_3$			
				$\Delta^2 y_4$				
7			Δy_5					
	x_6	y_6						

3.2.2 Selisih Mundur (*Backward Difference*)

Selisih-selisih

$\left(y_{-n} - y_{-(n-1)}\right), \left(y_{-(n-1)} - y_{-(n-2)}\right), \cdots, \left(y_{-2} - y_{-1}\right)\left(y_{-1} - y_0\right), \ldots$ disebut selisih mundur pertama, Jika selisih-selisih tersebut berturut-turut ditulis dengan notasi $\nabla y_{0,}, \nabla y_{-1}, \nabla y_{-2}, ..., \nabla y_{-(n-1)}$ maka selisih mundur donotasikan dengan:

$$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1}, \nabla y_{-1} = y_{-1} - y_{-2}, \cdots, \nabla y_{-(n-1)} = y_{-(n-1)} - y_{-n}$$

dan ∇ disebut *operator selisih mundur*.

Dengan cara yang sama, dapat didefinisikan selisih mundur untuk derajat yang lebih tinggi. Untuk selisih derajat 2 dan 3 adalah:

$$\nabla^2 y_0 = \nabla y_0 - \nabla y_{-1} = (y_0 - y_{-1}) - (y_{-1} - y_{-2}) = y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}$$

$$\nabla^3 y_0 = \nabla^2 y_0 - \nabla^2 y_{-1} = (y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}) - (y_{-1} - 2y_{-2} + y_{-3})$$

$$= y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3}$$

Dengan nilai-nilai yang sama untuk x dan y dalam Tabel 3.1 tabel selisih mundur dapat dibentuk seperti data dalam Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Skema tabel selisih mundur

i	x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$	$\nabla^6 y_i$
-6	x_{-6}	y_{-6}						
			∇y_{-6}					
-5	x_{-5}	y_{-5}		$\nabla^2 y_{-4}$				
-4			∇y_{-5}					
	x_{-4}	y_{-4}			$\nabla^3 y_{-3}$			
-3				$\nabla^2 y_{-3}$				
			∇y_{-4}			$\nabla^4 y_{-2}$		
	x_{-3}	y_{-3}			$\nabla^3 y_{-2}$			
-2				$\nabla^2 y_{-2}$			$\nabla^5 y_{-1}$	
			∇y_{-2}					
	x_{-2}	y_{-2}			$\nabla^3 y_{-1}$	$\nabla^4 y_{-1}$		
-1								$\nabla^6 y_0$
							$\nabla^5 y_0$	
			∇y_{-1}	$\nabla^2 y_{-1}$				
0	x_{-1}	y_{-1}				$\nabla^4 y_0$		
					$\nabla^3 y_0$			
			∇y_0	$\nabla^2 y_0$				
	x_0	y_0						

3.2.3 Selisih Tengah (*Central Difference*)

Seperti halnya dua jenis selisih sebelumnya, selisih tengan dibuat untuk digunakan dalam proses interposlasi terhadap data yang berada di sekitar pusat data. Operator selisih tengah δ didefinisikan melalui hubungan:

$$y_1 - y_0 = \delta y_{1/2} \;\; ; \;\; y_2 - y_1 = \delta y_{3/2} ,..., y_n - y_{n-1} = \delta \, y_{\frac{2n-1}{2}}$$

Dengan cara yang sama, selisih tengah berderajat tinggi dapat ditentukan. Misalkan nilai-nilai x dan y diberikan seperti data dalam Tabel 3.1. Tabel selisih tengah dapat dibuat seperti dalam Tabel 3.3.

Tabel 3.3. Skema tabel selisih tengah

N	x_n	y_n	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$	$\delta^6 y$
0	x_0	y_0						
			$\delta y_{1/2}$					
1				$\delta^2 y_1$				
	x_1	y_1			$\delta^3 y_{3/2}$			
2			$\delta y_{3/2}$					
	x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$		
3			$\delta y_{5/2}$		$\delta^3 y_{5/2}$		$\delta^5 y_{5/2}$	
	x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$		
4			$\delta y_{7/2}$					$\delta^6 y_3$
5	x_4	y_4		$\delta^2 y_4$	$\delta^3 y_{7/2}$	$\delta^4 y_4$	$\delta^5 y_{7/2}$	
			$\delta y_{9/2}$					
6	x_5	y_5		$\delta^2 y_5$				
			$\delta y_{11/2}$		$\delta^3 y_{9/2}$			
	x_6	y_6						

Ilustrasi

Pemahaman konsep selisih dapat dijelaskan dalam contoh jarak tempuh sebuah mobil terhadap waktu. Misalkan gerakan sebuah mobil ke suatu tempat memiliki jarak tempuh s bergantung waktu t. Dengan kata lain untuk sembarang waktu tertentu, mobil tersebut haruslah menempuh jarak perjalanan yang unik, dengan *jarak* adalah suatu fungsi dari waktu, yaitu $s = f(t)$. Perhatikan Tabel 3.4 berikut yang menunjukkan jarak yang ditempuh (s meter) oleh sebuah kendaraan pada setiap selang waktu 10 detik.

Tabel 3.4 Jarak tempuh mobil per 10 detik waktu .

T	s = *f*(t)
0	0
10	214
20	736
30	1446
40	2270
50	3164
60	4100

Dari Tabel 3.4 dapat dibuat tabel selisih untuk selang *t* = 0 hingga *t* = 60 sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 3.5

Tabel 3.5 Nilai selisih untuk data dalam Tabel 3.4 hingga selisih tingkat ke-4.

t	*f*(t)	Selisih Tingkat ke-1	Selisih Tingkat ke-2	Selisih Tingkat ke-3	Selisih Tingkat ke-4
0	0				
		214			
10	214				
		522	308		
20	736			-120	
		710	188		46
30	1446			-74	
		824	114		30
40	2270			-44	
		894	70		16
50	3164			-28	
		936	42		
60	4100				

Contoh 3.1.

Pandang sebuah fungsi polinomial derajat 3, $y = x^3 - 8x^2 - 4x + 1$. Untuk suatu ukuran langkah (*step size*) $h = 0.1$ yang diukur dari $x = 0$ hingga $x = 0,5$, buatlah tabel selisihnya dan tentukan nilai-nilai dari $\Delta y_0, \Delta y_1, \nabla y_1, \nabla^2 y_2, \delta y_{3/2}$, dan $\delta^2 y_2$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan ilustrasi seperti Tabel 3.5, data dalam Tabel 3.6 diperoleh.

Tabel 3.6. Nilai selisih maju untuk fungsi $y = x^3 - 8x^2 - 4x + 1$.

x	y	Selisih ke-1	Selisih ke-2	Selisih ke-3	Selisih ke-4
0	1				
		-0,479			
0,1	0,521		-0,154		
		-0,633		0,006	
0,2	-0,112		-0,148		0
		-0,781		0,006	
0,3	-0,893		-0,142		0
		-0,923		0,006	
0,4	-1,816		-0,136		
		-0,059			
0,5	-2,875				

Dari ketentuan yang diberikan, $h = 0.1$ yang diukur dari $x = 0$ hingga $x = 0,5$ dapat ditentunkan nilai-nilai fungsi untuk $x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3, x_4 = 0.4,$ dan $x_5 = 0.5$. Dengan demikian Tabel 3.6 berhasil dikonstruksi. Dari Tabel 3.6. diperoleh:

$$\Delta y_0 = -0,479; \quad \nabla^2 y_{-n} = -0,154,$$

$$\Delta y_1 = -0,633 \quad \delta y_{3/1} = -0,633$$

$$\nabla y_{-n} = -0,479 \quad \delta^2 y^2 = -0,148$$

Selisih Nilai Fungsi Polinom

Pandang sebuah fungsi polinomial berderajat n, yaitu

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Maka kita peroleh :

$$y(x+h) - y(x) = a_n\left[(x+h)^n - x^n\right] + a_{n-1}\left[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}\right]$$

$$\nabla y(x) = a_n \cdot nhx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Yang menunjukkan bahwa selisih pertama dari polinom berderajat n adalah polinom berderajat (n−1). Sementara itu, selisih kedua fungsi polinomial berderajat (n−2) yang merupakan koefisien dari x^{n-2}. Atas dasar hal tersebut, selisih ke (n+1) dari fungsi polinomal berderajat n adalah nol. Akibatnya, selisish ke-n fungsi polinomial derajat n adalah konstanta $a_n n! h^n$.

Sebaliknya, bila selisih ke n dari suatu daftar fungsi adalah konstanta dan selisih-selisih ke (n+1), ke (n+2), ... dan seterusnya semuanya nol, maka daftar fungsi tersebut menyatakan polinom berderajat n. Hal tersebut perlu dicatat bahwa hasil yang kita peroleh itu akan baik hanya bila nilai-nilai dari x berjarak sama antara yang satu dengan yang lainnya (nilai-nilai x yang berdekatan). Pernyataan konversi tersebut adalah penting di dalam analisis numerik, karena dengan pernyataan tersebut memungkinkan kita untuk mengaproksimasi suatu fungsi oleh suatu polinom bila selisih-selisih dari sembarang tingkat (derajat) menghasilkan suatu konstanta (mendekati konstanta tertentu). Untuk lebih memahami, pelajari contoh berikut.

Contoh 3.2.

Tabel 3.7 berikut memperlihatkan selisih nilai-nilai fungsi polinomial $y(x) = x^2 + 2x - 1$ untuk nilai-nilai $x = 1{,}00(0{,}02)1{,}10$

Tabel 3.7 Tabel Selisih Maju untuk Sejumlah Nilai Fungsi $y(x) = x^2 + 2x - 1$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1,00	2				
			0,0804			
1	1,02	2,0804		0,0008		
			0,0812		0	
2	1,04	2,1616		0,0008		0
			0,0820		0	
3	1,06	2,2436		0,0008		0
			0,0828		0	
4	1,08	2,3264		0,0008		
			0,0836			
5	1,10	2,4100				

Dari Tabel 3.7 diperoleh informasi bahwa untuk fungsi polinomial berderajat dua, selisih keduanya konstanta yaitu $1 \cdot 2(0,02)^2 = 0,0008$. Demikian pula, bila dilihat pada Contoh 3.1, selisih ketiga dari polinom tersebut adalah konstan yaitu $1.3!(0,1)^3 = 0,006$.

Tabel 3.8. Tabel selisih maju untuk sejumlah nilai fungsi $y(x) = x^3 - 8x + 5$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	2,0	-3,00			
			1,05		
2	2,2	-1,95		0,52	
			1,57		0,07
3	2,4	-0,38		0,59	
			2,16		0,02

4	2,6	1,78		0,61	
			2,77		0,07
5	2,8	4,55		0,68	
			3,45		0,04
6	3,0	8,00		0,72	
			4,17		0,04
7	3,2	12,17		0,76	
			4,93		
8	3,4	17,10			

Contoh 3.3

Pandang data dalam Tabel 3.8. Data tersebut merupakan nilai-nilai selisih dari fungsi polinomial $y(x) = x^3 - 8x + 5$ untuk nilai-nilai $x = 2,00\,(h = 0,2)\,3,4$; dibulatkan sampai dua tempat desimal.

Perhatikan bahwa nilai-nilai fungsi dalam Tabel 3.8 memperlihatkan selisih ketiga untuk fungsi polinomial berderajat tiga tersebut tidak konstan, yang seharusnya selisih tersebut adalah $1.3!(0,2)^3 = 0,048$. Mengapa? Hal tersebut disebabkan adanya pembulatan bilangan, yang seharusnya nilai dari fungsi tersebut dibulatkan teliti hingga tiga tempat desimal, (silahkan diperiksa).

3.3. FORMULA NEWTON UNTUK INTERPOLASI DAN RELASI SIMBOLIK

3.3.1 Formula Newton untuk Interpolasi

Diberikan set yang terdiri dari (n+1) buah nilai dari x dan y, yaitu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ dari nilai-nilai tersebut akan dicari $y_n(x)$, yaitu suatu fungsi polinomial berderajat n sedemikian sehingga y dan $y_n(x)$ memenuhi daftar titik-titik tersebut.

Misalkan h ukuran partisi pada x berjarak sama dalam suatu interval sedemikian sehingga berlaku :

$$x_i = x_0 + ih, \qquad \text{dengan } i = 0,1,2,...,n$$

Karena $y_n(x)$ suatu polinom berderajat n maka $y_n(x)$ dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} y_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) \\ + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots \\ + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Dengan mengkondisikan bahwa y dan $y_n(x)$ harus memenuhi set dari titik-titik tersebut, akan diperoleh

$$a_0 = y_0\,;\ a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}\,;\ a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2!}\,;\ a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 3!}\,;\ a_n = \frac{\Delta^n y_0}{h^n n!}$$

Misalkan $x = x_0 + ph,\ p = 1,2,3,\ldots,n$. Dengan mensubtitusikan nilai-nilai $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ yang dinyatakan tersebut ke persamaan (3.8) akan diperoleh

$$\begin{aligned} y_n(x) = y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \\ + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Formula dalam persamaan (3.9) disebut *formula interpolasi selisih maju Newton*. Formula ini umumnya dipakai untuk interpolasi didekat nilai awal dari nilai x.

Untuk menentukan nilai ketidakakuratan hampiran yang terjadi pada saat penentuan fungsi $y(x)$ oleh polinomial $y_n(x)$, dapat digunakan formula (3.7) yang dalam bentuk lain ditulis sebagai

$$y(x) - y_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x)\ , \text{ dan } x_0 < x < x_n. \quad (3.10)$$

Persamaan (3.10) hanya dipakai dalam praktek saja karena bentuk $y^{(n+1)}(x)$ tidak memberikan informasi apapun. Berikut ini bentuk lain (eastimasi) $y^{(n+1)}(x)$ yang menggunakan derifatif.

Ekspansi $y(x+h)$ dengan deret Taylor memberikan

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots$$

Dengan mengabaikan suku-suku yang memuat h^2 dan selebihnya (perpangkatan tinggi dari h), diperoleh

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left[y(x+h) - y(x)\right] = \frac{1}{h}\Delta y(x)$$

Dengan menuliskan $y'(x)$ sebagai $Dy(x)$, dengan $D \equiv \frac{d}{dx}$ adalah operator diferensial, bagian kanan persamaan di atas operatornya

$$D \equiv \frac{1}{h}\Delta .$$

Demikian juga dengan

$$D^{n+1} \equiv \frac{1}{h^{n+1}} \Delta^{n+1}$$

yang berarti

$$y^{(n+1)}(x) \approx \frac{1}{h^{n+1}} \Delta^{n+1} y(x) \tag{3.11}$$

Persamaan (3.10) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y(x) - y_n(x) = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y(x) \tag{3.12}$$

yang merupakan bentuk ideal untuk komputasi numerik.

Pandang $y_n(x)$ dalam persamaan (3.1). Nyatakan ia dalam bentuk

$$\begin{aligned} y_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ &\quad + a^3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \\ &\quad + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1). \end{aligned}$$

Asumsikan bahwa y dan $y_n(x)$ adalah bersesuaian untuk setiap titik-titik $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0$, yang ada dalam daftar , maka diperoleh (setelah disederhanakan):

$$y_n(x) = y_n + p\nabla y_n + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\nabla^n y_n \qquad (3.13)$$

dengan $p = \dfrac{x - x_n}{h}$

Formula dalam persamaan (3.13) disebut *formula interpolasi selisih mundur Newton* dan digunakan untuk menentukan nilai-nilai data disekitar titik yang diketahui di bagian akhir tabel/daftar nilai suatu fungsi. Formula (3.13) mempunyai ketidakakuratan nilai hampiran yang dapat ditentukan nilainya berdasarkan formula berikut ini.

$$y(x) - y_n(x) = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{(n+1)} h^{n+1} y^{n+1}(\alpha) \qquad (3.14)$$

dengan $x_0 < \alpha < x_n$ dan $x = x_n + ph$

Contoh 3.4.

Tentukan bentuk fungsi polinomial derajat tiga bila diketahui $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$, dan $y(3) = 10$. Selain itu tentukan nilai $y(4)$.

Penyelesaian:

Daftar nilai untuk tabel selisih maju dengan data yang diberikan sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 3.9.

Tabel 3.9. Tabel selisih maju untuk data yang diberikan.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	1			
			-1		
1	1	0		2	
			1		6
2	2	1		8	
			9		
3	3	10			

Dari Tabel 3.9 diketahui nilai h = 1. Jadi, dengan menggunakan formula $x = x_0 + ph$ untuk nilai $x_0 = 0$ diperoleh nilai p = x. Subtitusikan nilai p pada formula yang ada dalam persamaan (3.9), diperoleh

$$y(x) = 1 + x(-1) + \frac{x(x-1)}{2}(2) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(6)$$
$$= x^3 - 2x^2 + 1 \ .$$

Untuk mendapatkan nilai $y(4)$ berdasarkan formula dalam persamaan (3.9) dapat dilakukan dengan mensubsitusikan nilai $p = x = 4$, yaitu:

$$y(x=4) \approx 1 + 4(-1) + \frac{4(4-1)}{2!}(2) + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}(6)$$
$$= 1 - 4 + 12 + 24 = 33 \, .$$

Hasil yang sama diperoleh dengan mensubsitusi secara langsung nilai x = 4 kedalam fungsi $y(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ yaitu $y(4) = (4)^3 - 2(4)^2 + 1 = 33$.

Catatan :

Upaya mendapatkan nilai $y(x)$ untuk nilai sebarang $x = x^*$ yang berada di luar interval yang diberikan disebut *ekstapolasi*.

Contoh 3.5.

Misalkan jumlah populasi di suatu kota Z hasil sensus yang dilakukan setiap 10 tahun selama periode 1891-1931 seperti diberikan dalam Tabel 3.10.

Tabel 3.10. Data populasi di kota Z per 10 tahun untuk peridoe 1891-1931

Tahun: x	1891	1901	1911	1921	1931
Populasi: y (dalam ribuan)	46	66	81	93	101

Perkirakan (*estimasi*) populasi untuk tahun 1895 menggunakan teknik interpolasi.

Penyelesaian:

Dari data yang diberikan dalam Tabel 3.10 diperoleh h = 10 dan $x_0 = 1891$. Misalkan x = 1895, dari formula $x = x_0 + ph$ diperoleh p = 4/10 = 0,4. Sementara itu tabel selisih maju untuk data Tabel 3.10 adalah seperti yang diperlihatkan dalam Tabel 3.11.

Tabel 3.11. Tabel selisih maju dari data dalam Tabel 3.10.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1891	46				
			20			
1	1901	66		-5		
			15		2	
2	1911	81		-3		-3
			12		-1	
3	1921	93		-4		
			8			
4	1931	101				

Dengan menggunakan formula dalam persamaan (3.9) diperoleh:

$$y(1895) = 46 + 0,4(20) + \frac{0,4(0,4-1)}{2} \cdot (-5)$$
$$+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)}{6}(2)$$
$$+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)}{24}(-3) = 54,85 \text{ ribu}$$

Contoh 3.6

Tinjau Contoh 3.5. Perkirakan jumlah populasi pada tahun 1925!

Penyelesaian:

Dalam persoalan ini, interpolasi yang akan dilakukan berada di bagian akhir dari Tabel 3.11. Sehingga peggunaan formula yang bersesuaian adalah formula dalam persamaan (3.13).

Pandang $x = x_n + ph$. Misalkan x = 1925, $x_n = 1931$, dan h = 10, maka diperoleh $p = -0.6$. Dengan menggunakan data dalam Tabel 3.11 dan formula dalam persamaan (3.13) diperoleh:

$$y(1925) = 101 + -(0,6).8 + \frac{-0,6(-0,6+1)}{2}(-4) + \frac{-0,6(-0,6+1)(-0,6+2)}{6}(-1)$$
$$+ \frac{-0,6(-0,6+1)(-0,6+2)(-0,6+3)}{24}(-3) = 96,84 \text{ ribu.}$$

Contoh 3.7.

Dalam Tabel 3.12 diberikan nilai-nilai dari y yang berkaitan dengan nilai-nilai suku dari suatu deret. Carilah suku pertama dan suku ke-10.

Tabel 3.12. Tabel nilai suatu fungsi $y(x)$

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	3	4	5	6	7	8	9
y_i	2,7	6,4	12,5	21,6	34,3	51,2	72,9

Penyelesaian:

Tabel selisih dari data dalam Tabel 3.12 dapat dibuat seperti dalam Tabel 3.13.

Tabel 3.13. Nilai-nilai selisih maju untuk data dalamTabel 3.12.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3	2,7				
			3,7			
1	4	6,4		2,4		
			6,1		0,6	
2	5	12,5		3,0		0
			9,1		0,6	
3	6	21,6		3,6		0
			12,7		0,6	
4	7	34,3		4,2		0
			16,9		0,6	
5	8	51,2		4,8		
			21,7			
6	9	72,9				

Dari Tabel 3.13 didapat informasi bahwa selisih tingkat ke-3 bernilai sama (konstan) dan karenanya daftar fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai sebuah fungsi polinomial berderajat 3 (tiga). Dengan demikian interpolasi dan ekstrapolasi yang dilakukan memberikan hasil yang eksak. Untuk mencari suku ke-10, dapat digunakan formula yang terdapat dalam persamaan (3.9). Dengan memilih $x_0 = 3$, x = 10, h = 1, dan p = 7 diperoleh

$$y(10) = 2,7 + 7(3,7) = \frac{(7)(6)}{(1)(2)}(2,4) + \frac{(7)(6)(5)}{(1)(2)(3)}(0,6) = 100$$

Untuk penentuan nilai suku ke-1, dapat digunakan formula (3.13), dengan memberikan nilai-nilai $x_n = 9$, x = 1, h = 1, dan p = -8 sedemikian sehingga diperoleh:

$$y(1) = 72,9 + (-8)(21,7) + \frac{(-8)(-7)}{2}(4,8) + \frac{(-8)(-7)(-6)}{6}(0,6) \quad = 0,1$$

Contoh 3.8.
Pandang nilai-nilai fungsi dalam Tabel 3.14.

Tabel 3.14. Beberapa nilai fungsi $\tan(x)$ **untuk** $0,10 \le x \le 0,30$.

i	0	1	2	3	4
x_i	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$y_i = \tan(x_i)$	0,1003	0,1511	0,2027	0,2553	0,3093

Lakukanlah :

(i). Interpolasi nilai fungsi di $x = 0,12$, yaitu $\tan(0,12)$.

(ii). Interpolasi nilai fungsi di $x = 0,26$, yaitu $\tan(0,26)$.

(iii). Ekstrapolasi nilai fungsi di $x = 0,40$, yaitu $\tan(0,40)$.

(iv). Ekstrapolasi nilai fungsi di $x = 0,50$, yaitu $\tan(0,50)$.

Penyelesaian:
Ubah Tabel 3.14 menjadi tabel selisih sebagaimana Tabel 3.15 berikut:

Tabel 3.15. Nilai-nilai selisih maju untuk data dalam Tabel 3.14.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,10	0,1003				
			0,0508			
1	0,15	0,1511		0,0008		
			0,0516		0,0002	
2	0,20	0,2027		0,0010		0,0002
			0,0526		0,00 04	
3	0,25	0,2553		0.0014		
			0,0540			
4	0,30	0,3093				

(i). Untuk mendapatkan nilai interpolasi fungsi di $x=0,12$, yaitu $\tan(0,12)$ dapat digunakan formula (3.9) dengan terlebih dahulu menentukan nilai p melalui persamaan $x=x_0+ph$. Karena $x=0,12$, $x_0=0,10$, dan $h=0,05$. Maka nilai p dapat ditentukan yaitu : $0,12=0,10+p(0,05)\Rightarrow p=0,4$.

Dengan menggunakan formula (3.9) dan data dalam Tabel 3.15 diperoleh :

$$\tan(0,12)=0,1003+0,4(0,0508)+\frac{0,4(0,4-1)}{2}(0,0008)$$
$$+\frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)}{6}(0,0002)$$
$$+\frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)}{24}(0,0002)\ =0,1205$$

(ii) Serupa dengan prosedur dalam menjawab bagian (i). Untuk mendapatkan nilai $\tan(0,26)$ diperlukan nilai p yang diperoleh dari hubungan $x=x_0+ph$ yaitu:

$0,26=0,30+p(0,05)\Rightarrow p=-0,8$.

Dengan menggunakan formula (3.13) dan data dalam Tabel 3.15 diperoleh:

$$\tan(0,26)=0,3093-0,8(0,0540)+\frac{-0,8(-0,8+)}{2}(0,0014)$$
$$+\frac{-0,8(-0,8+1)(-0,8+2)}{6}(0,0004)$$
$$+\frac{-0,8(-0,8+)(-0,8+)(-0,8+3)}{24}(0,0002)\ =0,2662$$

(iii) Serupa dengan prosedur dalam menjawab bagian (i) dan (ii) dapat ditentukan nilai $\tan(0,40)$ = 0,4241.

(iv) Serupa dengan prosedur dalam menjawab bagian (i), (ii), dan (iii) dapat ditentukan nilai $\tan(0,50)$ = 0,5543

Dapat dicatat bahwa nilai hampiran teliti sampai empat desimal dari tan(0,12), tan(0,26), tan(0,40), dan tan(0,50) berturut-turut adalah 0,1206, 0,2660, 0,4228, dan 0,5463.

Berdasarkan hasil numerik yang diperoleh untuk kemudian membandingkannya dengan nilai hampiran teliti sampai empat desimal dapat dicatat bahwa dua hal yang pertama, (i) dan (ii), yang merupakan hasil interpolasi diperoleh lebih akurat dibandingkan dengan dua hal terakhir, (iii) dan (iv), yang merupakan hasil ekstrapolasi. Hasil-hasil ini menunjukkan bahwa formula (3.13) tidak cukup akurat untuk digunakan sebagai formula untuk melakukan ekstrapolasi suatu nilai fungsi.

3.3.2 Relasi Simbolik

Formula-formula selisih yang telah dibahas dalam bagian sebelumnya dapat dinyatakan dalam bentuk simbolik menggunakan operator perubahan E, operator rata-rata μ dalam penjumlahan, operator-operator δ , ∇ , dan Δ yang sudah didefinisikan sebelumnya.

- Operator rata-rata μ didefinisikan melalui hubungan :

$$\mu y_r = 1/2\left(y_{r+1/2} + y_{r-1/2}\right) \tag{3.15}$$

- Operator perubahan E didefinisikan melalui hubungan :

$$Ey_r = y_{r+1} \tag{3.16}$$

Yang menunjukkan pengaruh dari E pada nilai fungsi y_r ke nilai berikutnya y_{r+1}. Dapat dicatat bahwa operasi perubahan kedua E pada nilai fungsi y_r yang dinotasikan dengan $E^2 y_r$ didefinisikan dengan

$$E^2 y_r = E\left(Ey_r\right) = Ey_{r+1} = y_{r+2}.$$

Secara umum,

$$E^n y_r = y_{r+n}.$$

Hubungan operator Δ dan E dapat dinyatakan dengan:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = E y_0 - y_0 = \left(E-1\right) y_0$$

$$\Delta \equiv E-1 \text{ atau } E \equiv 1+\Delta \tag{3.17}$$

Dari hubungan yang diberikan dalam persamaan-persamaan (3.15)-(3.17) dapat dibentuk relasi-relasi berikut ini:

$$\begin{aligned}
&\nabla \equiv 1 - E^1 \\
&\delta \equiv E^{1/2} - E^{-1/2} \\
&\mu = 1/2\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) \\
&\mu^2 = 1 + 1/4\delta^2 \\
&\Delta = \nabla E \equiv \delta E^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sebagai contoh, akan ditunjukkan relasi $\mu = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}$. Dari definisi diketahui bahwa:

$$\mu y_r = \frac{1}{2}\left(y_{r+\frac{1}{2}} + y_{r-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[E^{1/2} y_r + E^{-1/2} y_r\right] = \frac{1}{2}\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right] y_r$$

Jadi

$$\mu = \frac{1}{2}\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right] \Rightarrow \mu^2 = \frac{1}{4}\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right]^2 = \frac{1}{4}\left(E + 2 + E^{-1}\right)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left[\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)^2 + 4\right] = \frac{1}{4}\left(\delta^2 + 4\right)$$

Atau

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}$$

Selain operator yang telah dikemukakan sebelumnya, operator lain yang sering ditemui adalah operator diferensial, D , yang didefinisikan sebagai

$$Dy(x) = \frac{d}{dx} y(x).$$

Relasi operator D dan E dapat diturunkan menggunakan konsep deret Taylor berikut

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \ldots$$

Bentuk tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk simbolik sebagai berikut:

$$Ey(x) = \left[1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \ldots \right] y(x)$$

Karena penjumlahan yang ada di dalam tanda kurung adalah ekspansi dari fungsi e^{hD}, maka diperoleh hubungan berikut ini:

$$E \equiv e^{hD}. \tag{3.19}$$

3.4. FORMULA STIRLING UNTUK INTERPOLASI

Pada bagian terdahulu, telah dibicarakan formula interpolasi untuk suatu tabel selisih baik selisih maju maupun selisih mundur Newton. Selisih yang dimasud berturut-turut digunakan untuk interpolasi di sekitar titik awal data dan interpolasi disekitar titik akhir suatu data. Selain selisih maju dan mundur, sekarang akan dibicarakan formula interpolasi tengah yang diprioritaskan untuk menginterpolasi data/nilai fungsi yang ada di sekitar pertengahan data dari suatu tabel data. Tabel data yang dimaksud dikonstruksi menggunakan operator selisih tengah yang telah dibicarakan pada bagian terdahulu.

Jika diberikan sejumlah $2n+1$ pasangan data maka data itu dapat ditabulasikan ke dalam Tabel 3.16. Tabel 3.16 di klasifikasi ke dalam tabel selisih tengah dan dikenal dengan sebutan tabel silisih tengah Gauss.

Tabel 3.16: Skema selisih tengah Gauss

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\cdots$	$\Delta^{2n-1} y$	$\Delta^{2n} y$
x_{-n}	y_{-n}						
		Δy_{-n}					
x_{-n+1}	y_{-n+1}						
			$\Delta^2 y_{-n}$				
		Δy_{-n+1}					
				$\Delta^3 y_{-n}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 y_{-n+1}$				
			$\vdots$	$\Delta^3 y_{-n+1}$			
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}					
				$\vdots$			
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3}$				
				$\Delta^3 y_{-3}$			
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$				
					$\cdots$	$\Delta^{2n-1} y_{-n}$	
				$\Delta^3 y_{-2}$			
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_{-1}$		$\vdots$		$\Delta^{2n} y_{-n}$
						$\Delta^{2n-1} y_{-n+1}$	
				$\Delta^3 y_{-1}$	$\cdots$		
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$				
				$\Delta^3 y_0$			
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$				
				$\vdots$			
x_3	y_3	$\vdots$	$\vdots$				
				$\Delta^3 y_{n-2}$			
$\vdots$	$\vdots$	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$				
				$\Delta^3 y_{n-1}$			
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}$				
x_n	y_n						

Salah satu formula yang menggunakan tabel selisih tengah (Tabel 3.16) adalah formula Interpolasi *Stirling*. Formula ini diberikan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} y\ (x) &= y_0 + \frac{p}{1!}\cdot\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} + \frac{p^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p\left(p^2-1\right)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-3}+\Delta^3 y_{-1}}{2} \\ &\quad + \frac{p^2\left(p^2-1\right)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{p^2\left(p^2-1\right)\left(p^2-2\right)\ldots\left(p^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}\cdot\Delta^{2n} y_{-n} \\ &\quad + \frac{p\left(p^2-1\right)\left(p^2-2\right)\ldots\left(p^2-(n-1)^2\right)}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}+\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{2} \qquad (3.20) \end{aligned}$$

dengan $x = x_0 + p\,h$.

Formula Stirling yang diberikan dalam persamaan (3.20) di atas berasosiasi dengan Tabel Selisih Tengah Gauss (Tabel 3.16.) untuk melakukan interpolasi. Formula ini umumnya digunakan untuk keperluan interpolasi di sekitar tengah-tengah data dari suatu tabel data. Interpolasi dengan menggunakan formula Striling dapat memberikan hasil dengan tingkat akurasi realtif tinggi jika nilai p dipilih pada interval $-0,25 < p < 0,25$.

Contoh 3.9

Tinjau kembali Contoh 3.8. Lakukan interpolasi di titik $x = 0,195$ dengan menggunakan formula Striling yang diberikan dalam persamaan (3.20).

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Tabel 3.15 sebelumnya, dapat dibuat tabel selisih tengah Gauss seperti diperlihatkan dalam Tabel 3.17.

Tabel 3.17 Skema selisih tengah Gauss dengan data yang diperoleh dari Soal 3.8.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	0,10	0,1003				
			0,0508			
-1	0,15	0,1511		0,0008		
			0,0516		0,0002	
0	0,20	0,2027		0,0010		0,0002
			0,0526		0,00 04	
1	0,25	0,2553		0.0014		
			0,0540			
2	0,30	0,3093				

Karena $x = 0,195$, $x_0 = 0,20$, dan $h = 0,05$. Maka nilai p dapat ditentukan yaitu : $0,195 = 0,20 + p(0,05) \Rightarrow p = -0,1$. Dengan menggunakan data dalam Tabel 3.17 dan formula dalam persamaan (3.20) diperoleh:

$$y(0.195) = 0,2027 + \frac{(-0,1)}{1!} \cdot \frac{(0,0516)+(0,0526)}{2} + \frac{(-0,1)^2}{2!}(0,0010)$$
$$+\frac{(-0,1)\left((-0,1)^2-1\right)}{3!} \cdot \frac{(0,0)+(0,0004)}{2}$$
$$+\frac{(-0,1)^2\left((-0,1)^2-1\right)}{4!}(0,0002) = 0.19750322.$$

Hasil yang diperoleh bila dibandingkan dengan nilai $\tan(0.195) = 0.19750981$ memberikan nilai relatif akurat, bahkan untuk per sepuluhribuan adalah sama.

3.5. INTERPOLASI DENGAN TITIK-TITIK YANG BERJARAK TIDAK SAMA (INTERPOLASI LAGRANGE)

Sebuah tabel data hasil pengamatan yang memiliki hubungan fungsional dapat diklasifikasikan berdasarkan ukuran langkah (*step size*) peubah bebasnya. Pada bagian sebelumnya semua tabel selisih yang dibahas mememiliki ukuran langkah yang sama untuk setiap data peubah bebas yang diamati. Pada bagian ini akan dibahas beberapa formula interpolasi yang digunakan untuk data peubah bebas yang tidak sama ukuran langkahnya. Dengan kata lain jarak antara nilai-nilai variabel bebasnya tidak sama. Dalam pembicaraan kita di sini akan dibahas formula untuk hal tersebut yaitu formula interpolasi Lagrange.

Misal $y(x)$ kontinu dapat didiferensialkan keturunan $(n+1)$ dalam interval buka (a,b). Diberikan $(n+1)$ buah titik-titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ dengan nilai-nilai x tak perlu berjarak sama dengan yang lainnya, dan akan kita cari suatu polinom berderajat n, sebutlah $\varnothing_n(x)$, sedemikian hingga

$$\varnothing_n(x_i) = y(x_i) = y_i, i = 0,1,2,3,\ldots,n \tag{3.21}$$

Misalkan

$$\varnothing_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \,, \tag{3.22}$$

adalah polinom yang akan dicari.

Pensubtitusian persamaan 3.21 ke dalam 3.22, kita peroleh sistem persamaan-persamaan.

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n \\
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n \\
&\vdots \\
y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Sistem persamaan nonlinear seperti dalam persamaan (3.23) akan memberikan solusi, bila determinan

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Determinan tersebut dikenal dengan sebutan determinan V*an der monde* yang bernilai

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)\ldots(x_{n-1} - x_n)$$

Elimenasi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ dari persamaan (3.22) dan (3.23) kita peroleh :

$$\begin{bmatrix} \varnothing_n(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = 0 \tag{3.24}$$

yang menunjukkan bahwa $\varnothing_n(x)$ adalah kombinasi linear dari $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Berdasarkan itu dapat ditulis

$$\varnothing_n(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i(x)\, y_i \qquad (3.25)$$

di mana $t_i(x)$ adalah polinom dalam x berderajat n.

Karena $\varnothing_n(x_j) = y_j$, untuk j = 0,1,2,3,...n., maka dari persamaan (3.25) diperoleh

$$\left.\begin{aligned} t_i(x_j) &= 0, \quad \text{untuk } i \neq j \\ t_i(x_j) &= 1, \quad \text{untuk } i = j \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

Jadi $t_i(x)$ dapat ditulis sebagai :

$$t_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (3.27)$$

yang memenuhi kondisi (3.25).

Dalam persamaan (3.27), tulis pembilang fungsi tersebut sebagai

$$\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n) \qquad (3.28)$$

maka diperoleh bentuk

$$\pi'(x_i) = \frac{d}{dx}\left[\pi(x)\right]_{x=x_i}$$

$$\pi'(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)$$

Jadi persamaan (3.27) dapat ditulis sebagai

$$t_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x-x_i)\,\pi'(x_i)}\,. \qquad (3.29)$$

Dengan demikian berlakulah keadaan

$$\varnothing_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\pi(x)}{(x-x_i)\pi'(x_i)}y_i \tag{3.30}$$

yang dikenal dengan sebutan *formula interpolasi Lagrange.*

Koefisien-koefisien $t_i(x)$ yang didefinisikan seperti dalam persamaan (3.27) disebut sebagai *koefisien-koefisien interpolasi Lagrange.*

Selanjutnya dengan mensubsitusikan x dengan y yang ada dalam persamaan (3.30) diperoleh

$$\varnothing_n(y)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\pi(y)}{(y-y_i)\pi'(y_i)}x_i \tag{3.31}$$

yang merupakan formula untuk melakukan interpolasi balikan(*inverse interpolation*).

Untuk pemakaian praktis, formula interpolasi Lagrange seperti dalam persamaan (3.30) dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih rinci seperti formula berikut ini:

$$\begin{aligned} y(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}\cdot y_0\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}\cdot y_1\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}\cdot y_2\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_3-x_n)}\cdot y_3\\ &+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}\cdot y_n \end{aligned} \tag{3.32}$$

di mana

$y(x)$ adalah fungsi yang nilai-nilainya akan diinterpolasi ,
x adalah variabel bebas yang berkorespondensi dengan $y(x)$,
$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ adalah nilai-nilai x,
$y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ adalah nilai-nilai y.

Contoh 3.10

Pandang data dalam Tabel 3.17 yang merupakan data pasangan nilai-nilai x yang berkorespondensi dengan fungsi $y(x) = {}^{10}\log x$.

Tabel 3.17. Data beberapa pasangan nilai x dengan fungsi $y(x) = {}^{10}\log x$.

$x \rightarrow$	300	304	305	307
$y(x) \rightarrow$	2,4771	2,4829	2,4843	2,4871

Tentukan nilai dari ${}^{10}\log 301$!

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan masalah ini dapat digunakan formula yang diperlihatkan dalam persamaan (3.37). Untuk itu data dalam Tabel 3.17 ditulis dalam bentuk pasangan data (x_i, y_i) dengan $i = 0,1,2,3$ sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 3.18.

Tabel 3.18. Data (x_i, y_i) dengan $i = 0,1,2,3$ yang bersumber dari Tabel 3.17.

$x_i \rightarrow$	$x_0 = 300$	$x_1 = 304$	$x_2 = 305$	$x_3 = 307$
$y(x_i) \rightarrow$	y_0 = 2,4771	y_1 = 2,4829	y_2 = 2,4843	y_3 = 2,4871

Subsitusikan pasangan data (x_i, y_i) dalam Tabel 3.18 ke dalam formula yang ada dalam persamaan (3.32) sehingga diperoleh

$$y(301)=\frac{(301-304)(301-305)(301-307)}{(300-304)(300-305)(300-307)}\cdot 2,4771$$
$$+\frac{(301-300)(301-305)(301-307)}{(304-300)(304-305)(304-307)}\cdot 2,4829$$
$$+\frac{(301-300)(301-304)(301-307)}{(305-300)(305-304)(305-307)}\cdot 2,4843$$
$$+\frac{(301-300)(301-304)(301-305)}{(307-304)(307-304)(307-305)}\cdot 2,4871$$

Sehingga diperoleh

$$y(301)=1,2739+4,9658-4,4717+0,7106=2,4786$$

Soal-Soal Latihan:

1. Diberikan nilai-nilai fungsi $y=f(x)$ untuk nilai x yang ditentukan sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 3.19.

Tabel 3.19.

$x \rightarrow$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x) \rightarrow$	1.0	2.119	2.910	3.945	5.72	8.695

   Gunakan formula interpolasi depan (*forward*), belakang (*backward*) Newton untuk mendapatkan nilai fungsi f (0.1) dan f (2.2). Sementara itu gunakan formula Stirling untuk mendapatkan nilai fungsi f (1.3).

2. Dengan menggunakan formula interpolasi Lagrange, hitung f (0.1), f (2.2), dan f (1.3). Berikan komentar anda berkenaan dengan hasil yang diperoleh setelah membandingkannya dengan hasil pada penyelesaian sebelumnya (soal nomor 1).

3. Dapatkan formula Interpolasi Newton (umum) berikut ini

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3]$$
$$+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)[x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n]$$

dengan

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}; \quad dst; \quad [x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \quad dst$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}; \quad dst$$

disebut sebagai selisih pembagi.

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu menjelaskan penggunaan formula-formula Newton untuk menyelesaikan diferensiasi numerik. **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu: 1. Menjelaskan dan menggunakan metode formula newton untuk menyelesaikan diferensiasi numerik 2. Menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu daftar nilai fungsi 3. Menjelaskan metode integrasi numerik dasar 4. Menggunakan metode integrasi numerik untuk menyelesaikan integral tentu	**Pokok Bahasan** : Diferensiasi dan Integrasi Numerik : Diferensiasi Numerik **Sub Pokok Bahasan** 1. Formula Newton untuk Diferensiasi Numerik 2. Nilai Maksimum dan Minimum dari suatu Daftar Nilai Fungsi 3. Aturan Trapezoida 4. Metode Simpson 5. Integrasi Romberg

BAB IV
DIFERENSIASI DAN INTEGRASI NUMERIK

4.1. DIFERENSIASI NUMERIK

Pada bagian sebelumnya telah dikemukakan tentang penggunaan tabel selisih untuk melakukan interpolasi suatu nilai data. Dalam bagian ini sekumpulan data yang memiliki hubungan fungsional yang diberikan dalam bentuk tabel data akan digunakan untuk menentukan nilai suatu turunan (integral) fungsi secara numerik. Proses penentuan nilai tersebut dikenal dengan sebutan diferensiasi (integrasi) secara numerik.

Pandang sekumpulan nilai-nilai $(x_0, y_0),(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$. Asumsikan nilai-nilai tersebut merupakan nilai-nilai tertentu dari suatu bentuk $y(x)$ yang tidak diketahui. Dengan nilai-nilai tersebut dapat ditentukan suatu fungsi polinomial $\varnothing(x)$ sedemikian sehingga bersesuaian dengan $y(x)$ pada nilai-nilai tersebut. Logika sederhana, jika $y(x)$ terdeferensial (terintegralkan) pada suatu titik tertentu demikian juga dengan $\varnothing(x)$ pada titik tersebut. Bagian ini, akan dibahas/dideskripsikan teknik diferensiasi (integrasi) numerik meliputi dua hal berikut ini:

(i) Menentukan nilai $\dfrac{dy}{dx}$ untuk suatu nilai x di dalam interval $[x_0, x_n]$, dan

(ii) Menentukan nilai $\int_{x_0}^{x_n} y\, dx$.

Untuk tahap pengenalan diferensiasi (integrasi) numerik, lingkup bahasan dalam bagian ini adalah pada data berukuran langkah (*step size*) *h* sama (nilai-nilai data berjarak sama).

4.1.1. Formula Newton untuk Diferensiasi Numerik

Sebuah metode yang relatif mudah dan umum digunakan untuk menetukan nilai turunan suatu fungsi adalah dengan mengasumsikan data yang dimiliki berbentuk fungsi polinomial. Dengan asumsi tersebut nilai turunan fungsi selalu ada.

Sebagaimana telah dijelaskan dalam bagian sebelumnya formula interpolasi Newton dikonstruksi melalui konsep selisih nilai fungsi. Oleh karena itu hubungan tiap-tiap formula yang dibicarakan pada interpolasi Newton akan diguakan kembali dalan bagian diferensiasi (integrasi) numerik ini.

Pandang formula selisih maju Newton berikut:

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-)}{3!}\Delta^3 y_0 + L \tag{4.1}$$

dengan

$$x = x_0 + uh \text{ atau } u = \frac{x - x_0}{h} \tag{4.2}$$

Dari kalkulus diketahui bahwa aturan untuk derivatif fungsi komposisi $y = f(u)$ dengan $u = g(x)$ diberikan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} .$$

Dengan aturan ini, formula derifatif $\frac{dy}{dx}$ yang diturunkan dari persamaan (4.1) adalah

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{h}[\Delta y_0+\frac{2u-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3u^2-6u+2}{6}\Delta^3 y_0+\cdots] \quad (4.3)$$

Formula dalam persamaan (4.3) dapat digunakan untuk menentukan nilai turunan pertama, $\frac{dy}{dx}$, untuk nilai-nilai x yang tidak terdapat dalam tabel data (data tidak diketahui). Untuk nilai-nilai x yang didaftar, dapat diturunkan formula dengan cara sebagai berikut:

Pilih $x=x_0$ sehingga diperoleh $u=0$ dari persaaman (4.2). Subsitusikan nilai tersebut ke persamaan (4.3) sehingga diperoleh :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_o}=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{1}{3}\Delta^3 y_0-\frac{1}{4}\Delta^4 y_0+\cdots\right] \quad (4.4)$$

Dengan mendeferensialkan formula dalam persamaan (4.3) sebanyak 2 (dua) kali terhadap x diperoleh

$$\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right]=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+\frac{6u-6}{6}\Delta^3 y_0+\frac{12u^2-36u+22}{24}\Delta^4 y_0+\cdots\right]. \quad (4.5)$$

Subsitusikan nilai $u=0$ ke formula dalam persamaan (4.5) diperoleh formula diferensiasi numerik kedua, yaitu

$$\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right]_{x=x_0}=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\cdots\right] \quad (4.6)$$

Dengan cara yang sama, formula untuk turunan secara numerik yang lebih tinggi dapat diperoleh.

Dua formula turunan numerik dapat diperoleh dengan prosedur serupa yaitu:

(a) Formula turunan pertama dan kedua secara numerik berdasarkan tabel selisih belakang Newton masing-masing adalah:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \cdots\right] \quad (4.7)$$

dan

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^5 y_n + \cdots\right]. \quad (4.8)$$

(b) Formula turunan pertama dan kedua secara numerik berdasarkan tabel selisih tengah/pusat Stirling masing-masing adalah:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots\right] \quad (4.9)$$

dan

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3} - \cdots\right]. \quad (4.10)$$

Berikut ini formula yang sejenis dengan dua formula sebelumnya (formula dalam persamaan (4.4) dan persamaan (4.6)).

$$y_0' = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 - \frac{1}{6}\Delta^6 + \frac{1}{7}\Delta^7 - \frac{1}{8}\Delta^8 + \cdots\right) y_0$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{6}\Delta^3 + \frac{1}{12}\Delta^4 - \frac{1}{20}\Delta^5 + \frac{1}{30}\Delta^6 - \frac{1}{42}\Delta^7 + \frac{1}{56}\Delta^8 + \ldots\right) y_{-1} \quad (4.11)$$

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \frac{7}{10}\Delta^7 + \frac{363}{560}\Delta^8 + \cdots\right) y_0$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \frac{1}{12}\Delta^4 + \frac{1}{12}\Delta^5 - \frac{13}{180}\Delta^6 - \frac{11}{180}\Delta^7 - \frac{29}{560}\Delta^8 + \cdots\right) y_{-1} \quad (4.12)$$

Untuk mendapatkan nilai turunan fungsi yang diinginkan di sekitar bagian akhir data dari suatu tabel data dapat digunakan formula berikut ini:

$$y_n' = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \frac{1}{5}\nabla^5 + \frac{1}{6}\nabla^6 + \frac{1}{7}\nabla^7 + \frac{1}{8}\nabla^8 + \cdots\right)y_n$$

$$= \frac{1}{h}\left(\nabla - \frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{6}\nabla^3 - \frac{1}{12}\nabla^4 - \frac{1}{20}\nabla^5 - \frac{1}{30}\nabla^6 - \frac{1}{42}\nabla^7 - \frac{1}{56}\nabla^8 - \cdots\right)y_{n+1} \quad (4.13)$$

$$y_n'' = \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \frac{7}{10}\nabla^7 + \frac{363}{560}\nabla^8 + \cdots\right)y_n$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 - \frac{1}{12}\nabla^4 - \frac{1}{12}\nabla^5 - \frac{13}{180}\nabla^6 - \frac{11}{180}\nabla^7 - \frac{29}{56}\nabla^8 - \cdots\right)y_{n+1} \quad (4.14)$$

Contoh 4.1

Diberikan pasangan nilai (x_i, y_i) dengan $i = 0,1,2,3,4,5$ sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_i	7,3890561	9,0250135	11,0231764	13,4637380	16,4446468	20,0855369

Tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ pada $x = 1,1$.

Penyelesaian:

Tabel selisih depan Newton berkenaan dengan data dalam Tabel 4.1 adalah sebagaimana diberikan dalam Tabel 4.2.

Tabel 4.2. Skema selisih depan Newton untuk data dalam Tabel 4.1.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1,0	7,3890561					
			1,6359574				
1	1,1	9,0250135		0,3622055			
			1,9981633		0,0801929		
2	1,2	11,0231764		0,4423988		0,0175502	
			2,4405617		0,0979483		0,0039310
3	1,3	13,4637380		0,5403471		0,2168603	
			2,9809087		0,1163433		
4	1,4	16,4446468		0,6599814			
			3,6408902				
5	1,5	20,0855369					

Misalkan nilai 1,1 merupakan nilai awal, dengan kata lain $x_0 = 1,1$. Sementara itu dari dalam Tabel 4.2 diperoleh $y_0 = 9,0250135$, dan $h = 0,1$. Untuk nilai turunan pertama dapat digunakan formula yang diberikan dalam persamaan (4.4) sehingga diperoleh:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_o} = \frac{1}{0,1}\left[1,9981633 - \frac{1}{2}0,4423988 + \frac{1}{3}0,0979483 - \frac{1}{4}0,2168603\right]$$

atau

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_o} = 18,0419140 \cdot$$

Bila menggunakan formula yang diberikan dalam persamaan (4.11), selisih diagonal yang akan digunakan adalah $1,6359574$, $0,3622055$, $0,0801929$, $0,0175502$, dan $0,0039310$. Dengan demikian diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,1} = \frac{1}{0,1}\left(1,6359574 + \frac{1}{2}0,3622055 - \frac{1}{6}0,0801929 + \frac{1}{12}0,0175502 - \frac{1}{20}0,0039310\right)$$

atau

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,1} = 18,0497760 \cdot$$

Sementara itu untuk mendapatkan nilai turunan kedua, $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,1}$, dapat digunakan formula yang ada pada persamaan (4.6). Penggunaan formula tersebut menghasilkan:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,1} = \frac{1}{0.1^2}\left[0,4423988 - 0,0979483 + \frac{11}{12}0,2168603\right]$$

atau

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,1} = 36,432932.$$

Contoh 4.2

Tentukan nilai turunan pertama dan kedua secara numerik untuk nilai $x = 1,5$ dengan memanfaatkan data dalam Tabel 4.1.

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan nilai turunan pertama secara numerik dapat digunakan formula dalam persamaan (4.7). Sedangkan untuk turunan kedua dapat digunakan formula dalam persamaan (4.8). Penggunaan formula-formula tersebut, berkenaan dengan data dalam Tabel 4.2, memerlukan nilai $x_n = 1,5;\quad y_n = 3,6408902$, dan $h = 0,1$. Berikut ini adalah hasil penggunaan formula dalam persamaan (4.7) dan persamaan (4.8).

- Penggunaan formula yang ada pada persamaan (4.7) .

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,5} = \frac{1}{10}\left[3,6408902 + \frac{1}{2}0,6599814 + \frac{1}{3}0,1163433 + \frac{1}{4}0,2168603 + \frac{1}{5}0,0039310\right]$$

atau

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,5} = 40,1696670 .$$

- Penggunaan formula yang ada pada persamaan (4.8):

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,5} = \frac{1}{10^2}\left[0,6599814 + 0,1163433 + \frac{11}{12}0,2168603 + \frac{5}{6}0,0039310\right]$$

atau

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,5} = 80,2770450 .$$

Contoh 4.3

Tentukan nilai turunan pertama dan kedua, $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$, di titik $x = 1,3$ untuk sejumlah nilai dari x dan y yang diketahui dan diberikan dalam Tabel 4.1.

Penyelesaian:

Penyelesaian masalah ini dapat menggunakan formula yang diberikan dalam persamaan (4.9) untuk turunan pertama dan formula dalam persamaan (4.10) untuk turunan kedua. Penggunaan formula-formula tersebut dengan pilihan $x_0 = 1,3$ adalah sebagai berikut.

- Penggunaan formula yang ada dalam persamaan (4.9):

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,3} = \frac{1}{0,1}\left[\frac{2,4405617+2,9809087}{2} - \frac{1}{6}\frac{0,0979483+0,1163433}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{30}\frac{0,0039310+0,000000}{2}\right] = 26,9266880\,.$$

- Penggunaan formula yang ada dalam persamaan (4.10):

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,3} = \frac{1}{10^2}\left[0,5403471 - \frac{1}{12}0,2168603\right] = 53,886750.$$

4.1.2. Nilai Maksimum dan Nilai Minimum dari Suatu Daftar Nilai Fungsi

Dalam konsep kalkulus diketahui bahwa nilai maksimum atau minimum suatu fungsi dapat ditentukan melalui turunan pertama fungsi (jika ada) yang sama dengan nol. Dengan menggunakan konsep tersebut dapat ditentukan nilai maksimum atau minimum ketika sejumlah nilai fungsi diketahui dan diberikan dalam suatu tabel.

Pandang formula selisih maju Newton berikut:

$$y = y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad (4.15)$$

Bila formula dalam persamaan (4.15) diturunkan terhadap p satu kali diperoleh:

$$\frac{dy}{dp} = \Delta y_0 + \frac{2p-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3p^2-3p+2}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \tag{4.16}$$

Berdasarkan konsep maksimum atau minimum suatu fungsi maka haruslah $\frac{dy}{dp} = 0$. Oleh karena itu, ruas kanan formula dalam persamaan (4.16) (asumsikan bahwa sesudah suku ketiga suku-suku tersebut bernilai sama dengan nol) diperoleh bentuk persamaan kuadrat dalam p yaitu:

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 = 0 \tag{4.17}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 \\ c_1 &= \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 \\ c_2 &= \frac{1}{2}\Delta^3 y_0 \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Karena $x = x_0 + ph$, maka nilai x dapat ditentukan.

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 4.4 berikut.

Contoh 4.4

Diberikan sejumlah data dalam bentuk pasangan berurutan $(x_i, f(x_i))$ dengan $i = 0,1,2,3,4$ sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 4.3.

Tabel 4.3. Data pasangan $(x_i, f(x_i))$ dengan $i = 0,1,2,3,4$

$x \rightarrow$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$f(x) \rightarrow$	0.9320	0.9636	0.9855	0.9975	0.9996

Tentukanlah nilai x sedemikian sehingga nilai y adalah maksimum (Catatan: Gunakan ketelitian hingga dua desimal).

Penyelesaian:

Ubah bentuk Tabel 4.3 ke dalam bentuk tabel selisih maju Newton sebagaimana diperlihatkan dalam Tabel 4.4.

Tabel 4.4. Skema selisih maju Newton untuk data bersumber dari Tabel 4.3.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1,2	0,9320		
			0,0316	
1	1,3	0,9636		-0,0097
			0,0219	
2	1,4	0,9844		-0,0099
			0,0120	
3	1,5	0,9974		-0,0099
			0,0021	
4	1,6	0,9996		

Karena ketelitian yang diminta adalah dua desimal, formula yang dipergunakan hanya sampai suku kedua dari formula yang ada dalam persamaan (4.16). Dengan menyamakannya dengan nol formula yang dimaksud maka diperoleh bentuk:

$$\frac{dy}{dp} = \Delta y_0 + \frac{2p-1}{2}\Delta^2 y_0 = 0.$$

Akibatnya diperoleh : $0,0316 + \frac{2p-1}{2}(-0,0097) = 0$ atau $p = 3,8$.

Karena $x = x_0 + ph$ maka $x = x_0 + ph = 1,2 + 3,8(0,1) = 1,58$.

Untuk nilai x tersebut, nilai berada di akhir Tabel 4.3, formula selisih mundur Newton sebaiknya digunakan untuk mendapatkan turunan pertama. Penggunaan formula (3.14) untuk $x_n = 1,6\left(y_n = 0,9996\right)$ diperoleh

$$y(1,58) = 0,9996 - 0,2(0,0021) + \frac{-0,2(-0,2+1)}{2}(-0,0099) \text{ atau}$$

$$y(1,58) = 0,9996 - 0,0004 + 0,0008 = 1,0$$

Soal-Soal Latihan

1. Carilah $\frac{d}{dx}\left(j_0\right)$ di $x = 0,1$, dari tabel berikut

x	0,0	0,1	0.2	0.3	0.4
$j_0(x)$	1,0000	0,9974	0,990 0	0,9776	0,9604

2. Tabel berikut menunjukkan perubahan sudut θ (radian) pada interval waktu t (detik)

θ	0.042	0.104	0.168	0.242	0.327	0.408	0.489
t	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12

Tentukan $\frac{d\theta}{dt}$, untuk (i) $t = 0.02$ (ii) $t = 0.04$ (iii) $t = 0.10$ dan $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ untuk $t = 0.06$.

3. Tabel berikut menunjukkan nilai-nilai x dan y yang saling berkorespondensi

x	0	1	2	3	4	4	6
y	6.9897	7.4036	7.7814	8.1291	8.4410	8.7406	9.0309

Tentukan $\frac{dy}{dx}$, untuk (i) $x = 1$ (ii) $x = 3$ (iii) $x = 6$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ untuk $x = 3$.

4.2. INTEGRASI NUMERIK

Dalam konsep kalkulus untuk integral berbatas bilangan real (integral tentu) umumnya dikerjakan dengan cara analitik untuk mendapatkan solusi eksak. Namun sebagaimana diketahui bahwa dalam integral tentu proses pengerjaan secara analitik tidak jarang ditemukan proses yang rumit atau tidak sederhana. Oleh karena itu pilihan alternatif adalah melalui proses numerik. Dengan kata lain, integrasi numerik umumnya dilakukan apabila :

a. Integran (fungsi yang akan diintegralkan) sulit ditemukan metode analitik untuk menyelesaikannya, misalnya

$$\int_a^b \sqrt{(\sin x)}\, dx \; .$$

b. Meskipun metode analitik dapat digunakan namun memerlukan langkah-langkah penyelesaian yang kompleks (tidak sederhana) misalnya

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^4} \; dx \, .$$

c. Integran (fungsi yang akan diintegralkan) bentuknya tidak diketahui secara eksplisit, tetapi nilai-nilai fungsinya diketahui untuk setiap nilai variabel bebas yang berkorespondensi dengannya dalam suatu interval tentu $[a,b]$.

Keadaan sebagaimana dinyatakan dalam butir c dimaknai bahwa diberikan data berupa sekumpulan titik $(x_0, y_0),(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ yang bersumber dari fungsi $y = f(x)$ yang tidak diketahui bentuk eksplisit dari $f(x)$ kemudian dari data tersebut ingin ditentukan nilai integral

$$I = \int_a^b y\, dx \, . \tag{4.19}$$

Seperti halnya dalam diferensiasi numerik, dalam integrasi numerik fungsi $f(x)$ akan diaproksimasikan dengan sebuah fungsi polinomial $\varnothing(x)$. Dengan kata lain fungsi $f(x)$ yang tidak diektahui diasumsikan berbentuk sebuah fungsi polinomial. Dengan asumsi tersebut nilai integrasi numerik dapat ditentukan melalui skema nilai selisih. Dalam bagian ini formula umum untuk integrasi numerik akan memakai skema *selisih maju Newton.*

Misalkan sebuah interval $[a,b]$ dipartisi menjadi n buah sub interval sedemikian sehingga diperoleh $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Oleh karena itu $x_n = x_0 + nh$. Dengan demikian diperoleh

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y\, dx \tag{4.20}$$

Pandang formula interpolasi untuk suatu fungsi polinomial dengan skema selisih maju Newton (formula dalam persamaan (3.9)) dalam bagian sebelumnya. Dengan formula tersebut bentuk integral yang ada dalam persamaan (4.20) dapat dinyatakan sebagai:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \right] dx\,. \tag{4.21}$$

Karena $x = x_0 + ph$ maka $dx = h\,dp$. Sehingga formula yang ada dalam persamaan (4.21) dapat direduksi menjadi

$$I = \int_{0}^{n} \left[y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \right] dp\,. \tag{4.22}$$

Dari persamaan (4.20) dan persamaan (4.22) dapat diturunkan formula integrasi numerik sebagai berikut:

$$\int_{x_0}^{x_n} y\, dx = nh \left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \cdots \right] \tag{4.23}$$

Bentuk umum formula yang diberikan dalam persamaan (4.23) dapat diklasifikasi berdasarkan nilai n yang merupakan *bilangan bulat positif* tertentu. Untuk kebutuhan pemakaian praktis nilai $n = 1$ dan $n = 2$ akan dibahas lebih rinci dalam bagian ini. Formula yang diperoleh dengan menetapkan nilai n = 1 dikenal dengan sebutan formula *aturan Trapezoida* sedangkan untuk n = 2 dikenal dengan sebutan *aturan Simpson* 1/3. Sementara itu ketika nilai n ditetapkan dengan $n = 3$ dan $n = 6$ maka formula khusus yang diperoleh dari persamaan (4.23) masing-masing dinamakan dengan aturan *Simpson* 3/8 dan aturan *Weddle*.

4.2.1. Aturan *Trapezoida*

Pandang formula integrasi numerik yang diberikan dalam persamaan (4.23). Pilih $n = 1$ kemudian asumsikan bahwa formula umum yang ada dalam persamaan (4.23) semua turunan yang lebih dari turunan pertama adalah sama dengan nol. Akibatnya diperoleh formula berikut ini:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} y \quad dx &= h\left[y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta y_0\right] \\ &= h\left[y_0 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 - y_0\right)\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dengan cara serupa untuk interval berikutnya, $\left[x_1, x_2\right]$, akan diperoleh bentuk:

$$\int_{x_1}^{x_2} y \quad dx = \frac{h}{2}\left[y_1 + y_2\right]. \tag{4.25}$$

Dan untuk interval terakhir, $\left[x_{n-1}, x_n\right]$, dapat ditentukan bahwa :

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} y \; dx \;=\; \frac{h}{2} \; [y_{n-1} + y_n] \tag{4.26}$$

Formula-formula yang diperlihatkan dalam persamaan (4.24), persamaan (4.25), dan persamaan (4.26) dapat dinyatakan dalam bentuk umum berikut ini.

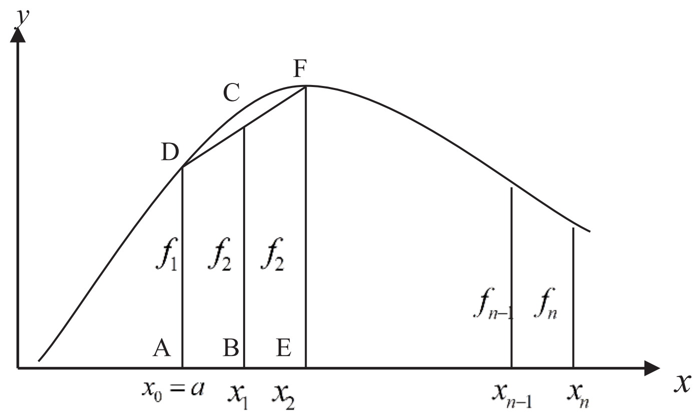
$$\int_{x_0}^{x_n} y \; dx \;=\; \frac{h}{2} \; [y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)] \tag{4.27}$$

Formula yang dinyatakan dalam persamaan (4.27) dikenal dengan sebutan formula *Aturan Trapesium* (*Trapezoidal Rule*) untuk integral numeris dalam rangka menyelesaikan permasalahan integral yang dinyatakan dalam persamaan (4.20).

Pada prinsipnya aturan trapesium digunakan untuk memperoleh hampiran hasil integral dari $\int_a^b f(x)\ dx$ dengan menggunakan jumlah luas-luas trapesium (lihat Gambar 4.1). Sisi-sisi trapesium ditentukan oleh partisi x yang berkorespondensi dengan nilai fungsi f. Misalkan nilai fungsi f diketahui dari sekumpulan nilai x dengan ukuran langkah (*step size*) partisi adalah sama sepanjang interval $[a,b]$. Dengan kata lain, nilai-nilai x dinyatakan dalam bentuk $x_r\ (r=0,1,2,\ldots,n)$ dimana $x_0=a, x_r=x_0+rh, x_n=x_0+nh=b$, dan h adalah konstanta bernilai real. Oleh Karena itu nilai-nilai fungsi f_r yang berkorespondensi dengan x_r dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f_r \equiv f(x_r) \equiv f(x_0+rh).$$

Pandang diagram grafik fungsi yang dinyatakan dalam Gambar 4.1 berikut ini.



Gambar 4.1

Misalkan bentuk grafik fungsi $f(x)$ diketahui. Kemudian antara titik (x_r, f_r) dan (x_{r+1}, f_{r+1}) untuk $r = 0,1,2,...,(n-1)$ dihubungkan oleh potongan-potongan garis lurus. Persamaan garis lurus yang menghubungkan titik-titik (x_0, f_0) dan (x_1, f_1) adalah:

$$y = f_0 + (x - x_0)\left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)$$

Bentuk geometris persamaan garis lurus tersebut diwakili oleh sebuah trapesium ABCD. Dengan menggunakan konsep integral Rieman dalam Kalkulus, diperoleh aproksimasi $f(x)$ dalam interval $[x_0, x_1]$ adalah:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \text{Luas Trapesium ABCD}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f_0 + (x - x_0)\left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)\right\} dx$$

$$= f_0(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2\left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}h(f_1 + f_0)$$

Demikian juga

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx \approx \text{Luas Trapesium BCEF}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) = \frac{1}{2}h(f_2 + f_1)$$

Bila dijumlahkan secara keseluruhan luas-luas trapesium pada Gambar 4.1., maka akan memberikan sebuah persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}h(f_0+f_1) + \frac{1}{2}h(f_1+f_2) + \cdots + \frac{1}{2}h(f_{n\text{-}1}+f_n) \\ &= \frac{1}{2}h\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n\text{-}1} + f_n\right)\end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan $f(x) = y$, $y_0 = f_0, y_1 = f_1, ..., y_n = f_n$, dan $a = x_0$ serta $b = x_n$ pada ruas kanan persamaan di atas akan diperoleh kembali formula (4.27).

Contoh 4.5

Gunakan aturan trapesium untuk mendapatkan sebuah nilai hasil integral numerik dari sebuah fungsi $f(x)$ untuk $x \in [2, 4]$ yang beberapa nilai fungsinya diberikan dalam Tabel 4.5.

Tabel 4.5. Beberapa nilai fungsi $f(x)$ untuk suatu nilai *x* yang diberikan.

x	$f(x)$
2,0	1,7321
2,4	1,8708
3,0	2,0000
3,4	2,1213
4,0	2,2361

Penyelesaian:

Dari Tabel 4.5. diketahui bahwa ukuran partisi (*step size*) $h = 0,5$. Dengan menggunakan formula aturan trapezium yang terdapat dalam persamaan (4.27) diperoleh:

$$\int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 0,5[1,7321 + 2(1,8708 + 2,000 + 2,1213) + 2,2361]$$
$$= 0,25(15,9524)$$
$$= 3,9881$$

Galat (kekeliruan) yang diperoleh terhadap pemakaian aturan trapesium dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

Asumsikan $y = f(x)$ kontinu dan mempunyai derivatif dalam $[x_0, x_n]$. Ekspansi y dalam deret Taylor di sekitar $x = x_0$ memberikan:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\ dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2} y_0'' + \cdots \right] dx$$
$$= hy_0 + \frac{h^2}{2} y_0' + \frac{h^3}{6} y_0'' + \cdots \qquad (4.28)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{h}{2}[y_0 + y_1] = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' + \cdots \right]$$
$$= hy_0 + \frac{h^2}{2} y_0' + \frac{h^3}{6} y_0'' + \cdots \qquad (4.29)$$

Dari persamaan (4.28) dan persamaan (4.29) diperoleh

$$\int_{x_0}^{x_1} y\ dx - \frac{h}{2}[y_0 + y_1] = -\frac{1}{12} h^3 y_0'' + \cdots \qquad (4.30)$$

yang merupakan nilai galat hampiran pada interval $[x_0, x_1]$.

Dengan cara yang sama, diperoleh galat-galat yang lain untuk setiap interval bagian $\left[x_1,x_2\right],\left[x_2,x_3\right],\ldots,\left[x_{n-1},x_n\right]$. Secara keseluruhan, galat total (*total error*), E dapat ditentukan dengan menggunakan formula berikut:

$$E \;=\; -\frac{1}{12}h^3(y_0^{"}+y_1^{"}+\ldots\ldots\ldots+y_{n-1}^{"}. \tag{4.31}$$

Pandang $y''(x)=\left(y_0''+y_1''+\ldots+y_{n-1}''\right)$. Karena $nh=(b-a)$ maka formula yang diberikan dalam persamaan (4.31) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$E \;=\; -\frac{(b-a)}{12}h^2 y^{"}(x) \tag{4.32}$$

4.2.2 Metode *Simpson*

Salah satu teknik intgrasi numerik yang relatif sering dipakai adalah metode *Simpson*. Metode *Simpson* dapat diperoleh dari persamaan (4.23) untuk $n=2$, yaitu dengan aproksimasi parabolis. Formula untuk aturan ini diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} y\,dx \;&=\; 2h\left[y_0+\Delta y_0+\frac{1}{6}\Delta^2 y\right]\\
&=2h\left[y_0+(y_1-y_1)+\frac{1}{6}\Delta(\Delta y_0)\right]\\
&=\;2h\;[y_1+\frac{1}{6}\Delta(y_1-\;y_0)]\\
&=\;2h\;[y_1+\frac{1}{6}[(y_2-y_1)-(y_1-y_0)]]\\
&=\;2h\;[y_1+\frac{1}{6}(y_2-2y_1+y_0)]\\
&=\;2h\;[\frac{1}{6}y_0+\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{6}y_1]\\
&=\;\frac{h}{2}[y_0+4y_1+y_2]
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh pula $\int_{x_2}^{x_4} y\, dx = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$.

Secara umum diperoleh $\int_{x_{n-2}}^{x_n} y\, dx = \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$. Jumlah keseluruhan integral yang dimiliki adalah

$$\int_{x_0}^{x_n} y\, dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] \quad (4.33)$$

Integrasi numerik dengan menggunakan formula (4.33) dikenal dengan sebutan **metode Simpson 1/3**. Di dalam metode ini, interval integrasi dibagi menjadi interval bagian yang banyaknya genap dengan jarak h. Seperti halnya pada metode trapezoida, galat pada metode Simpson dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{n-2}) + y_n\right] \quad (4.34)$$

$$= -\frac{(b-a)}{180} h^4 y^{(4)}(x)$$

dengan $y^{(4)}(x)$ adalah nilai terbesar dari derivatif ke-4.

Contoh 4.6.

Gunakan aturan *Simpson* 1/3 untuk menyelesaikan intgral $\int_2^4 f(x)\, dx$ bila diketahui nilai-nilai x dan $f(x)$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.6. Sejumlah nilai x yang berkorespondensi dengan $f(x)$

r	x_r	$y_r = f(x_r)$	
1	2,0	1,7321	(y_0)
2	2,4	1,8708	(y_1)
3	3,0	2,0000	(y_2)
4	3,4	2,1213	(y_3)
5	4,0	2,2361	(y_4)

Dari Tabel 4.6. diketahui $h = 0,5$. Oleh karena itu penggunaan metode *Simpson* memberikan:

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4]$$

= (0,4/3)[1,7324+4(1,8708+2,1213)+2(2,00+2,2361)]
= (4/3)[23,9366] = 3,894 (dibulatkan untuk empat angka signifikan).

Contoh 4.7.

Misalkan sebuah kurva dibatasi oleh sumbu x, garis $x = 0$, dan garis $x = 1$. Kemudian kurva diasumsikan melalui titik-titik tertentu (lihat Tabel 4.7) dan dirotasi mengelilingi sumbu x.

Tabel 4.7. Sejumlah nilai x yang berkorespondensi dengan $f(x)$

r	0	1	2	3	4
x_r	0,0	0,25	0.5	0.75	1.00
$y_r = f(x_r)$	1.0000	0,9896	0,9489	0,9089	0,8414

Estimasilah nilai volume benda yang terbentuk. (Catatan: lakukan komputasi untuk ketelitian tiga desimal).

Penyelesaian:

Misalkan V menyatakan volume benda. Dalam konsep kalkulus, volume benda dapat dikalkulasi menggunakan rumus:

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx\,.$$

Untuk data nilai fungsi sebagaimana diberikan dalam Tabel 4.7 nilai-nilai fungsi y^2 diberikan dalam Tabel 4.8 (teliti sampai empat tempat desimal).

Tabel 4.8. Sejumlah nilai x yang berkorespondensi dengan $f(x)$

r	0	1	2	3	4
x_r	0,0	0,25	0.50	0.75	1.00
$y_r^2 = (f(x_r))^2$	1,0000	0,9792	0,9194	0,8261	0,7081

Untuk nilai $h = 0,25$ penggunaan metode *Simpson* memberikan hasil integrasi numerik:

$$V = \pi \cdot \frac{h}{3}\left[(y_0)^2 + 4\left((y_1)^2 + (y_3)^2\right) + 2\left((y_2)^2\right) + (y_4)^2\right]$$

$$= \pi \cdot \frac{0,25}{3}\left[1,0000 + 4(0,9793 + 0,8261) + 2(0,9195) + 0,7081\right]$$
$$= 2,819$$

Contoh 4.8.

Tentukan nilai hampiran $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ dengan menggunakan metode trapesium dan metode *Simpson* untuk masing-masing ukuran langkah $h = 0,5$, $h = 0,25$ dan $h = 1,25$.

(i) Untuk ukuran langkah $h = 0,5$, akan diperoleh nilai-nilai fungsi sebagaimana diberikan dalam Tabel 4.9.

Tabel 4.9 Nilai-nilai fungsi yang berasosiasi dengan sejumlah nilai *x* tertentu.

r	0	1	2
x_r	0,0	0.50	1.00
$y_r = \dfrac{1}{1+x_r}$	1.0000	0,6667	0,5

(a) Aturan trapesium memberikan hasil komputasi sebagai berikut:

$$I = \frac{1}{4}\left[1,0000 + 2(0,6667) + 0,5\right] = 0,708.$$

(b) Metode *Simpson* memberikan hasil komputasi sebagai berikut:

$$I = \frac{1}{6}\left[1,0000 + 4(0,6667) + 0,5\right] = 0,694.$$

(ii) Untuk pilihan nilai $h=0,25$ akan diperoleh nilai-nilai fungsi sebagaimana dibrikan dalam Tabel 4.10.

Tabel 4.10 Nilai-nilai fungsi yang berasosiasi dengan sejumlah nilai x tertentu.

r	0	1	2	3	4
x_r	0,0	0,25	0.50	0.75	1.00
$y_r = \dfrac{1}{1+x_r}$	1.0000	0,800 0	0,6667	0,5714	0,5

a. Aturan trapesium memberikan hasil komputasi sebagai berikut:

$$I = \frac{1}{8}\left[1,0 + 2\left(0,8000 + 0,6667 + 0,5714\right) + 0,5\right] = 0,697$$

b. Metode *Simpson* memberikan hasil komputasi sebagai berikut:

$$I = \frac{1}{12}\left[1,0 + 4\left(0,8000 + 0,5714\right) + 2\left(0,6667\right) + 0,5\right] = 0,693$$

(iii) Untuk $h=0,125$, daftar nilai x dan y adalah

Tabel 4.11. Nilai-nilai fungsi yang berasosiasi dengan sejumlah nilai x tertentu.

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_r	0,000	0,125	0,25	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
$y_r = \dfrac{1}{1+x_r}$	1.0000	0,8000	0,6667	0,5714	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

(a) Aturan trapesium memberikan hasil komputasi sebagai berikut

$$I = \frac{1}{16}\left[1,0 + 2\begin{pmatrix} 0,8889 + 0,8000 + 0,7273 + 0,6667 + 0,6154 \\ + 0,5714 + 0,5333 \end{pmatrix} + 0,5\right] = 0,694$$

(b) Metode *Simpson* memberikan hasil komputasi sebagai berikut

$$I = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 1,0 + 4(0,8889 + 0,7273 + 0,6154 + 0,5333) + \\ 2(0,8000 + 0,6667 + 0,5714) + 0,5 \end{bmatrix} = 0,693$$

Dari hasil perhitungan diatas, nilai-nilai dari I adalah $0,693$, teliti sampai tiga desimal. Nilai yang eksak dari I adalah ${}^{e}\log 2$ atau $\ln 2$, yang sama dengan $0,693147...$ Dari beberapa contoh diatas, diperoleh hasil keakuratan metode *Simpson* melebihi aturan trapesium.

4.2.3 Integrasi *Romberg*

Integrasi *Romberg* merupakan salah satu metode integrasi numerik. Metode ini sering digunakan untuk memperbaiki hasil aproksimasi oleh metode selisih terhingga. Penggunaan metode ini untuk alasan evaluasi numerik dari integral tentu, misalnya dalam penggunaan aturan trapesium.

Pandang integral tentu dalam bentuk

$$I = \int_a^b y \, dx$$

Dengan aturan trapezium sebagaimana diberikan dalam persamaan (4.27) untuk dua interval bagian yang berbeda yang ukuran jaraknya adalah h_1 dan h_2 maka akan diperoleh hampiran nilai-nilai I_1 dan I_2. Kemudian, berdasarkan formula yang diberikan dalam persamaan (4.32) diperoleh ukuran galat E_1 dan E_2 adalah

$$E_1 = -\frac{1}{12}(b-a)h_1^2 y''(\hat{x}) \tag{4.35}$$

dan

$$E_2 = -\frac{1}{12}(b-a)h_2^2 y''(\tilde{x}) \tag{4.36}$$

Karena suku $y''(\tilde{x})$ dalam persamaan (4.36) adalah nilai terbesar dari $y''(x)$, maka cukup beralasan untuk menganggap bahwa $y''(\hat{x})$ dan $y''(\tilde{x})$ adalah sama. Sehingga diperoleh

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}.$$

dan berdasarkan rasio tersebut diperoleh hubungan berikut ini:

$$\frac{E_2}{E_2 - E_1} = \frac{h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}$$

Karena $E_2 - E_1 = I_2 - I_1$, maka diperoleh

$$E_2 = \frac{h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}\left(I_2 - I_1\right) \tag{4.37}$$

Oleh karena itu nilai hampiran baru I_3 diperoleh dalam bentuk:

$$I_3 = I_2 - E_2$$

$$I_3 = I_2 - \frac{h^2}{h_2^2 - h_1^2}\left(I_2 - I_1\right)$$

$$I_3 = \frac{I_1 h_2^2 - I_2 h_1^2}{h_2^2 - h_1^2} \tag{4.38}$$

Karena menggunakan prinsip korektor, formula yang diberikan dalam persamaan (4.38) akan memperbaiki nilai hampiran sebelumnya yang akan mendekati nilai yang sebenarnya.
Dengan mensubstitusikan

$$h_2 = \tfrac{1}{2} h_1 = \tfrac{1}{2} h \ ,$$

ke dalam persamaan (4.38) diperoleh

$$I\left(h, \tfrac{1}{2}h\right) = 1/3\left[4I\left(\tfrac{1}{2}h\right) - I\left(h\right)\right] \tag{4.39}$$

dengan $I(h)=I_1$, $I(\tfrac{1}{2}h)=I_2$, dan $I(h,\tfrac{1}{2}h)=I_3$.

Penulisan secara iteratif formula yang diberikan dalam persamaan (4.39) dapat dengan mudah dipahami bila dinyatakan dalam bentuk tabel (untuk contoh lihat Tabel 4.12).

Tabel 4.12. Sebuah skema integrasi numerik metode *Romberg* .

$I(h)$ $I(\tfrac{1}{2}h)$ $I(\tfrac{1}{4}h)$ $I(1/8h)$	$I(h,\tfrac{1}{2}h)$ $I(\tfrac{1}{2}h,\tfrac{1}{4}h)$ $I(\tfrac{1}{4}h,1/8h)$	$I(h,\tfrac{1}{2}h,\tfrac{1}{4}h)$ $I(\tfrac{1}{2}h,\tfrac{1}{4}h,1/8h)$	$I(h,\tfrac{1}{2}h,\tfrac{1}{4}h,1/8h)$

Perhitungan dengan pola sebagaimana yang ditunjukkan oleh Tabel 4.12 dihentikan bila dua nilai yang berurutan memenuhi toleransi yang diberikan. Metode ini, dikenal dengan nama metode integrasi *Romberg*.

Contoh 4.9.

Gunakan metode *Romberg* untuk memperoleh nilai hampiran dari $I=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ yang dikomputasi untuk ketelitian hingga perseribuan (tiga angka desimal). Tetapkan ukuran masing-masing langkah adalah $h=0,5$, $h=0,25$, dan $h=0,125$.

Penyelesaian:

Pandang hasil yang diperoleh dari Contoh 4.8. Oleh karena itu didapat nilai-nilai fungsi:

$$f(h)=0,7084, f(\tfrac{1}{2}h)=0,6970, \text{ dan } f(\tfrac{1}{4}h)=0,6941.$$

Dengan menggunakan formula yang diberikan dalam persamaan (4.39) diperoleh:

$$\begin{aligned} f(h,\tfrac{1}{2}h) &= 1/3\left[4I(\tfrac{1}{2}h)-I(h)\right] \\ &= 1/3\left[4(0,6970)-0,7084\right] \\ &= 0,6932 \end{aligned}$$

dan

$$f\left(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h\right) = 1/3\left[4I\left(\tfrac{1}{4}h\right) - I\left(\tfrac{1}{2}h\right)\right]$$
$$= 1/3\left[4(0,6941) - (0,6970)\right]$$
$$= 0,6931.$$

Dengan nilai-nilai fungsi tersebut dapat ditentukan nilai fungsi berikut ini:

$$f\left(h, \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h\right) = 1/3\left[4I\left(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h\right) - I\left(h, \tfrac{1}{2}h\right)\right]$$
$$= 1/3\left[4(0,6931) - 0,6932\right]$$
$$= 0,6931.$$

Hasil-hasil yang telah diperoleh diatas dapat dinyatakan dalam bentuk Tabel 4.13.

Tabel 4.13. Hasil komputasi penggunaan metode *Romberg* untuk

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

0,708 0,6970 0,6941	0,6932 0,6931	0,6931

Catatan: Dengan metode *Romberg*, ketelitian dari setiap perhitungan nilainya dapat diketahui pada setiap langkah.

Soal-Soal Latihan

1. Bila $y = A + BX + CX^2$, dan y_0, y_1, y_2 adalah nilai-nilai y yang berkorespondensi berturut-turut dengan $x = a, x = a + h$, dan $x = a + 2h$, buktikan bahwa

$$\int_a^{a+h} y \quad dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

2. Gunakan metode numerik yang telah dibahas dalam bagian sebelumnya untuk melakukan komputasi luas daerah di bawah kurva. Kurva yang dimaksud melalui titik-titik yang diberikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.14.

x	0,0	0,4	1,0	1,4	2,0	2,4	3,0	3,4	4,0
y	23	19	14	11	12,4	16	19	20	20

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut, sumbu x dan ordinat yang ekstrim

3. Pergunakan aturan trapesium untuk mendapatkan nilai hampiran dari

$$\int_{3}^{3,9} \frac{1}{x} dx$$

yang dikomputasi hingga ketelitian perseribuan.
Cobalah untuk beberapa nilai h dan tentukan nilai h yang mana memiliki ketelitian seperti yang diharapkan.

4. Evaluasi $\int_{1}^{3} \frac{1}{x} dx$ dengan menggunakan metode *Simpson* dengan membagi daerah menjadi 4 pias, kemudian tentukan ukuran kekeliruannya apabila dibandngkan dengan integrasi langsung. Dengan cara yang sama cobalah periksa bila pias dibuat menjadi 8.

5. Hitunglah nilai dari

$$I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$$

dengan menggunakan aturan Trapezoida untuk $h = 0,5$, $h = 0,25$, dan $h = 0,125$. Kemudian, pergunakan juga metode Romberg untuk mendapatkan hasil yang lebih baik.

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu menjelaskan arti pengepasan kurva dan regresi. Selain itu pembelajar diharapkan mampu memahami penurunan sejumlah formula regresi **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu: 1. Melakukan pengepasan kurva dari sebuah tabel data 2. Melakukan penurunan metode kuadrat terkecil 3. Melakukan linearisasi kurva tak linear 4. Melakukan penurunan sebuah formula untuk melakukan regresi dari sebuah fungsi polinomial dan bervariabel banyak	**Pokok Bahasan** : Pengepasan Kurva **Sub Pokok Bahasan** 1. Pengertian Pengepasan Kurva dan Regresi 2. Prinsip-Prinsip Statistik (rata-rata & simpangan baku) 3. Metode Kuadrat Terkecil 4. Metode Kuadrat Terkecil untuk Kurva Linear 5. Linearisasi Kurva Tidak Linear 6. Regresi Polinomial 7. Regresi Linear dengan Banyak Variabel

BAB V
PENGEPASAN KURVA
(CURVE FITTING)

5.1 PENGERTIAN PENGEPASAN KURVA DAN REGRESI

Sebelumnya telah dibahas aproksimasi suatu pungsi $f(x)$ melalui interpolasi pada titik – titik tertentu. Prosedur seperti itu menghendaki bahwa nilai $f(x)$ pada titik–titik ini diketahui. Misal fungsi $f(x)$ melukiskan hubungan antara dua buah besaran fisik x dan $y = f(x)$, dan melalui pengukuran atau percobaan lain, kita memperoleh bilangan f_n yang hanya mengaproksimasi nilai dari $f(x)$ pada x_n yaitu

$$f(x_n) = f_n + E_n, \qquad n = 1,.....,N$$

dimana nilai kesalahan–kesalahan eksperimennya (E_n) tidak diketahui.

Selain itu, dalam analisis data sering dilakukan pembuatan suatu kurva yang dapat mewakili suatu rangkaian data yang diberikan dalam sistem koordinat-*xy*. Data tersebut dapat berupa hasil percobaan di laboratorium atau pengamatan di lapangan seperti :

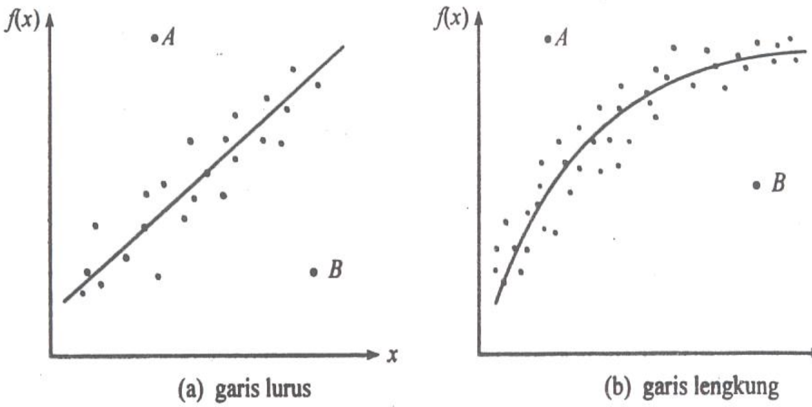
1. pengujian kuat desak beton yang memberikan hubungan antara beban dan kuat desak beton,
2. pengukuran debit sungai yang memberikan hubungan antara kedalaman aliran dan debit sungai,

3. hubungan antara data hujan dan debit di sungai,
4. pertumbuhan arus barang atau penumpang disuatu pelabuhan, terminal atau bandara dari tahun ke tahun,
5. pertumbuhan jumlah penduduk sebagai fungsi waktu,
6. hubungan antara kandungan oksigen di air dan temperatur, dan sebagainya.

Karena adanya kesalahan atau ketidakpastian dalam pengujian, pengukuran atau variasi perubahan data dari waktu ke waktu, maka titik-titik data tersebar dalam koordinat *xy*. Sebagai contoh, volume barang atau jumlah penumpang yang dilayani oleh suatu pelabuhan tidak selalu sama setiap hari atau bulan atau tahun. Kondisi tersebut menyebabkan penyebaran data berkaitan dengan hubungan antara volume barang/penumpang dan tahun pengamatan.

Upaya untuk melakukan pengepasan kurva terhadap data biasanya dilakukan dengan cara regresi. Dalam analisis regresi umumnya dibuat kurva atau fungsi berdasarkan sebaran titik data. Kurva yang terbentuk diharapkan dapat mewakili titik-titik tersebut. Seringkali, setelah kurva terbentuk, dilakukan pula ekstrapolasi untuk mendapatkan nilai y yang berkaitan dngan nilai x yang berada di luar rangkaian data yang ada. Misalnya dalam melakukan prediksi jumlah barang atau penumpang yang akan dilayani suatu pelabuhan pada tahun-tahun yang akan datang (prediksi 5,10,15,...,n tahun yang akan datang).

Metode yang sering digunakan untuk membuat kurva sebagaimana dimaksudkan di atas adalah **metode kuadrat terkecil** (*least square method*). Metode tersebut memungkinkan untuk membuat kurva yang paling mendekati titik-titik data. Perhatikan Gambar 5.1. Gambar ini menjelaskan penyebaran titik-titik data hasil suatu percobaan pada sistem koordinat *xy*. Penetapan bentuk kurva, apakah kurva linier (garis lurus) atau lengkung (logaritmik atau eksponensial), tergantung dari kecendrungan (*trend*) dari penyebaran titik data, seperti ditunjukkan dalam Gambar 5.1.a. dan 5.1.b. Seringkali dijumpai adanya beberapa data yang tidak wajar (*outlier*) yang mempunyai kesalahan sangat besar seperti titik A dan B pada Gambar 5.1. Pembuatan kurva dengan melibatkan/menggunakan titik A dan B juga berpotensi menghasilkan nilai yang mempunyai kesalahan yang besar. Oleh karena itu data A dan B "dapat" dihilangkan.



Gambar 5.1. Kurva hasil *plotting* data pengukuran

Analisis regresi menggunakan beberapa notasi dan teori statistik. Oleh karena itu sebelum mempelajari regresi kuadrat terkecil lebih mendalam, dalam sub bab berikut akan diingat kembali beberapa prinsip statistik.

5.2 NILAI TENGAH DAN STANDAR DEVIASI DATA SAMPEL

Dipandang data hasil pengukuran debit rerata tahunan sungai Serang di stasiun Bendungan di Kabupaten Kulon Progo selam 15 tahun berturut-turut seperti diberikan dalam Tabel 5.1. Kolom kedua dari tabel tersebut adalah debit rerata tahunan, sedang kolom ketiga dan keempat adalah nilai-nilai yang digunakan untuk hitungan statistik.

Tabel 5.1. Debit Sungai

Tahun	y_i (Debit) (m^3/d)	$\left(y_i - \bar{y}\right)$	$\left(y_i - \bar{y}\right)^2$
1971	8,52	1,486	2,208
1972	3,33	-3,704	13,720
1973	7,85	0,816	0,666
1974	7,65	0,616	0,379

1975	10,91	3,876	15,023
1976	4,17	-2,864	8,202
1977	3,40	-3,634	13,206
1978	8,00	0,966	0,933
1979	13,4	6,366	40,526
1980	5,40	-1,634	2,670
1981	8,87	1,836	3,371
1982	4,73	-2,304	5,308
1983	7,40	0,366	0,134
1984	6,88	-0,154	0,024
1985	5,00	-2,034	4,137
$\sum y_i = 105{,}51$		$\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 110{,}507$	

Nilai rerata data ($\bar{y}$) adalah jumlah nilai data (y_i) dibagi dengan banyaknya data (n), yaitu :

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

dengan $\sum y_i$ adalah penjumlahan nilai data dari i = 1,2,...,n

Data dalam Tabel 5.1. memiliki nilai rerata adalah :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15} = \frac{105{,}51}{15} = 7{,}034$$

Penyebaran data dapat diukur dengan menggunakan deviasi standar (σ) terhadap nilai rerata, yang diberikan oleh rumus berikut ini :

$$\sigma = \sqrt{\frac{D^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}}$$

dengan D^2 = jumlah kuadrat selisih antara nilai data dan nilai rerata. Semakin besar sebaran data terhadap nilai rerata, maka semakin besar pula deviasi standar σ. Demikian juga sebaliknya. Penyebaran juga dapat dipresentasikan oleh varians (kuadrat dari deviasi standar) yang diberikan oleh rumus berikut

$$\sigma^2 = \frac{D^2}{n-1} = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}$$

Data dalam Tabel 5.1. memiliki nilai deviasi standar dan varians masing-masingnya adalah :

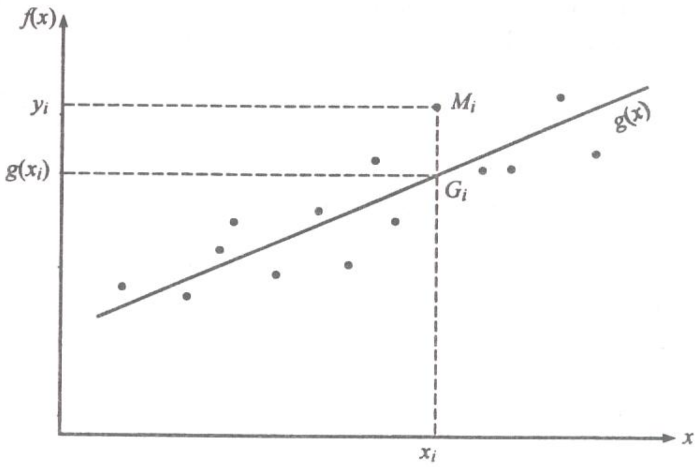
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{110,507}{15-1}} = 2,810$$

dan

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1} = \frac{110,507}{15-1} = 7,893$$

5.3 METODE KUADRAT TERKECIL

Misalkan diberikan sejumlah data yang bila dirajah pada bidang kartesius *xy* memiliki sebaran titik-titiknya sebagaimana tampilan pada Gambar 5.2. Akan dicari suatu kurva $g(x)$ yang dapat mewakili titik percobaan tersebut. Dalam metode numerik, cara termudah membuat kurva $g(x)$ adalah dengan interpolasi linear yang mana pasangan nilai fungsinya diperoleh dari hasil visualisasi secara bebas oleh tangan. Tetapi cara ini tidak bisa memberikan hasil yang memuaskan, terutama apabila penyebaran titik data cukup besar. Diinginkan suatu metode yang lebih pasti untuk mendapatkan kurva tersebut yaitu dengan membuat kurva yang meminimumkan galat (perbedaan/selisih antara titik-titik data dan kurva yang dibuat). Teknik untuk mendapatkan kurva tersebut dikenal dengan **regresi kuadrat terkecil**.



Gambar 5.2. Kurva mewakili titik-titik data

Teknik regresi kuadrat terkecil dilakukan dengan prosedur sebagai berikut:

1. Rajah pasangan data percobaan pada suatu koordinat kartesius. Hasil rajahan tersebut akan diketahui sebaran titik data (*trend*/pola data). Kemudian tentukan apakah kurva yang mewakili data berupa garis lurus (linear) atau lengkung (non linear).
2. Dipilih suatu fungsi polinom $g(x)$ yakni

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r \qquad (5.1)$$

   yang diasumsikan dapat mewakili $f(x)$. Koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_r$. dalam persamaan (5.1) adalah parameter fungsi tersebut.
3. Tentukan nilai-nilai parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots, a_r$ sedemikian hingga $g(x_i\ ; a_0, a_1, \ldots, a_r)$ melalui "hampir" semua titik-titik data. Bentuk $g(x_i\ ; a_0, a_1, \ldots, a_r)$ mempunyai arti fungsi $g(x_i)$ dengan parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$.
4. Apabila koordinat dari titik-titik percobaan adalah $M(x_i\ , y_i\ )$, dengan $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ maka selisih ordinat antara titik-titik tersebut dengan fungsi $g(x_i\ ; a_0, a_1, \ldots, a_r)$ adalah

$$E_i = M_i G_i = y_i - g\,(x_i\ ; a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots, a_r)$$
$$= y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots. + a_r x_i^r)$$

5. Pilih suatu fungsi $g(x)$ yang mempunyai nilai E_i minimum yakni

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - g(x_i)\}^2 \tag{5.2}$$

6. Tentukan nilai parameter a_0, a_1, ... , a_r sedemikian sehingga D^2 adalah minimum. D^2 menjadi minimum jika turunan pertamanya terhadap a_0, a_1, ... ,a_r sama dengan nol,yakni

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2}{\partial a_0} &= 0 \\ \frac{\partial D^2}{\partial a_1} &= 0 \\ &\;\vdots \\ \frac{\partial D^2}{\partial a_r} &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

7. Selesaikan sistem (5.3) untuk memperoleh nilai parameter a_0, a_1,a_2,...,a_r.
8. Subsitusikan nilai-nilai parameter yang diperoleh dalam langkah 7 ke persamaan polinom (5.1) sehingga diperoleh bentuk fungsi $g(x)$.

5.4 METODE KUADRAT TERKECIL UNTUK KURVA LINIER

Pilih fungsi $g(x)$ dalam (5.1) beberbentuk:

$$g(x) = a + b\,x \tag{5.4}$$

dalam hal ini, $a_0 = a$ dan $a_1 = b$.

Bentuk (5.4) adalah bentuk paling sederhana dari regresi. Jumlah kuadrat dari galat dihitung dengan menggunakan (5.2) sehingga diperoleh

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - a - bx_i\}^2 \tag{5.5}$$

Turunkan persamaan (5.5) satu kali terhadap *a* dan *b*, lalu samakan dengan nol.
Turunan terhadap *a* memberikan hasil:

$$\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a - bx_i\right)^2 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - abx_i) = 0$$

$$\sum y_i - \sum a - \sum bx_i = 0 \qquad (5.6)$$

Dan turunan terhadap *b* memberikan hasil:

$$\frac{\partial D^2}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a - bx_i\right)^2 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i - a - bx_i)x_i\right] = 0$$

$$\sum y_i x_i - \sum ax_i - \sum bx_i^2 = 0 \qquad (5.7)$$

Persamaan-persamaan (5.6) dan (5.7) dapat disederhanakan menjadi :

$$na + \sum x_i b = \sum y_i \qquad (5.8)$$

$$\sum x_i \ a + \sum x^2{}_i b = \sum x_i y_i \qquad (5.9)$$

dengan $\sum a = na$.

Tinjau persamaan (5.8), ia dapat ditulis sebagai

$$na = \sum y_i - \sum x_i b = \sum y_i$$

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - \sum x_i b\right) \qquad (5.10)$$

$$a = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{1}{n}\sum x_i b$$

atau

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \tag{5.11}$$

Subsitusi (5.10) ke (5.9), diperoleh

$$\sum x_i \frac{1}{n}\left(\sum y_i - \sum x_i b\right) + \sum x_i^2 b = \sum x_i y_i$$

$$\sum x_i \sum y_i - \left(\sum x_i\right)^2 b + n \pm \sum x_i^2 b = n \sum x_i y_i$$

$$b\left[n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right] = n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

atau

$$b = \frac{n\sum x_i^2 y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{5.12}$$

Subsitusi *a* dan *b* masing-masing ke (5.11) dan (5.12) maka fungsi $g(x)$ dapat ditentukan bentuknya.

Persamaan garis lain, selain persamaan (5.4) memberikan jumlah kuadrat yang lebih besar. Dengan demikian persamaan (5.4) adalah perkiraan terbaik dari data. Untuk mengetahui derajat kesesuaian dari persamaan yang didapat, dihitung nilai koefisien korelasi yang berbentuk :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} \tag{5.13}$$

Dengan r adalah koefisien korelasi, sedang D^2 dan D_t^2 diberikan oleh bentuk :

$$D_t^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x\right)^2$$

Nilai r bervariasi antara 0 dan 1. Untuk perkiraan yang sempurna nilai r = 1. Apabila r = 0 perkiraan suatu fungsi sangat jelek. Koefisien korelasi ini juga dapat digunakan untuk memilih suatu persamaan dari beberapa alternative yang ada, terutama di dalam regresi garis tidak lurus. Kurva lengkung dapat didekati dengan beberapa tipe persamaan, misalnya bentuk $y = a\, x^{\mathrm{b}}$, $y = a\, e^{\mathrm{b}}$, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, atau persamaan lain. Dari beberapa alternative tersebut dipilih persamaan yang mempunyai nilai koefisien korelasi terbesar (paling mendekati 1) .

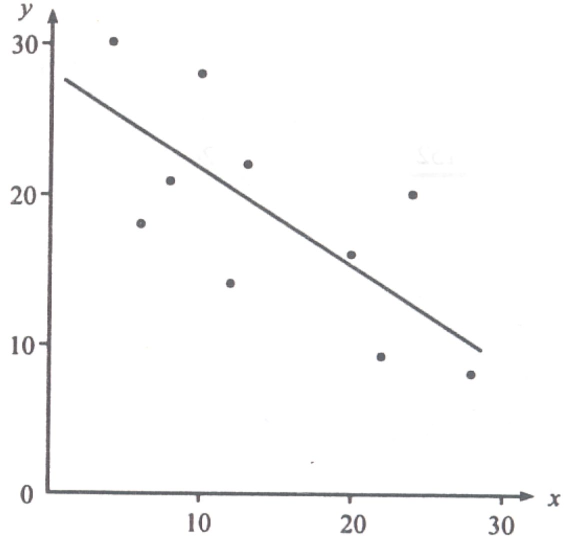
Contoh 5.1

Tentukan persamaan garis yang mewakili data berikut :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28

Penyelesaian:

Tempatkan pasangan data ke dalam sistem koordinat xy. Kemudian buat garis lurus dengan teknik "tangan bebas" yang mana garis lurus tersebut sedapat mungkin melalui semua data yang ada (lihat Gambar 5.3).



Gambar 5.3. Sebaran titik-titik data pada sistem koordinat

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, bentuk fungsi $g(x)$ berupa garis lurus dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut

1. Untuk data yang diberikan, buat tabel sebagaimana yang ditampilkan oleh Tabel 5.2.

Tabel 5.2.

No	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	4	30	120	16
2	6	18	108	36
3	8	22	176	64
4	10	28	280	100
5	14	14	196	196
6	16	22	352	256
7	20	16	320	400
8	22	8	176	484
9	24	20	480	576
10	28	8	224	784
$\sum$	152	186	2432	2912

2. Tentukan nilai rerata dari x dan y yakni:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{152}{10} = 15{,}2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{186}{10} = 18{,}6$$

3. Asumsikan persamaan garis yang mewakili titik-titik data adalah persamaan (5.4) dengan koefisien-koefisiennya adalah (5.11) dan (5.12)

4. Dari Tabel 5.2., (5.12) dan (5.11) masing-masing memberikan

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$= \frac{10 \times 2432 - 152 \times 186}{10 \times 2912 - (152)^2} = -\frac{3952}{6016} = -0{,}6569$$

dan

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 18{,}6 + 0{,}6569 \times 15{,}2 = 28{,}5849$$

Jadi persamaan garis untuk tabel data sebagaimana diberikan dalam soal adalah :

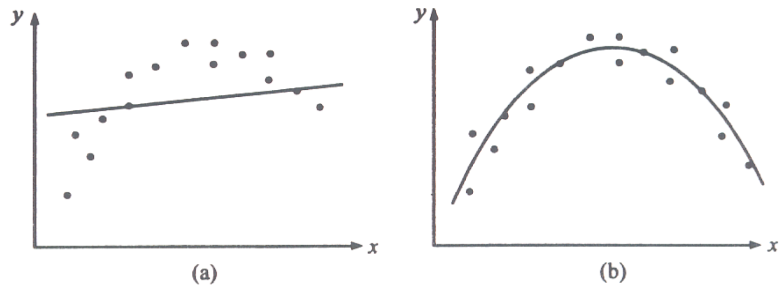
$$y = 28{,}5849 - 0{,}6569\,x$$

Catatan:
Penyelesaian terhadap permasalahan dalam Contoh 5.1, proses aritmatikanya menggunakan alat *kalkulator*. Apabila jumlah data banyak maka perlu dilakukan dengan menggunakan program komputer .

Untuk dicoba: Dengan menggunakan program komputer, persamaan garis yang diperoleh adalah y =28,5851 – 0,6569x, dan koefisien korelasi adalah r =0,7232. Benarkah?

5.5 LINIERISASI KURVA TAK LINIER

Ketika dalam praktek dijumpai bahwa sebaran titik-titik pada sistem koordinat mempunyai kecendrungan (*trend*) berupa kurva lengkung, proses linearisasi perlu dilakukan agar persamaan (5.4) bisa digunakan. Perhatikan sebaran data yang ditampilkan dalam Gambar 5.4. Data diketahui menyebar **tidak linear**. Dalam gambar 5.4.a titik data diwakili oleh kurva linier, sedang Gambar 5.4.b diwakili oleh kurva lengkung.



Gambar 5.4. Titik data didekati dengan garis lurus (a) dan lengkung (b).

Jelaslah bahwa pendekatan dengan kurva lengkung memberikan hasil yang lebih baik daripada garis lurus (kurva linier).

Proses linerisasi dimaksudkan agar persamaan regresi linier dapat digunakan untuk mempresentasikan kurva lengkung. Oleh karena itu perlu dilakukan transformasi koordinat sedemikian hingga sebaran titik data bisa dipresentasikan dalam kurva linier.

Fungsi yang digunakan untuk transformasi data non linear menjadi linear satu diataranya adalah fungsi logaritma. Fungsi ini biasa digunakan untuk asumsi fungsi g(x) berbentuk ekspnensial ($y = a_1 e^{b_1 x}$ misalnya) atau perpangkatan ($y = a_2 x^{b_2}$ misalnya).

5.5.1 Fungsi Eksponensial Umum

Fungsi eksponensial dalam bentuk umum diberikan oleh bentuk berikut ini.

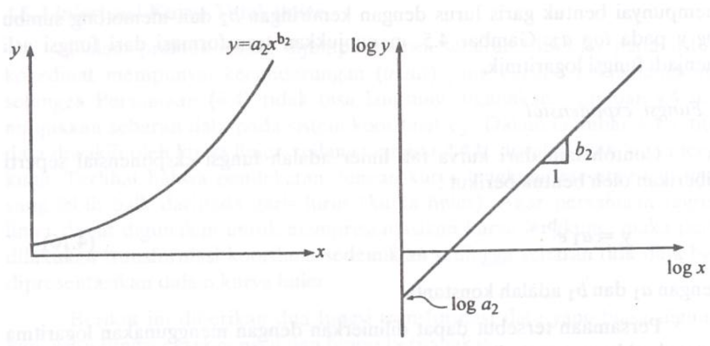
$$y = a_2 x^{b_2} \tag{5.14}$$

dengan a_2 dan b_2 adalah koefisien konstan.

Fungsi dalam Persamaan (5.14) dapat dilinierkan dengan menggunakan sifat fungsi logaritma sehingga didapat :

$$\log y = b_2 \log x + \log a_2 \tag{5.15}$$

yang merupakan hubungan log-log antara log y dan log x. Fungsi tersebut mempunyai bentuk garis lurus dengan kemiringan b_2 dan memotong sumbu log y pada log a_2. Gambar 5.5. menunjukan transformasi dari fungsi asli menjadi fungsi logaritma.



Gambar 5.5. Kurva sebelum (kiri) dan sesudah transformasi (kanan).

5.5.2. Fungsi Eksponensial Asli

Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai berikut :

$$y = a_1 e^{b_1 x} \tag{5.16}$$

dengan a_1 dan b_1 adalah konstanta.

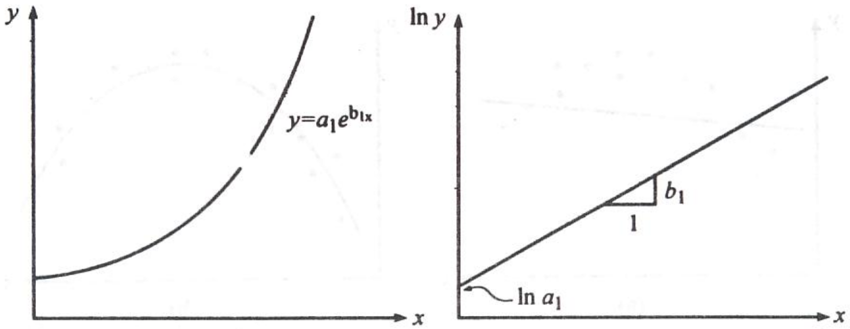
(5.16) dapat dilinierkan dengan menggunakan logaritma natural sehingga menjadi :

$$\ln y = \ln a_1 + b_1 x \ln e$$

Oleh karena $\ln e = 1$, maka :

$$\ln y = \ln a_1 + b_1 x \tag{5.17}$$

Persamaan (5.17) merupakan hubungan semi logaritma antara $\ln y$ dan x. Persamaan tersebut mempunyai bentuk garis lurus dengan kemiringan b_1 dan memotong sumbu $\ln y$ pada $\ln a_1$. Gambar 5.6. menunjukkan transformasi dari fungsi asli menjadi fungsi logaritmik.



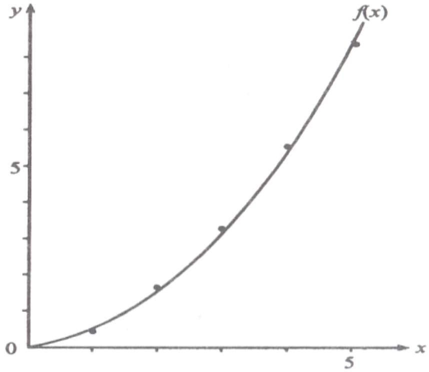
Gambar 5.6. Transformasi fungsi eksponensial

Contoh 5.2

Tentukan persamaan kurva lengkung yang mewakili data berikut ini.

x	1	2	3	4	5
y	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Penyelesaian:
Gambar 5.7. menunjukkan sebaran titik data pada sistem koordinat xy. Dicoba untuk mencari kurva dengan menggunakan dua bentuk transformasi, yaitu transformasi log dan ln.



Gambar 5.7. Sebaran data dan kurva lengkung

a. Transformasi Logaritma Biasa (log)
Misalkan persamaan kurva yang dicari adalah :

$$y = a\,x^{b}$$

Transformasi dengan menggunakan fungsi log, sehingga :

$$\log y = \log a\,x^{b} \longrightarrow \log y = \log a + b \log x$$

Dilakukan dengan transformasi berikut :

$P = \log y \qquad B = b$

$A = \log a \qquad q = \log x$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$p = A + B\,q$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.3. Dari hitungan dalam tabel 5.3 didapat beberapa parameter berikut ini.

$$\bar{q} = \frac{\sum \log x_i}{n} = \frac{2,0791}{5} = 0,4158$$

$$\bar{p} = \frac{\sum \log y_i}{n} = \frac{2,1411}{5} = 0,42822$$

Tabel 5.3. Hitungan regresi linier dengan transformasi log

No	x_i	y_i	$q_i = \log x_i$	$p_i = \log y_i$	$q_i\, p_i$	q_i^2
1	1	0,5	0	-0,3010	0	0
2	2	1,7	0,3010	0,2304	0,0693	0,0906
3	3	3,4	0,4771	0,5315	0,2536	0,2276
4	4	5,7	0,6020	0,7559	0,4550	0,3624
5	5	8,4	0,6990	0,9243	0,6461	0,4886
$\sum$	15	19,7	2,0791	2,1411	1,4240	1,1692

Koefisien A dan B dihitung dengan persamaan (5.11) dan (5.12).

$$B = \frac{n\sum q_i p_i - \sum q_i \sum p_i}{n\sum q_i \left(\sum q_i\right)^2}$$

$$= \frac{5(1{,}4240) - (2{,}0791)(2{,}1411)}{5 \times 1{,}1692 - 2{,}0791 \times 2{,}0791} = \frac{2{,}6684}{1{,}5233} = 1{,}7572$$

Setelah nilai B didapat kemudian dicari nilai A :

$$A = \overline{p} - B\overline{q} = 0{,}42822 - 1{,}7572 \times 0{,}4158 = -0{,}3024$$

Dengan demikian persamaan transformasi adalah :

$$p = -0{,}3024 + 1{,}7572q$$

Mengingat :

$A = \log a \longrightarrow -0{,}3024 = \log a \longrightarrow a = 0{,}4984$

$B = b \longrightarrow b = 1{,}17572$

Maka persamaan yang dicari adalah :

$$y = 0{,}4984x^{1{,}7572}$$

b. Transformasi Logaritma Natural (ln)

Misalkan persamaan kurva mempunyai bentuk :

$$y = ae^{bx}$$

Transformasi dengan menggunakan fungsi ln, sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\ln y = \ln a\, e^{bx} = \ln a + \ln e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

Dilakukan transformasi berikut :

$$p = \ln y \qquad A = \ln a$$

$$q = x \qquad B = b$$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$p = A + Bq$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.4.
Dari hitungan Tabel 5.4 didapat beberapa parameter berikut ini.

$$\bar{q} = \frac{\sum q_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i}{n} = \frac{4{,}93}{5} = 0{,}986$$

Tabel 5.4. Hitungan regresi linier dengan transformasi ln

No	$x_i = q_i$	y_i	$q_i^{\,2} = x_i$	$p_i = \ln y_i$	$q_i p_i$
1	1	0,5	1	-0,6931	-0,6931
2	2	1,7	4	0,5306	1,0612
3	3	3,4	9	1,2238	3,6714
4	4	5,7	16	1,7405	6,962
5	5	8,4	25	2,1282	10,641
$\sum$	15	19,7	55	4,93	21,6425

Koefisien A dan B dihitung dengan persamaan (5.11) dan (5.12).

$$B = \frac{n\sum q_i p_i - \sum q_i p_i}{n\sum q_i^{\ 2} - \left(\sum q_i\right)^2}$$

$$= \frac{5 \times 21{,}6425 - 15 \times 4{,}93}{5 \times 55 - (15)^2} = \frac{34.2625}{50} = 0{,}68525$$

Setelah nilai B didapat kemudian dicari nilai A, yaitu :

$$A = \overline{p} - B\overline{q} = 0{,}986 - 0{,}68525 \times 3{,}0 = -1{,}06975$$

Dengan demikian persamaan transformasi adalah :

$$p = -1{,}06975 + 0{,}68525\,q$$

Mengingat :

$$A = \ln a \longrightarrow -1{,}06575 = \ln a \longrightarrow a = 0{,}3431$$

$$B = b \longrightarrow b = 0{,}68525$$

maka persamaan yang dicari adalah :

$$y = 0{,}3431 e^{0{,}68525x}$$

Untuk memilih salah satu dari kedua hasil terbaik, dihitung nilai koefisien korelasi. Koefisien korelasi dihitung dengan menggunakan persamaan (5.13) :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^{\ 2} - D^2}{D_t^{\ 2}}}$$

dengan

$$D_t^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^2$$

$$D_t^{\ 2} = \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x\right)^2$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.5.

Tabel 5.5. Hitungan koefisien korelasi

No	x_i	y_i	Transformasi log			Transformasi ln		
			$g(x_i)$	D^2	D_t^2	$g(x_i)$	D^2	D_t^2
1	1	0,5	0,4984	0,000003	11,8336	0,6835	0,03367	11,8336
2	2	1,7	1,6848	0,000231	5,0176	1,3563	0,11813	5,0176
3	3	3,4	3,4354	0,00125	0,2916	2,6912	0,50240	0,2916
4	4	5,7	5,6953	0,000022	3,0976	5,3401	012953	3,0976
5	5	8,4	8,4296	0,000876	19,8916	10,5963	4,82373	19,8916
	15	19,7	∑	0,00238	40,132	∑	5,60746	40,132

Dengan menggunakan hitungan yang diberikan dalam Tabel 5.5., dihitung nilai koefisien korelasi berikut ini.

Nilai *r* untuk transformasi log :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \frac{40{,}132 - 0{,}00238}{40{,}132} = 0{,}99997$$

Nilai *r* untuk transformasi ln :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \frac{40{,}132 - 5{,}60746}{40{,}132} = 0{,}92751$$

Dari kedua nilai tersebut, koefisien korelasi *r* untuk transformasi log adalah lebih besar dari transformasi ln, sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan yang didapat dari transformasi log adalah lebih baik.

Soal Contoh 5.2 tersebut diselesaikan dengan hitungan kalkulator. Apabila jumlah data banyak perlu dihitung dengan program computer. Program 5.2. dan 5.3. adalah program analisis regresi linier dengan transformasi log dan ln. Kedua program tersebut serupa, hanya fungsi transformasi yang berbeda.

5.6 REGRESI POLINOMIAL

Di dalam sub bab terdahulu telah dijelaskan penurunan persamaan garis lurus dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Untuk kurva lengkung persamaannya dapat diturunkan dengan melakukan transformasi data asli ke dalam bentuk lain yang sesuai. Selain dengan transformasi persamaan kurva lengkung juga dapat diturunkan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Persamaan polinomial order r mempunyai bentuk:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$$

jumlah kuadrat dari kesalahan adalah :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_i^{\ 2} + ... + a_r x_i^{\ r} \right) \right)^2$$

Dengan cara seperti dalam sub bab terdahulu, persamaan di atas diturunkan terhadap tiap koefisien dari polinomial dan kemudian disama-dengankan nol, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D^2}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} + ... + a_r x_i^{\ r} \right) \right) = 0 \\
\frac{\partial D^2}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} + ... + a_r x_i^{\ r} \right) \right) = 0 \\
\frac{\partial D^2}{\partial a_2} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} + ... + a_r x_i^{\ r} \right) \right) = 0 \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
\frac{\partial D^2}{\partial a_r} &= -2\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ r} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} + ... + a_r x_i^{\ r} \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Persamaan (5.18) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^{\ 2} & . \ . \ . & \Sigma x_i^{\ r} \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^{\ 2} & \Sigma x_i^{\ 3} & . \ . \ . & \Sigma x_i^{\ r+1} \\ \Sigma x_i^{\ 2} & \Sigma x_i^{\ 3} & \Sigma x_i^{\ 4} & . \ . \ . & \Sigma x_i^{\ r+2} \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ \Sigma x_i^{\ r} & \Sigma x_i^{\ r+1} & \Sigma x_i^{\ r+2} & . \ . \ . & \Sigma x_i^{\ r+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ . \\ . \\ . \\ \Sigma x_i^r y_i \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Dengan semua penjumlahan adalah dari i = 1 sampai n. Dari r+1 persamaan tersebut akan dicari bilangan tak diketahui $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ dengan metode eliminasi koefisien tak diketahui. Koefisien matriks dari persamaan tersebut biasanya sangat padat (sangat sedikit koefisien nul) dan masing-masing koefisien sangat berbeda. Namun demikian biasanya nilai r adalah kecil sehingga sistem persamaan tersebut masih mudah diselesaikan.

Contoh 5.3

Cari persamaan kurva polinomial order dua yang mewakili data berikut :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2,1	7,7	13,6	27,2	40,9	61,1

Penyelesaian :

Pandang sebuah persamaan yang melibatkan polinomial order 2 berikut:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 .$$

Galat yang terjadi dapat komputasi melalui formula berikut:

$$E_i = y_i - g(x) .$$

Atau

$$E_i^2 = \Sigma\left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right)^2 \Rightarrow D^2 = \Sigma E_i^2$$

Untuk polinomial order dua, diferensial dari D^2 terhadap tiap koefisien dari polinomial dan kemudian disama-dengankan nol menghasilkan bentuk :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix} \qquad (5.20)$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.6.

Tabel 5.6 Hitungan regresi polinomial order dua

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	2,1	0	0	0	0	0
2	1	7,7	1	1	1	7,7	7,7
3	2	13,6	4	8	16	27,2	54,4
4	3	27,2	9	27	81	81,6	244,8
5	4	40,9	16	64	256	163,6	654,4
6	5	61,1	25	125	625	305,5	1527,5
Total	15	397,4	55	175	979	585,6	2488,8

Dengan melakukan hitungan dalam Tabel 5.6. maka sistem persamaan (5.20) menjadi :

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 152{,}6$$
$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 585{,}6$$
$$55a_0 + 225a_1 + 275a_2 = 2488{,}8$$

Penyelesaian dari persamaan di atas adalah

$a_2 = 1{,}860714$; $a_1 = 2{,}359286$; dan $a_0 = 2{,}478571$.

Dengan demikian persamaan kurva adalah :

$$y = 2{,}478571 + 2{,}359286x + 1{,}860714x^2$$

5.7. REGRESI LINIER DENGAN BANYAK VARIABEL

Metode regresi linier yang telah dipelajari di depan dapat dikembangkan untuk kasus di mana y adalah fungsi linier dari dua atau lebih variabel. Misalnya, y merupakan fungsi linier terhadap x_1 dan x_2 dalam bentuk :

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

Persamaan tersebut dapat digunakan untuk mempresentasikan data pengamatan di mana variabel yang dipelajari merupakan fungsi dari dua variabel.

Seperti telah diberikan di depan, nilai terbaik dari koefisien a_0, a_1, dan a_2 diperoleh dengan mencari kuadrat dari kesalahan yang dihitung dengan persamaan berikut :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_{1,i} + a_2 x_{2,i} \right) \right)^2$$

Dengan cara seperti dalam sub bab terdahulu, persamaan di atas diturunkan terhadap tiap koefisien dari polinomial, dan kemudian disama-dengankan nol, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \left(y_i - \left(a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} \right) \right) = 0$$

(5.21)

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} x_{2,i} \left(y_i - \left(a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} \right) \right) = 0$$

Persamaan (5.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$\begin{aligned} na_0 &+ \sum x_{1,i} a_1 &+ \sum x_{2,i} a_2 &= \sum y_i \\ \sum x_{1,i} a_0 &+ \sum x_{1,i}^2 a_1 &+ \sum x_{1,i} x_{2,i} a_2 &= \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} a_0 &+ \sum x_{1,i} x_{2,i} a_1 &+ \sum x_2^2 a_2 &= \sum x_{2,i} y_i \end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i} x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i} x_{2,,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} y_i \end{bmatrix} \qquad (5.22)$$

Sistem persamaan (5.22) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode matriks untuk mendapatkan koefisien a_0, a_1, dan a_2.

Secara umum persamaan regresi linier dengan m variabel mempunyai bentuk berikut:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m$$

di mana koefisien a_0, a_1, a_2,... sampai a_m dapat dihitung dari persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{1,i} & \Sigma x_{2,i} & . & . & . & \Sigma x_{m,i} \\ \Sigma x_{1,i} & \Sigma x_{1,i}^2 & \Sigma x_{2,i}x_{1,i} & . & . & . & \Sigma x_{1,i}x_{m,i} \\ \Sigma x_{2,i} & \Sigma x_{2,i}x_{1,i} & \Sigma x_{2,i}^2 & . & . & . & \Sigma x_{2,i}x_{m,i} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \Sigma x_{m,i} & \Sigma x_{m,i}x_{1,i} & \Sigma x_{m,i}x_{2,i} & . & . & . & \Sigma x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_{1,i}y_i \\ \Sigma x_{2,i}y_i \\ . \\ . \\ . \\ \Sigma x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Koefisien korelasi dapat dihitung dengan Persamaan (5.13).

Contoh 5.4.

Buat persamaan kurva yang mewakili data berikut :

x_1	0	2	2.5	1	4	7
x_2	0	1	2	3	6	2
y	5	10	9	0	3	27

Penyelesaian:

Pandang Tabel 5.7. berikut ini:

Tabel 5.7. Hitungan regresi linier dengan banyak variabel

	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
	5	0	0	0	0	0	0	0
	10	2	1	4	1	2	20	10
	9	2,5	2	6,25	4	5	22,5	18
	0	1	3	1	3	3	0	0
	3	4	6	16	36	24	12	18
	27	7	2	49	4	14	189	55
Σ	54	16,5		76,25	54	48	243,5	101

Nilai-nilai yang diperoleh dalam Tabel 5.7. dimasukkan kedalam sistem persamaan (5.22), sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 6 & 16,5 & 14 \\ 16,5 & 76,25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243,5 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks ini dengan mudah dapat diselesaikan, dan hasilnya adalah $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -3$. Persamaan kurva yang dihasilkan adalah :

$$y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

5.8. CONTOH SOLUSI NUMERIK DENGAN MATHEMATICA (KURVA LORENZ)

Ilustrasi kasus ini didasari pada contoh yang diberikan oleh Bellu dan Liberati (lihat Bellu and Liberati, 2005 dan Saidi et.al., 2020). Pandang hasil survei tentang pendapatan penduduk dalam satu tahun evaluasi. Misalnya, sebuah populasi terdiri dari 100 individu diperoleh data sebagaimana diberikan dalam Tabel 5.8.

Tabel 5.8. Daftar Distribusi Pendapatan 5 (lima) Individu

Individu	Pendapatan (US $/Tahun)
1	2,417
2	7,800
3	8,489
4	10,072
5	12,957

Tabel 5.8. diartikan bahwa setiap orang memiliki (1/100) dari total pendapatan, grafik distribusi pendapatan yang mendasarinya adalah garis pemerataan. Asumsikan, distribusi pendapatan dibuat dari tingkatan miskin ke kaya. Ini berarti bahwa individu miskin memiliki kurang dari bagian yang sama dari total pendapatan karena individu yang lebih kaya memiliki lebih dari bagian yang sama. Oleh karena itu, dari Tabel 5.8. diperoleh informasi individu 1 memiliki US $ 2,417 /tahun (dia adalah yang termiskin), sementara individu 5 memiliki US $ 12,957/tahun (dia adalah yang terkaya).

Untuk efesiensi dan efektifitas menangani bentuk geometri, komputasi kesimetrikan Kurva Lorenz, dan penetuan indeks Gini akan digunakan program ***Mathematica®*** dengan deskripsi algoritma sebagai berikut:

- Algoritma (Deskripsi)
  a. Baca data $\left(X_i, Y_i\right)$.
  b. Komputasi frekuensi kumulatif data $\left(X_{(kum,i)}, Y_{(kum,i)}\right)$.
  c. Tentukan Model Nonlinear terbaik untuk data $\left(X_{(kum,i)}, Y_{(kum,i)}\right)$.
  d. Tentukan bentuk geometris Kurva Lorenz berdasarkan data $\left(X_{(kum,i)}, Y_{(kum,i)}\right)$.
  e. Komputasi transformasi (rotasi) pada titik asal dengan sudut -45^0 untuk data $\left(X_{(kum,i)}, Y_{(kum,i)}\right)$ dan Model Nonlinear terbaik yang diperoleh dari c.
  f. Komputasi Kesimetrikan Kurva Lorenz berdasarkan data output dari e.

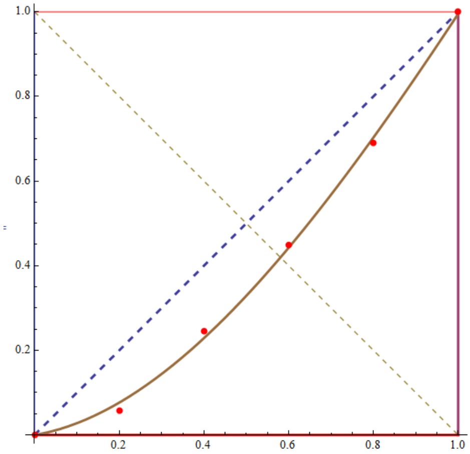
- Implementasi Algoritma

Untuk implementasi algoritma yang dibuat digunakan perangkat lunak M*athematica*® dengan skrip diberikan berikut ini:

```
populasi=100;
kodeindividu={0, 1,1,1,1,1};
pendapatan={0,2417,7800,8489,10072,12957};
proporsiindvidu=Table[(kodeindividu[[i]]/Total[kodeindividu])*(p
opulasi/100),{i,6}]//N
proporsipendapatan=Table[pendapatan[[i]]/Total[pendapatan],{i,
6}]//N
kumulatifproporsiindvidu=Accumulate[proporsiindvidu]
kumulatifproporsipendapatan=Accumulate[proporsipendapatan]
data3=
Table[{kumulatifproporsiindvidu[[i]],kumulatifproporsipendapata
n[[i]]},{i,6}]
```

```
nlm2=NonlinearModelFit[data3,a x^3- b x^2 + c x,{a,b,c},x];
f2=nlm2["BestFit"]
g4=Plot[f2,{x,0,1},PlotRange -> {{0.,1},{0.,1}},
PlotStyle -> {RGBColor[0,1,0],PointSize[0.0025]}];
g2=Plot[x,{x,0,1},PlotRange -> {{0,1},{0,1}}];
g3=ListPlot[data3,PlotStyle ->
{RGBColor[1,0,0],PointSize[0.0125]}];
Show[g2, g3,  g4,ImageSize -> Large]
```

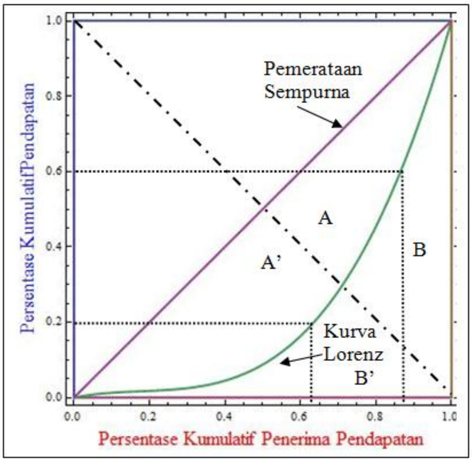
Output dari *listing* program ***Mathematica®*** yang dibuat menghasilkan bentuk grafik fungsi sebagaimana diperlihatkan dalam Gambar 5.8.



Gambar 5.8. Kurva Lorenz

Komputasi kesimetrikan Kurva Lorenz

Pandang Gambar 5.9. Jika diberikan sebuah garis yang menghubungkan titik di koordinat (0,1) dan (1,0) maka Kurva Lorenz kini dipisah ke dalam dua wilayah (Adan A') oleh garis tersebut (lihat garis *dot-dashed* dalam Gambar 2.). Akibatnya diperoleh juga dua wilayah lain (Bdan B').



Gambar 5.9. Bentuk Kurva Lorenz dan garis kesimetrikannya.

Rasio ketidaksimetrikan Kurva Lorenz pada Gambar 5.9. dapat di rumuskan dengan:

$$l_k = \frac{\text{luas } A'}{\text{luas } A} \tag{5.24}$$

dengan $l_k$adalah rasio ketidaksimetrisan Kurva Lorenz. Sementara itu Rasio Gini (RG) atau biasa disebut juga dengan koefsien/indeks merupakan alat ukur atau media yang relatif mudah digunakan untuk mengukur derajat ketidakmerataan dalam suatu distribusi pendapatan. RG diperoleh dengan menghitung rasio yang terletak diantara garis diagonal dari Kurva Lorenz dibagi dengan luas separuh segi empat dimana Kurva Lorenz itu berada. RG dapat diformulasikan dengan menggunakan konsep integral tentu yakni

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)\,dp \tag{5.25}$$

dimana $L(p)$ merupakan persamaan Kurva Lorenz (Arcagni & Porro, 2014).

Rasio Gini G untuk n buah data distribusi kumulatif dapat juga ditentukan melalui formula berikut (Zheng, 2008):

$$G = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1})$$

Atau

$$G = \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right) \tag{5.26}$$

Kriteria ketidakmerataan pendapatan berdasarkan rasio/koefisien Gini adalah:

a. Jika nilai G = 0 maka artinya adalah distribusi pendapatan sempurna merata.
b. Jika nilai 0 <G< 0.4 maka artinya adalah tingkat ketimpangan distribusi pendapatan rendah.
c. Jika nilai 0.4 <G< 1 maka artinya adalah tingkat ketimpangan distribusi pendapatan sedang.
d. Jika nilai G =1 maka artinya adalah distribusi pendapatan sempurna tidak merata.

Pandang data dalam Tabel 5.8. Dengan menggunakan data dalam kolom ke enam sebagai nilai untuk peubah bebas x dan data dalam kolom ke lima sebagai nilai peubah tak bebas y dapat ditentukan bentuk regresi yang bersesuaian yaitu:

$$f_{regresi} = 0.16823062x + 1.13283177x^2 - 0.30588678x^3 \tag{5.27}$$

Skrip *Mathematica* untuk mendapatkan persamaan (5.27) adalah sebagai berikut:

```
data3=
Table[{kumulatifproporsiindvidu[[i]],kumulatifproporsipendapata
n[[i]]},{i,6}]
nlm2=NonlinearModelFit[data3,a x^3- b x^2 + c x,{a,b,c},x];
f2=nlm2["BestFit"]
```

Untuk mendapatkan titik koordinat garis kesimetrikan adalah dengan menyelesaikan persaamaan berikut:

$$f_{regresi} + (x-1) = 0$$

Yaitu

$$\left(x^{*}, y^{*}\right)=\left(0.58047096, 0.41952904\right) \tag{5.28}$$

Skrip *Mathematica* untuk mendapatkan persamaan (5.28) adalah sebagai berikut:

```
p1=Solve[{f2 -> 1-x},x,Reals];
x0=Select[x/.p1,0<#<1&]
f2/.x -> x0
```

Oleh karena itu dapat ditentukan:

$$Luas\ A = \int_{0.5}^{0.58047096} ((1-x)-f_{regresi})dx + \int_{0}^{0.5} (x-f_{regresi})dx = 0.06848141 \tag{5.29}$$

dan

$$Luas\ A' = \int_{0.58047096}^{1} (x-f_{regresi})dx \quad + \int_{0.5}^{0.58047096} (x-(1-x))dx = 0.04626439 \tag{5.30}$$

Akibatnya

$$l_k = \frac{luas\ A}{luas\ A'} = \frac{0.06848141}{0.04626439} = 1.48021872 \tag{5.31}$$

Skrip *Mathematica* untuk mendapatkan persamaan (5.29) hingga (5.31) sangat mudah dibuat. Silahkan Anda mencobanya.

Komputasi kesimetrikan Kurva Lorenz Modifikasi

Modifikasi Kurva Lorenz

Pandang Gambar 5.8. Asumsikan Kurva Lorenz merupakan kurva yang hasilkan sebuah fungsi polinamial derajat tiga yang didefinisikan dengan

$$y(x)=a\,x-b\,x^{2}+c\,x^{3} \tag{5.32}$$

dengan $x, y \in [0,1]$ dan $a, b, c \in \text{Real}$. Koefisien $a, b,$ dan c dalam persamaan (5.32) merupakan konstanta real yang bersesuaian dengan data distribusi pendapatan. Selain Kurva Lorenz, dalam Gambar 2 juga terdapat persamaan-persamaan berikut

$$\begin{array}{l} g_1 : y(x) = x \\ g_2 : y(x) = 1 - x \end{array} \text{ dengan } x, y \in [0,1]. \tag{5.33}$$

Kemudian, asumsikan sebuah fungsi polinomial $y(x)$ dalam persamaan (5.32) dan persamaan (5.33) merupakan persamaan parameter yang dinotasikan dalam bentuk brikut ini.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at^3 - bt^2 + ct \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

dengan $t \in [0,1]$; $a, b, c \in \text{Real}$.

Pandang persamaan-persamaan parameter (5.34) dan pergunakan skrip *Mathematica* transformasi (rotasi) berikut:

Rotasi[fungsi_,titiktetap_,sudut_]:=RotationMatrix[sudut].(fungsi-titiktetap)+ titiktetap;

Dengan menggunakan skrip tersebut transformasi (rotasi) dengan titik tetap rotasi pada α dan besar sudut rotasi θ terhadap persamaan (5.34) akan diperoleh persamaan-persamaan parameter baru yaitu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\left(at^3 - \alpha - bt^2 + ct\right) + \alpha + \cos(\theta)(t-\alpha) \\ \cos(\theta)\left(at^3 - \alpha - bt^2 + ct\right) + \alpha + \sin(\theta)(t-\alpha) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\alpha + \cos(\theta)(t-\alpha) \\ \cos(\theta)\left(at^3 - \alpha - bt^2 + ct\right) + \alpha + \sin(\theta)(t-\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \sin(\theta)(t-\alpha) + \cos(\theta)(t-\alpha) \\ \alpha - \sin(\theta)(t-\alpha) + \cos(\theta)(t-\alpha) \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \sin(\theta)(-\alpha - t + 1) + \cos(\theta)(t-\alpha) \\ \alpha + \sin(\theta)(t-\alpha) + \cos(\theta)(-\alpha - t + 1) \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

dengan tanda "*prime*" merupakan fungsi baru hasil rotasi yang dilakukan.

Ilustrasi:
Misalkan $a = 1.7, b = 0.9$, dan $c = 0.2$. Jika pusat rotasi di titik asal $\alpha = 0$ dengan sudut rotasi sebesar $\theta = {-\pi}/{4}$, maka persamaan parameter (5.35)-(5.37) masing-masing menjadi

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1.7t^3 - 0.9t^2 + 0.2t}{\sqrt{2}} + \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1.7t^3 - 0.9t^2 + 0.2t}{\sqrt{2}} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t}{\sqrt{2}} + \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1-t}{\sqrt{2}} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

Pandang data dalam Tabel 5.8. Untuk data dalam kolom ke-5 dan kolom ke-6, dengan menggunakan skrip *Mathematica* berikut akan diperoleh data dalam Tabel 5.9.

```
populasi=100;
kodeindividu={0, 1,1,1,1,1};
pendapatan={0,2417,7800,8489,10072,12957};
proporsiindvidu=Table[(kodeindividu[[i]]/Total[kodeindividu])*(p
opulasi/100),{i,6}]//N
proporsipendapatan=Table[pendapatan[[i]]/Total[pendapatan],{i,
6}]//N
kumulatifproporsiindvidu=Accumulate[proporsiindvidu]
kumulatifproporsipendapatan=Accumulate[proporsipendapatan]
data3=
Table[{kumulatifproporsiindvidu[[i]],kumulatifproporsipendapata
n[[i]]},{i,6}]
datarotasi=Table[RotationMatrix[-Pi/4].data3[[i]],{i,1,6}]
nlmfit=NonlinearModelFit[datarotasi,a x^3- b x^2 + c x,{a,b,c},x];
frotasi=nlmfit["BestFit"]
```

Tabel 5.9. Pengembangan data dalam Tabel 5.8. setelah ditransformasi (rotasi) berkenaan dengan proporsi pendapatan dan individu serta kumulatif masing-masing proporsi.

Distribusi Pendapatan		Proporsi kumulatif pendapatan yang dimiliki oleh masing-masing individu dan Proposi kumulatif populasi yang berkorespondensi dengannya. (Sebelum transformasi)		Proporsi kumulatif pendapatan yang dimiliki oleh masing-masing individu dan Proposi kumulatif populasi yang berkorespondensi dengannya. (Sebelum transformasi)	
Individu	Kumulatif Proporsi Pendapatan yang dimiliki masing-masing individu	Kumulatif Proporsi Pendapatan yang dimiliki masing-masing individu y	Kumulatif Proporsi Setiap Individu Pada Total Populasi x	Kumulatif Proporsi Pendapatan yang dimiliki masing-masing individu y'	Kumulatif Proporsi Setiap Individu Pada Total Populasi x'
1	2,417	0.0579	0.2000	-0.1005	0.1824
2	7,800	0.2448	0.4000	-0.1097	0.4560
3	8,489	0.4482	0.6000	-0.1073	0.7412
4	10,072	0.6895	0.8000	- 0.0781	1.0533
5	12,957	1.0000	1.0000	0	1.4142
Total	41,735	2.4405	3.0000	-0.3956	3.8471

Analog dengan skrip *Mathematica* untuk mendapatkan persamaan regresi (5.27) data dalam Tabel 5.9. dapat ditentukan fungsi regresi hasil rotasi sebagai berikut:

$$f_{rotasi} = -0.52232171x + 0.635517574x^2 - 0.18938088x^3 \qquad (5.41)$$

Oleh karena itu dapat dikalkulasi:

$$luas\ A = -\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} f_{rotasi}\ dx = 0.06752027$$

dan

$$luas\ A' = -\int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f_{rotasi}\ dx = 0.04501061$$

Akibatnya

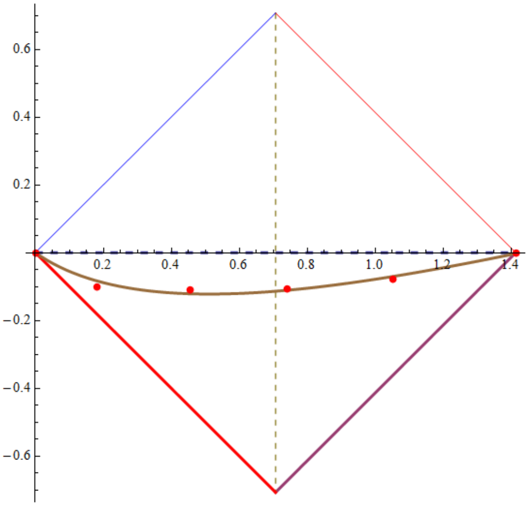
$$l_{k,rotasi} = \frac{luas\ A}{luas\ A'} = \frac{0.06752027}{0.04501061} = 1.50009661 \qquad (5.42)$$

Karena $l_k = 1.48021872$ atau $l_{k,rotasi} = 1.50009661$ lebih dari 1, maka Kurva Lorenz diklaim tidak simetris (cembung bawah) yang berarti besaran ketidakmerataan pada kelompok masyarakat berpendapatan tinggi lebih rendah daripada besaran ketidakmerataan pada kelompok berpendapatan rendah.

Untuk mengetahui bentuk Kurva Lorenz hasil transformasi (rotasi) terhadap data dalam Tabel 5.8. bisa menggunakan skrip *Mathematica* berikut ini.

```
a=-0.3058867754403433;
b=-1.1328317662928886;
c=0.16823061890424168;
g1=ParametricPlot[{rotateparametric[{t,t},0,-
Pi/4],rotateparametric[{1,t},0,-Pi/4],rotateparametric[{t,1-t},0,-
Pi/4],rotateparametric[{t,1},0,-Pi/4],
```

```
rotateparametric[{t,0},0,-Pi/4],
rotateparametric[{0,t},0,-Pi/4],
rotateparametric[{t, c t-b  t^2+a  t^3},0,-Pi/4]},{t,0,1},
PlotStyle->
{{Dashing[0.015],Thick},Thick,Dashed,Red,{Thick,Red},Blue,Thick},
PlotRange->All];
angleRot={-45};
shiftNodes=Table[(data3[[j,1]]+data3[[j,2]]*I)*E^(2*\[Pi]*I*(angle
Rot/360)),{j,6}];
newNodes=Flatten[{Re[shiftNodes],Im[shiftNodes]}];
trp=Table[{newNodes[[j]],newNodes[[6+j]]},{j,6}];
g3=ListPlot[trp,PlotStyle-
>{RGBColor[1,0,0],PointSize[0.015]},AspectRatio->1,
PlotRange->{{0,1},{0.6,-0.6}}];
Show[g1,g3]
```



Gambar 5.10. Kurva Lorenz Hasil Transformasi (Rotasi) di Titik Asal dan $\theta = -\pi/4$

Komputasi Rasio Gini

Dari data dalam Tabel 5.9. kolom-3 dan kolom-4 dapat ditentukan nilai rasio Gini sebelum dirotasi yang dikalkulasi berdasarkan formula dalam persamaan (5.25) atau menggunakan fungsi dalam persamaan (5.27) untuk formula rasio Gini dalam persamaan (5.25) yaitu:

$$G = 1 - 2\int_0^1 f_{regresi}\ dx = 0.22949 \qquad (5.43)$$

Skrip *Mathematica* untuk mendapatkan persamaan regresi (5.43)

(1-2*Integrate[f2,{x,0,1}])

atau

$$G = \sum_{i=1}^{4}\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right) = 0.22384. \qquad (5.44)$$

Sementara itu untuk data dalam Tabel 5.9. kolom-5 dan kolom-6 dapat ditentukan nilai koefisien Gini setelah dirotasi yang dikalkulasi berdasarkan persamaan (5.25) yaitu:

$$G = \frac{-\int_0^{\sqrt{2}} f_{rotasi}\ dx}{0.25\left(\sqrt{2}\right)^2} = 0.22506 \qquad (5.45)$$

Skrip *Mathematica* untuk mendapatkan nilai rasio Gini dalam persamaan (5.45) adalah sebagai berikut:

datarotasi=Table[RotationMatrix[-Pi/4].data3[[i]],{i,1,6}];
nlmfit=NonlinearModelFit[datarotasi,a x^3- b x^2 + c x,{a,b,c},x];
frotasi=nlmfit["BestFit"];
KoefGinirotasi=(-Integrate[frotasi,{x,0,Sqrt[2]}])/(0.25*Sqrt[2]^2)

Atau

$$G = \sum_{i=1}^{4}\left(x'_i y'_{i+1} - x'_{i+1} y'_i\right) = 0.22384. \qquad (5.46)$$

Dari hasil komputasi yang dilakukan yang diperlihatkan dalam persamaan (5.43-5.46) dan berdasarkan kriteria ketidakmerataan pendapatan yang diukur menggunakan rasio/koefisien Gini untuk nilai $0 < G \approx 0.22 < 0.4$ diartikan sebagai tingkat ketimpangan yang ***rendah***. Dengan kata lain tingkat distribusi pendapatan dimasyarakat yang diukur relatif merata.

Soal- Soal Latihan

1. Diberikan data hubungan antara nilai x dan y berikut ini.Gambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat-xy. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Hitung pula koefisien korelasinya.

x	1	3	5	7	10	12	13	16	18	20
y	3	2	6	5	8	7	10	9	12	10

2. Diberikan data hubungan antara nilai x dan y berikut ini. Gambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat-xy. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Hitung pula koefisien korelasinya.

x	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28	28	34	36	38
y	30	18	22	28	14	22	16	8	20	8	14	14	0	8

3. Soal serupa dengan soal no 1. untuk titik data berikut :

x	1	2	4	4	8	12	16	20	24	28	30	34
y	10	12	18	22	20	30	26	30	26	28	22	20

4. Diberikan data hubungan antara nilai x dan y berikut ini.

x	1	2	2,5	4	6	8	8,5
y	0,4	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4

Gambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat xy. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Hitung pula koefisien korelasinya.

5. Pandang data dalam soal no. 4. Tentukan bentuk persamaan polinom untuk mewakili titik data tersebut.

6. Buatlah persamaan garis yang mewakili titik data dalam soal 4. dengan persamaan eksponensial, dan hitung koefisien korelasinya. Beri komentar dan buat kesimpulan terhadap hasil hitungan soal no.4, 5 dan 6.

7. Buatlah persamaan garis yang mewakili titik data berikut.

x	0,05	0,11	0,15	0,31	0,46	0,52	0,70	0,74	0,82	0,98	1,17
y	0,956	0,890	0,832	0,717	0,571	0,539	0,378	0,370	0,306	0,242	0,104

Langkah pertama yang saudara kerjakan adalah menggambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat xy. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Dicoba membuat persamaan berpangkat. Hitung koefisien korelasi.

8. Buatlah persamaan garis yang mewakili titik data dalam soal 7. dengan persamaan eksponensial, dan hitung koefisien korelasinya. Bandingkan hasil dalam Contoh 3, soal 7 dan soal 8; pilihlah persamaan yang paling baik.

9. Kerjakan seperti soal no.7 untuk titik data berikut. Dicoba dengan bentuk persamaan berpangkat, eksponensial, dan polinomial. Hitung koefisien korelasi untuk masing-masing bentuk persamaan.

x	0,05	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
y	550	750	1000	1400	2000	2700	3750

10. Buatlah kurva regresi linier dengan banyak variabel yang dapat mempresentasikan data berikut ini.

x_1	0	1	2	0	1	2
x_2	2	2	4	4	6	6
y	19	12	11	24	22	15

11. Buatlah kurva regresi linier dengan banyak variabel yang dapat mempresentasikan data berikut ini.

x_1	1	1	2	2	3	3	4	4
x_2	1	2	1	2	1	2	1	2
y	18	12,8	25,7	20,6	35	29,8	45,5	40,3

12. Buatlah program komputer untuk metode regresi linier dengan tiga variabel bebas.

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu menjelaskan konsep Masalah Nilai Awal (MNA), solusi sebuah MNA, dan metode untuk menyelesaikannya. **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar mampu: 1. Menjelaskan konsep masalah nilai awal 2. Menjelaskan pengertian metode numerik langkah tunggal 3. Menjelaskan beberapa metode numerik untuk menyelesaikan sebuah MNA 4. Menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan sebuah MNA 5. Mengindikasikan sebuah metode numerik kedalam metode implisit atau eksplisit dalam menyelesaikan sebuah MNA. 6. Mengunakan metode-metode eksplisit atau implisit untuk menyelesaikan sebuah MNA. 7. Mengindikasikan sebuah metode ke dalam metode implisit atau eksplisit dalam menyelesaikan sebuah MNA	**Pokok Bahasan** : Solusi Numerik Masalah Nilai Awal (MNA) **Sub Pokok Bahasan** 1. Pengertian MNA dan Metode Langkah Tunggal; 2. Aproksimasi Deret Taylor sebagai Fungsi Solusi suatu MNA 3. Aprioksimasi fungsi solusi MNA dengan menggunakan Metode Picard; Metode Euler; Metode Runge-Kutta Orde Dua dan Empat 4. Metode Implisit Aturan Nilai Tengah 5. Metode Implisit Gauss Legendre Orde Empat

BAB VI
SOLUSI NUMERIK MASALAH NILAI AWAL

6.1. PENGERTIAN MASALAH NILAI AWAL DAN METODE LANGKAH TUNGGAL

Sejumlah fenomena alam (masalah-masalah di dalam sains dan teknik) dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk persamaan atau sistem persamaan diferensial. Oleh karena itu, jika ingin menganalisis suatu fenomena alam dapat dilakukan dengan menganalisis solusi persamaan atau sistem persamaan diferensial terkait dengannya.

Ada banyak metode analitik dan numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan atau sistem persamaan diferensial. Dalam bagian ini, akan lebih difokuskan pada sebuah persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*) dengan menggunakan metode numerik.

Definisi 6.1

Masalah nilai awal (MNA) adalah sebuah masalah yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui beserta turunan-turunannya dalam sebuah persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

Dengan definisi di atas, MNA untuk sistem persamaan diferensial orde pertama diberikan dalam bentuk berikut ini

$$y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0,\quad x \in [a, b] \tag{6.1}$$

dengan simbol "*prime*" menyatakan turunan pertama terhadap x, y adalah sebuah vektor dengan D-dimensional $\left(y \in \Re^D\right)$, dan $f : \Re x \Re^D \to \Re^D$.

Persamaan (6.1) akan mempunyai penyelesaian tunggal (eksis dan unik) jika fungsi f memenuhi sebuah syarat Lipschitz.

Teorema berikut beserta buktinya dapat dijumpai dalam hampir semua buku-buku persamaan diferensial, Gear (1971) misalnya.

Teorema 6.1

Jika persamaan (6.1) adalah sebuah persamaan diferensial sedemikian hingga $f(x,y)$ kontinu dalam interval $[a,b]$, dan f memenuhi syarat Lipschitz yaitu ada sebuah konstanta L sedemikian hingga

$$\left|f(x,y) - f(x,y^*)\right| \le L\left|y - y^*\right|$$

untuk semua $x \in [a,b]$ dan semua y, y^*, kemudian ada fungsi $y(x)$ yang terdeferensial dan kontinu sedemikian hingga

$$y' = f(x,y) \tag{6.2}$$

dan memenuhi syarat awal $y(x_0) = y_0$.

Jika peubah bebas x tidak muncul secara eksplisit dalam persamaan (6.1) yakni

$$y' = f(y), \quad y \in \Re^D \tag{6.3}$$

dengan syarat awal

$$y(x_0) = y_0$$

maka persamaan (6.3) disebut sistem mandiri atau sistem *autonomous*.

Fungsi f diasumsikan analitik dalam lingkungan nilai awal $y(x_0) = y_0$.

Penyelesaian secara numerik permasalahan (6.1) beserta syarat awalnya adalah sebuah himpunan diskrit nilai-nilai y, katakanlah $\{y_n\}$, berkenaan dengan himpunan diskrit nilai-nilai x,

$$x_n\ , \ n = 0,1,2,3,..,N.$$

Nilai-nilai x ini biasanya diperoleh dalam perlakuan langkah demi langkah. Tentu, nilai-nilai ini berada atau sangat dekat kepada kurva solusi eksak yakni

$$y_n \cong y(x_n\ ),$$

dengan $x_{n+1} = x_n + h_n$, n = 0,1,2,..,N-1; $x_0 = a$, $x_N = b$, and h_n disebut **ukuran langkah** (*step-size*). Ukuran langkah biasanya diambil konstan.

Dalam metode numerik ada dua tipe metode untuk menyelesaikan permasalahan (6.1). Tipe yang pertama adalah tipe **metode langkah tunggal** (*one-step method*). Metode yang termasuk dalam tipe ini misalnya, metode *Taylor*, *Euler*, *Mid Point Rule*, dan *Runge-Kutta.* Sedangkan tipe yang kedua adalah tipe **metode langkah ganda** (*multi step method*). Metode yang termasuk dalam tipe ini adalah metode-metode *Adam*, *Nyström*, *Adams-Bashforth*, dan *Milne-Simpson*. Di sini akan difokuskan hanya pada metode langkah tunggal.

Definisi 6.2

Sebuah **metode langkah tunggal bentuk eksplisit** berkenaan dengan penyelesaian persamaan (6.1) adalah sebuah metode yang mana dapat ditulis ke dalam bentuk berikut ini

$$y_{n+1} = y_n + h_n\,\psi\,(x_n\ ,y_n\ ,h_n\ ), \tag{6.4}$$

dengan $\psi\ (x_n\ ,y_n\ ,h_n\ )$ disebut fungsi ***increment***, dan bergantung hanya pada x_n , y_n , dan h_n, dan n = 0,1,...N.

Definisi 6.3

Metode (6.4) dikatakan ***konvergen*** untuk menyelesaikan masalah nilai awal (6.1) jika $y_n \to y(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$, seiring dengan $n \to \infty$ dan $y_0 \to y(0)$ dengan $h = x/n$ untuk setiap persamaan diferensial (6.1) yang mana memenuhi syarat Lipschitz.

Definisi 6.4

Metode (6.4) adalah ***stabil*** jika untuk sebuah persamaan diferensial yang memenuhi sebuah syarat Lipschitz ada konstanta positif h_0 dan C sedemikian hingga selisih antara dua penyelesaian numerik y_n dan $\tilde{y}_n$ masing-masing memenuhi (6.4) sedemikian hingga

$$\|y_n - \tilde{y}_n\| \le C\|y_n - \tilde{y}_n\| \quad \text{untuk semua } 0 \le h \le h_0$$

Teorema 6.2

Jika $\psi(x, y, h)$ memenuhi sebuah syarat Lipschitz dengan konstanta L, maka metode (6.4) adalah ***stabil***.

Teorema 6.3

Jika $\psi(x, y, h)$ adalah kontinu dalam x, y, dan h untuk $x \in [0, b]$, $h \in [0, h_0]$ dan semua y, dan jika $\psi(x, y, h)$ memenuhi sebuah syarat Lipschitz pada y dalam interval itu, syarat perlu dan cukup untuk konvergen adalah

$$\psi(x, y, 0) = f(x, y) \tag{6.5}$$

Syarat (6.5) juga disebut ***syarat konsisten.***

6.2. APROKSIMASI DERET TAYLOR SEBAGAI FUNGSI SOLUSI MNA

Pandang MNA (6.1) beserta syarat awalnya. Bila $y(x)$ yang terdeferensial dan kontinu diasumsikan sebagai solusi eksak dari (6.1), maka ekspansi deret Taylor untuk $y(x)$ disekitar $x = x_0$ dapat dinyatakan oleh (lihat Teorema 1.1)

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(x_0) + R_n \tag{6.6}$$

Sekali nilai-nilai $y', y'', y''', \text{dst}$ diketahui, maka (6.6) memberikan deret pangkat untuk *y*. Bentuk y_0', y_0'', y''', dst adalah derivatif total yang didefinisikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} y' &= y^{(1)} = f(x,y) = f \\ y'' &= y^{(2)} = f_x + f_y f \\ y''' &= y^{(3)} = f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f_{yy} f^2 + f_y^2 f \\ dst & \end{aligned} \tag{6.7}$$

Contoh 6.1

Diberikan MNA sebagai berikut

$$y' = x - y^2 \text{ dengan syarat awl } y(0) = 1$$

Gunakan deret Taylor (6.6) untuk mendapatkan nilai $y(0,1)$. Lakukan ekspansi Taylor hingga ketelitian empat tempat desimal.

Penyelesaian:

Deret Taylor untuk $y(x)$ disekitar $x = x_0 = 0$ dinyatakan oleh

$$y(x) = 1 + xy_0' + \frac{x^2}{2!} y_0'' + \frac{x^3}{3!} y_0''' + \frac{x^4}{4!} y_0^{(4)} + \cdots \tag{6.8}$$

dengan

$$\begin{aligned} y_0' &= x_0 - \{y(x_0)\}^2 = 0 - 1 = -1 \\ y'' &= 1 - 2\{y(x_0)\} \cdot y'(x_0) = 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 3 \\ y''' &= -2(y'(x_0) \cdot y'(x_0)) - 2\{y(x_0)\} \cdot y''(x_0) \\ &= -2(-1 \cdot -1) - 2\{1\} \cdot 3 = -8 \\ dst & \end{aligned}$$

Subsitusikan nilai-nilai y_0', y_0'', y''', dst ke persamaan (6.8) diperoleh :

$$y(x) = 1 + x(-1) + \frac{x^2}{2!}(3) + \frac{x^3}{3!}(-8) + \frac{x^4}{4!}(34) + \frac{x^5}{5!}(-186) + \cdots\cdots$$

$$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^4 + \frac{31}{20}x^5 + \cdots$$

Untuk mendapatkan nilai y (0,1) teliti keempat tempat desimal, cukup dihitung sampai suku yang mengandung x^4, dan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$y(x) = 1 - (0{,}1) + \frac{3}{2}(0{,}1)^2 - \frac{4}{3}(0{,}1)^3 + \frac{17}{12}(0{,}1)^4$$

$$= 0{,}9138$$

Apabila diinginkan untuk mencari batas-batas nilai x dari deret di atas, dengan kekeliruan setelah suku yang memuat x^4 , maka dapat dihitung nilai-nilai dari y teliti keempat tempat desimal yakni

$$\frac{31}{20}x^5 \le \frac{1}{2}10^{-4}$$

$$\frac{31}{20}x^5 \le 0{,}00005$$

$$x \le 0{,}126$$

6.3. APROKSIMASI FUNGSI SOLUSI MNA DENGAN METODE PICARD

Tinjau kembali MNA yang diberikan dalam bentuk (6.1). Dari teorema dasar kalkulus, integrasi persamaan differensial (6.1) memberikan bentuk

$$y = y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx \tag{6.9}$$

Pada persamaan (6.9), fungsi y yang tidak diketahui muncul sebagai integran. Persamaan (6.9) disebut persamaan integral. Dengan demikian persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan metode aproksimasi pertama untuk y diperoleh dengan meletakkan y_0 untuk y diruas kanan dari persamaan no (6.9) dan ditulis

$$y^{(1)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

Integral pada ruas kanan sekarang dapat diselesaikan dan hasil dari $y^{(1)}$ substitusikan ke y dalam integral dari (6.9) untuk memperoleh aproksimasi kedua $y^{(2)}$.

$$y^{(2)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(1)})\, dx$$

Analog, akan diperoleh rumusan sebagaimana berikut ini

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(n\text{-}1)})\, dx \\ \text{dengan} \quad y^{(0)} &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Jadi berdasarkan uraian di atas metode Picard menghasilkan suatu barisan dari aproksimasi $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$.

Contoh 6.2

Selesaikan MNA pada Contoh 6.1. dengan menggunakan formula (6.10)

Penyelesaian:

Dari syarat awal diperoleh $y^{(0)} = 1$. Rumusan (6.10) untuk n = 1 dan 2 masing-masing memberikan

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(0)})\, dx \\ &= 1 + \int_{0}^{x} f(x + y^{(0)})^2\, dx \\ &= 1 + \int_{0}^{x} f(x + 1)\, dx \end{aligned}$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^x$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

dan

$$y^{(2)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(1)})\, dx$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} (x + y^{(1)\,2})\, dx$$

$$= 1 + \int_{x_0}^{x} \left[\left(x + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)^2\right)\right] dx$$

$$= 1 + \int_{x_0}^{x} \left(x + 1 + 2x + x^2 + x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) dx$$

$$= 1 + \left[x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5\right]_0^x$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5$$

Dari hasil yang baru saja diperoleh memberikan informasi betapa rumitnya untuk nilai $n > 2$. Oleh karena itu metode ini memiliki kelemahan dalam efisien kerja.

Contoh 6.3

Diberikan MNA dalam bentuk

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2 + 1}$$

dengan syarat awal $y = 0$ untuk $x = 0$.

Gunakan metode Picard untuk menghitung y dimana $x = 0{,}25$, $x = 0{,}5$ dan $x = 1{,}0$ teliti sampai tiga tempat desimal.

Penyelesaian:

Perhatikan syarat awal MNA yang diberikan. Ini berarti $y^{(0)} = y_o = 0$. Oleh karena itu, berdasarkan rumus (6.10) diperoleh

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{x^2}{y^2+1}\,dx$$

$$y = 0 + \int_{0}^{x} \frac{x^2}{y^2+1}\,dx = \int_{0}^{x} \frac{x^2}{y^2+1}\,dx$$

Kemudian,

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \int_{0}^{x} \frac{x^2}{y^2+1}\,dx \\ &= \int_{0}^{x} \frac{x^2}{0\ +1}\,dx \\ &= \int_{0}^{x} x^2 dx \ = \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

dan

$$y^{(2)} = \int_{0}^{x} \frac{x^2}{y^{(1)\ 2}+1}\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{x} \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2 + 1}\,dx \\ &= \int_{0}^{x} \frac{x^2}{\frac{1}{9}x^6 + 1}\,dx = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{81}x^9 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Hasil integral menunjukan bahwa $y^{(1)}$ dan $y^{(2)}$ suku pertamanya bersesuaian, yaitu $\frac{1}{3}x^3$. Untuk mencari batas dari nilai-nilai x

sedemikian hingga deret dengan suku $\frac{1}{3}x^3$ sendiri akan memberikan hasil teliti hingga tiga tempat desimal dapat dilakukan dengan cara sbb:

$$\frac{1}{81}\ x^9 \ \le\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ 10^{-3}$$
$$\Leftrightarrow\ x\ \le\ 0,7$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh

$$y(0,25)=\frac{1}{3}\ (0\ ,\ 25)^3=0,005\,;\ y(0,5)=\frac{1}{3}(0,5)^3=0,042\,;\ y(1,0)=\frac{1}{3}-\frac{1}{81}=0,321$$

6.4. APROKSIMASI FUNGSI SOLUSI MNA DENGAN METODE EULER

Mulai dari bagian ini hingga akhir bagian, metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan MNA (6.1) hanya melalui nilai-nilai fungsi yang diketahui sebelumnya.

Tinjau MNA (6.1). Misalkan ingin diketahui nilai-nilai y pada $x = x_r = x_o + r\,h$ dengan $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Untuk $n = 1$. Persamaan (6.9) menjadi

$$y(x_1) = y_1 = y_0 - \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \tag{6.11}$$

Dalam (6.11), bila diasumsikan $f(x,y) \approx f(x_0, y_0)$ untuk $x_0 \le x \le x_1$, maka (6.11) menjadi

$$y_1 \approx y_0 + \int_{x_0}^{x1} f(x_0, y_0)\,dx$$
$$= y_0 + f(x_0,y_0)\int_{x_0}^{x1} dx = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1 - x_0)$$
$$= y_0 + hf(x_0,y_0)$$

Analog, untuk $x_n \le x \le x_{n+1}$ diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) \tag{6.12}$$

dengan $x_n - x_{n-1} = h$ dan $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, N$

Persamaan (6.12) adalah sebuah integrator yang dikenal dengan sebutan integrator **metode Euler**. Integrator (6.12) merupakan integrator yang paling sederhana untuk menyelesaikan MNA (6.1). Dengan integrator ini pula, metode-metode implisit dapat memulai proses penyelesaian MNA. Metode ini, kurang akurat karena adanya asumsi $f\left(x,y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right)$ untuk $x_0 \le x \le x_1$ yang pada prinsipnya sangat beresiko tinggi. Asumsi ini akan sangat mendekati yang diharapkan jika nilai $h << 1$. Jika ini dilakukan konsekuensinya adalah semakin banyaknya iterasi yang harus dilakukan.

Contoh 6.4

Gunakan metode Euler, untuk menyelesaikan persamaan differensial

$$y' = -y\text{; dengan syarat awal } y\left(0\right) = 1.$$

Penyelesaian :

Misalkan h yang akan digunakan adalah 0.01 untuk x dalam interval [0,04].

Penggunaan integrator (6.12) dengan h = 0,01 memberikan hasil berikut :

$$y\ (0{,}01) = 1 + (0{,}01)\ (-1) = 0{,}99$$
$$y\ (0{,}02) = 0{,}99 + (0{,}01)\ (-0{,}99) = 0{,}9801$$
$$y\ (0{,}03) = 0{,}9801 + (0{,}01)\ (-0{,}9801) = 0{,}9703$$
$$y\ (0{,}04) = 0{,}9703 + (0{,}01)\ (-0{,}9703) = 0{,}9606$$

Solusi eksak dari persamaan differensial di atas adaalah $y = e^{-x}$, dan dari nilai x = 0,04 diperoleh nilai y = 0,9606.

6.5. APROKSIMASI FUNGSI SOLUSI MNA DENGAN METODE RUNGE-KUTTA

Seperti telah disampaikan di bagian sebelumnya, bahwa metode Euler kurang efisien dalam masalah-masalah praktis, karena dalam metode Euler diperlukan $h << 1$ untuk memperoleh hasil yang cukup teliti (akurat). Metode Runge-kutta dibuat untuk mendapatkan ketelitian yang lebih tinggi dari metode Euler. Keunggulan metode ini salah satunya adalah bahwa untuk memperoleh solusi numerik hanya memerlukan nilai-nilai fungsi dari titik-titik sembarang yang dipilih pada suatu interval bagian.

6.5.1 Metode Runge-Kutta Orde Dua

Metode Runge-Kutta orde dua diberikan dalam skema berikut

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) \tag{6.14}$$

dengan

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right), \quad k_2 = hf\left(x_n, y_n + \frac{1}{2}k_1 \right)$$

6.5.2 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat diberikan dalam bentuk formula berikut ini:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6.15}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_3)$$

$h = step\ size$

Contoh 6.5

Diberikan MNA dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = y - x \text{, dengan } y\,(0) = 2\,.$$

Tentukan y (0,1) dan y (0,2) teliti hingga empat tempat desimal :

Penyelesaian:

(i) Metode Runge-Kutta Orde Dua

Pilih $h = 0{,}1$, $f(x, y) = y - x$, dan y (0) = 2. Kemudian tentukan nilai-nilai koefisien k_1 dan k_2 dengan cara berikut:

$$k_1 = hf_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1 f\ (0{,}2) = 0{,}1\ (2 - 0) = 0{,}2$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0{,}1\ [f\ (0 + 0{,}1\ ,\ 2 + 0{,}2)]$$

$$k_2 = 0{,}1\ [f(\ 0{,}1\ ;\ 2{,}2)]$$

$$k_2 = 0{,}1\ (2{,}2 - 0{,}1) = 0{,}21$$

Kemudian dihitung nilai y pertama yaitu

$$\begin{aligned} y_1 &= y\ (0{,}1) \\ &= y_0 + \tfrac{1}{2}\ (k_1 + k_2) \\ &= 2 + \tfrac{1}{2}\ (0{,}2 + 0{,}21) \\ &= 2{,}2050 \end{aligned} \qquad (6.15)$$

Guna mendapatkan nilai fungsi $y_2 = y(0{,}2)$, diperlukan $x_o = 0{,}1$ dan y_o = 2,2050.

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$\begin{aligned} k_1 &= h\ f(x_0, y_0) \\ &= 0{,}1\ f(\ 0{,}1\ ;\ 2{,}2050) \\ &= 0{,}1\ f(2{,}2050 - 0{,}1\ ) = 0{,}2105 \\ k_2 &= h\ f(x_0 + h\ , y_0 + k_1) \\ &= 0{,}1 f(\ 0{,}2\ ,\ 2{,}4155) \\ &= 0{,}1 f\ (2{,}4155 - 0{,}2\ ) = 0{,}22155 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + ½(k_1 + k_2) \\ &= 2,2050 + ½(0,2105 + 0,22155) \\ &= 2,4210 \end{aligned}$$

Analog, akan diperoleh pula

$$y_3 = y\,(0,3) = 2,6492$$

dan

$$y_4 = y\,(0,4) = 2,8909.$$

Untuk keperluan pembanding, dapat diperlihatkan bahwa ketika pilihan h = 0,2 diperoleh

$$y\,(0,2) = 2,4200 \text{ dan } y\,(0,4) = 2,8880.$$

Dari hasil numerik ini, memperlihatkan betapa pilihan h memainkan peranan dalam hal keakuratan aproksimasi.

Sementara itu, solusi secara analitik MNA dalam Contoh 6.5 adalah fungsi $y = x + 1 + e^x$. Solusi analitik untuk nilai-nilai y (0,2) dan y (0,4) berturut-turut adalah 2,4214 dan 2,8918.

Berikut ini rekapitulasi nilai-nilai fungsi solusi Contoh 6.5. yang telah dikemukakan.

x	y hitung	y eksak	selisih	Rasio
0,2	h = 0,1 : 2,4210 h = 0,2 : 2,4200	2,4214	0,0004 0,0014	3,5
0.3	h = 0,1 : 2,8909 h = 0,2 : 2,8880	2,4918	0,0009 0,0038	4,2

Dari tabel diatas terlihat bahwa metode Runge-Kutta orde dua konvergen.

(ii). Metode Runge-Kutta Orde Empat

Analog dengan langkah-langkah penyelesai MNA dengan metode Runge-Kutta orde dua, metode Runge-Kutta orde empat (6.15) dengan nilai h = 0,1 menghasilkan:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\ f(x_0, y_0) = 0{,}1\ (0{,}2)\\
&= 0{,}1 f\ (2 - 0)\ = 0{,}2\\
k_2 &= h\ f(x_0\ +\ ½\ h\ ,\ y_0 + ½\ k_1)\\
&= 0{,}1 f(0{,}05\ ,\ 2{,}1)\\
&= 0{,}1\ (2{,}1 - 0{,}05) =\ 0{,}205\\
k_3 &= h\ f\ (x_0 + ½\ h\ ,\ y_0 +\ ½\ k_2)\\
&= 0{,}1 f(0{,}05\ ,\ 2 + 0{,}1025)\\
&= 0{,}1\ (2{,}1025 - 0{,}05) = 0{,}20525\\
k_4 &= h\ f(x_0 +\ h\ ,\ y_0 + k_3)\\
&= 0{,}1 f(0{,}1\ ,\ 2{,}20525)\\
&= 0{,}1\ (2{,}20525\ -\ 0{,}1) =\ 0{,}21053
\end{aligned}
$$

Dari nilai-nilai tersebut diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y1} = y(0{,}1) &= y_0\ +\ (\ k_1\ +\ 2\ k_2\ +\ 2\ k_3\ +\ k_4)\\
&= 2 + (\ 0{,}2 + 0{,}410 + 0{,}4105 + 0{,}21043)\\
&= 2{,}2052
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama didapat juga $y(0{,}2)$ = 2,4214

6.6. METODE-METODE BENTUK IMPLISIT

Metode-metode yang telah dibahas sebelumnya adalah metode-metode bentuk eksplisit (terbuka) yakni metode yang memberikan secara langsung nilai-nilai y_{n+1} ketika nilai $\left(x_{n,} y_n\right)$ diberikan/diketahui. Metode eksplisit juga dikenal sebagai metode prediksi (*predictor*). Sebaliknya, metode implisit, ia tidak langsung memberikan nilai-nilai y_{n+1} ketika pasangan nilai $\left(x_{n,} y_n\right)$ diberikan.

Metode ini memerlukan beberapa kali proses yang sama/berulang atau memerlukan nilai $\left(x_{n+1,}y_{n+1}\right)$ untuk mendapatkan nilai-nilai y_{n+1}. Dengan keadaan ini, metode implisit memerlukan waktu lebih lama dibandingkan metode eksplisit. Hal ini dikarenakan perlunya proses ekstra untuk mendapatkan nilai yang sama atau sangat dekat dengan y_{n+1}. Metode implisit juga dikenal dengan sebutan metode *corrector* karena cara kerja metode ini adalah mengoreksi setiap nilai aproksimasi y_{n+1} yang sesuai yakni ketika berlaku kondisi

$$y_{n+1} \approx \left| y_{n+1}^{k+1} - y^{k}{}_{n+1} \right| < \text{toleransi}, \quad k = 0,1,2,\cdots,N \tag{6.16}$$

Toleransi dalam persamaan (6.16) diambil sesuai kebutuhan (umumnya toleransi << 0.1). Untuk *k* = 0, nilai y_{n+1}^{0} paling mudah diambil dari metode Euler (persamaan (6.12). Dua metode implisit yang cukup dikenal adalah metode **Aturan Nilai Tengah** (*Mid Point Rule*) dan metode **Gauss-Legendre**.

6.6.1 Metode Aturan Nilai Tengah (*Mid Point Rule*)

Metode Aturan Nilai Tengah diberikan dalam bentuk sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right) \tag{6.17}$$

6.6.2 Metode Gauss-Legendre Orde Empat

Metode Gauss-Legendre orde empat diberikan dalam bentuk berikut

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right) \tag{6.18}$$

dengan

$$k_1 = f\left(x_n, y_n + \tau\left(\frac{k_1}{4} + \frac{\left(3 - 2\sqrt{3}\right)k_2}{12}\right)\right); \quad k_2 = f\left(x_n, y_n + \tau\left(\frac{\left(3 + 2\sqrt{3}\right)k_1}{12} + \frac{k_2}{4}\right)\right)$$

Soal-Soal Latihan

1. Dari $\frac{dy}{dx} = xy + 1$, dan y (0) = 1, tentukan untuk $y(x)$ dan hitunglah $y(0{,}1)$ teliti hingga empat tempat desimal.

2. Gunakan metode deret Taylor, untuk membuktikan bahwa solusi dari

   $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$, dengan $x = 0$, $y = c$, $\frac{dy}{dx} = 0$, dapat dinyatakan oleh :

   $$y = c\left[1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \times 4}{6!}x^6 - \frac{1 \times 4 \times 9}{9!}x^9 + \ldots\right]$$

3. Diberikan MNA sbagai berikut

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y} \text{ ;dengan syarat awal } y(4) = 4$$

   Gunakan deret Taylor untuk mendapatkan $y(4{,}1)$ dan $y(4{,}2)$.

4. Untuk MNA berikut ini, tentukanlah solusi persamaan tersebut dalam bentuk perpangkatan dari x dengan memakai metode Picard, kemudian hitung y (0,1) teliti hingga empat tempat desimal.

   $$\frac{dy}{dx} = x - y^2 \text{ ;dengan syarat awal } y(0) = 1$$

5. Selesaikan dengan menggunakan metode Euler persamaan differensial

   $\frac{dy}{dx} = x + y$ dengan syarat $y(0) = 0$ pilih $h = 0{,}2$, dan hitung $y\ (0{,}4)$ dan $y\ (0{,}6)$

6. Diberikan masalah nilai awal dalam bentuk persamaan diferensial $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y$ dan $y(0)=1$. Tentukan nilai-nilai $y(0{,}02)$, $y(0{,}04)$, dan $y(0{,}06)$, dengan menggunakan metode modifikasi Euler.

7. Gunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk mendapatkan nilai y pada $x = 1$, bila diketahui bahwa $y = 1$ untuk $x = 0$ dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

8. Buatlah daftar solusi dari

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ dengan } y(0)=0$$

Untuk $0{,}4 < x \leq 1{,}0$ dengan $h = 0{,}1$, menggunakan formula RK4 dan *Mid Point Rule*.

Kompetensi Dasar & Indikator	Pokok Bahasan & Sub Pokok Bahasan
1. Kompetensi Dasar Setelah menyelesaikan pembelajaran pada bagian ini pembelajar diharapkan mampu menjelaskan penggunaan metode-metode numerik yang telah dipelajari dan/atau diketahui untuk dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan terkait model matematika yang berbentuk sistem persamaan diferensial biasa. **2. Indikator** Setelah mengikuti pembelajaran pada bagian ini pembelajar diharapkan mampu: 1. Menggunakan metode numerik (teknik interpolasi) untuk mendapatkan bentuk belahan Poincaré suatu sistem persamaan diferensial. 2. Menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan MNA 3. Membuat dan menggunakan algoritma untuk penyelesaian sebuah kasus MNA (Sistem Suspensi Mobil) dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat	**Pokok Bahasan** : Aplikasi-Aplikasi Metode Numerik: Teknik Interpolasi Linear Untuk Belahan Poincaré **Sub Pokok Bahasan** 1. Pengertian Belahan Poincaré 2. Konsep Interpolasi Linear pada Bidang 3. Sistem Persamaan Diferensial dan Sistem Suspensi Mobil 4. Algoritma untuk Penyelesaian Masalah Sistem Suspensi Mobil Dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat Bentuk Eksplisit 5. Eksperimen Numerik

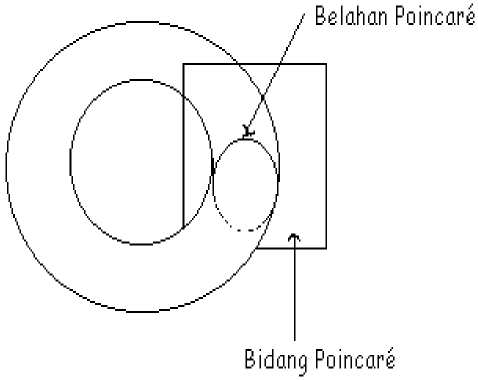
BAB VII
APLIKASI METODE NUMERIK

7.1 TEKNIK INTERPOLASI LINEAR UNTUK BELAHAN POINCARÉ

7.1.1 Pengertian Belahan Poincaré

Belahan *Poincaré* yaitu sebuah bidang potong berdimensi dua tempat dimana trayektori-trayektori dari sebuah penyelesaian sistem dinamik melewatinya. Dari belahan *Poincaré* akan diperoleh sebuah photo fase (*phase portrait*) yang di dalam ilmu Fisika disebut juga dengan photo *stroboscopic*. Belahan *Poincaré* secara umum diperlukan untuk menyederhanakan proses penganalisaan suatu sistem dinamik guna mendapatkan informasi sebanyak-banyaknya mengenai sifat-sifat sistem tersebut (sifat stabil atau tidak stabilnya orbit-orbit periodik, misalnya).

Guna mengetahui perilaku dari suatu sistem dinamik yang berdimensi tiga atau empat umumnya dibentuk sebuah bidang *Poincaré* yang dilalui oleh trayektori-trayektori sistem tersebut. Pengertian bidang Poincaré yang terjadi pada trayektori-trayektori yang membentuk sebuah *Torus* dapat dijelaskan melalui proses geometri berikut (Gambar 7.1).



Gambar 7.1: Sebuah *Torus* (trayektori-trayektori yang membentuk sebuah "*donut*") dengan sebuah bidang. Belahan yang terjadi dikenal dengan sebutan belahan *Poincaré*.

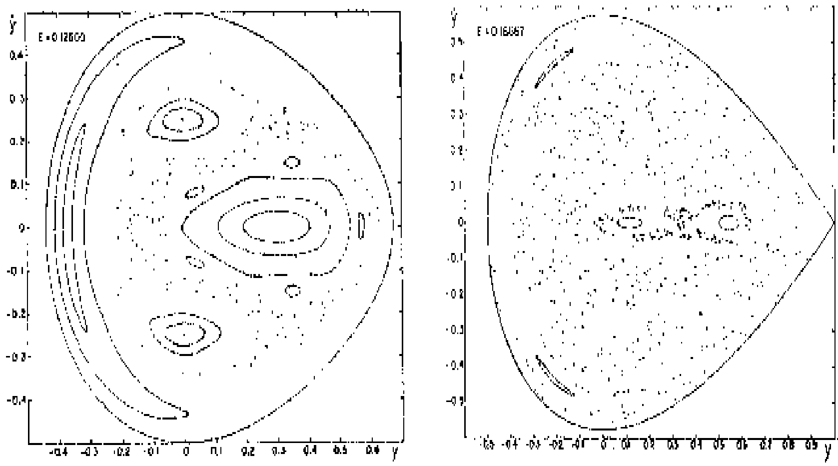
Dengan adanya belahan Poincaré akan memberikan sejumlah informasi penting tentang trayektori misalnya sifat kestabilan orbit-orbit periodik (stabil atau tidak stabil), tipe periodik (periodik atau quasi periodik), dan tipe perpindahan atau pegerakan trayektori (*chaos* atau *regular*). Satu contoh sistem dinamik yang melibatkan belahan Poincaré sebagai alat untuk menganalisis trayektori-trayektori dari sistem tersebut, adalah masalah Hénon-Heiles. Masalah Hénon-Heiles adalah model Hamiltonian yang diberikan dalam bentuk (lihat Zakaria, 2002).

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \left(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3\right) \tag{7.1}$$

Sistem Hamiltonian di atas adalah *non-integrable* dan memiliki dua derajat kebebasan atau berdimensi empat. Adapun sistem persamaan diferensial orde pertama dari persamaan Hamiltonian (7.1) adalah:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= q_1 + 2q_1q_2 \\ \dot{p}_2 &= q_2 + q_1^2 - q_2^2 \\ \dot{q}_1 &= -p_1 \\ \dot{q}_2 &= -p_{2.} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Sistem Hamiltonian Hénon-Heiles sangat bergantung pada nilai energi $E = H$. Bervariasinya nilai energi E akan bervariasi pula bentuk trayektorinya. Dua buah belahan Poincaré berikut ini mewakili dua jenis energi E yang berbeda:

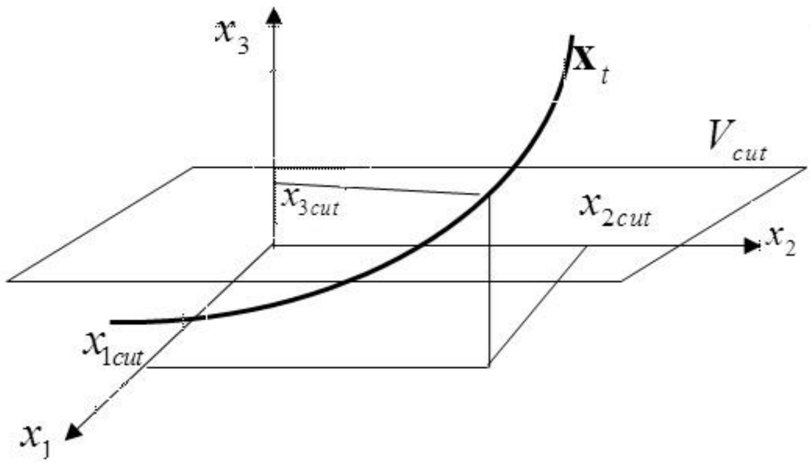


Gambar 7.2: Suatu bentuk belahan Poincaré dari masalah Hénon-Héiles. (*i*). *Hénon-Héiles dengan* E=0.125 dan (*ii*). *Hénon-Héiles dengan* E=0.16667.

Dari semua bentuk belahan Poincaré di atas setiap invarian kurva, gugusan "pulau" invarian ellip, dan "lautan" chaotik mengandung makna yang sangat berarti dimana mereka menggambarkan sifat-sifat trayektori.

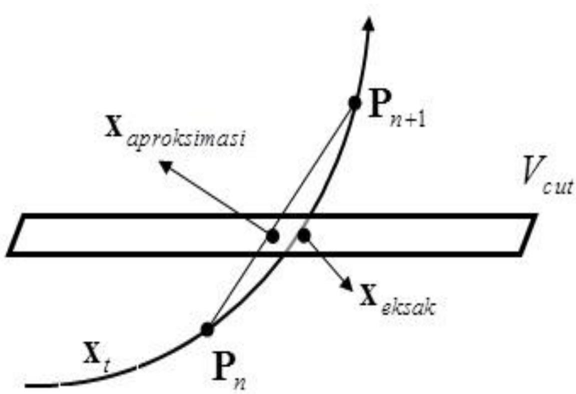
7.1.2 Konsep Interpolasi Linear Pada Bidang

Guna mendapatkan data trayektori dari sebuah sistem dinamik yang berada pada atau cukup dekat pada bidang *Poincaré* yang diinginkan dapat digunakan metode Interpolasi Linear. Metode ini dapat diilustrasikan melalui proses geometri berikut ini. Asumsikan sebuah trayektori $\mathbf{x}(t)$ dalam ruang $\Re^3$ melintasi sebuah bidang datar V_{cut} sebagaimana tampak dalam Gambar 7.3.

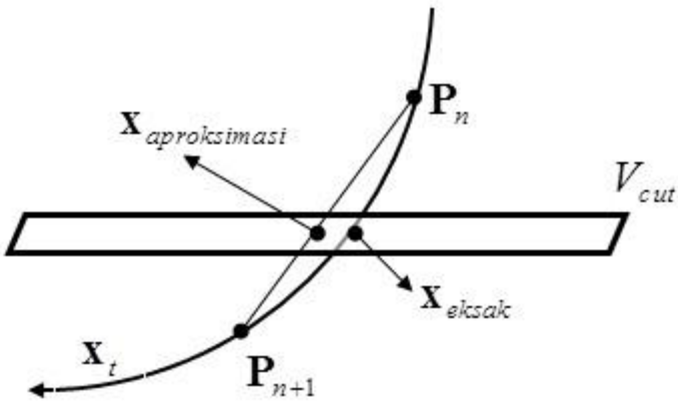


Gambar.7.3. Ilustrasi sebuah trayektori $\mathbf{x}(t)$ dalam ruang $\Re^3$ melintasi sebuah bidang datar V_{cut}

Kemudian asumsikan dua buah titik $\mathbf{p}\left(x_1\left(t_n\right),x_2\left(t_n\right),x_3\left(t_n\right)\right)=\mathbf{p}_n$ dan $\mathbf{p}\left(x_1\left(t_{n+1}\right),x_2\left(t_{n+1}\right),x_3\left(t_{n+1}\right)\right)=\mathbf{p}_{n+1}$ adalah berada pada sisi yang berbeda dari bidang potong $V_{cut}=x_{3cut}$ (perhatikan Gambar 7.4.a atau 7.4.b).



Gambar.7.4a Ilustrasi dua buah titik $\mathbf{p}_n$ dan $\mathbf{p}_{n+1}$ dengan kondisi $\mathbf{p}_{n+1}>V_{cut}$



Gambar.7.4b Ilustrasi dua buah titik $\mathbf{p}_n$ dan $\mathbf{p}_{n+1}$ dengan kondisi $\mathbf{p}_{n+1} < V_{cut}$

Dari kondisi yang ditampilkan oleh Gambar 7.4a atau 7.4b persamaan garis lurus yang terbentuk akan memotong bidang $\mathbf{P}_n$ di titik $\mathbf{x}_{aproksimasi}$ sehingga hubungan berikut ini diperoleh:

$$\frac{x_1^*(t)-x_1(t_n)}{x_1(t_{n+1})-x_1(t_n)}=\frac{x_2^*(t)-x_2(t_n)}{x_2(t_{n+1})-x_2(t_n)}=\frac{x_3^*(t)-x_3(t_n)}{x_3(t_{n+1})-x_3(t_n)} \tag{7.3}$$

dengan $x_1^*(t), x_2^*(t),$ dan $x_3^*(t)$ adalah komponen dari $\mathbf{x}_{aproksimasi}$.

Oleh karena $x_3(t)=x_{3cut}$ maka persamaan (3) dapat ditulis menjadi:

$$x_1^*(t)=x_1(t_n)+\left(x_1(t_{n+1})-x_1(t_n)\right)\left(\frac{x_{3cut}-x_3(t_n)}{x_3(t_{n+1})-x_3(t_n)}\right) \tag{7.4a}$$

$$x_2^*(t)=x_2(t_n)+\left(x_2(t_{n+1})-x_2(t_n)\right)\left(\frac{x_{3cut}-x_3(t_n)}{x_3(t_{n+1})-x_3(t_n)}\right) \tag{7.4b}$$

$$x_3^*(t)=x_{3cut} \tag{7.4c}$$

Persamaan-persamaan (7.4a), (7.4b), dan (7.4c) adalah persamaan linear (garis lurus) terhadap peubah x_{3cut} yang dibentuk untuk menginterpolasi sebuah titik pada bidang potong. Oleh karena itu cara yang diilustrasikan di atas dinamakan ***interpolasi linear***.

7.2 SOLUSI NUMERIK SISTEM SUSPENSI MOBIL

7.2.1. Sistem Persamaan Diferensial Suspensi Mobil

Diketahui bahwa bentuk persamaan diferensial biasa orde dua yang didefinisikan dengan

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{7.5}$$

dengan syarat awal $x(0) = x_0$ dan $x'(0) = v_0$ memiliki sejumlah aplikasi pada berbagai bidang ilmu, ilmu fisika dan ilmu teknik misalnya. Aplikasi yang dimaksud tiga diantaranya adalah model matematika untuk sistem suspensi pada mobil, pendulum teredam atau tidak teredam, dan rangkaian listrik. Menarik untuk dipelajari bahwa bervariasinya nilai-nilai koefisien $a_2, a_1,$ dan a_0 serta fungsi $f(t)$ pada persamaan (7.5) memberikan interprestasi yang berbeda pada setiap aplikasinya.

Salah satu bentuk khusus dari persamaan diferensial (7.5) yang cukup dikenal dan merupakan model matematika pada sistem suspensi mobil diberikan dalam bentuk

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \; ; \; x(0) = x_0 \quad \text{dan} \quad x'(0) = v_0 \tag{7.6}$$

dengan

$m =$ porsi massa mobil yang didukung oleh sistem suspensi

$\delta =$ koefisien peredam shock absorber (proporsional)

$k =$ konstanta kekakuan pegas/per (proporsional)

$f(t) =$ fungsi gaya

$x =$ fungsi waktu untuk perubahan vertikal dari posisi diam

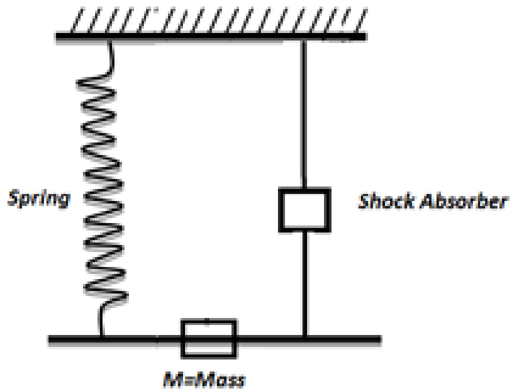
$x' =$ kecepatan perubahan x

$x'' =$ percepatan perubahan x

$v_0 =$ kecepatan awal dari pusat massa

Pemilihan nilai rasio rancangan $\frac{\delta}{m}$ dan $\frac{k}{m}$ dengan tepat diharapkan memberikan keamanan dan kenyamanan pengendara mobil.

Guna menyelesaikan persamaan (7.6) tidaklah sulit dilakukan secara analitik bila fungsi gaya $f(t)=0$ (persamaan diferensial orde dua homogen). Namun sebaliknya, penyelesaian dapat menjadi relatif sulit jika fungsi gaya $f(t) \neq 0$ (persamaan diferensial orde dua non homogen). Jika demikian maka penyelesaian persamaan diferensial (7.6) dapat dilakukan dengan cara numerik. Dengan cara numerik, diperoleh beberapa keuntungan antara lain tersedianya pilihan integrator yang banyak (standar atau khusus) untuk menyelesaikan persamaan (7.6) dan interpretasi model (7.6) melalui tampilan lintasan objek (trayektori) dari sejumlah fungsi gaya $f(t) \neq 0$ juga dapat dilakukan dengan sederhana. Selain itu, komputasi terhadap berbagai nilai rasio rancangan $\frac{\delta}{m}$ dan $\frac{k}{m}$ dapat dilakukan dengan sederhana menggunakan komputer berbasis *scintifict software* komputer yang maju dan modern.



Gambar.7.5 : Ilustrasi sistem suspensi (*spring-shock absorber*) Mobil

Kerja suspensi mobil merupakan sistem kerja *spring* (pegas), *shock absorber*, dan massa. Sistem kerja suspensi mobil dapat dijelaskan oleh diagram berikut (Giordano and Weir, 1994).

Persamaan diferensial dari sistem suspensi mobil yang ideal dengan dukungan pegas dan *shock-absorber* sebagaimana diberikan pada persamaan (7.6). Dalam bentuk sistem persamaan diferensial, persaman tersebut dapat disajikan ke dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{f(t)}{m} - 2\alpha\, y - \omega_o^2\, x \end{aligned} \tag{7.7}$$

dengan syarat awal $x(0)=0 \quad dan \quad y(0)=v_0$. Dalam sistem (7.7) berlaku hubungan $2\alpha = \frac{\delta}{m}$ dan $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$. Model matematika yang dinyatakan dalam persamaan (7.6) dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika a dan k positif ($\delta, k > 0$), stabil jika dan hanya jika $\delta \geq 0$ dan $k > 0$ atau $\delta > 0$ dan $k \geq 0$, dan tidak stabil jika dan hanya jika $\delta < 0$ atau $k < 0$ atau $\delta = k = 0$.

Untuk keadaan jalan yang memiliki efek "papan cucian" (*wash board*), fungsi gaya $f(t)$ diberikan dalam bentuk

$$f(t) = F_0 \, Cos(\omega t) \tag{7.8}$$

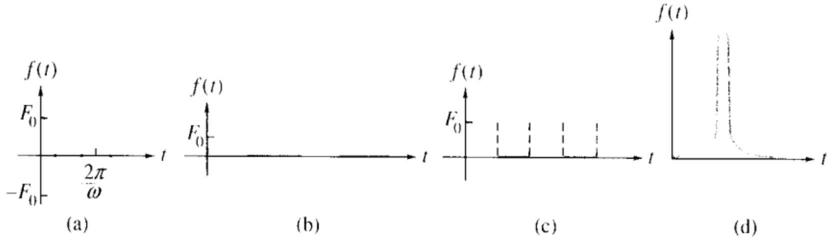
dengan F_0 adalah amplitudo dari fungsi gaya dengan periode $2\pi/\omega$ dan berfrekuensi $\dfrac{\omega}{2\pi}$. Selain itu untuk kondisi jalan dengan efek "berlobang dan tidak rata" (*bumpy road*) insinyur otomotif memberikan fungsi gaya $f(t)$ dalam bentuk

$$f(t) = F_0 \, e^{-a\,t} \, Cos(\omega t) \quad \text{atau} \quad f(t) = F_0 \, e^{-a\,t} \, Sin(\omega t) \tag{7.9}$$

dengan F_0, a, dan ω adalah konstanta-konstanta bernilai positif dan *t* adalah waktu. Dengan melibatkan fungsi gaya (7.9), sistem (7.7) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = y\,; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{F_0 \, Cos(\omega t)}{m} - 2\alpha \, y - \omega_o^2 \, x \qquad 7.10)$$

dengan syarat awal $x(0) = 0 \quad dan \quad y(0) = v_0$.



Gambar.7.6 : Empat tipe jalan yang diwakilkan oleh bentuk fungsi f(t). Tipe *wash board* (a) *wake-up strips* (b dan c) dan *New York Pothole* (d)

Secara umum, kondisi jalan yang dikaitkan dengan fungsi gaya $f(t)$ memiliki beberapa tipe (Gambar 7.6.).

Bentuk grafik fungsi dari fungsi gaya $f(t)$ yang diberikan pada (7.8) diwakili oleh Gambar.7.6 bagian a.

7.2.2 Algoritma untuk Penyelesaian Masalah Sistem Suspensi Mobil dengan Menggunakan Metode Eksplisit Runge-Kutta Orde Empat.

Guna menyelesaikan sistem persamaan diferensial (7.10) dengan fungsi gaya yang mempresentasikan efek *washboard* atau *bumpy road* secara numerik untuk sistem (7.10) dapat dilakukan dengan menggunakan skema metode Runge-Kutta orde empat bentuk eksplisit berikut ini:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7.11}$$

dengan

$$k_1 = \mathbf{f}(t, x_1),\ k_2 = \mathbf{f}(t + \frac{\tau}{2}, x_1 + \frac{k_1}{2}),\quad k_3 = \mathbf{f}(t + \frac{\tau}{2}, x_1 + \frac{k_2}{2}),\quad k_4 = \mathbf{f}(t + \frac{\tau}{2}, x_1 + k_3)$$

$\tau = step\ size$

Algoritma yang digunakan untuk mendapatkan sejumlah data output yang meliputi data hasil perhitungan integrasi secara numerik dan kesesuaian parameter δ dan k yang memberikan informasi tentang waktu pulih sistem *Coil Spring-Shock Absorber* yang "terbaik" (cepat kembali ke posisi equilibrium dan berjarak maksimum terendah) adalah sebagai berikut:

1. Set Fungsi Turunan berkenaan dengan sistem (7.7) dengan pilihan kondisi jalan *bumpy road* dan/atau *wash board* yang diberikan dalam bentuk sebuah fungsi sinus atau kosinus, atau kombinasi salah satu fungsi tersebut dengan fungsi eksponen;
2. Buat pilihan simulasi : misalnya cara simulasi terhadap parameter δ atau cara simulasi terhadap parameter k;
3. Set Data Input;
   - Ketika pilihan pertama dalam butir 2 yang dipilih, setting data input adalah step size, jumlah iterasi, syarat awal $x(0) = x_0$, $y(0) = v_0$, F_0, a, ω, jumlah parameter δ yang akan disimulasi (dalam hal ini diberlakukan rumus $n = (\delta_n - \delta_0)/\Delta\delta$, dengan n = jumlah parameter δ, δ_n =

nilai akhir parameter δ, δ_0 = nilai awal parameter δ, dan $\Delta\delta$ = pertambahan nilai parameter δ), dan nilai parameter k.

- Sebaliknya, ketika pilihan kedua pada butir 2 yang dipilih, maka *setting* data input adalah : *step size*, jumlah iterasi, syarat awal $x(0)=x_0$, $y(0)=v_0$, F_0, a, ω, banyaknya parameter k yang akan disimulasi (dalam hal ini diberlakukan rumus $n=(k_n-k_0)/\Delta k$ dengan n = banyaknya parameter k, k_n = nilai akhir parameter k, k_0 = nilai awal parameter k, dan Δk = pertambahan nilai parameter k), dan nilai parameter δ;

4. Gunakan *integrator* (7.11) untuk menyelesaikan sistem (7.7) dengan perlakuan sebagaimana langkah 2 dan input yang sudah ditetapkan pada langkah 3;
5. Simpan data hasil integrasi numerik ke dalam file data, **c:/Rk4x.dat** misalnya;
6. Simpan data waktu kembali ke posisi equlibrium dengan ketentuan $|x_n - x_0| < tol = 1\,x\,10^{-12}$ ke dalam file data **c:/waktunol.dat**;
7. Ulangi proses langkah ke 5 hingga ke 7 untuk parameter yang lain;
8. Selesai.

7.2.3 Solusi Numerik Permasalahan Sistem *Coil Spring-Shock Absorber*

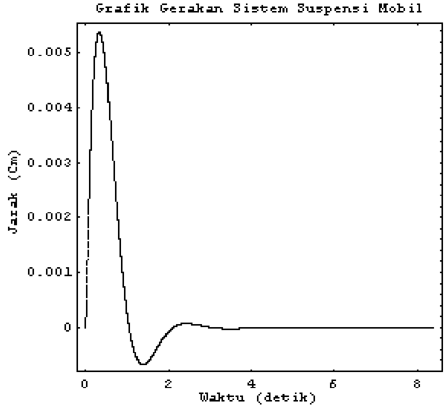
Eksperimen numerik dilakukan pada penyelesaian persoalan sistem *spring-shock absorber* untuk sebuah mobil *import* yang sistem suspensinya didisain menggunakan *coil spring-shock absorber*. ♣Misalkan suspensi mobil import menggunakan sistem *coil spring-shock absorber* untuk mendukung berat 350 kg. Kemudian konstanta

♣ Disalin dari buku *Mathematical Modelling Approach* by Giardano and Weir, 1994 hal. 281

kekakuan pegasnya adalah 140000 kg/cm. Sedangkan *shock absorber* yang digunakan adalah *dumping force* yang sama dengan 3500 kali kecepatan sesaat sistem secara vertikal (satuan dalam cm/detik). Misalkan sistem digetarkan oleh gaya $f(t) = 1750\, e^{-2t} Sin(3t)$ (satuan dalam $kg - cm / detik^2$). Berkenaan dengan persamaan (7.10), sistem mobil import yang dimaksud dalam contoh ini memiliki spesifikasi sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} m = 350/9.8; \quad \delta = 3500; \\ k = 140000; \quad v_0 = 0; \quad f(t) = 1750\, e^{-2t} Sin(3t) \end{array}\right\} \tag{7.12}$$

Eksperimen numerik dapat dilakukan dengan menggunakan paket program (bahasa Turbo Pascal 6.0 misalnya) yang didasari kepada algoritma yang telah dikemukanan sebelumnya. Hasil running program diperoleh berupa data yang dapat dilihat dalam file data bernama **Rk4x.dat** yang ada di **drive C** untuk data hasil integrasi numerik dan file data bernama **waktunol.dat** pada drive yang sama untuk melihat lamanya waktu kembali ke posisi equilibrium dan jarak maksimum dan waktu yang bersesuain yang dicapai dari posisi equilibrium. Ketika langkah-langkah atau proses di atas dilakukan secara benar akan diperoleh grafik fungsi sebagaimana ditampilkan dalam Gambar 7.7 berikut:



Gambar 7.7. Grafik gerakan sistem suspensi dengan spesifikasi sistem suspensi sebagaimana ditunjukan persamaan (7.12).

DAFTAR PUSTAKA

Chapra, S.C. & Canale, R.P. 2015. Numerical Methods for Engineers, 7th Ed. McGraw-Hill, New York.

Conte, S.D. & De Boor C. 1993. Elemetary Numerical Analysis : An algorithmic Approach, 3th ed. (edisi Indonesia oleh Mursaid), Penerbit Erlangga, Jakarta.

Djojodihardjo H. 1983. Metoda Numerik. Erlangga, Jakarta.

Gerald, C.F. & Wheatley, P.O. 1994. Applied Numerical Analysis, 5th ed. Addison Wesley, USA.

Hoffman, J.D. 2001, Numerical Methods for Engineers and Scientists, CRC Press, 2nd Ed. New York.

Mazumder, S. 2016, Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume Methods, Academic Press. USA.

McLaren, D. 1997. Spreadssheets and Numerical Analysis. Chartwell-Bratt, Sweden.

Mmbaga, J.P., Hayes, R.E., Nandakumar K. & Flynn, M.R. 2016. Computational Methods for Engineers: Modeling, Algorithms, and Analysis. ALPHA Education Press. Edmonton, Canada.

Moin, P. 2010. Fundamentals of Engineering Numerical Analysis, 2nd Ed. Cambridge University Press, New York.

School Mathematics. 1999. Second Year Mathematics: Numerical Mathematics. La Trobe University, Australia.

Saidi, S., Muharramah, U., Zakaria, L., Mariska, Y., & Ruby, T. 2020. Modified Lorenz Curve and Its Computation. Desimal: Jurnal Matematika. Vol 3 No 2. pp 99-108

Triatmodjo, B. 2002. Metode Numerik. Beta Offset, Yogyakarta.

Wahyudi, B.S. & Agus, P. 1997, Pemodelan Matematis dan Penyelesaian Numeris dalam Teknik Kimia dengan Pemrograman Bahasa BASIC dan FORTRAN. Andi, Yogyakarta.

Wahyudin. 1987. Metode Analisis Numerik. Tarsito, Bandung.

Zakaria, L. 2002. Applying Linear Interpolating To Show Poincaré Section of The Hénon-Heiles, Mathematics and Its Learning Journal. Special Edition, Malang State University, 1003-1008.

Zakaria, L. 2020. Mahir Pemrograman Mathematica® (Tingkat Dasar). Penerbit Pustaka Media, Surabaya.

INDEX

G

I

J

K

L

M

N

O

P

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Dabo Singkep, Kepulauan Riau pada tanggal 13 Pebruari 1969. Penulis mengikuti pendidikan sekolah dasar (SD PN-SDN 004) hingga sekolah menengah (SMPN 1 dan SMAN) di Dabo Singkep- Kepulauan Riau. Pada tahun 1987, penulis melanjutkan pendidikan tingkat S1 di Universitas Riau Pekanbaru-Riau. Di tingkat S1, penulis diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tahun 1993. Kemudian pada tahun 1994, penulis mengikuti seleksi sebagai CPNS sebagai tenaga pengajar di Universitas Lampung dan diterima menjadi dosen di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung pada bulan April 1994. Pada pertengahan tahun 1998 penulis menerima beasiswa dari program DUE Project Unila-Dikti untuk melanjutkan studi pada program Magister di School Mathematics, Science and Technology Faculty, La Trobe University, Melbourne-Australia. Penulis memperoleh gelar Master of Science (M.Sc.) pada bulan Mei 2001. Penulis sempat bertugas sebagai sekretaris Jurusan Matematika FMIPA Unila periode (2001-2008) sebelum melanjutkan pendidikan di tingkat S3 pada tahun 2011. Penulis mengikuti pendidikan Doktoral pada Kelompok Keahlian Geometri dan Analisis FMIPA-Sekolah Pascasarjana ITB dan meraih gelar Doktor (Dr.) pada Tahun 2017.

Penulis dilahirkan di Kota Bandar Lampung, pada tanggal 01 Juni 1995. Penulis mengikuti pendidikan sekolah dasar (SDN 1 Labuhan Ratu) hingga sekolah menengah (SMP Muhammadiyah 3 dan MAN 1 Model) di Bandar Lampung. Pada tahun 2013, penulis melanjutkan pendidikan tingkat S1 di Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung (UIN RIL)-Lampung sebagai mahasiswa di Jurusan Perbankan Syariah, FEBI Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung dan memperoleh gelar Sarjana Ekonomi (S.E) pada tahun 2017. Kemudian, pada bulan Agustus 2018, penulis melanjutkan studi program Magister Manajemen, Universitas Lampung. Penulis memperoleh gelar Magister Manajemen (M.M) pada bulan Mei 2020. Penulis sempat bertugas sebagai tenaga pengajar honorer di Fakultas Ekonomi dan Bisnis Islam (FEBI), UIN Raden Intan Lampung periode (2020-2021). Kemudian, penulis mengikuti seleksi CPNS sebagai tenaga pengajar di Politeknik Negeri Sriwijaya dan diterima menjadi dosen di Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Sriwijaya pada bulan Maret 2022.

PENGANTAR METODE NUMERIK

(SOLUSI MASALAH DENGAN MATHEMATICA®)

Buku yang hadir dihadapan Anda ini merupakan kumpulan materi perkuliahan yang dihimpun dari beberapa referensi terkait dengan pembelajaran Metode Numerik yang berafiliasi pada pembelajaran STEM (Science, Technology, Engineeing, and Mathematics). Buku ini menyajikan materi lengkap tentang Metode Numerik yang dapat digunakan dalam pembelajaran Pengantar Analisis Numerik atau Metode Numerik yang diberi bobot 3 SKS dan dapat ditempuh pada semester III atau setelahnya. Buku ini dilengkapi dengan latihan/praktik menyelesaikan soal untuk menambah pemahaman konsep dan ketrampilan menyelesaikan soal dengan menggunakan komputer. Hal ini dimaksudkan agar lebih efesien dalam waktu komputasi untuk penyelesaian soal-soal latihan. Bahasa pemprograman, misalnya PASCAL atau C atau Maple atau Matlab atau Mathematica dapat digunakan untuk tujuan menghemat waktu komputasi dan akurasi tinggi solusi numerik yang diharapkan. Setelah menggunakan buku ini, pembelajar Metode Numerik atau Pengantar Analisis Numerik akan dapat menguatkan kemampuannya dalam memahami beberapa konsep matematika melalui konsep numerik (komputasi matematika) serta mampu bereksperimen dan mengimplementasikan beberapa metode numerik dengan menggunakan komputer.

Buku ini terdiri dari 7 (tujuh) bagian yang setiap bagiannya dilengkapi dengan latihan. Bagian pertama (PENDAHULUAN) membahas tentang Pengertian Metode Numerik, Bilangan dan Angka Signifikan, Konsep Dasar Kalkulus, Galat dan Toleransi dalam Metode Numerik. Bagian kedua (METODE NUMERIK UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINEAR) membahas tentang konsep dan penggunaan metode-metode iteratif untuk menyelesaikan persamaan aljabar dan/atau transenden menggunakan metode Biseksi, metode Iterasi, metode Newton-Raphson, dan metode Regula Falsi. Bagian ketiga (INTERPOLASI FUNGSI POLINOMIAL) membahas tentang konsep interpolasi, galat hasil interpolasi, dan selisih/beda. Bagian keempat (DIFERENSIASI DAN INTEGRASI NUMERIK) membahas tentang penggunaan formula-formula Newton untuk Deferensiasi Numerik, Nilai Maksimum dan Minimum dari suatu Daftar Nilai Fungsi, Aturan Trapezoida, Metode Simpson, dan Integrasi Romberg. Bagian kelima (PENGEPASAN KURVA/CURVE FITTING) membahas tentang Pengertian Pengepasan Kurva dan Regresi, Prinsip-Prinsip Statistik (rata-rata & simpangan baku), Metode Kuadrat Kerkecil, Metode Kuadrat Kerkecil untuk Kurva Linear, Linearisasi Kurva Tidak Linear, Regresi Polinomial, dan Regresi Linear dengan Banyak Variabel. Bagian keenam (SOLUSI NUMERIK MASALAH NILAI AWAL) membahas tentang Pengertian MNA dan Metode Langkah Tunggal, Aproksimasi Deret Taylor sebagai Fungsi Solusi suatu MNA, Aprioksimasi fungsi solusi MNA dengan menggunakan Metode Picard; Metode Euler; Metode Runge-Kutta Orde Dua dan Empat, Metode Implisit Aturan Nilai Tengah, dan Metode Implisit Gauss Legendre Orde Empat. Bagian ketujuh (APLIKASI METODE NUMERIK) membahas tentang Pengertian Belahan Poincaré , Konsep Interpolasi Linear pada Bidang, Sistem Persamaan Diferensial dan Sistem Suspensi Mobil, Agoritma untuk Penyelesaian Masalah Sistem Suspensi Mobil dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat Bentuk Eksplisit, dan Eksperimen Numerik.

AURA PUBLISHER

Aura-Publishing

www.aura-publishing.com

@redaksiaura

ISBN 978-623-211-337-4

9 786232 113374