ISBN: 978-602-71798-1-3

SIMULASI INTENSITAS SENSOR DALAM PENDUGAAN PARAMATER DISTRIBUSI WEIBULL TERSENSOR KIRI

Widiarti [1], Ayu Maidiyanti [2], Warsono [3]
[1]FMIPA Universitas Lampung widiarti08@gmail.com
[2]Alumni FMIPA Universitas Lampung
[3]FMIPA Universitas Lampung

Abstract

The Weibull distribution is an important distribution in survival analysis. Analysis of survival aims to suspect the probability of survival, recurrence, death, and other events for a certain time period. The purpose of this research is to estimate the parameters of the Weibull distribution of left censored and to perform simulations with different censored intensities. The method used in this study is the maximum likelihood method, and the software used is R i386 3.2.2. The simulation results showed that the greater the intensity of the sensor then the estimates of β and λ also increase.

***Keywords**: Weibull distribution, left censoring, maximum likelihood*

1. PENDAHULUAN

Analisis reliabilitas digunakan untuk menganalisis dan menguji masa hidup suatu sistem. Ada dua model dalam sistem reliabilitas, yaitu model sistem *non repairable* dan model sistem *repairable.* Pada sistem *repairable* (pembaharuan sistem), banyaknya kegagalan yang terjadi tidak menentu saat penambahan waktu sehingga menimbulkan tingkat kegagalan menjadi tidak konstan.

Sistem *repairable* berkaitan erat dengan waktu kegagalan dan waktu penyensoran. Jika waktu terjadinya kegagalan semakin lama, maka hal ini dikatakan reliabilitas sistem *repairable* meningkat. Sedangkan jika waktu antara kegagalan satu dengan lainnya semakin dekat, dinyatakan reliabilitas sistem *repairable* menurun. Jika ketepatan waktu kegagalan yang terjadi tidak diketahui secara pasti, maka hal ini disebut sebagai waktu penyensoran. Pada sistem *repairable*, waktu penyensoran terbagi menjadi beberapa kategori, yaitu sensor kiri (*left censored*), sensor kanan (*right censored*), dan sensor interval (*interval censored*).

Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan untuk menguji dan menganalisis karakteristik reliabilitas pada sistem *repairable*. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menduga parameter pada distribusi ini adalah metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood estimation).*

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi peubah acak kontinu yang memiliki daerah fungsi kepekatan peluang positif. Distribusi ini sering digunakan dalam pemodelan analisis kelangsungan hidup. Distribusi Weibull memiliki dua parameter, yaitu β yang merupakan parameter bentuk dan λ sebagai parameter skala yang menggambarkan sebaran data pada distribusi Weibull.

Menurut Kungdu dan Manglick (2004), fungsi kepekatan peluang dari suatu peubah acak Weibull (β, λ) adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp[-(\frac{x}{\lambda})^{\beta}]\,; x > 0 \\ 0 \qquad\qquad ;\ x\ lainnya \end{cases}$$

dimana

X = peubah acak yang didefinisikan sebagai waktu kegagalan (*failure time)*

β = parameter bentuk yang menunjukkan laju kegagalan data distribusi Weibull ($\beta > 0$)

λ = parameter skala ($\lambda > 0$)

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Weibull adalah:

$F(x) = 1 - \exp[-(\frac{x}{\lambda})^{\beta}]$

2.2 Jenis Penyensoran

Suatu data dikatakan tersensor jika informasi yang ingin diketahui tidak terjadi pada periode waktu yang telah ditentukan. Menurut Klein dan Moeschberger (1997) terdapat tiga jenis penyensoran yaitu : sensor kanan *(right censoring)*, sensor kiri *(left censoring)* dan sensor selang *(interval censoring). Right censoring*, terjadi jika individu yang diamati masih tetap hidup pada saat waktu yang telah ditentukan. *Left censoring*, terjadi jika semua informasi yang ingin diketahui dari seorang individu telah dapat diperoleh pada awal studi. *Interval censoring*, jika informasi yang dibutuhkan telah dapat diketahui pada kejadian peristiwa didalam selang pengamatan.

2.3 Metode Kemungkinan Maksimum Pada Distribusi Weibull dengan *Complete Data*

Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$ dengan θ adalah parameter yang tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n. Fungsi kemungkinan dari sampel acak tersebut adalah:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$$

Dalam hal ini, fungsi kemungkinan adalah fungsi dari parameter (θ) yang tidak diketahui (Herrhyanto, 2003).

Parameter yang akan diduga pada distribusi Weibull adalah β dan λ. Metode kemungkinan maksimum diawali dengan membentuk fungsi kemungkinan dari distribusi Weibull yaitu:

$$L(\beta, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \beta, \lambda)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\lambda^{\beta}} x_i^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{\beta}}$$

$$= \frac{\beta^n}{\lambda^{n\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} e^{-\frac{1}{\lambda^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}}$$

Untuk memaksimumkan fungsi likelihood, *ln* kan fungsi tersebut sehingga akan terbentuk *Weibull Likelihood* dari distribusi Weibull sebagai berikut:

$$\ln L = n(ln\beta - \beta \ln \lambda) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} lnx_i - \frac{1}{\lambda^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}$$

Penduga kemungkinan maksimum dari distribusi Weibull untuk *complete data* diperoleh dengan cara mencari turunan pertama dari *ln* fungsi kemungkinan masing-masing terhadap β dan λ kemudian disamakan dengan nol yaitu:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[n(ln\beta - \beta \ln \lambda) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} lnx_i - \frac{1}{\lambda^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\right] = 0$$

$$\frac{n}{\hat{\beta}} - n \ln \hat{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}} \ln\left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}}\right) = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}} \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}{n}$$

Penduga β pada persamaan di atas memiliki bentuk yang kompleks dan diselesaikan melalui pendekatan metode Newton Raphson

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n - \frac{f(\hat{\beta}_n)}{f'(\hat{\beta}_n)}$$

Selanjutnya penduga bagi parameter λ adalah

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[n(ln\beta - \beta \ln \lambda) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} lnx_i - \frac{1}{\lambda^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n\beta}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda^{\beta+1}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta} = 0$$

sehingga

$$\hat{\lambda} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\beta}}}{n}\right]^{\frac{1}{\hat{\beta}}}$$

2.4 Metode Kemungkinan Maksimum Pada Distribusi Weibull Tersensor Kiri

Misalkan $X_{(r+1)}, X_{(r+2)}, \dots, X_{(n)}$ adalah n – r statistik order terakhir dari sebuah sampel acak berukuran n yang berdistribusi Weibull (β, λ). Dengan demikian fungsi kepekatan peluang bersama dari $X_{(r+1)}, X_{(r+2)}, \dots, X_{(n)}$ adalah:

$$f\left(x_{(r+1)},\dots,x_{(n)}\right)=\frac{n!}{r!}\left[F(x_{(r+1)}\right]^{r}f(x_{r+1})\dots f(x_n)$$

$$=\frac{n!}{r!}\left[1-\exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right]^{r}$$

$$\left(\frac{\beta}{\lambda^{\beta}}\right)^{n-r}\prod_{i=r+1}^{n}x_{(i)}{}^{\beta-1}e^{-\left(\frac{\sum_{i=r+1}^{n}x_{(i)}}{\lambda}\right)^{\beta}}$$

Fungsi log likelihood untuk distribusi Weibull tersensor kiri dinotasikan dengan $L\left(x_{(r+1)},\dots,x_{(n)};\beta,\lambda\right)$ atau dapat ditulis juga sebagai $L(\beta,\lambda)$ yaitu:

$$L(\beta,\lambda)=\ln n!-\ln r!+r\ln\left[1-\exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right]$$

$$+(n-r)\ln\beta-\beta(n-r)\ln\lambda+$$

$$(\beta-1)\ln\prod_{i=r+1}^{n}x_{(i)}-\frac{1}{\lambda^{\beta}}\sum_{i=r+1}^{n}x_{(i)}{}^{\beta}$$

$$L(\beta,\lambda)=\ln n!-\ln r!+r\ln\left[1-\exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right]$$

$$+(n-r)\ln\beta-\beta(n-r)\ln\lambda+$$

$$(\beta-1)\sum_{i=r+1}^{n}\ln x_{(i)}-\frac{1}{\lambda^{\beta}}\sum_{i=r+1}^{n}x_{(i)}{}^{\beta}$$

Penduga parameter β dari distribusi Weibull tersensor kiri diperoleh dengan memaksimumkan fungsi log likelihood di atas yaitu dengan mencari turunan pertama fungsi tersebut terhadap β dan disamakan dengan nol.

$$\frac{\partial\ln L(\beta,\lambda)}{\partial\beta}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\begin{matrix}\ln n!-\ln r!+r\ln\left[1-\exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right]\\+(n-r)\ln\beta-\beta(n-r)\ln\lambda+\\(\beta-1)\sum_{i=r+1}^{n}\ln x_{(i)}-\frac{1}{\lambda^{\beta}}\sum_{i=r+1}^{n}x_{(i)}{}^{\beta}\end{matrix}\right\}=0$$

Sehingga diperoleh penduga parameter bagi β adalah:

$$\hat{\beta}=(n-r)/\left[(n-r)\ln\hat{\lambda}-r\left(\frac{\left(exp-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right)\left(\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\ln\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)\right)}{1-exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right)}\right)-\sum_{i=r+1}^{n}\ln x_{(i)}+\sum_{i=r+1}^{n}\left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\ln\left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}}\right)\right]$$

Selanjutnya, dengan menurunkan fungsi log likelihood terhadap λ dan disamakan dengan nol, maka diperoleh penduga bagi λ adalah :

$$\frac{\partial\ln L(\beta,\lambda)}{\partial\lambda}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\begin{matrix}\ln n!-\ln r!+r\ln\left[1-\exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\lambda}\right)^{\beta}\right)\right]\\+(n-r)\ln\beta-\beta(n-r)\ln\lambda+\\(\beta-1)\sum_{i=r+1}^{n}\ln x_{(i)}-\frac{1}{\lambda^{\beta}}\sum_{i=r+1}^{n}x_{(i)}{}^{\beta}\end{matrix}\right\}=0$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\left(-\hat{\beta}(n-r)\right)}{r\left(\frac{\left(exp-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right)\left(\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}-1}\beta\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}^{2}}\right)\right)}{1-exp\left(-\left(\frac{x_{(r+1)}}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}}\right)}\right)-\sum_{i=r+1}^{n}\left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}}\right)^{\hat{\beta}-1}\beta\left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}^{2}}\right)}$$

3. METODE PENELITIAN

Metode pendugaan parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kemungkinan maksimum. Metode ini digunakan untuk menduga parameter distribusi Weibull baik untuk *complete data* maupun data tersensor kiri. Pembangkitan data dalam simulasi didasarkan pada distribusi Weibull dengan parameter β dan λ. Simulasi dirancang untuk mengetahui bias penduga parameter pada beberapa ukuran sampel dan intensitas sensor. Proses pembangkitan data dan iterasi numerik dilakukan dengan bantuan *software R i386 3.2.2.*

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam kajian ini telah dikembangkan metode kemungkinan maksimum untuk menduga parameter distribusi Weibull baik untuk *complete data* maupun data tersensor kiri. Selanjutnya bagian ini akan membahas hasil simulasi. Simulasi dirancang dengan membangkitkan data berdistribusi Weibull pada beberapa nilai parameter, ukuran sampel, dan beberapa intensitas sensor. Secara lengkap hasil simulasi tersaji pada Tabel 4.1, 4.2, dan 4.3.

Tabel 4.1 Nilai Dugaan dan Bias Penduga Parameter Distribusi Weibull untuk Ukuran Sampel 50

n = 50						
% Sensor	β	λ	$E(\hat{\beta})$	$E(\hat{\lambda})$	Bias Penduga	
					$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
0%	1	1	1.028	1.037	0.028	0.037
1%			1.034	1.007	0.034	0.007
5%			1.036	1.008	0.036	0.008
10%			1.038	1.008	0.038	0.008
0%	1	2	1.028	2.046	0.028	0.046
1%			1.034	2.014	0.034	0.014
5%			1.036	2.016	0.036	0.016
10%			1.038	2.017	0.038	0.017
0%	2	1	2.058	1.028	0.058	0.028
1%			2.073	1.011	0.073	0.011
5%			2.076	1.012	0.076	0.012
10%			2.080	1.014	0.080	0.014
0%	2	0.5	2.056	0.526	0.056	0.026
1%			2.073	0.509	0.073	0.009
5%			2.080	0.509	0.080	0.009
10%			2.081	0.510	0.081	0.010

Tabel 4.1, 4.2, dan 4.3 menyajikan hasil simulasi pendugaan parameter distribusi Weibull dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum pada beberapa intensitas sensor. Intensitas sensor 0% berarti data yang digunakan merupakan *complete data*. Khusus untuk data ini, metode pendugaan parameter yang digunakan adalah metode kemungkinan maksimum untuk *complete data*. Sedangkan untuk intensitas sensor 1%, 5%, dan 10% digunakan metode kemungkinan maksimum untuk data tersensor kiri.

Tabel 4.2 Nilai Dugaan dan Bias Penduga Parameter Distribusi Weibull untuk Ukuran Sampel 100

n = 100						
% Sensor	β	λ	$E(\hat{\beta})$	$E(\hat{\lambda})$	Bias Penduga	
					$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
0%	1	1	1.006	1.054	0.006	0.054
1%			1.004	1.012	0.004	0.012
5%			1.005	1.012	0.005	0.012
10%			1.006	1.013	0.006	0.013
0%	1	2	1.006	2.052	0.006	0.052
1%			1.004	2.024	0.004	0.024
5%			1.005	2.025	0.005	0.025
10%			1.006	2.027	0.006	0.027
0%	2	1	2.025	1.054	0.025	0.054
1%			2.032	1.008	0.032	0.008
5%			2.037	1.007	0.037	0.007
10%			2.042	1.007	0.042	0.007
0%	2	0.5	2.019	0.555	0.019	0.055
1%			2.018	0.504	0.018	0.004
5%			2.022	0.504	0.022	0.004
10%			2.026	0.505	0.026	0.005

Suatu penduga dikatakan penduga tak bias bagi parameter jika nilai harapan dari penduga tersebut sama dengan nilai parameter. Sebaliknya, suatu penduga dikatakan berbias jika nilai harapan dari penduga tersebut tidak sama dengan parameternya. Bias dari penduga β dapat dihitung dengan cara :

Bias $(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta$

Berdasarkan hasil pada Tabel 4.1, 4.2, dan 4.3 terlihat bahwa untuk data yang tidak tersensor maupun yang tersensor kiri, ukuran sampel berpengaruh terhadap nilai bias dari suatu penduga. Semakin besar ukuran sampel yang digunakan, maka nilai bias yang dihasilkan semakin kecil. Hal ini sejalan dengan hasil pendugaan berdasarkan intensitas sensor. Semakin besar intensitas sensor yang diterapkan, maka nilai dugaan bagi parameter β dan λ juga semakin besar. Hal ini menyebabkan nilai biasnya juga semakin besar.

Tabel 4.3 Nilai Dugaan dan Bias Penduga Parameter Distribusi Weibull untuk Ukuran Sampel 200

n = 200						
% Sensor	β	λ	$E(\hat{\beta})$	$E(\hat{\lambda})$	Bias Penduga	
					$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$
0%	1	1	1.005	1.037	0.005	0.037
1%			1.005	1.006	0.005	0.006
5%			1.006	1.006	0.006	0.006
10%			1.006	1.007	0.006	0.007
0%	1	2	1.005	2.106	0.005	0.106
1%			1.005	2.012	0.005	0.012
5%			1.006	2.013	0.006	0.013
10%			1.006	2.014	0.006	0.014
0%	2	1	2.005	1.109	0.005	0.109
1%			2.002	1.005	0.002	0.005
5%			2.002	1.006	0.002	0.006
10%			2.005	1.006	0.005	0.006
0%	2	0.5	2.015	0.610	0.015	0.110
1%			2.019	0.501	0.019	0.001
5%			2.020	0.501	0.020	0.001
10%			2.021	0.502	0.021	0.002

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi dan pendugaan parameter dengan ,menggunakan metode kemungkinan maksimum maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Ukuran sampel menentukan kualitas dari suatu penduga. Semakin besar ukuran sampel, maka penduga yang dihasilkan semakin mendekati tak bias.
2. Untuk data tersensor kiri, semakin besar intensitas sensor maka nilai dugaan bagi parameternya juga semakin besar dan nilai biasnya juga meningkat.

6. DAFTAR PUSTAKA

Herrhyanto, Nar. 2003. *Statistika Matematika Lanjutan*. Pustaka Setia. Bandung.

Klein, J. P. and Moeschberger, M. L. 1997. *Survival Analysis : Techniques for Censored and Truncated Data*. Springer-Verlag, New York.

Kungdu, D. and Manglick, A. 2004. *Discriminating Between the Weibull and Log-normal Distribution.* Journal.