ISBN : 978-979-16353-1-8

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL
MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Peningkatan Kualitas Penelitian dan Pembelajaran Matematika untuk Mencapai *World Class University*"

Yogyakarta, 28 November 2008

Penyelenggara :
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
Kerjasama dengan
Himpunan Matematika Indonesia (Indo-MS)
wilayah Jateng dan DIY

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2008

PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

28 November 2008 FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Artikel-artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan dalam
Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
pada tanggal 28 November 2008
di Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

Tim Penyunting Artikel Seminar :

1. **Prof. Dr. Rusgianto HS**
2. **Dr. Hartono**
3. **Dr. Djailani**
4. **Sahid, M.Sc.**

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
2008

KATA PENGANTAR

Puji Syukur ke Hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala Karunia dan RahmatNya sehingga prosiding ini dapat diselesaikan. Prosiding ini merupakan kumpulan makalah dari peneliti, dosen dan guru yang berkecimpung di bidang Matematika dan Pendidikan Matematika yang berasal dari berbagai daerah di Indonesia. Makalah yang dipresentasikan meliputi 1 makalah utama dan 65 makalah pendamping yang terdiri dari 4 makalah bidang Aljabar, 1 makalah bidang Analisis, 25 makalah bidang Statistika, 9 makalah bidang Terapan dan Komputer, dan 28 makalah bidang Pendidikan Matematika

Pada kesempatan ini panitia mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung penyelenggaraan seminar ini. Kepada seluruh peserta seminar diucapkan terimakasih atas partisipasinya dan selamat berseminar semoga bermanfaat.

DAFTAR ISI

Cover Prosiding **i**

Kata Pengantar **iii**

Daftar Isi **iv**

1. Makalah Bidang Matematika

Kode	Judul	Hal
M - 1.	Generalized Non-Homogeneous Morrey Spaces And Olsen Inequality *(I. Sihwaningrum, H. Gunawan, Y. Soeharyadi, W. S. Budhi)*	1 – 1
M - 2.	Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval *(M. Andy Rudhito, Sri Wahyuni, Ari Suparwanto, F. Susilo)*	1 – 8
M - 3.	Keterbatasan Operator Integral Fraksional Di Ruang Lebesgue Tak Homogen *(Herry Pribawanto Suryawan)*	1 – 19
M - 4.	Solusi Periodik Tunggal Suatu Persamaan Rayleigh *(Sugimin)*	1 – 28
M - 5.	Ruang Barisan Selisih $l_p(\Delta), 1 < p < \infty$ Dan Beberapa Permasalahan Karakterisasi Produk Tensor $l_p(\Delta) \otimes l_q(\Delta)$ *(Muslim Ansori)*	1 – 33
M - 6.	Menampilkan Penaksir Parameter Pada Model Linear *(Mulyana)*	1 – 40
M - 7.	Simulasi Radius Jarak Pengaruhnya Terhadap Kebaikan Model Regresi Logistik Spasial (*Utami Dyah Syafitri, Agus M Sholeh, Poppy Suprapti)*	1 – 45
M - 8.	Estimasi Bayesian untuk Penentuan Besarnya Pengaruh Genetik Terhadap Sifat Fenotip Dan Studi Simulasinya *(Adi Setiawan)*	1 – 50
M - 9.	Penduga Maksimum Likelihood Untuk Parameter Dispersi Model Poisson-Gamma Dalam Konteks Pendugaan Area Kecil *(Alfian F. Hadi, Nusyirwan, Khairil Anwar Notodiputro)*	1 – 63
M - 10.	Penentuan Sampling Minimal Dalam Eksperimen *Life-Testing* menggunakan *Order Statistics (Budhi Handoko)*	1 – 78
M - 11.	Analisis Conjoint Sebagai Alat Menentukan Model Preferensi Nasabah Menabung Di Bank *(Budiono, Nani Hidayati)*	1 – 90
M - 12.	Evaluasi Tingkat Validitas Metode Penggabungan Respon ((Indeks Penampilan Tanaman, IPT) *(Gusti N Adhi Wibawa, I Made Sumertajaya, Ahmad Ansori Mattjik)*	1 – 103

M - 13.	Pemodelan Persamaan Struktural Dengan Partial Least Square (*I Gede Nyoman Mindra Jaya,I Made Sumertajaya)*	1 – 118
M - 14.	Penggerombolan Model Parameter Regresi dengan *Error-Based Clustering (I Made Sumertajaya, Gusti Adhi Wibawa, I Gede Nyoman Mindra Jaya)*	1 – 133
M - 15.	Koreksi Metode Connected Ammi dalam Pendugaan Data Tidak Lengkap *(Made Sumertajaya, Ahmad Ansori Mattjik, I Gede Nyoman Mindra Jaya)*	1 – 145
M - 16.	Pendekatan Metode Pemulusan Kernel Pada Pendugaan Area Kecil (*Small Area Estimation*) *(Indahwati, Kusman Sadik, Ratih Nurmasari)*	1 – 162
M - 17.	Penerapan Metode Pemulusan Kernel Pada Pendugaan Area Kecil (Studi Kasus Pendugaan Pengeluaran Per Kapita Di Kota Bogor Tahun 2005) *(Indahwati, Utami Dyah Syafitri, Renita Sukma Mayasari)*	1 – 173
M - 18.	Zero Inflated Negative Binomial Models In Small Area Estimation *(Irene Muflikh Nadhiroh, Khairil Anwar Notodiputro, Indahwati)*	1 – 183
M - 19.	Aplikasi *Multidimensional Scaling* Untuk Peningkatan Pelayanan Proses Belajar Mengajar (PBM). *(Irlandia Ginanjar)*	1 – 194
M - 20.	Peranan Formulasi Inversi Pada Fungsi Karakteristik Suatu Variabel Acak *(John Maspupu)*	1 – 202
M - 21.	Pendugaan Berbasis Model Untuk Kasus Biner Pada *Small Area Estimation (Kismiantini)*	1 – 209
M - 22.	Pendugaan Komponen Utama Pada Pengaruh Acak Model Linear Campuran Terampat *(Mohammad Masjkur)*	1 – 216
M - 23.	*Distribusi Poisson Tergeneralisasi Tak Terbatas Dan Beberapa Sifat-Sifatnya* (Suatu Pengembangan Teori Statistika Matematika) *(Mutijah)*	1 – 237
M - 24.	Regresi Rasio Prevalensi Dengan Model Log-Binomial: Isu Ketakkonvergenan *(Netti Herawati, Alfian Futuhul Hadi, Nusyirwan, Khoirin Nisa)*	1 – 249
M - 25.	Pengujian Autokorelasi Terhadap Sisaan Model Spatial Logistik *(Utami Dyah Syafitri, Bagus Sartono, Salamatuttanzil)*	1 – 264
M - 26.	Penerapan Analisis Survival Untuk Menaksir Waktu Bertahan Hidup Bagi Penderita Penyakit Jantung *(Yani Hendrajaya,Adi Setiawan dan Hanna A. Parhusip)*	1 – 269
M - 27.	Pendekatan Analisis Multilevel Respon Biner dalam Menentukan Faktor-Faktor yang Memengaruhi Imunisasi Lengkap *(Bertho Tantular, I Gede Nyoman Mindra Jaya)*	1 – 281

M - 28.	Optimasi Bobot Portofolio Dan Estimasi *Var* (*Portfolio Weighted Optimization And Var Estimation*) *(Sukono, Subanar, Dedi Rosadi)*	1 – 292
M - 29.	Estimasi Var Dengan Pendekatan *Extreme Value* (*Estimation Of Var By Extreme Value Approach*) *(Sukono, Subanar, Dedi Rosadi)*	1 – 304
M - 30.	Activities In Sunspot Group NOAA 9393 *(Bachtiar Anwar, Bambang Setiahadi)*	1 – 315
M - 31.	Penyelesaian *Asymmetric Travelling Salesman Problem* Dengan Algoritma Hungarian Dan Algoritma *Cheapest Insertion Heuristic (Caturiyati)*	1 – 324
M - 32.	Studi Model Variasi Harian Komponen H Berdasarkan Pola Hari Tenang *(Habirun)*	1 – 335
M - 33.	Pemodelan Perembesan Air dalam Tanah *(Muhammad Hamzah, Djoko S, Wahyudi W.P, Budi S)*	1 – 346
M - 34.	Eksistensi Dan Kestabilan Solusi Gelombang Jalan Model Kuasiliner Dissipatif Dua Kanal *(Sumardi)*	1 – 354
M - 35.	Minimal Edge Dari Graf 2-Connected dengan Circumference Tertentu (On Edge Minimal 2-Connected Graphs With Prescribed Circumference) *(Tri Atmojo Kusmayadi)*	1 – 365
M - 36.	Model Sis dengan Pertumbuhan Logistik *(Eti Dwi Wiraningsih, Widodo, Lina Aryati, Syamsuddin Toaha)*	1 – 373
M - 37.	Aplikasi Model Dinamik Pada Bursa Efek *(Joko Purwanto)*	1 – 386
M - 38.	Analisis Fraktal Emisi Sinyal ULF Dan Kaitannya Dengan Gempa Bumi di Indonesia *(Sarmoko Saroso)*	1 – 400
M - 39.	Pengujian Hipotesis Rata-Rata Berurut untuk Membandingkan Tingkat kebocoran di Daerah Dinding Gingival menggunakan Tiga Macam Bahan Tambalan Sementara (Pendekatan Parametrik) *(H. Bernik Maskun)*	1 – 407

2. Makalah Bidang Pendidikan Matematika

Kode	Judul	Hal
P- 1	Pengembangan Model *Creative Problem Solving* Berbasis Teknologi Dalam Pembelajaran Matematika Di SMA (*Adi Nur Cahyono)*	2 - 1
P – 2	Mengembangkan Soal Terbuka *(Open-Ended Problem)* dalam Pembelajaran Matematika (*Ali Mahmudi)*	2 - 12
P – 3	Pengaruh Pemberian Tugas *Creative Mind Map* Setelah Pembelajaran Terhadap Kemampuan Kreativitas Dan Koneksi Matematik Siswa (*Ayu Anzela Sari, Jarnawi Afgani D)*	2 - 23
P – 4	Kontribusi Matematika Dan Pembelajarannya bagi Pendidikan Nilai *(Gregoria Ariyanti)*	2 - 38
P – 5	Mahasiswa Field Independent Dan Field Dependent dalam Memahami Konsep Grup * *(Herry Agus Susanto)*	2 - 64
P – 6	Peningkatan Pembelajaran Konsep Pengolahan Data Melalui Tutor Sebaya Dengan Komputer *(Endah Ekowati)*	2 - 78
P - 7	Pembelajaran Matematika Untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa Sekolah Menengah Atas (*Ibrahim)*	2 - 90
P – 8	Strategi Pembelajaran Kolaboratif Berbasis Masalah *(Djamilah Bondan Widjajanti)*	2 - 101
P – 9	Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat dalam Persiapan Menghadapi UN 2009 (*Kukuh Guntoro)*	2 - 111
P – 10	Melatih Kemampuan Metakognitif Siswa dalam Pembelajaran Matematika *(Risnanosanti, M.Pd)*	2 - 115
P – 11	Teori *Van Hiele* Dan Komunikasi Matematik (Apa, Mengapa Dan Bagaimana) *(Hj.Epon Nur'aeni)*	2 - 124
P – 12	Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematis Tingkat Tinggi Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Berbasis Komputer Pada Perguruan Tinggi Muhammadiyah (*Bambang Priyo Darminto)*	2 - 139
P – 13	Pembelajaran Matematika dengan Konflik Kognitif (*Dasa Ismaimuza)*	2 - 155
P – 14	Peran Penalaran dalam Pemecahan Masalah Matematik *(E. Elvis Napitupulu)*	2 - 167

P – 15	Meningkatkan Hasil Belajar Matematika Dengan Menerapkan Pembelajaran Kooperatif Tipe STAD Pada Materi Pokok Aljabar Dan Aritmatika Sosial di Kelas 7C SMPN I Pringsurat Tahun Pelajaran 2008/2009 *(Hidayati)*	2 - 181
P – 16	Rekonstruksi Tingkat-Tingkat Berpikir Probabilistik Siswa Sekolah Menengah Pertama *(Imam Sujadi)*	2 - 187
P – 17	Mengembangkan *Board Game* Labirin Matematika Bagi Siswa Kelas Rendah Guna Menghindari *Mind In Chaos* Terhadap Matematika (*Maman Fathurrohman, Hepsi Nindiasari, Dan Ilmiyati Rahayu)*	2 - 209
P – 18	Pemahaman Konsep Matematik Dalam Pembelajaran Matematika (*Nila Kesumawati)*	2 - 229
P – 19	Meningkatkan Pemahaman Mahasiswa Pendidikan Matematika Fkip Ups Tegal Pada Konsep Distribusi Peluang Khusus melalui Pembelajaran Kooperatif Model STAD *(Nina R. Chytrasari,Eleonora D. W.)*	2 - 236
P –20	Pembelajaran Kooperatif Tipe *Teams-Games-Tournaments* (Tgt) guna Meningkatkan Kemandirian Belajar Mahasiswa Statistika Matematika Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNTIRTA (*Nurul Anriani, Novaliyosi, Maman Fathurahman)*	2 - 248
P –21	Pengembangan Bahan Ajar Berdasarkan Perkembangan Kognitif Untuk Meningkatkan Hasil Belajar Matematika Siswa SD *(Rasiman*)	2 - 257
P –22	Problem-Based Learning dan Kemampuan Berpikir Reflektif dalam Pembelajaran Matematika (*Sri Hastuti Noer)*	2 - 267
P –23	Pengaruh Penilaian Portofolio Dan Kecerdasan Emosional Terhadap Hasil Belajar Matematika Topik Dimensi Tiga Siswa Kelas X Sma Negeri 4 Kendari Tahun 2006 *(Sunandar*)	2 - 281
P –24	Proses Pembelajaran *Student Centered* Pada Mata Kuliah Statistik Nonparametrik (Penerapan Strategi *Instant Assessment, Index Card Match, Practice Rehearsal Pairs,* Dan *Case Study*) *(Yuliana Susanti)*	2 - 200
P –25	Mengembangkan Keterampilan Berfikir Matematika *(Sehatta Saragih*)	2 - 310
P –26	Pembelajaran Matematika Dengan Melibatkan Manajemen Otak (Suatu Alternatif Pembelajaran Interaktif) *(Somakim)*	2 - 327
P –27	Kemampuan Komunikasi Matematik Dan Keterampilan Sosial Siswa Dalam Pembelajaran Matematika (*Kadir*)	2 - 339
P –28	Pengaruh Bimbingan Belajar terhadap Hasil Belajar Mahasiswa (Studi Kasus Terhadap Mata Kuliah Analisis II) *(Sugimin)*	2 - 351

P – 29	Keterbatasan Memori dan Implikasinya dalam Mendesain Metode Pembelajaran Matematika *(Endah Retnowati)*	2 - 359

Generalized Non-Homogeneous Morrey Spaces And Olsen Inequality

I. Sihwaningrum[*)], H. Gunawan, Y. Soeharyadi, W. S. Budhi

Analysis and Geometry Group

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Bandung Institute of Technology, Bandung 40132, Indonesia

hanidha@students.itb.ac.id, hgunawan, yudish, wono@math.itb.ac.id

Abstract

In this paper, we shall discuss some properties of generalized non-homogeneous Morrey spaces. In addition, we will also prove the Olsen inequality in the non-homogeneous setting. Our proof utilizes the result of (García-Cuerva and Martell, 2001) on the boundedness of the fractional integral operator on Lebesgue spaces of non-homogeneous type.

Keywords: *Olsen inequality, fractional integral operator, non-homogeneous Lebesgue spaces, generalized non-homogeneous Morrey spaces*.

1. Introduction

We shall study here the fractional integral operator I_α^n (for $0 < \alpha < n \le d$), on non-homogeneous spaces, which is defined by the formula

$$I_\alpha^n f(x) := \int_{\mathbf{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y).$$

The formula reduced to the classical version of (Hardy and Littlewood, 1927; Hardy and Littlewood, 1932; and Sobolev, 1938) when $n = d$ and μ is the usual Lebesgue measure. By a non-homogeneous space we mean a metric space -- here we will consider only the Euclidean space $\mathbf{R}^d$ -- equipped with an n-dimensional measure (García-Cuerva and Martell, 2000). A positive Borel measure μ satisfies n-dimensional measure (for $0 < n \le d$) if there exists a constant $C > 0$ such that

$$\mu(B(a,r)) \le Cr^n$$

[*)] Permanent address: Department of Mathematics General Soedirman University, Purwokerto 53122.

for every open ball $B(a,r)$ centered at $a \in \mathbf{R}^d$ with radius $r > 0$ (García-Cuerva and Gatto, 2004). This condition -- also known as the *growth condition* of order *n* (Sawano, 2005) -- replaces the *doubling condition*, which is the key property for a metric space to be a homogeneous space. Notice that a positive Borel measure μ satisfies the *doubling condition* if there exists a constant $C > 0$ such that for every ball $B(a,r)$ we have

$$\mu(B(a,2r)) \le C\mu(B(a,r))$$

(Coifman and Gusmán, 1970/1971). The ball $B(a,2r)$ is concentric to $B(a,r)$ with radius *2r*. We may consult (Krantz, 1999) for examples of the spaces of homogeneous type and (Verderra, 2002) for that of non-homogeneous type.

Now, let $L^p(\mu) = L^p(\mathbf{R}^d, \mu)$, $1 \le p < \infty$, denote the non-homogeneous Lebesgue spaces. It is well known from (García-Cuerva and Martell, 2001) that I_α^n is a bounded operator from $L^p(\mu)$ to $L^q(\mu)$ for $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ and $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Further, the following Olsen inequality

$$\left\| WI_\alpha f : L^p(\mu) \right\| \le C \left\| W : L^{n/\alpha}(\mu) \right\| \left\| f : L^p(\mu) \right\|,$$

for $W \in L^{n/\alpha}(\mu)$, can be viewed as a consequence of the $L^p(\mu) - L^q(\mu)$ boundedness of I_α^n (Sihwaningrum, *et.al.*, 2008b). The inequality was first introduced -- in homogeneous setting -- by (Olsen, 1995) to study the solution of the Schrödinger equation with a small perturbed potential *W* on Morrey spaces. Later on, (Kurata *et al*., 2002; Gunawan and Eridani, 2008) extended the Olsen's result to the homogeneous generalized Morrey spaces. In this paper, we will extend further the Olsen's result to the generalized Morrey spaces of non-homogeneous type.

2. Main Results

2.1 Generalized non-homogeneous Morrey spaces

For $1 \le p < \infty$ and $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, let us define the generalized non-homogeneous Morrey spaces $\mathrm{M}^{p,\phi}(\mu) = \mathrm{M}^{p,\phi}(\mathbf{R}^d, \mu)$ to be the set of all functions $f \in L^p_{loc}(\mu)$ for which $\left\| f : \mathrm{M}^{p,\phi}(\mu) \right\| < \infty$. Here,

$$\left\| f : M^{p,\varphi}(\mu) \right\| := \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty .$$

Our definition is in line with the definition of Hardy-L ittlewood maximal operator M^n given by the formula

$$M^n f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{B(a,r))} |f(y)| \, d\mu(y) .$$

The reader may also refer (Gunawan, *et.al.,* 2007) and (Sawano, 2008) for other types of generalized non-homogeneous Morrey spaces – which are defined in accordance with the *k*-dilated Hardy-Littlewood maximal operator M_k :

$$M_k f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(kQ)} \int_Q f(y) \, d\mu(y)$$

Note that along with our definition, if $\phi(r) = r^{-n/p}$, we obtain $M^{p,\phi}(\mu) = L^p(\mu)$. Meanwhile, for $1 < p < q < \infty$, we have $M^{q,\phi}(\mu) \subseteq M^{p,\phi}(\mu) \subseteq M^{1,\phi}(\mu)$ (see (Sihwaningrum, *et. al.,* 2008a) for the proof). Furthermore, the generalized non-homogeneous Morrey spaces obey the following property.

Fact 2.1 *If* $1 \le p < \infty$ *and* $\phi(r) \le C\psi(r)$ *(for* $r > 0$*), then* $M^{p,\psi}(\mu) \subseteq M^{p,\phi}(\mu)$ *and* $\left\| f : M^{p,\psi}(\mu) \right\| \le C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|$.

Proof. Notice first that $\frac{1}{\psi(r)} \le C \frac{1}{\phi(r)}$ for all $r > 0$. Then, for $f \in M^{p,\phi}(\mu)$, we get

$$\sup_{r>0} \frac{1}{\psi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \le C \sup_{r>0} \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

The above inequality implies that $\left\| f : M^{p,\psi}(\mu) \right\| \le C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|$, and so does $M^{p,\psi}(\mu) \subseteq M^{p,\phi}(\mu)$. □

As a consequence, $M^{p,\psi}(\mu) = M^{p,\phi}(\mu)$ and $\left\| f : M^{p,\psi}(\mu) \right\| \sim \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|$ for $\phi \sim \psi$.

2.2 Olsen Inequality

As an extention of the Olsen's result, we will present here an Olsen inequality on generalized non-homogeneous Morrey spaces. The inequality simply says that a multiplication of operators W and I_α^n is bounded on $M^{p,\phi}(\mu)$. To proof the inequality, we use the the boundedness of I_α^n from $L^p(\mu)$ to $L^q(\mu)$.

Theorem 2.2. *Suppose that ϕ satisfies the doubling condition for function, that is there exists a constant C such that $\frac{1}{2} \le \frac{t}{s} \le 2 \Rightarrow \frac{1}{C} \le \frac{\phi(t)}{\phi(s)} \le C$. Suppose further that ϕ satisfies $\int_r^\infty t^{\alpha-1}\phi(t)dt \le Cr^\alpha \phi(r)$. Then, the inequality*

$$\left\| WI_\alpha f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| \le C \left\| W : L^{n/\alpha}(\mu) \right\| \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|$$

holds provided that $W \in L^{n/\alpha}$.

Proof. Let $B := B(a,r)$ dan $\hat{B} := B(a,2r)$ where $a \in \mathbf{R}^d$. Then, we decompose the function $f \in M^{p,\phi}(\mu)$ as $f = f_1 + f_2 = f_{\chi_{\hat{B}}} + f_{\chi_{\hat{B}^C}}$. Recall that I_α^n is a bounded operator from $L^p(\mu)$ to $L^q(\mu)$, so that we have

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_B \left| I_\alpha^n f_1(x) \right|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \le C\psi(r) \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\|.$$

Now, by using the Hölder inequality and $L^p(\mu)$-$L^q(\mu)$ boundedness of I_α^n, we obtain

$$\left(\int_B \left| WI_\alpha^n f_1(y) \right|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \le Cr^{n/p}\phi(r) \left\| W : L^{n/\alpha}(\mu) \right\| \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| . \qquad (2.1)$$

As the measure μ satisfies the growth condition, then for every $x \in B$ we could find the estimate

$$\left| I_\alpha^n f_2(x) \right| \le \int_{|x-y| \ge r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \le C \left\| f : M^{p,\phi}(\mu) \right\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^k r\right)^\alpha \phi\left(2^k r\right).$$

We see that the right hand side of the inequality contains the summation from $k=0$ to $k=\infty$. So, we utilize the doubling condition of $\phi(t)$ and t^{α} to get

$$\left(2^k r\right)^{\alpha}\phi\left(2^k r\right)\le C\int_{2^{k-1}}^{2^k} t^{\alpha-1}\phi(t)dt$$

for $k=0,1,2,\ldots$. As a result

$$\left|I_{\alpha}^{n} f_2(x)\right|\le C\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k} t^{\alpha-1}\phi(t)dt\le Cr^{\alpha}\phi(r)\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|.$$

Furthermore, the Hölder inequality allows us to obtain

$$\left(\frac{1}{r^n}\int_B\left|WI_{\alpha}^{n} f_1(y)\right|^p d\mu(y)\right)^{1/p}\le Cr^{n/p}\phi(r)\left\|W:L^{n/\alpha}(\mu)\right\|\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|. \qquad (2.2)$$

Now, we apply the Minkowski inequality to the estimate (2.1) and (2.2) to get

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B\left|WI_{\alpha}^{n} f(y)\right|^p d\mu(y)\right)^{1/p}\\ &\quad\le\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B\left|WI_{\alpha}^{n} f_1(y)\right|^p d\mu(y)\right)^{1/p}+\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_B\left|WI_{\alpha}^{n} f_2(y)\right|^p d\mu(y)\right)^{1/p}\\ &\quad\le C\left\|W:L^{n/\alpha}(\mu)\right\|\left\|f:M^{p,\phi}(\mu)\right\|\end{aligned}$$

By taking the supremum over all $r>0$, we complete our proof. □

3. Concluding Remarks

We may also proof Theorem 2.2 by using the $M^{p,\phi}(\mu)$-$M^{q,\psi}(\mu)$ boundedness of I_{α}^{n}, where $1<p<q<\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ and $r^{\alpha}\phi(r)\le C\psi(r)$. The alternative proof is simpler than that of presented here (see (Sihwaningrum, *et. al.,* 2008b) for detail) .

Acknowledgment. This paper is a part of Sihwaningrum's desertation research. The first and the second authors are supported by Fundamental Research Grant No. 0367/K01.03/Kontr-WRRIM/PL2.1.5/IV/2008..

4. References

Coifman, R.R. and M. de Gusmán, 1970/1971, Singular Integrals and Multiplier on Homogeneous Spaces, *Rev. Un. Mat. Argentina,* **25**, 137–143.

García-Cuerva, J. and A.E. Gatto, 2004, Boundedness Properties of Fractional Integral Operators Associated to Non-Doubling Measures, *Studia Math.,* **162,** no. 3, 245–261.

García-Cuerva, J. and J.M. Martell, 2000, Weighted Inequalities and Vector-Valued Calderón-Zygmund Operators on Non-homogeneous Spaces, *Public. Math. ,* **44**, no. 2, 613–640.

García-Cuerva, J. and J.M. Martell, 2001, Two-weight Norm Inequalities for Maximal Operators and Fractional Integrals on Non-homogeneous Spaces, *Indiana Univ. Math. J.,* **50**, no. 3, 1241–1280.

Gunawan, H. and Eridani, 2008, Fractional Integrals and Generalized Olsen Inequalities, to appear in *Kyungpook Math. J.*

Gunawan, H. and I. Sihwaningrum, 2007, Fractional Integral Operator and Their Boundedness on Various Spaces, *Jurnal Matematika dan Sains,* **12:4**, 118–125.

Krantz, S.G., 1999, *A Panorama of Harmonic Analysis*, The Carus Mathematical Monographs, no. 27, The Mathematical Association of America, USA.

Kurata, K., S. Nishigaki and S. Sugano, 2002, Boundedness of Integral Operators on Generalized Morrey Spaces and Its Application to Schrödinger Operatos, *Proc. Amer. Math. Soc*., **129**, 1125–1134.

Nazarov, F., S. Treil and A. Volberg, 1998, Weak Type Estimates and Cotlar Inequalities for Calderón-Zygmund Operators on Nonhomogeneous Space, *Internat. Math. Res. Notices*, **9**, 463–487.

Olsen, P.A., 1995, Fractional Integration, Morrey Spaces and a Schrödinger Equation, *Comm. Partial Differential Equations,* **20**, 2005–2055.

Sawano, Y., 2005, Sharp Estimates of the Modified Hardy Littlewood Maximal Operator on the Non-homogeneous Space via Covering Lemmas, *Hokkaido Math. J.,* **34**, 435–458.

Sawano, Y., 2008, Generalized Morrey Spaces for Non-doubling Measures, to appear in *NoDEA Nonlinear Differential Equation Appl.*

Sihwaningrum, I., H. Gunawan dan W. S. Budhi, 2008a, Operator Integral Fraksional dan Ketaksamaan Olsen di Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika se-Indonesia,* 31 Mei 2008.

Sihwaningrum, I., H. P. Suryawan, and H. Gunawan., 2008b, Fractional Integral Operators and Olsen Inequalities on Non-homogeneous Spaces, to appear in *Aust. J. Math. Anal. Appl.*

Sobolev, S.L., 1938, On a Theorem in Fuctional Analysis (Russian), *Mat. Sob.,* **46,** 471–497. [English tanslation in *Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2*, **34** (1963), 39–68].

Verdera, J., 2002, The Fall of the Doubling Condition in Calderón-Zygmund Theory, *Pub. Mat.,* 275–292.

Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval

[1]M. Andy Rudhito, [2]Sri Wahyuni, [3]Ari Suparwanto, and [4]F. Susilo

[1]Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FKIP Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

[2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara Yogyakarta

[4]Jurusan Matematika FST , Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta

e-mail : [1]rudhito@staff.usd.ac.id, [2]swahyuni@ugm.ac.id, [3]ari_suparwanto@yahoo.com, [4]fsusilo@staff.usd.ac.id

Abstrak. Makalah ini membahas eksistensi dan ketunggalan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa setiap matriks atas aljabar max-plus interval mempunyai nilai eigen, yaitu nilai eigen interval max-plus maksimum, dan vektor eigen interval max-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval max-plus maksimum tersebut berturut-turut adalah nilai eigen max-plus maksimum matriks batas bawah dan nilai eigen max-plus maximum matriks batas atas dari matriks intervalnya. Jika matriks atas aljabar max-plus interval tersebut irredusibel maka nilai eigennya tunggal.

Kata-kata kunci: aljabar max-plus, interval, nilai eigen dan vektor eigen.

1. Pendahuluan

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya belum diketahui. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Waktu aktifitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Untuk itu waktu aktifitas jaringan dimodelkan dalam suatu bilangan kabur (*fuzzy number*). Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan bilangan kabur. Untuk masalah penjadwalan yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Chanas, S., Zielinski, P. (2001). Sedangkan untuk masalah model jaringan antrian yang melibatkan bilangan kabur dapat dilihat pada Lüthi, J., Haring, G. (1997).

Pemodelan dan analisa sifat periodik sistem jaringan yang melibatkan bilangan kabur, sejauh penulis ketahui, belum ada yang menggunakan pendekatan aljabar max-plus. Dalam pemodelan suatu sistem jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan tersebut dinyatakan dengan menggunakan matriks, dengan unsur-unsurnya menyatakan waktu aktifitas antar titik pada jaringan tersebut. Selanjutnya sifat

periodik sistem dapat dianalisis melalui nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus (selanjutnya cukup disebut nilai eigen dan vektor eigen max-plus) seperti dalam Baccelli et.al (1992), Rudhito A (2003).

Pemodelan waktu aktifitas jaringan dengan menggunakan bilangan kabur dengan pendekatan aljabar max-plus akan terkait dengan matriks yang unsur-unsurnya berupa bilangan kabur. Dengan mengikuti pola pemodelan dan analisa jaringan dengan menggunakan aljabar max-plus, maka konsep dasar yang akan terkait dengan analisa sifat periodik sistem adalah nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur dari matriks dalam model tersebut. Operasi-operasi pada bilangan kabur dapat dilakukan menggunakan Teorema Dekomposisi, yaitu melalui potongan-potongan-α-nya yang berupa interval-interval (Susilo, F. 2006). Dengan demikian penentuan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur melalui Teorema Dekomposisi akan memerlukan hasil-hasil pembahasan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval . Untuk itu dalam makalah ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval (selanjutnya cukup disebut nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval).

Sebelum dibahas hasil utama makalah ini pada bagian 4, terlebih dahulu pada bagian 2 dan 3 akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

2. Aljabar Max-Plus, Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan kaitannya dengan teori graf, serta eksistensi dan ketunggalan nilai eigen dan vektor eigen max-plus. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Baccelli et.al (1992), Rudhito A (2003).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall a,b \in \mathbf{R}_\varepsilon$,

$$a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$. Lebih lanjut $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semifield, yaitu bahwa $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif di mana untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ terdapat $-a$ sehingga berlaku $a \otimes (-a) = 0$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$.

Aljabar max-pus $\mathbf{R}_{\max}$ *tidak memuat pembagi nol* yaitu $\forall\, x,\ y \in \mathbf{R}_{\varepsilon}$ berlaku: jika $x \otimes y = \varepsilon$ maka $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$. Relasi "$\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}$ dengan $x\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan *urutan parsial* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan *urutan total* pada $\mathbf{R}_{\max}$. Dalam $\mathbf{R}_{\max}$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ *konsisten* terhadap urutan $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbf{R}_{\max}$, jika $a\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ b$, maka $a \oplus c\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ b \oplus c$, dan $a \otimes c\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ b \otimes c$. Pangkat k dari elemen $x \in \mathbf{R}$ dilambangkan dengan $x^{\otimes k}$ didefinisikan sebagai berikut: $x^{\otimes 0} := 0$ dan $x^{\otimes k} := x \otimes x^{\otimes k-1}$, dan didefinisikan pula $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$ dan $\varepsilon^{\otimes k} := \varepsilon$, untuk $k = 1, 2, \ldots$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} := \begin{cases} 0\ , & \text{jika } i = j \\ \varepsilon\ , & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\mathcal{E} \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\mathcal{E})_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks $\mathcal{E}$ dan elemen satuan matriks E. Sedangkan $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Pangkat k dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{nxn}$ dalam aljabar max-plus didefinisikan dengan: $A^{\otimes 0} = E_n$ dan $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes k-1}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Relasi "$\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$" yang didefinisikan pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan $A\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ B \Leftrightarrow A \oplus B = B$ merupakan urutan parsial pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$. Perhatikan bahwa $A\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \Leftrightarrow A_{ij}\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ B_{ij}$ untuk setiap i dan j. Dalam $(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}, \oplus, \otimes)$, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$, yaitu $\forall A, B, C \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, jika $A\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ B$, maka $A \oplus C\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ B \oplus C$, dan $A \otimes C\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ B \otimes C$.

Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\ \boldsymbol{x} = [\ x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathbf{R}_{\max},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Perhatikan bahwa $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{R}_{\max}^{n\times 1}$, sehingga $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{R}_{\max}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur *vektor* atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Suatu *graf berarah* $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan $\mathcal{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{A})$ dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut *titik* dan A adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik. Anggota A disebut *busur*. Suatu *lintasan* dalam graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur (i_1, i_2), (i_2, i_3), ... , (i_{l-1}, i_l) dengan $(i_k, i_{k+1}) \in \mathsf{A}$ untuk suatu $l \in \mathbf{N}$ (= himpunan semua bilangan asli), dan $k = 1, 2, \ldots, l - 1$. Suatu lintasan disebut *sirkuit* jika titik awal dan titik akhirnya sama. *Sirkuit elementer* adalah sirkuit yang titik-titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Suatu graf berarah $\mathcal{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{A})$ dengan $\mathsf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, , \ldots , \mathbf{n}\}$ dikatakan *terhubung kuat* jika untuk setiap $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathsf{V}$, $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, terdapat suatu lintasan dari **i** ke **j**.

Diberikan graf berarah $\mathcal{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{A})$ dengan $\mathsf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots , \mathbf{p}\}$. Graf berarah $\mathcal{G}$ dikatakan *berbobot* jika setiap busur $(j, i) \in \mathsf{A}$ dikawankan dengan suatu bilangan real A_{ij}. Bilangan real A_{ij} disebut *bobot* busur (j, i), dilambangkan dengan $w(j, i)$. *Graf preseden* dari matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah graf berarah berbobot $\mathcal{G}(A) = (\mathsf{V}, \mathsf{A})$ dengan $\mathsf{V} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots , \mathbf{n}\}$, $\mathsf{A} = \{(\mathbf{j}, \mathbf{i}) | w(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A_{\mathbf{ij}} \neq \varepsilon\}$. *Bobot suatu lintasan* didefinisikan sebagai jumlahan bobot busur-busur yang menyusun tersebut . Suatu rumus bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, dilambangkan dengan $\lambda_{\max}(A)$), adalah $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes k})_{ii}\right)$.

Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dikatakan *semi-definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot takpositif dan dikatakan *definit* jika semua sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$ mempunyai bobot negatif. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$**.** Dapat ditunjukkan bahwa jika A semi-definit, maka $\forall p \geq n,\ A^{\otimes p}\ \underline{\pi}_{\mathrm{m}}\ E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1}$. Diberikan matriks semi-definit $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Didefinisikan $A^* := E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n+1} \oplus \ldots$. Suatu matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ dikatakan *irredusibel* jika graf presedennya terhubung kuat. Dapat ditunjukkan bahwa matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel jika dan hanya jika $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$, untuk setiap i, j dengan $i \neq j$.

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus matriks A* jika terdapat suatu vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}_{\max}^{n}$ dengan $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$ sehingga $A \otimes \boldsymbol{v} = \lambda \otimes \boldsymbol{v}$**.** Vektor $\boldsymbol{v}$

tersebut disebut *vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ.* Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$. Dapat ditunjukkan bahwa skalar $\lambda_{\max}(A)$, yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $\mathcal{G}(A)$, merupakan suatu nilai eigen max-plus matriks A. Lebih lanjut untuk $B = -\lambda_{\max}(A) \otimes A$, jika $B_{ii}^{+} = 0$, maka kolom ke-i matriks B^{*} merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Kolom-kolom ke-i matriks B^{*} di atas, yang merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$, disebut *vektor-vektor eigen fundamental* yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(A)$. Dapat ditunjukkan bahwa kombinasi linear max-plus vektor-vektor eigen fundamental matriks A juga merupakan vektor eigen yang berseuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$. Jika skalar $\lambda \in \mathbf{R}_{\max}$, merupakan nilai eigen max-plus matriks A, maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam $\mathcal{G}(A)$, sehingga $\lambda_{\max}(A)$ merupakan nilai eigen max-plus maksimum matriks A. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks irredusibel $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ mempunyai nilai eigen max-plus λ dengan $\boldsymbol{x}$ sebagai vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan λ, maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dapat ditunjukkan bahwa jika matriks $A \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel, maka A mempunyai nilai eigen max-plus tunggal, yaitu $\lambda_{\max}(A)$.

3. Aljabar Max-Plus Interval dan Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval

Bagian ini membahas konsep dasar dan teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada Rudhito, A. dkk (2008a, 2008b).

Interval (tertutup) x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{x} \,\underline{\pi}_m\, x \,\underline{\pi}_m\, \overline{x}\}$. Interval x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon} := \{ x = [\underline{x}, \overline{x}] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbf{R}, \varepsilon\, \underline{\pi}_m\, \underline{x} \,\underline{\pi}_m\, \overline{x}\} \cup \{ \varepsilon \}$, dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$.

Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan: $x \,\overline{\oplus}\, y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}]$ dan $x \,\overline{\otimes}\, y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$, $\forall\, x, y \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon})$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen

satuan 0 = [0, 0]. Semiring idempoten komutatif $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ selanjutnya disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $A, B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, didefinisikan $\alpha \overline{\otimes} A$, dengan $(\alpha \overline{\otimes} A)_{ij} = \alpha \overline{\otimes} A_{ij}$ dan $A \overline{\oplus} B$, dengan $(A \overline{\oplus} B)_{ij} = A_{ij} \overline{\oplus} B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{p\times n}$, didefinisikan $A \overline{\otimes} B$ dengan $(A \overline{\otimes} B)_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} A_{ik} \overline{\otimes} B_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i, j dan elemen satuan adalah matriks E, dengan $(E)_{ij} := \begin{cases} 0 & , \text{ jika } i = j \\ \varepsilon & , \text{ jika } i \neq j \end{cases}$. Sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$,

Untuk $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = (\underline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $\overline{A} = (\overline{A}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Diberikan matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$, dengan $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ berturut-turut adalah matriks batas bawah dan matriks batas atasnya. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{A}, \overline{A}] = \{ A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n} \mid \underline{A} \ \pi_m \ A \ \pi_m \ \overline{A} \}$ dan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^* = \{ [\underline{A}, \overline{A}] \mid A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n} \}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^*$, didefinisikan $\alpha \overline{\otimes} [\underline{A}, \overline{A}] = [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$ dan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\oplus} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$. Untuk $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times p})^*$, $[\underline{B}, \overline{B}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{p\times n})^*$, didefinisikan $[\underline{A}, \overline{A}] \overline{\otimes} [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$. $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ merupakan semiring idempoten dengan elemen netral adalah interval matriks [ε, ε] dan elemen satuan adalah interval matriks [E, E]. Sedangkan $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^*$ merupakan semimodul atas $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$, dengan pemetaan $f: \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n} \to \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*$, $f(A) = [\underline{A}, \overline{A}]$, $\forall A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$. Sedangkan

semimodul $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^*$ atas $\mathbf{I(R)}_{\max}$ Dengan demikan untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* $[\underline{A}, \overline{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*$, maka $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, sehingga dapat ditentukan matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$, di mana $[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] \in \mathbf{I(R)}_{\max}$, $\forall i$ dan j. Dengan demikian matriks interval $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m\times n})^*$. Interval matriks $[\underline{A}, \overline{A}] \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n\times n})^*$ disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval* $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Akibat isomorfisma di atas, maka berlaku $\alpha \overline{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \overline{\alpha} \otimes \overline{A}]$, $A \overline{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \overline{A} \oplus \overline{B}]$ dan $A \overline{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \overline{A} \otimes \overline{B}]$.

Didefinisikan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n} := \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T | \; x_i \in \mathbf{I(R)}_{\max}, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Himpunan $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ dapat dipandang sebagai $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times 1}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I(R)}_{\max}$. Vektor interval $\mathbf{x}$ bersesuaian dengan *interval vektor* $[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$, yaitu $\mathbf{x} \approx [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$.

4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Interval

Definisi 4.1

Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$. Skalar interval $\lambda \in \mathbf{I(R)}_{\max}$ disebut *nilai eigen max-plus interval matriks interval* A jika terdapat suatu vektor interval $\mathbf{v} \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n}$ dengan $\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$ sehingga $A \overline{\otimes} \mathbf{v} = \lambda \overline{\otimes} \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut disebut *vektor eigen max-plus interval matriks interval* A *yang bersesuaian dengan* λ.

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen interval max-plus suatu matriks interval.

Teorema 4.1

Diberikan $A \in \mathbf{I(R)}_{\max}^{n\times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A. Vektor

interval $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, di mana $\underline{\mathbf{v}}$ dan $\overline{\mathbf{v}}$ berturut-turut adalah vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A})$, sedemikan hingga $\underline{\mathbf{v}} \ \underline{\pi}_{\mathrm{Im}} \ \overline{\mathbf{v}}$, merupakan vektor eigen max-plus interval matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda_{\max}(A)$.

Bukti:

Untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ A_{ij} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \overline{A}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$", maka berlaku $\underline{A}^{\otimes k} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ A^{\otimes k} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \overline{A}^{\otimes k}$, untuk $k = 1, 2, \ldots$, sehingga berlaku $\bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (\underline{A}^{\otimes k})_{ii} \right)$ $\underline{\pi}_{\mathrm{m}} \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes k})_{ii} \right) \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{A}^{\otimes k})_{ii} \right)$, atau $\lambda_{\max}(\underline{A}) \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \lambda_{\max}(A) \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \lambda_{\max}(\overline{A})$.

Jadi $[\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$ adalah suatu interval.

Ambil $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$. Menurut hasil pada bagian 2 di atas, untuk $\underline{B} = -\lambda_{\max}(\underline{A}) \otimes \underline{A}$, jika $\underline{B}^{+}_{ii} = 0$, maka kolom ke-*i* matriks $\underline{B}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{A})$, demikian juga analog untuk $\overline{B}$. Ambil $\underline{\mathbf{v}}$ dan $\overline{\mathbf{v}}$, di mana berturut-turut adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A})$, sedemikan hingga $\underline{\mathbf{v}} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \overline{\mathbf{v}}$, jika diperlukan dapat dibentuk kombinasi linear vektor-vektor eigen fundamental yang terkait, sehingga diperoleh $\underline{\mathbf{v}} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \overline{\mathbf{v}}$. Ambil vektor interval $\mathbf{v} \approx [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, maka $[\underline{A}, \overline{A}] \ \overline{\otimes} \ [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}] = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})] \ \overline{\otimes} \ [\underline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{v}}]$, yang berarti juga bahwa $A \ \overline{\otimes} \ \mathbf{v} = \lambda \ \overline{\otimes} \ \mathbf{v}$. Jadi skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, merupakan suatu nilai eigen max-plus interval matriks interval A. ■

Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan ketunggalan nilai eigen interval max-plus suatu matriks interval. Sebelumnya akan diberikan definisi dan syarat cukup dan perlu irredusibilitas suatu matriks interval.

Definisi 4.2

Suatu matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{n \times n}_{\max}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, dikatakan *irredusibel* jika setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ irredusibel.

Teorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup suatu matriks interval irredusibel.

Teorema 4.2

Suatu matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, irredusibel jika dan hanya jika $\underline{A} \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$ irredusibel.

Bukti:

($\Rightarrow$): Jelas berlaku menurut Definisi 4.2 di atas.

($\Leftarrow$): Untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} A \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ \overline{A}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\underline{\pi}_{\mathrm{m}}$", maka berlaku

$(\underline{A} \oplus \underline{A}^{\otimes 2} \oplus ... \oplus \underline{A}^{\otimes n-1}) \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ (A \oplus A^{\otimes 2} \oplus ... \oplus A^{\otimes n-1})$

$\underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ (\overline{A} \oplus \overline{A}^{\otimes 2} \oplus ... \oplus \overline{A}^{\otimes n-1})$, yang berarti berlaku juga

$(\underline{A} \oplus \underline{A}^{\otimes 2} \oplus ... \oplus \underline{A}^{\otimes n-1})_{ij} \ \underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ (A \oplus A^{\otimes 2} \oplus ... \oplus A^{\otimes n-1})_{ij}$

$\underline{\pi}_{\mathrm{m}} \ (\overline{A} \oplus \overline{A}^{\otimes 2} \oplus ... \oplus \overline{A}^{\otimes n-1})_{ij}$

untuk setiap i dan j. Karena $\underline{A}$ irredusibel, maka menurut hasil pada bagian 2 di atas, $(\underline{A} \oplus \underline{A}^{\otimes 2} \oplus ... \oplus \underline{A}^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$. Dengan demikan untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ juga berlaku bahwa $(A \oplus A^{\otimes 2} \oplus ... \oplus A^{\otimes n-1})_{ij} \neq \varepsilon$ untuk setiap i, j dengan $i \neq j$, sehingga menurut menurut hasil pada bagian 2 di atas A irredusibel. Jadi terbukti bahwa matriks interval $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ irredusibel. ■

Akibat 4.3

Diberikan $A \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Jika matriks interval A irredusibel, maka $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$ merupakan nilai eigen interval max-plus tunggal matriks interval A.

Bukti:

Jika matriks interval A iredusibel, maka $\forall A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ irredusibel, sehingga menurut hasil pada bagian 2, $\lambda_{max}(A)$ merupakan nilai eigen max-plus tunggal matriks A. Dengan cara yang analog dengan pembuktian Teorema 4.1 di atas dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{max}(A) = [\lambda_{max}(\underline{A}), \lambda_{max}(\overline{A})]$, merupakan nilai eigen max-plus interval tunggal matriks interval A. ■

Contoh 4.1

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen max-plus interval dari matriks

$A = \begin{bmatrix} [-2,-1] & [3,4] & [1,2] \\ [1,2] & [1,1] & [\varepsilon,\varepsilon] \\ [\varepsilon,\varepsilon] & [2,4] & [-1,1] \end{bmatrix}$. Perhatikan bahwa $\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Untuk $\underline{A}$ diperoleh bahwa $\lambda_{max}(\underline{A}) = 2$ dengan vektor-vektor eigen fundamentalnya adalah $[0, -1, -1]^T$ dan $[1, 0, 0]^T$. Untuk $\overline{A}$ diperoleh bahwa $\lambda_{max}(\overline{A}) = 3$ dengan vektor-vektor eigen fundamentalnya adalah $[0, 1, 0]^T$ dan $[1, 0, 1]^T$. Vektor interval $\mathbf{v} = [[0, 0], [-1,1], [-1,0]]^T$, merupakan vektor eigen interval max-plus matriks interval A yang bersesuaian dengan $\lambda_{max}(A) = [2, 3]^T$. Perhatikan bahwa $\underline{A}$ irredusibel sehingga vektor eigen interval max-plus yang diperoleh adalah tunggal.

5. Kesimpulan

Dapat disimpilkan bahwa setiap matriks interval persegi, yaitu matriks persegi dengan unsur-unsurnya berupa interval, mempunyai nilai eigen interval max-plus, yaitu nilai eigen interval max-plus maksimum, dan vektor eigen interval max-plus. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval max-plus maksimum tersebut berturut-turut adalah nilai eigen max-plus matriks batas bawah dan nilai eigen max-plus matriks batas atas dari matriks intervalnya. Jika matriks tersebut irredusibel maka nilai eigen interval tersebut tunggal.

Kepustakaan

Bacelli, F., *et al*. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Chanas, S., Zielinski, P. 2001. Critical path analysis in the network with fuzzy activity times. *Fuzzy Sets and Systems.* 122 (2001) 195–204.

Lüthi, J., Haring, G. 1997. Fuzzy Queueing Network Models of Computing Systems. *Proceedings of the 13th UK Performance Engineering Workshop*, Ilkley, UK, Edinburgh University Press, July 1997.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy, dkk. 2008a. "Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Rudhito, Andy, dkk. 2008b. "Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Susilo, F. 2006. Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya edisi kedua. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Keterbatasan Operator Integral Fraksional Di Ruang Lebesgue Tak Homogen

Herry Pribawanto Suryawan
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
Email: herrypribs@staff.usd.ac.id

Abstrak

Dalam makalah ini akan dibuktikan keterbatasan operator integral fraksional I_α di ruang Lebesgue tak homogen dengan menggunakan keterbatasan operator maksimal radial Hardy-Littlewood dan ketaksamaan Hedberg. Selanjutnya, keterbatasan I_α tersebut diterapkan pada pembuktian ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen.

Kata kunci: *Operator integral fraksional, operator maksimal radial Hardy-Littlewood, ruang Lebesgue tak homogen, ketaksamaan Olsen.*

Pendahuluan

Misalkan $Q(x,r)$ menyatakan kubus yang berpusat di $x \in R^d$ dan mempunyai jari-jari (yaitu setengah panjang sisi) $r>0$; dan $Q(x,kr)$, dengan $k>0$, menyatakan kubus konsentris dengan jari-jari kr. Misalkan juga C adalah konstanta positif, yang dalam makalah ini tidak perlu sama dari baris ke baris. Ruang metrik – disini hanya dibicarakan R^d –yang dilengkapi dengan ukuran Borel μ disebut ruang homogen apabila μ memenuhi *kondisi doubling*:

$$\mu(Q(x,2r)) \le C\mu(Q(x,r)).$$

Sementara itu, (R^d,μ) dengan μ yang tidak memenuhi *kondisi doubling* tetapi memenuhi *kondisi growth*

$$\mu(Q(x,r)) \le Cr^n,$$

untuk $0<n\le d$, disebut sebagai ruang tak homogen. Beberapa hasil yang berkenaan dengan ruang tak homogen dapat dilihat misalnya pada [2, 9,11 12].

Di ruang tak homogen, operator integral fraksional I_α didefinisikan dengan

$$I_\alpha f(x) := \int_{\square^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y).$$

Perhatikan bahwa di ruang homogen, pangkat dari $|x-y|$ adalah $d-\alpha$. Operator I_α, yang dikenal pula sebagai potensial Riesz, pertama kali dipelajari oleh Hardy dan Littlewood [6, 7] serta Sobolev [13], sedangkan hasil selanjutnya – di ruang homogen – dapat dilihat pada [1, 4, 5, 8, 10].

Dalam [3], operator I_α telah dibuktikan terbatas dari ruang Lebesgue tak homogen $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$. Dalam makalah ini, keterbatasan tersebut akan dibuktikan ulang dan kemudian digunakan untuk membuktikan ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen.

Keterbatasan Operator I_α

Diberikan f adalah sebarang fungsi terukur-μ pada R^d, dengan μ adalah ukuran Borel yang memenuhi *kondisi growth* . Didefinisikan

$$\| f : L^p(\mu) \| = \left(\int_{\square^d} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty$$

dan

$$\| f : L^\infty(\mu) \| = ess \sup \left\{ |f(x)| : x \in R^d \right\}$$

dengan $ess \sup \left\{ |f(x)| : x \in R^d \right\}$ menyatakan batas atas terkecil esensial dari $|f|$. Ruang Lebesgue tak homogen $L^p(\mu) = L^p(R^d, \mu), 1 \le p \le \infty,$ adalah ruang kelas-kelas ekuivalen f sedemikian sehingga $\| f : L^p(\mu) \| < \infty.$ Di ruang Lebesgue tak homogen, diketahui I_α bersifat terbatas.

Teorema 2.1 [2, 3] *Diberikan* $0 < \alpha < n$. *Jika* $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ *dan* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, *maka* I_α *terbatas dari* $L^p(\mu)$ *ke* $L^q(\mu)$.

Bukti keterbatasan I_α di ruang Lebesgue tersebut dapat diperoleh menggunakan ketaksamaan Hedberg yang melibatkan operator maksimal radial Hardy-Littlewood M dengan

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{Q(x,r)} |f(y)| \, d\mu(y).$$

Operator M ini bertipe lemah-(1,1) dan bertipe kuat-(∞, ∞).

Teorema 2.2 [3] *Operator maksimal M memenuhi*

$$\mu\left\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\right\} \le \frac{C}{\lambda}\int_{R^d} |f(x)|\, d\mu(x)$$

dan

$$\| Mf : L^\infty(\mu) \| \le C \| f : L^\infty(\mu) \|.$$

Bukti: Ambil $f \in L^1(\mu)$ dan definisikan

$$E_\lambda = \left\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\right\}.$$

Jika $x \in E_\lambda$, maka terdapat $r_x > 0$ sehingga

$$\frac{1}{r_x^n}\int_{Q(x,r_x)} |f(y)|\, d\mu(y) > \lambda.$$

Selanjutnya, *Lema Cover Vitali* memberikan koleksi kubus $\{Q(x_j, r_j)\}_j$ (dengan $x_j \in E_\lambda$ dan $r_j = r_{x_j}$) yang sepasang-sepasang saling lepas sedemikian sehingga

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} Q(x, r_x) \subset \bigcup_j Q(x_j, 3r_j).$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\mu(E_\lambda) &\le \sum_j \mu(Q(x_j, 3r_j)) \\
&\le C\sum_j (3r_j)^n \\
&\le C\sum_j \frac{1}{\lambda}\int_{Q(x_j,r_j)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\le C\int_{R^d} |f(y)|\, d\mu(y).
\end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa

$$\mu\left\{x \in R^d : Mf(x) > \lambda\right\} \le \frac{C}{\lambda}\int_{R^d} |f(x)|\, d\mu(x).$$

Untuk membuktikan bagian selanjutnya, ambil sebarang $x \in R^d$ dan kubus $Q(x, r) \subset R^d$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\,d\mu(y) &\le \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)} ess\sup|f(y)|\,d\mu(y)\\ &\le \frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}\|f:L^\infty(\mu)\|\,d\mu(y)\\ &= \|f:L^\infty(\mu)\|\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}d\mu(y)\\ &= \|f:L^\infty(\mu)\|\frac{1}{r^n}\mu(Q(x,r))\\ &\le C\|f:L^\infty(\mu)\|.\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\sup_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\,d\mu(y)\le C\|f:L^\infty(\mu)\|,$$

yang memberikan ketaksamaan yang diinginkan.

■

Catat bahwa operator yang bertipe kuat-(∞,∞) berimplikasi bahwa operator tersebut bertipe lemah-(∞,∞). Jadi M merupakan operator sublinier yang bertipe lemah-(1, 1) dan (∞,∞). Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Interpolasi Marcinkiewicz diperoleh hasil berikut.

Akibat 2.3 [3] *Operator maksimal M terbatas di $L^p(\mu)$ untuk $1<p<\infty$.*

Dengan menggunakan keterbatasan M di $L^p(\mu)$ akan dibuktikan ketaksamaan Hedberg yang nantinya diperlukan untuk membuktikan keterbatasan operator I_α di ruang Lebesgue tak homogen.

Teorema 2.4 (Ketaksamaan Hedberg). *Diberikan $0<\alpha<n$ dan f fungsi terbatas dengan tumpuan kompak. Maka untuk $1\le p<\frac{n}{\alpha}$ berlaku*

$$|I_\alpha f(x)|\le C\|f:L^p(\mu)\|^{\frac{p\alpha}{n}}\,Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Bukti: Ambil sebarang $t>0$. Dengan menuliskan

$$|I_\alpha f(x)|\le \underbrace{\int_{|x-y|<t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)}_{I}+\underbrace{\int_{|x-y|\ge t}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,d\mu(y)}_{II},$$

akan dicari batas untuk I dan II. Untuk suku pertama, I, berlaku

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{|x-y|<t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}t \le |x-y| < 2^{-k}t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\le 2^{2n-\alpha} t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-k+1}t)^{n}} \int_{Q(x,2^{-k+1}t)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\le 2^{2n-\alpha} t^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} Mf(x) \\
&= Ct^{\alpha} Mf(x).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk suku kedua, yaitu II, terlebih dahulu diperhatikan kasus $p = 1$ sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{|x-y|\ge t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\le \frac{1}{t^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\ge t} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\le t^{-(n-\alpha)} \,\|f : L^{1}(\mu)\|.
\end{aligned}
$$

Kemudian untuk kasus $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, pilih $\beta = p'(n-\alpha) - n$. Dalam hal ini, p' adalah pangkat sekawan dari p, yaitu p' memenuhi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Oleh karena $\beta > 0$, maka dengan menggunakan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$
\begin{aligned}
II &= \int_{|x-y|\ge t} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\le \left(\int_{|x-y|\ge t} |f(y)|^{p}\, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x-y|\ge t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f : L^{p}(\mu)\| \left(\int_{|x-y|\ge t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{p'(n-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|f : L^{p}(\mu)\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k}t \le |x-y| < 2^{k+1}t} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n+\beta}} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le \|f : L^{p}(\mu)\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(Q(x,2^{k+1}t))}{(2^{k}t)^{n+\beta}} \right)^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}
$$

$$\leq C \| f : L^p(\mu) \| 2^{\frac{n}{p'}} t^{-\frac{\beta}{p'}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\beta} \right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= C \| f : L^p(\mu) \| t^{-\frac{\beta}{p'}}$$
$$= C t^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \|.$$

Catat bahwa apabila dipilih $p = 1$ dan $C = 1,$ maka diperoleh ketaksamaan yang sama dengan kasus $p = 1$ di atas. Dengan demikian, untuk $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ berlaku

$$| I_\alpha f(x) | \leq I + II$$
$$\leq C \left(t^\alpha Mf(x) + t^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \| \right)$$

untuk setiap $t > 0.$ Selanjutnya, dengan memilih

$$t = \left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}}$$

dan mensubstitusikannya ke dalam ketaksamaan terakhir, diperoleh

$$| I_\alpha f(x) | \leq C \left(\left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}} \right)^{\alpha} Mf(x) + C \left(\left(\frac{Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|} \right)^{-\frac{p}{n}} \right)^{-\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)} \| f : L^p(\mu) \|$$
$$= C \left(\frac{Mf(x)^{-\frac{p\alpha}{n}} Mf(x)}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}}} + \frac{Mf(x)^{-\frac{p\alpha}{n}+1}}{\| f : L^p(\mu) \|^{-\frac{p\alpha}{n}+1}} \| f : L^p(\mu) \| \right)$$
$$= C \left(\frac{Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}}{\| f : L^p(\mu) \|^{1-\frac{p\alpha}{n}}} \right)$$
$$= C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Dengan menggunakan fakta bahwa fungsi maksimal Mf terbatas di $L^p(\mu),$ maka bukti selesai.

■

Sekarang akan dibuktikan bahwa operator integral fraksional I_α bersifat terbatas di ruang Lebesgue tak homogen.

Bukti Teorema 2.1.

Dari Ketaksamaan Hedberg diperoleh

$$| I_\alpha f(x) | \leq C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p\alpha}{n}} Mf(x)^{1-\frac{p\alpha}{n}}.$$

Hal ini berakibat

$$\left(\int_{R^d} |I_\alpha f(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p\alpha}{n}} \left(\int_{R^d} |Mf(x)|^{q\left(1-\frac{p\alpha}{n}\right)} \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p\alpha}{n}} \left(\int_{R^d} |Mf(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p\alpha}{n}} \| Mf : L^p(\mu) \|^{\frac{p}{q}}$$

$$\le C \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p\alpha}{n}} \| f : L^p(\mu) \|^{\frac{p}{q}}$$

$$= C \| f : L^p(\mu) \|.$$

Jadi berlaku

$$\| I_\alpha f : L^q(\mu) \| \le C \| f : L^p(\mu) \|,$$

yaitu I_α terbatas dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$.

■

Ketaksamaan Olsen

Seperti halnya dengan hasil di ruang homogen (lihat [10]), disini akan dibuktikan ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen. Ketaksamaan Olsen ini menunjukkan keterbatasan operator WI_α untuk potensial yang dipertubasi W pada persamaan Schrödinger.

Teorema 3.1. *Untuk* $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$ *dan* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ *berlaku*

$$\| WI_\alpha f : L^p(\mu) \| \le C \| W : L^{\frac{n}{\alpha}}(\mu) \| \| f : L^p(\mu) \|,$$

yaitu WI_α *terbatas di* $L^p(\mu)$, *apabila* $W \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mu)$.

Bukti: Dengan menggunakan ketaksamaan Hölder diperoleh

$$\int_{R^d} |WI_\alpha f(y)|^p \, d\mu(y) \le \left(\int_{R^d} |W(y)|^{\frac{pq}{q-p}} \, d\mu(y)\right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_{R^d} |I_\alpha f(y)|^q \, d\mu(y)\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Apabila diambil akar pangkat- p dari kedua ruas ketaksamaan, maka

$$\left(\int_{R^d} |WI_\alpha f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{R^d} |W(y)|^{\frac{n}{\alpha}} \, d\mu(y)\right)^{\frac{\alpha}{n}} \left(\int_{R^d} |I_\alpha f(y)|^q \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Selanjutnya dengan menggunakan keterbatasan I_α dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$, diperoleh

$$\| WI_\alpha f : L^p(\mu) \| \le C \| W : L^{\frac{n}{\alpha}}(\mu) \| \| f : L^p(\mu) \|.$$

Penutup

Dengan menggunakan keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood dan Ketaksamaan Hedberg dapat dibuktikan keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue tak homogen. Selanjutnya keterbatasan operator integral fraksional ini diterapkan pada pembuktian ketaksamaan Olsen di ruang Lebesgue tak homogen. Hasil-hasil ini sekaligus mendukung fakta pada penelitian di area analisis Fourier yakni banyak teori di dalam analisis Fourier yang tetap berlaku apabila *kondisi doubling* digantikan oleh *kondisi growth*.

Daftar Pustaka

[1] Adams, D. R., "A note on Riesz potentials", *Duke Math. J.* **42** (1975), 765-778.

[2] Cuerva, J. G., and Gatto, A. E., "Boundedness properties of fractional integral operators associated to non-doubling measures", *Studia Math* **162** (2004), no. 3, 245-261.

[3] Cuerva, J. Garcia, and Martell, J. M., "Two weight norm inequalities for maximal operator and fractional integrals on non-homogeneous spaces", *Indianan University Mathematics Journal* **50** (2001), no. 3, 1241-1280.

[4] Gunawan, H., "A note on the generalized fractional inegral operators", *J. Indones. Math. Soc. (MIHMI)* **9** (2003), 39-43.

[5] Gunawan, H. and Eridani, "Fractional integrals and generalized Olsen inequalities", to appear in *Kyungpook Math. J.*

[6] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E., "Some properties of fractional integrals. I", *Math. Zeit.* **27** (1927), 565-606.

[7] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E., "Some properties of fractional integrals. II", *Math. Zeit.* **34** (1932),403-439.

[8] Nakai, E., "Recent topics on fractional integral operators" (Japanese), *Sūgaku* **56** (2004), 260-280.

[9] Nazarov, F., Treil, S., and Volberg, A., "Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderon-Zygmund operators on non-homogeneous spaces", *Internat. Math. Res. Notices* **9** (1998), 463-487.

[10] Olsen, P. A., "Fractional integration, Morrey spaces and a Schrödinger equation", *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), 2005-2055.

[11] Sawano, Y., Sobukawa, T. , and Tanaka, H., "Limiting case of the boundedness of fractional integral operators on non-homogeneous space", *J. Inequal. Appl. Art. ID 92470* (2006), 16p.

[12] Sihwaningrum, I. , Suryawan, H. P., and Gunawan, H. "Fractional integral operators and Olsen inequalities on non-homogeneous spaces", to appear in *Aust. J. of Math. Anal. and Appl.*

[13] Sobolev, S., "On a theorem in functional analysis" (Russian), *Mat. Sob.* **46** (1983), 471-497 [English translation in *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **34** (1963), 39-68].

SOLUSI PERIODIK TUNGGAL SUATU PERSAMAAN RAYLEIGH

Sugimin

Jurusan Matematika FMIPA UT
ugi@mail.ut.ac.id

ABSTRAK

Suatu persamaan vektor berbentuk $\dot{x} = f(x)$ dengan variabel bebas *t* yang tidak dinyatakan secara eksplisit disebut persamaan autonomous. Persamaan Rayleigh berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$. Bila persamaan Lienard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$ dengan $f(x)$ kontinu-Lipschitz dalam $\Re$ memenuhi:

(i) $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ suatu fungsi ganjil,

(ii) $F(x) \to +\infty$ untuk $x \to +\infty$ dan terdapat suatu konstanta $\beta > 0$ sehingga untuk $x > \beta$, $F(x) > 0$ dan monoton naik,

(iii) terdapat suatu konstanta $\alpha > 0$ sehingga untuk $0 < x < \alpha$, $F(x) < 0$,

maka persamaan tersebut paling sedikit mempunyai satu solusi periodik. Bila $\alpha = \beta$, maka hanya terdapat satu solusi. Dengan menghubungkan ke persamaan Van der Pol, ternyata persamaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal.

Kata kunci: Solusi Periodik Tunggal, Persamaan Rayleigh, Persamaan Van der Pol

I. PENDAHULUAN

Perhatikan sistem berikut:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Dianggap bahwa $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ terdefinisi pada domain *D* dalam bidang-*xy*, dan memenuhi kondisi Lipschitz untuk *x* dan *y* anggota persekitaran setiap titik di dalam *D*. Berikut pengertian dari kondisi Lipschitz:

Fungsi $f(t, x)$ yang didefinisikan pada $D \subset \Re$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz jika terdapat konstanta $K > 0$ sehingga $\left|f(t, x_1) - f(t, x_2)\right| \le K\left|x_1 - x_2\right|$ untuk $(t, x_1), (t, x_2) \in \Re$. Konstanta *K* disebut konstanta Lipschitz untuk *f*.

Suatu persamaan vektor berbentuk $\dot{x} = f(x)$ dengan variabel bebas *t* yang tidak dinyatakan secara eksplisit disebut persamaan autonomous.

Persamaan diferensial berbentuk $f(t, x, x', x'') = 0$ disebut persamaan diferensial orde dua, dengan $x' = \frac{dx}{dt}$ dan $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ atau ditulis $\dot{x} = x' = \frac{dx}{dt}$ dan $\ddot{x} = x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$. Pada tahun 1920 Van der Pol merumuskan persamaan berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$, sedangkan Rayleigh merumuskan persamaan berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$.

Dalam kajian ini dibahas persamaan Rayleigh berbentuk $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0$. Bagaimana cara menunjukkan bahwa persamaaan Rayleigh tersebut mempunyai solusi periodik tunggal bila dihubungkan dengan persamaan Van der Pol. Dengan demikian, tujuan dari kajian ini adalah menunjukkan persamaaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal dengan cara menghubungkan ke persamaan Van der Pol.

II. SOLUSI PERIODIK TUNGGAL

Untuk mengetahui pengertian solusi periodik tunggal, perhatikan definisi dan teorema berikut.

Definisi:

Misalkan bahwa $x = \phi(t)$ adalah solusi dari persamaan $\dot{x} = f(x),\ x \in D \subset \Re^n$ dan terdapat suatu bilangan positif T sehingga $\phi(t + T) = \phi(t)$ untuk semua $t \in \Re^n$. Maka $\phi(t)$ disebut solusi periodik dari persamaan tersebut dengan periode *T*.

Jika $\phi(t)$ memiliki periode *T*, maka solusi juga memiliki periode 2*T*, 3*T*, dan seterusnya. Bila *T* adalah periode terkecil, maka $\phi(t)$ disebut periodik-*T*.

Teorema:

Anggap persamaan Lienard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$ dengan $f(x)$ kontinu-Lipschitz dalam $\Re$. Jika asumsi:

(i) $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ suatu fungsi ganjil,

(ii) $F(x) \to +\infty$ untuk $x \to +\infty$ dan terdapat suatu konstanta $\beta > 0$ sehingga untuk $x > \beta$, $F(x) > 0$ dan monoton naik,

(iii) terdapat suatu konstanta $\alpha > 0$ sehingga untuk $0 < x < \alpha$, $F(x) < 0$,

maka persamaan tersebut paling sedikit mempunyai satu solusi periodik.

Bila $\alpha = \beta$, maka hanya terdapat satu solusi.

III. PERSAMAAN RAYLEIGH

Persamaan Rayleigh berbentuk

$$\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x},\ \mu > 0 \quad \text{.....} \quad (1)$$

Diferensiasi kedua ruas pada persamaan (1), diperoleh

$$\begin{aligned}\dddot{x} + \dot{x} &= \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\ddot{x} + \mu\left(-2\dot{x}\ddot{x}\right)\dot{x} \\ &= \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\ddot{x} + \mu\left(-2\dot{x}^2\right)\ddot{x} \\ &= \mu\left(1 - \dot{x}^2 - 2\dot{x}^2\right)\ddot{x}\end{aligned}$$

Sehingga diferensiasi dari persamaan (1) adalah

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu\left(1 - 3\dot{x}^2\right)\ddot{x} \quad \text{.....} \quad (2)$$

Dengan memisalkan $y = \dot{x}\sqrt{3}$, maka persamaan (2) menjadi

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu\left(1 - y^2\right)\ddot{x} \quad \text{.....} \quad (3)$$

Persamaan (3) ini adalah bentuk persamaan Van der Pol.

Persamaan (3) dapat ditulis

$$\dddot{x} - \mu\left(1 - y^2\right)\ddot{x} + \dot{x} = 0 \text{ atau } \dddot{x} + \mu\left(y^2 - 1\right)\ddot{x} + \dot{x} = 0.$$

Dalam hal ini $f(\dot{x}) = \mu\left(y^2 - 1\right)$ ..... (4)

Bila persamaan (4) diintegralkan terhadap *y*, diperoleh

$$F(\dot{x}) = \mu\left(\frac{1}{3}y^3 - y\right) \quad \text{.....} \quad (5)$$

Nilai $y = \dot{x}\sqrt{3}$ disubstitusikan ke persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned}F(\dot{x}) &= \mu\left(\frac{1}{3}\left(\dot{x}\sqrt{3}\right)^3 - \dot{x}\sqrt{3}\right) \\ &= \mu\left(\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\dot{x}^3 - \dot{x}\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

Sehingga didapat $F(\dot{x}) = \mu\sqrt{3}\dot{x}\left(\dot{x}^2 - 1\right)$.

Untuk mengetahui persamaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal atau tidak, diperhatikan langkah-langkah berikut:

(a) Telah didapatkan $F(\dot{x}) = \mu\sqrt{3}\left(\dot{x}^3 - \dot{x}\right)$, atau $\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left(\dot{x}^3 - \dot{x}\right)$.

Bila $(\dot{x}, \dot{y})$ diganti dengan $(-\dot{x},-\dot{y})$, diperoleh:

$$-\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left((-\dot{x})^3 - (-\dot{x})\right)$$
$$-\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left(-\dot{x}^3 + \dot{x}\right)$$

Bila kedua ruas dikalikan (-1), maka didapat $\dot{y} = \mu\sqrt{3}\left(\dot{x}^3 - \dot{x}\right)$.

Nampak bahwa $F(\dot{x})$ tak berubah untuk $(\dot{x}, \dot{y})$ dan $(-\dot{x},-\dot{y})$.

Jadi $F(\dot{x})$ merupakan fungsi ganjil.

(b) Untuk $\dot{x} \to +\infty$, nilai $F(\dot{x}) \to +\infty$; dan terdapat $\beta = 1 > 0$ sehingga untuk $\dot{x} > 1$, $F(\dot{x}) > 0$ dan $F(\dot{x})$ monoton naik.

(c) Terdapat $\alpha = 1 > 0$ sehingga untuk $0 < \dot{x} < \alpha = 1$, $F(\dot{x}) < 0$.

Dari (a), (b), dan (c) berarti syarat-syarat untuk solusi periodik tunggal dipenuhi.

Jadi, persamaan Rayleigh $\ddot{x} + x = \mu\left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x}$, $\mu > 0$ mempunyai solusi periodik tunggal.

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari kajian ini adalah dengan menghubungkan ke persamaan Van der Pol ternyata persamaan Rayleigh mempunyai solusi periodik tunggal.

Daftar Pustaka

Boyce, William E., Di Prima, Richard C. (1976). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, third Edition*. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Cronin, Jane (1994). *Differential Equations, Introduction and Qualitative Theory, Second Edition, Revised and Expansed*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Finney, Ross L., Ostberg, Donald R. (1976). *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*. USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hubbard, J. H., West, B. H. (1976). *Differential Equations, A Dynamical Systems Approach, Part I*. New York: Springer-Verlag, Inc.

Hurewicz, Witold (1958). *Lectures on Ordinary Differential Equations*. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc.

Jones, D. S., Sleeman, B. D. (1983). *Differential Equations and Mathematical Biology*. Australia: George Allen & Unwin, Inc.

Sanches, David A., Allen, Richard C., Jr., Kyner, Walter T. (1983). *Differential Equations, An Introduction*. Canada: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Verhulst, Ferdinand (1990). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.* Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ruang Barisan Selisih $\ell_p(\Delta), 1 < p < \infty$ dan Beberapa Permasalahan Karakterisasi Produk Tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta)$

Muslim Ansori

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung
Jln. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
E-mail: ansomath@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper we give the notion of difference sequence space $\ell_p(\Delta)$ and study some topological properties of this space. Some Characterization of tensor product $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty$ are given.
Key Words : *difference sequence, tensor product*

ABSTRAK

Tulisan ini membahas pengertian suatu ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ dan dikaji beberapa sifat topologis ruang ini. Selanjutnya, disajikan beberapa permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty$
Kata Kunci : *barisan selisih, produk tensor*

1. Pendahuluan

Kajian tentang ruang barisan selisih telah banyak dilakukan antara lain oleh Kizmaz [1], yang mendefinisikan ruang barisan selisih $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta)$ dan $c_0(\Delta)$ sebagai berikut:

$$X(\Delta) = \{x = \{x_k\} \subset \Re / C : \{\Delta_k\} \in X\},$$

dengan $X = \ell_\infty, c, c_0$ berturut-turut merupakan barisan terbatas, barisan konvergen dan barisan konvergen ke nol dengan norm pada X, dengan $\|x\|_X = \sup_k \{|x_k|\}$ dan $\Delta x = \{\Delta x_k\} = \{x_k - x_{k+1}\}$ untuk semua $k \in N$. Ruang di atas merupakan ruang Banach terhadap norm $\|x\|_{X(\Delta)} = |x_1| + \sup_k \{|\Delta x_k|\}$ .Perumuman ruang-ruang tersebut dikerjakan oleh Tripathy dan Esi [4].

Tulisan ini akan memodifikasi pengertian tersebut di atas dengan mengganti ruang ruang $X = \ell_\infty, c, c_0$ dengan ruang $\ell_p, 1 < p < \infty$, yaitu

$\Delta), 1 < p < \infty$

$$\ell_p = \left\{ x = \{x_k\} \subset \Re / C : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

dengan norm $\|.\|$,

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Selanjutnya, disajikan beberapa permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty$.

2. Pembahasan

Diberikan ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ dengan

$$\ell_p(\Delta) = \left\{ x = \{x_k\} \subset \Re / C : \{\Delta x_k\} \in \ell_p \right\},$$

dan $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$.

Proposisi 2.1 Ruang barisan $\ell_p(\Delta)$ dengan norm $\|.\|$,

$$\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

merupakan ruang linear bernorma.

Bukti: Di ambil sebarang skalar α dan β dan $x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in \ell_p(\Delta)$. Maka berlaku

$$\begin{aligned}
\|\alpha x + \beta y\| &= \|\{\alpha x_k\} + \{\beta y_k\}\| = \|\{\alpha x_k + \beta y_k\}\| \\
&= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(\alpha x_k + \beta y_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k + \beta y_k) - (\alpha x_{k+1} + \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) + (\beta y_k - \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(|(\alpha x_k - \alpha x_{k+1})| + |(\beta y_k - \beta y_{k+1})| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

menggunakan ketidaksamaan Minkowski

$$\le |\alpha x_1| + |\beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\beta y_k - \beta y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (\beta y_k - \beta y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le |\alpha||x_1| + |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (x_k - x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\beta||y_1| + |\beta| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (y_k - y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (x_k - x_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + |\beta| \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| (y_k - y_{k+1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\le |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + |\beta| \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$= |\alpha| \|x\| + \beta \|y\| .$$

Oleh karena itu, $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang linear.

Selanjutnya, jika $x = \theta = \{0, 0, ...\}$ maka $\|\theta\| = 0$. Sebaliknya, jika $\|x\| = 0$, maka

$$\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ dan } |\Delta x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k \in N .$$

Misal $k = 1$, yaitu $|\Delta x_1| = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 0$. Karena $x_1 = 0$ maka $x_2 = 0$. Proses ini diteruskan untuk $k = 2, 3, ...$ sehingga diperoleh $x_k = 0, k = 1, 2, ...$ atau $x = (x_k) = \theta$.

Untuk $\alpha = \beta = 1$, jelas berlaku

$$\|x + y\| \le \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = \|x\| + \|y\|$$

untuk setiap $x, y \in \ell_p(\Delta)$.

Terakhir, untuk sebarang skalar α dan $x \in \ell_p(\Delta)$ berlaku

$$\|\alpha x\| = |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(\alpha x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k - \alpha x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha||x_1| + |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\Delta), 1 < p < \infty$

$$= |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = |\alpha| \|x\| .$$

Oleh karena itu, $\left(\ell_p(\Delta), \|.\| \right)$ merupakan ruang linear bernorma.■

Teorema 2.2 $\left(\ell_p(\Delta), \|.\| \right)$ merupakan ruang Banach.

Bukti : Di ambil sebarang barisan Cauchy $\{x^n\} \subset \ell_p(\Delta)$ dengan $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta)$ untuk setiap $n \in N$. Maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positip $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x^n - x^m\| < \varepsilon .$$

Oleh karena itu,

$$\|x^n - x^m\| = |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k^n - x_k^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^n - x_k^m) - (x_{k+1}^n - x_{k+1}^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^n - x_{k+1}^n) - (x_k^m - x_{k+1}^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.2a)$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(|(x_k^n - x_k^m)| + |(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m)| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^n - x_k^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

sehingga

$$|(x_k^n - x_k^m)| < \varepsilon$$

untuk setiap bilangan bulat positip $m, n \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \ldots$. Oleh karena itu $\{x_k^n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\Re / C$. Karena $\Re / C$ lengkap, maka terdapat $x_k \in \Re / C$ sehingga

$$|(x_k^n - x_k)| < \varepsilon \qquad (2.2b)$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \ldots$.

Berdasarkan (2.2a) diperoleh $\left\{\Delta x_k^n\right\}$ merupakan barisan Cauchy di $\Re / C$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Oleh karena itu terdapat $\Delta x_k \in \Re / C$ sehingga

$$\left|\Delta x_k^n - \Delta x_k\right| < \frac{\varepsilon}{2^{(k+1)}}. \qquad (2.2c)$$

Berdasarkan (2.2a), (2.2b) dan (2.2c) diperoleh

$$\left|\left(x_1^n - x_1\right)\right| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta x_k^n - \Delta x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < 3\varepsilon .$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \ldots$.

Namakan $\left(x_k\right) = x$, berakibat $\lim_{m\to} \left\|x^n - x^m\right\| = \left\|x^n - x\right\| < 3\varepsilon$. Terbukti $\left(\ell_p(\Delta), \|.\|\right)$ merupakan ruang Banach.■

Sebagai motivasi untuk menyuguhkan permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \times \ell_q(\Delta)$, terlebih dahulu dibahas produk tensor $\ell_p \times \ell_q, 1 < p, q < \infty$.

Diberikan ruang barisan $\ell_p, \ell_q, 1 < p, q < \infty$. Produk tensor $\ell_p \times \ell_q$ dari ℓ_p dan ℓ_q didefinisikan sebagai penutup dari ruang linear yang dibangun oleh $\left\{x \otimes y : x \in \ell_p, y \in \ell_q\right\}$

dengan

$$x \otimes y = x.y^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}\left(y_1, y_2, \ldots\right) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \ldots \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Diberikan matriks takhingga $\left(a_{ij}\right)$. Ruang matriks Lebesgue $\ell_q\left(N \times N\right)$, didefinisikan sebagai berikut: $\ell_q\left(N \times N\right) = \left\{\left(a_{ij}\right) : \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^q < \infty\right\}$. Kaitan antara produk tensor $\ell_p \times \ell_q$ dan ruang matriks Lebesgue $\ell_r\left(N \times N\right)$ disajikan dalam Lemma berikut.

Lemma 2.3

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) dengan

(i) $r = maks\left(p, q\right)$

(ii) $\left(uv\right)^r \leq u^p v^q$ untuk setiap $u, v \in \left[0,1\right]$

$\Delta), 1 < p < \infty$

(iii) $\|x \otimes y\| \le \|x\| \|y\|$ untuk setiap $x \in \ell_p, y \in \ell_q$

(iv) $\ell_p \otimes \ell_q \subset \ell_r (N \times N)$

Bukti:(i) $\Rightarrow$ (ii):(i) $\Rightarrow u^{r-p} v^{r-q} \le 1$ untuk setiap $u, v \in [0,1]$ yang berakibat (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :untuk sebarang

$$0 \ne x = (x_1, x_2, \ldots)^T \in \ell_p(\Delta) \text{ dan } 0 \ne y = (y_1, y_2, \ldots)^T \in \ell_q(\Delta)$$

berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|} \right)^p = 1 \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|y_j|}{\|y\|} \right)^q = 1.$$

Karena

$$\left\| \frac{x \otimes y}{\|x\| \, \|y\|} \right\|^r = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i y_j|}{\|x\| \, \|y\|} \right)^r \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|} \right)^p \left(\frac{|y_j|}{\|y\|} \right)^q \le \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|} \right)^p \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|y_j|}{\|y\|} \right)^q = 1. \blacksquare$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Di ambil sebarang $x \otimes y \in \ell_p \times \ell_q$ dengan $x \in \ell_p, y \in \ell_q$. Oleh karena itu, terdapat matriks (a_{ij}) dengan $x \otimes y = (a_{ij}) = (x_i y_j)$ dan karena $\|x \otimes y\| \le \|x\| \|y\|$ untuk setiap $x \in \ell_p, y \in \ell_q$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^r &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_i y_j|^r \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_i|^r |y_j|^r \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^r \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^r = \|x\|^r \|y\|^r < \infty \blacksquare \end{aligned}$$

3. Simpulan Dan Saran

Berdasarkan uraian di atas dapat dikemukakan beberapa hal sebagai berikut:

1. Ruang barisan $(\ell_p(\Delta), \|.\|)$ dengan norm $\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang linear bernorma yang lengkap.
2. Berdasarkan Lemma 2.3 dan Kesimpulan 1, Permasalahan baru berkaitan dengan sifat-sifat produk tensor $\ell_p(\Delta) \times \ell_q(\Delta)$ dengan definisi norm tertentu.

3. Aplikasi ruang-ruang tersebut pada teori operator matriks takhingga dari ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ ke ruang barisan selisih $\ell_q(\Delta)$.

4. Daftar Pustaka

[1] Kizmaz,H. (1981), *On Certain Sequence Spaces*, Canad. Math. Bull.,24,169-176.

[2] Kamthan,P.K and Gupta,M. (1981), Sequence Spaces and Series, *Marcel Dekker Inc. New York.*

[3] Maddox, I.J, (1970), Elements of Functional Analysis, *Cambridge Univ. Press*.

[4] Tripathy, B.C and Esi H. (2006), *A new type of Difference Sequence Spaces*, Intl. Journal of Science and Tech., 1, 1, 11-14.

Menampilkan Penaksir Parameter pada Model Linear *

Mulyana **

Abstrak

Pada model linear $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, jika $\hat{\underline{\beta}}$ penaksir untuk $\underline{\beta}$, maka $X\hat{\underline{\beta}}$ memiliki dua peran. Yaitu sebagai penaksir **faktual**, $\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$, dan penaksir **rata-rata hitung**, $\hat{E}(\underline{Y}) = X\hat{\underline{\beta}}$. Untuk menampilkan peran mana yang diutamakan, maka dapat digunakan fungsi target dengan persamaan $\underline{T} = \lambda\underline{Y} + (1-\lambda)E(\underline{Y})$, $0 < \lambda < 1$. Dengan formulasi ini, $\underline{T}$ memiliki ciri seperti $\underline{Y}$.

Kata kunci : model linear, penaksir, fungsi target

Abstract

In linear models $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ *, if* $\hat{\underline{\beta}}$ *estimator for* $\underline{\beta}$ *, then* $X\hat{\underline{\beta}}$ *have two character. That is* ***factual*** *estimator* $\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$*, and* ***mean*** *estimator* $\hat{E}(\underline{Y}) = X\hat{\underline{\beta}}$, $\hat{E}(\underline{Y}) = X\hat{\underline{\beta}}$*. For puts forward which main character, then use target function* $\underline{T} = \lambda\underline{Y} + (1-\lambda)E(\underline{Y})$, $0 < \lambda < 1$. *With this formulation* $\underline{T}$ *and* $\underline{Y}$*, have same characteristic.*

Keywords : *linear model, estimator, target function*

*** : Makalah hasil penelitian kepustakaan, disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Yogjakarta tanggal 28 November 2008**

**** : Staf Pengajar Jurusan Statistika FMIPA Unpad**
Jl. Raya Bandung – Sumedang Km. 21, Jatinangor Sumedang
[Telp. : 022 779 6002 (Kantor) ; 022 7949 312 (Rumah) ; HP : 0815 622 1812]

Pendahuluan

Perhatikan model linear sampel dalam persamaan matriks

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

dengan, $\underline{Y}$, nx1 : vektor pengamatan ; X, nxp : matriks *explatory* dengan *rank* penuh; $\underline{\beta}$, px1 : vektor parameter model ; $\underline{\varepsilon}$, nx1 : vektor kekeliruan dengan asumsi $\underline{\varepsilon} \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I)$, I matriks identitas.

Berdasarkan metode kemungkinan maksimum, penaksir untuk $\underline{\beta}$ adalah

$$\hat{\underline{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$$

sehingga model ramalannya, $\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$.

Dalam hal ini $\hat{\underline{Y}}$, dinamakan **taksiran nilai faktual**.

Karena $E(\underline{Y}) = E(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) = E(X\underline{\beta}) = X\underline{\beta}$, maka berdasarkan sifat linearitas model, taksiran $E(\underline{Y})$ sama dengan, $E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$.

Dalam hal ini $E(\hat{\underline{Y}})$ dinamakan **taksiran rata-rata hitung nilai faktual**.

Dari hasil paparan tersebut, jadi $X\hat{\underline{\beta}}$ memiliki dua peran, yaitu sebagai penaksir nilai faktual dan rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga untuk keperluan analisis, perlu dipilih peran mana yang akan digunakan.

Fungsi Target

Graybill (1961) menunjukan bahwa $\hat{\underline{\beta}}$ merupakan statistik (1) tak bias, (2) bervarians minimum, (3) cukup, (4) lengkap, (5) konsisten, dan (6) efisien. Sehingga Zellner (1994), merekomendasikan fungsi kegagalan tertimbang (fungsi kegagalan diboboti, *balanced lost function*), dengan persamaan

$$\lambda\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right) + (1-\lambda)\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)$$

λ : konstanta nonstokastik, $0 < \lambda < 1$,

jika $\hat{\underline{\beta}}$ digunakan sebagai penaksir untuk $\underline{\beta}$.

Pada formulasi yang diajukan Zellner tersurat, suku pertama merupakan jumlah kuadrat residu (deviasi), jika $\hat{\underline{\beta}}$ sebagai penaksir nilai faktual, sedangkan suku kedua jika sebagai penaksir rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga Giles, Giles dan Ohtani (1996) dengan Wan (1994), berpendapat, formulasi fungsi kegagalan tersebut dapat digunakan sebagai acuan untuk menetapkan peran yang diutamakan untuk $X\hat{\underline{\beta}}$.

Mengacu pada formulasi fungsi kegagalan dan pendapat-pendapat tersebut, untuk menentukan peran mana yang akan diutamakan dari $X\hat{\underline{\beta}}$, dapat digunakan fungsi target dengan persamaan

$$\underline{T} = \tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})$$

τ : $0 < \tau < 1$, konstanta nonstokastik.
Berdasarkan sifat linearitas model, maka

1. $\hat{\underline{T}} = \tau\hat{\underline{Y}} + (1-\tau)E(\hat{\underline{Y}}) = \tau X\hat{\underline{\beta}} + (1-\tau)X\hat{\underline{\beta}} = X\hat{\underline{\beta}}$
2. $E(\underline{T}) = E(\tau\underline{Y}) + E((1-\tau)E(\underline{Y})) = \tau E(\underline{Y}) + (1-\lambda)E(\underline{Y}) = E(\underline{Y})$

   Sehingga $E(\hat{\underline{T}}) = E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$

Hal ini menyimpulkan bahwa, fungsi target $\underline{T}$ memiliki ciri seperti $\underline{Y}$. Sehingga jika $X\hat{\underline{\beta}}$ ingin digunakan sebagai penaksir faktual ($\hat{\underline{Y}}$), maka $\tau \to 1$, sedangkan sebagai penaksir rata-rata hitung nilai faktual ($X\hat{\underline{\beta}}$), $\tau \to 0$.

Fungsi kegagalan jika $\underline{T}$ digunakan sebagai target penaksiran parameter model ($X\hat{\underline{\beta}}$), sama dengan

$$\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{T}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{T}\right) = \left(X\hat{\underline{\beta}} - \{\tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})\}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \{\tau\underline{Y} + (1-\tau)E(\underline{Y})\}\right)$$

yang jika dijabarkan, akan diperoleh persamaan

$$g(\tau) = (1-\tau)^2\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right) + \tau^2\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right) + 2\tau(1-\tau)\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - X\underline{\beta}\right)$$

Kesimpulan

Pada formulasi fungsi kegagalan g(τ), dua suku pertamanya identik dengan fungsi kegagalan tertimbang, seperti yang dikemukakan Zellner (1994), sedangkan suku ketiganya merupakan kovarians tertimbang antara kedua simpangan dari peran $X\hat{\underline{\beta}}$. Hal ini menyimpulkan, jika ingin menampilkan sasaran dari analisis regresi biasa, yaitu menentukan apakah $X\hat{\underline{\beta}}$, sebagai penaksir nilai aktual ($\hat{\underline{Y}} = X\hat{\underline{\beta}}$), atau rata-rata nilai aktual ($E(\hat{\underline{Y}}) = X\hat{\underline{\beta}}$), maka ada dua besaran yang harus disyaratkan, yaitu **pembobot** (τ) dan **simpangan** ($\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}$).

Fungsi resikonya (*risk function*) dari fungsi target $\underline{T}$, sama dengan $R(\tau) = E\{g(\tau)\}$, yang jika dijabarkan sama dengan $\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)'\left(X\hat{\underline{\beta}} - \underline{Y}\right)$. Hal ini menunjukan bahwa fungsi resiko bersifat konstan, sama dengan jumlah kuadrat total residu (*total predictive means squared error*, **MSE**). Sehingga untuk menampilkan peran dari $X\hat{\underline{\beta}}$, harus dilakukan klasifikasi model dengan MSE minimal.

Terapan

Teori ini dapat digunakan untuk membandingkan dua kelompok yang berbeda dalam menampilkan peran dari penaksir parameter regresi linear. Misal antara pengguna obat dengan pabrik pembuat obat tersebut. Berdasarkan teori Farmakologi, tingkat penyembuhan obat (Y) bergantung pada beberapa faktor, diantaranya umur (X_1), asupan gizi (X_2) dan kedisiplinan meminum obat (X_3). Dengan model regresinya linear,

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Taksiran untuk β_1, β_2 dan β_3, bagi pengguna obat adalah taksiran faktual, sedangkan pabrik, taksiran rata-rata hitung nilai faktual. Sehingga dalam membangun fungsi target $\underline{T}$, untuk pengguna obat, $\tau \to 1$, sedangkan untuk pabrik $\tau \to 0$. Dengan deviasi bisa digunakan sama.

Berdasarkan sampel yang diambil untuk masing-masing kelompok pengamatan (pengguna obat dan pabrik obatny), lakukan identifikasi model dengan MSE minimal. Selanjutnya lakukan telaah perbandingan model, untuk menentukan peran mana yang akan dipilih.

Kepustakaan

de Jonge, H. ; 1961 ; ***Quantitative Methods in Pharma cology*** ; Proceeding of A Symposium Held inLeyden, on May 10 – 13.

Giles, J. A. , Giles, D. E. A. , Ohtani, K. ; 1996 ; ***The Exact Risk of Some Pre-Test and Stein-Type Regression Estimators Under Balanced Loss*** ; Communications in Statistics-Theory Math. vol. 25.

Graybill, F. A. ; 1961 ; ***An Introduction to Linear Statistical Models*** ; McGraw-Hill ; New York.

Hogg, R. V. , Craig A. T. ; 1978 ; ***Introduction to Mathematical Statistics, 4th ed.*** ; Macmillan Publishing Co. Inc. ; New York.

Shalabi ; 1999 ; ***Improving The Prediction in Linear Regression Models*** ; Journal of Statistical Research vol. 33 ; Bangladesh.

Steel, R. G. D. , Torrie, J. H. ; 1981 ; ***Principle and Procedures of Statistics, a Biometrical Approach*** ; McGraw-Hill Int. Book Co. ; Auckland

Zellner, A. ; 1994 ; ***Bayesian and Non-Bayesian Estimation Using Balanced loss Functions, Statistical Decision Theory and Related Topics V*** ; Springer-Verlag, Eds. S. S. Gupta and J. O. Berger ; New York.

Simulasi Radius Jarak Pengaruhnya terhadap Kebaikan Model Regresi Logistik Spasial[1]

Utami Dyah Syafitri[2], Agus M Sholeh[2], Poppy Suprapti[3]

Abstrak

Pemodelan regresi logistik dengan basis ruang spasial perlu mengakomodir pengaruh spasial tersebut. Salah satu pendekatan untuk mengakomodir pengaruh spasial tersebut dengan pendekatan variogram. Pembobot spasial yang diberikan tergantung jarak antar desanya. Pada penelitian ini akan dilakukan simulasi radius jarak yang digunakan dalam pembobotan untuk kebaikan hasil pendugaan dengan regresi logistik spasial. Studi kasus yang diambil dalam penelitian ini adalah pendugaan status kemiskinan desa di Jawa Barat.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa jarak yang digunakan dalam pembobot spasial mempengaruhi hasil pendugaan yang dihasilkan. Berdasarkan nilai *c-statistic* dan *correct clasification rate*-nya, bahwa jarak radius yang semakin dekat akan menghasilkan prediksi yang lebih baik.

Kata kunci : model regresi logistik spasial, variogram, simulasi

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pemodelan regresi logistik dengan basis ruang (spasial) perlu mengakomodir pengaruh spasial tersebut. Beberapa pendekatan yang dapat digunakan dalam mengakomodir pengaruh spasial antara lain dengan pendekatan *generalized linear mixed model*, variogram, serta matriks kontiguity.

Pratama (2008) melakukan pemodelan regresi logistik spasial terhadap status kemiskinan desa di Jawa Barat. Pembobot spasial yang digunakan menggunakan pendekatan fungsi-fungsi variogram. Pembobot spasial dilakukan pada jarak desa yang ber-radius 27,5 km. Hasil yag diperoleh menunjukkan bahwa regresi logistik spasial dengan pendekatan variogram menunjukkan tingkat akurasi prediksi sedikit lebih baik dibandingkan dengan regresi logistik klasik. Namun hasil yang didapatkan belum cukup memuaskan. Salah satu faktor yang ditenggarai mampu memperbaiki model adalah definisi jarak desa yang digunakan. Sehingga dalam penelitian ini dilakukan simulasi berbagai kemungkinan jarak yang digunakan untuk memperbaiki pendugaan model regresi logistik spasial.

Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui jarak antar desa yang menghasilkan prediksi yang lebih baik dari Pratama (2008) dalam menduga status kemiskinan desa di Jawa Barat.

Kerangka Pikir Penelitian

Andaikan sebuah bidang S tersekat-sekat n buah sub bidang (lokasi) yang saling lepas, yaitu $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dengan $S_1 \bigcup S_2 \bigcup \ldots \bigcup S_n = S$ dan $si \cap sj = \varnothing$. Setiap subbidang s_i memiliki sentroid pada titik c_i. Nilai pengukuran $Y, X_1, X_2, \ldots X_p$ di masing-masing sub-bidang adalah $y_i, x_{1i}, x_{2i}, \ldots x_{pi}$.

Jika Y memiliki hubungan spasial, dan dipengaruhi oleh $X_1, X_2, \ldots X_p$ maka model yang bisa dibentuk adalah : $yi = \boldsymbol{xi}'\beta + \boldsymbol{zi}'\boldsymbol{y}\,\beta^* + \varepsilon i$...(1) dengan $\boldsymbol{xi} = (1x1i, 1x2i, \ldots, 1xpi)'$ merupakan vektor $p \times 1$ yang berisi nilai-nilai pengamatan peubah $X_1, X_2, \ldots X_p$ pada sub-bidang s_i dan $\boldsymbol{y}' = (y_1, y_2 \ldots y_n)$ adalah nilai-nilai pengamatan peubah Y dari seluruh lokasi.

Vektor $\boldsymbol{z}$ berukuran $n \times 1$ menyatakan bobot spasial antar sub-bidang terhadap nilai di sub-bidang lainnya. Menggunakan notasi matriks, model (1) dapat dituliskan sebagai $\mathbf{y} = \mathbf{X}\,\beta + \boldsymbol{Zy}\,\beta^* + \boldsymbol{\varepsilon}$...(2) pada model (2) terdapat $\boldsymbol{Z}$ yang merupakan sebuah matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial diharapkan dapat menggambarkan pengaruh

[1] Diseminarkan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Univeristas Negeri Yogyakarta, Jumat 28 November 2008,

[2] Staf Pengajar Departemen Statistika FMIPAIPB
[3] Mahasiswa Departemen Statistika FMIPA IPB

antar desa, dimana desa yang berdekatan memberikan pengaruh yang lebih besar dibandingkan dengan desa yang berjauhan.

Variogram yang akan digunakan untuk menghitung matriks pembobot spasial menggambarkan keragaman antar daerah berdasarkan jaraknya. Semakin jauh jarak antar daerah maka keragaman yang terbentuk akan semakin besar menuju kekonvergenan. Pada jarak tertentu maka keragaman yang terbentuk mulai menuju titik kekonvergenan. Jika titik telah konvergen maka pengaruh spasialnya juga semakin berkurang. Sehingga batasan jarak yang digunakan adalah di sekitar titik mulai kekonvergenan (sill).

Berkaitan dengan pembobotan, desa – desa yang mempunyai jarak yang dekat diberikan pembobot yang besar. Sebaliknya desa-desa yang berjarak jauh diberi pembobot yang kecil. Oleh karena itu, dilakukan proses pembalikan matriks variogram kemudian hasil pembalikan matriks variogram dijadikan matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial (***Z***) dikalikan dengan vektor ***y*** yang kemudian dianggap sebagai sebuah peubah penjelas baru (***w***) dan akan digunakan dalam analisis regresi logistik.

TINJAUAN PUSTAKA

Regresi Logistik Spasial

Hosmer dan Lemeshow (1989) menjelaskan bahwa yang membedakan model regresi logistik dan model regresi linear adalah peubah hasil pada regresi logistik berskala biner atau dikhotom, sedangkan pada regresi linear peubah hasilnya berskala numerik. Model regresi logistik dengan *E(Y=1|x)* Sebagai $\pi(x)$ adalah :

$$\pi(x) = \frac{e^{g(x)}}{1+e^{g(x)}}$$

dalam regresi logistik diperlukan fungsi penghubung logit, transformasi logit sebagai fungsi dari $\pi(x)$ adalah

$$g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p$$

Preisler *et al*. (1995) dalam Fernandez (2003) menyebutkan bahwa pendekatan dengan memasukkan hubungan spasial ke dalam model terdapat dua pendekatan yaitu memasukkan lokasi ke dalam model dan memasukkan suku autologistik. Augustin *et al.* (1996) dalam Fernadez (2003) menggunakan model dalam bentuk :

$$y = \log\left[\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right] + \beta\psi$$

$$\psi_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} w_{ij}\hat{y}_i}{w_{ij}}$$

model dari ψ merupakan bentuk dari autokovarian dan merupakan rataan terboboti dari jumlah kejadian dalam suatu lokasi ke-I yang terdiri dari *k* tetangganya. Pembobot dari lokasi ke-j adalah *wij = 1/hij* dimana *hij* adalah jarak *euclidean* antara lokasi ke-i dan ke-j. Serta $\hat{y}$ adalah dugaan dari ada/tidaknya suatu kejadian.

Variogram

Analisis variogram melakukan penghitungan pada sejumlah lokasi dan melihat hubungan antar observasi pada berbagai lokasi. Variogram menghitung hubungan antara perbedaan pengukuran berpasangan dan jarak dari poin-poin yang bersesuaian satu sama lain. Variogram merupakan keragaman spasial antar lokasi dengan saling ketergantungan satu sama lain dalam ruang berdimensi *m*. Variogram merupakan fungsi spasial terbaik yang diketahui (Ashraf et al., 1997). Persamaan umum untuk contoh variogram adalah (Matheron 1962, dalam Cressie 1993):

$$2\gamma(h) = \frac{1}{N(h)}\sum_{N(h)}\left(Z(x_i) - Z(x_j)\right)^2 ; i, j \in N(h)$$

dengan *N(h)* adalah banyaknya pasangan lokasi (contoh) yang berjarak *h*. Variogram akan memenuhi beberapa asumsi. Misalkan terdapat gugusan nilai $z(x_i)$ pada lokasi x_i, *i=1,2,3, ..., n* dalam ruang berdimensi *m*, maka asumsi yang harus terpenuhi adalah (Cressie, 1993):

1. $E\left(Z(x+h) - Z(x)\right) = 0$
2. $Var\left(Z(x+h) - Z(x)\right) = 2\gamma(h)$

dengan *h* adalah jarak antara dua lokasi yang terpisah. Sifat dari variogram, adalah:

1. Monoton tidak turun
2. Bernilai positif

Model *Power*

Hubungan antara variogram dengan jarak untuk model power dibentuk dalam persamaan :

$\gamma(h) = c_0 + ph^{\alpha}$, dengan $0 < \alpha < 2$

dengan :
c_0 = intersep
p = kemiringan kurva
h = jarak antar pengamatan

Correct Classification Rate (CCR)

Hosmer dan Lemeshow (1989) menjelaskan bahwa *correct classification rate* adalah persentasi kebenaran (kesesuaian) nilai pengamatan dengan dugaannya.

$$CCR = \frac{\text{banyaknya dugaan yang benar}}{\text{banyaknya pengamatan}} x100\%$$

BAHAN DAN METODOLOGI

Bahan

Data yang digunakan dalam penelitian ini sama denga Pratama (2008) menggunakan data Potensi Desa (PODES) tahun 2006. Wilayah yang digunakan hanya sebagian dari Jawa Barat (Tabel 1).

Tabel 1. Daftar nama kota dan kabupaten yang digunakan

Kode Kabupaten	Nama Kabupaten	Jumlah Desa
3201000000	Kab Bogor	415
3202000000	Kab Sukabumi	340
3203000000	Kab Cianjur	344
3204000000	Kab Bandung	436
3213000000	Kab Subang	248
3214000000	Kab Purwakarta	190
3215000000	Kab Karawang	304
3216000000	Kab Bekasi	179
3271000000	Kota Bogor	63
3272000000	Kota Sukabumi	33
3273000000	Kota Bandung	139
3275000000	Kota Bekasi	43
3277000000	Kota Cimahi	15
Total		2749

Baik peubah penjelas maupun peubah respon yang digunakan dalam penelitian ini mengacu kepada peubah yang digunakan oleh Pratama (2008). Peubah-peubah penjelas yang digunakan selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2. Peubah respon yang digunakan adalah status kemiskinan desa. status kemiskinan desa ditentukan berdasarkan presentase keluarga miskin pada masing-masing desa. Apabila persentase keluarga miskin suatu desa lebih besar dari persentase keluarga miskin secara keseluruhan (36%) maka desa tersebut dikategorikan sebagai desa miskin. Sebaliknya dikategorikan sebagai desa tidak miskin. Sedangkan untuk memperoleh informasi hubungan spasial dibutuhkan data mengenai lokasi dari masing-masing desa (lintang dan bujur desa).

Tabel 2. Peubah penjelas yang digunakan

Peubah	Jenis	Keterangan
Ada/Tidak penduduk desa yang Bekerja Sebagai TKI (X_1)	Kategorik	1 = ada 0 = tidak ada
Persentase Keluarga Yang menerima kartu sehat (X_2)	Numerik	Jumlah penerima Jumlah keluarga
Persentase luas sawah (X_3)	Numerik	Luas lahan sawah Luas desa/kelurahan
Persentase Rumah tangga Yang menggunakan listrik (X_4)	Numerik	Jumlah pemakai Jumlah keluarga
Ada/Tidak puskesmas di Daerah tersebut (X_5)	Kategorik	1 = ada 0 = tidak ada

Metodologi

Alur penelitian yang dilakukan adalah:

1. Membuat matriks jarak euklid antar desa berdasarkan lintang dan bujur desa.
2. Dari fungsi variogram model power yang dilakukan oleh Pratama (2008) dan matriks jarak dibuat matriks peragam spasial. Pada penelitian jarak yang digunakan pada radius 7.5 km, 10 km, 15 km, 20km, 25 km, 27.5 km, dan 30 km.
3. Membalikan matriks peragam spasial yang akan dijadikan matriks pembobot spasial (***Z***)
4. Membuat peubah penjelas baru (***w***) yang telah diberi pengaruh spasial dengan mengalikan ***Z*** dan ***y***
5. Melakukan pendugaan dengan menggunakan regresi logistik yang telah ditambahkan peubah penjelasnya.
6. Membandingkan hasil pendugaan regresi logistik menggunakan matriks pembobot berdasarkan simulasi radius jarak variogram yang ditentukan.

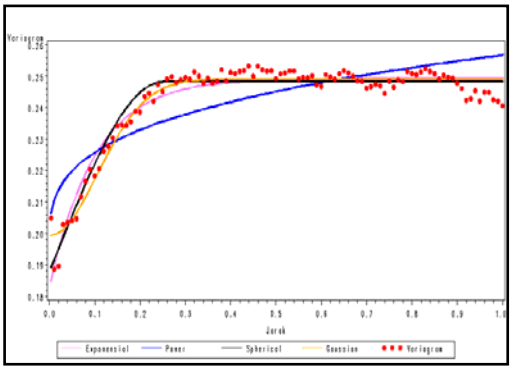
Penentuan radius jarak variogram terbaik dapat dilihat dari nilai *correct classification rate* dan *c-statistic*. Perangkat lunak yang digunakan dalam penelitian ini adalah SAS ver 9.1 dan Microsoft Office Excel 2003.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dugaan fungsi variogram model power yang dilakukan Pratama (2008) adalah $\hat{\gamma}(h) = 0.1753h^{0.3} + 0.0802$. Model tersebut mempunyai koefisien determinasi sebesar 73.21%. Dibandingkan dengan model variogram lainnya model power menghasilkan prediksi yang kurang bagus dibandingkan dengan model variogram lainnya (Gambar 1).

Gambar 1. Plot dugaan dari masing-masing model variogram

Namun dari segi pemodelan regresi logistik spasial model ini lebih bagus. Maka dalam penelitian ini selanjutnya akan menggunakan model power ini.



Faktor-faktor yang mempengaruhi status kemiskinan desa dengan radius jarak lebih besar atau sama dengan 20 km pada taraf alfa 10% adalah ada/tidak penduduk yang bekerja sebagai TKI, jarak dari desa ke ibukota kabupaten/kota, presentase keluarga yang menerima kartu sehat, persentase luas sawah, persentase keluarga yang memakai listrik, ada/tidak puskesmas di desa tersebut, dan hubungan spasial. Sedangkan untuk radius jarak kurang dari 20 km dengan taraf alfa 10%, faktor-faktor yang mempengaruhi status kemiskinan desa adalah jarak dari desa ke ibukota kabupaten/kota, presentase keluarga yang menerima kartu sehat, persentase luas sawah, ada/tidak puskesmas di desa tersebut, dan hubungan spasial.

Dari berbagai simulasi jarak yang dilakukan terlihat bahwa nilai *correct classification rate* dan *c-statistic* semakin menurun seiring dengan bertambahnya radius jarak yang digunakan (Tabel 3). Hal tersebut menunjukkan bahwa daerah yang berdekatan akan memberikan pengaruh spatial yang cukup signifikan terhadap kebaikan pendugaan model.

Tabel 3. Nilai dugaan koefisien regresi logistik dengan berbagai simulasi jarak

Peubah	Dugaan koefisien						
	7.5 km	10 km	15 km	20 km	25 km	27.5 km	30 km
Intercept	2.9321	2.846	2.7393	2.6583	2.6988	2.7299	2.6913
Ada/tidak penduduk yang bekerja sebagai TKI	-0.1368*	-0.1436*	-0.1391*	-0.1835	-0.2186	-0.2305	-0.2428
Jarak dari desa ke ibukota kabupaten/kota	-0.018	-0.0179	-0.0172	-0.0161	-0.0154	-0.0157	-0.0159
Persentase keluarga yang menerima kartu sehat	-2.4536	-2.4424	-2.5127	-2.5456	-2.6021	-2.6364	-2.7053
Persentase luas sawah	-0.8902	-0.9264	-1.0475	-1.1434	-1.2346	-1.271	-1.3047
Persentase keluarga yang memakai listrik	0.0382*	0.1306	0.2593*	0.3806	0.4423	0.4702	0.4819
Ada/tidak puskesmas di desa tersebut	0.2283	0.2438	0.2567	0.2636	0.2563	0.252	0.246
X spasial	-4.218	-4.1598	-4.0465	-3.9481	-3.9719	-4.0039	-3.871
C-statistic	80.10%	78.40%	76.50%	75%	74.30%	74.00%	73.60%
Correct classification rate	71.73%	70.46%	69.33%	67.44%	67.00%	66.89%	66.42%

* menunjukkan peubah tidak bersifat nyata pada alfa 10%

KESIMPULAN

Pembobot spasial yang digunakan dalam model regresi logistik spasial tergantung terhadap radius jarak yang digunakan. Apabila pembobotan dilakukan dalam radius jarak yang lebih dekat maka akan dihasilkan hasil prediksi yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Ashraf, M., Jim C. L., K. G. Hubbard. 1997. *Application of Geostatistics to Evaluate Partial Weather Station Network.* J. Agricultural and Forest Meteorology. 84:255-271.

Bohling, Geoff. 2005. *Introduction to Geostatistics and Variogram Analysis.* Kansas Geological Survey 864-2093.

Cressie, NAC. 1993. *Statistics for Spatial Data.* Canada: John Wiley and Sons, Inc. 11

Frei, Allan. 2005. *Notes On Spatial Autoccorelation and Regrresion*. Hunter College.

Hosmer DW, Lemeshow S. 1989. *Applied Logistic Regression*. New York: J. Wiley.

Pratama, Vinda. 2008. Perbandingan Hasil Akurasi Prediksi Model Regresi Spasial untuk Berbagai Model Variogram. *Skripsi*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Pertanian Bogor.

Searle, S. R. 1971. *Linear Models*. John Wiley & Sons, Inc: New York, hal 1-7.

Xie, Chenglin, Bo Huang, Christophe Claramunt and Magesh Chandramouli. 2005. *Spatial Logistic Regression and GIS to Model Rural-Urban Land Conversion*.

Estimasi Bayesian untuk Penentuan Besarnya Pengaruh Genetik terhadap Sifat Fenotip dan Studi Simulasinya

Adi Setiawan (adi_setia_03@yahoo.com)
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jl. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711, Indonesia

Abstract

Twins that have a particular categorical trait can be used to determine the genetic contribution to the trait. In this paper it is described a simulation study to generate a particular categorical data trait in MZ and DZ twin. The data is then used to find the genetic contribution to the trait by using Bayesian method.

Key-words: twin, genetic contribution, Bayesian method.

A. Pendahuluan

Dalam upaya menentukan besarnya pengaruh genetik terhadap sifat fenotip (trait) dapat digunakan metode momen dan metode maksimum likelihood yang menggunakan data trait pada pasangan kembar hasil simulasi (lihat dalam makalah Setiawan (2008)). Dalam makalah ini akan dijelaskan metode lain yang menggunakan pendekatan Bayesian.

B. Dasar Teori

Misalkan dimiliki suatu trait kuantitatif X dari suatu individu yang dipilih secara random dari suatu populasi. Trait X dapat dianggap mengikuti model

$$X = A + E,$$

dengan A dan E masing-masing adalah faktor genetik dan faktor lingkungan yang saling bebas. Dua individu yang diambil secara random dari suatu populasi masing-masing dengan trait X_1 dan X_2 dapat dimodelkan sebagai

$$X_1 = A_1 + C + E_1,$$

$$X_2 = A_2 + C + E_2,$$

dengan (G_1, G_2), C, E_1, E_2 saling bebas dan E_1, E_2 berdistribusi identik. Dalam hal ini C adalah faktor lingkungan bersama dan E adalah faktor lingkungan bukan bersama. Model ini dinamakan model *ACE*.

Apabila suatu trait yang didekomposisi sebagai $X = A + C + E$ maka heritabilitas (heritability) didefinisikan sebagai

$$\frac{V(A)}{V(X)} = \frac{V(A)}{V(A)+V(C)+V(E)},$$

yang dapat diestimasi berdasarkan dari data pengamatan X. Heritabilitas dapat dipandang sebagai besarnya pengaruh faktor genetik terhadap sifat fenotip. Dalam model ACE, variansi dan kovariansi dari trait X_1 dan X_2 antara dua individu yang bersaudara dapat didekomposisi menjadi

$$V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2 = \nu^2 + \eta^2 + \kappa^2 \ , \qquad (1)$$

$$Cov(X_1, X_2) = 2\Psi\nu^2 + \eta^2 \ ,$$

dengan ν^2, η^2 dan κ^2 masing-masing adalah variansi faktor genetic A, variansi lingkungan bersama C dan variansi lingkungan bukan bersama E sedangkan Ψ merupakan koefisien kinship yang tergantung pada hubungan antara dua saudara tersebut (Lange, 2002). Untuk pasangan kembar MZ dan DZ masing-masing dapat digunakan $\Psi = 1/4$ dan $\Psi = 1/2$. Dekomposisi variansi pada persamaan (1) tersebut dapat diterapkan untuk trait kuantitatif maupun trait yang merupakan data kategori (*categorical trait*). Trait ini dapat dianggap dipengaruhi oleh trait lain yang tidak teramati (*unobservable trait*) yang dinamakan liabilitas (*liability*). Trait kategori yang teramati (*observable trait*) seperti berpenyakit tertentu atau tidak, akan berkaitan dengan suatu liabilitas yang melampaui batas (*threshold*). Hal tersebut dapat dijelaskan dalam model matematika berikut ini.

Misalkan Y_1 dan Y_2 adalah ukuran dari suatu trait dikotomi pada 2 anggota pasangan kembar. Kita menganggap bahwa vektor $(Y_1,Y_2)^t$ tergantung pada variabel laten $(X_1, X_2)^t$ dan suatu batas b melalui persamaan $Y_i = 0$ jika $X_i \le b$ dan $Y_i = 1$ jika $X_i > b$ untuk i =1,2. Diasumsikan bahwa $(X_1, X_2)^t$ mempunyai distribusi normal dan dapat didekomposisi ke dalam komponen genetik A_1, A_2, komponen lingkungan bersama C dan komponen lingkungan tidak bersama E_1, E_2 sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

dengan

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu^2 & \nu^2 \\ \nu^2 & \nu^2 \end{pmatrix}\right)$$

pada pasangan kembar MZ dan

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu^2 & 0{,}5\nu^2 \\ 0{,}5\nu^2 & \nu^2 \end{pmatrix}\right)$$

pada pasangan kembar DZ, sedangkan

$$\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta^2 & \eta^2 \\ \eta^2 & \eta^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \kappa^2 & 0 \\ 0 & \kappa^2 \end{pmatrix}\right).$$

Dalam hal ini $(A_1,A_2)^t$, $(C,C)^t$ dan $(E_1,E_2)^t$ saling bebas. Probabilitas bersyarat bahwa $Y_1 = 0$ diberikan A_1, A_2 dan C adalah

$$\begin{aligned} P(Y_1 = 0 | A_1, A_2, C) &= P(X_1 \le b | A_1, A_2, C) \\ &= P(A_1 + C + E_1 \le b | A_1, A_2, C) \\ &= P(E_1 \le b - A_1 - C | A_1, A_2, C) \\ &= \Phi\left(\frac{b - a_1 - c}{\sqrt{\kappa^2}}\right) \end{aligned}$$

dan probabilitas bersyarat bahwa $Y_1 = 1$ diberikan A_1, A_2 dan C adalah

$$\begin{aligned} P(Y_1 = 1 | A_1, A_2, C) &= P(X_1 > b | A_1, A_2, C) \\ &= P(A_1 + C + E_1 > b | A_1, A_2, C) \\ &= P(E_1 > b - A_1 - C | A_1, A_2, C) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{b - a_1 - c}{\sqrt{\kappa^2}}\right). \end{aligned}$$

Jika diberikan A_1, A_2 dan C maka Y_1 dan Y_2 variabel saling bebas. Probabilitas bersyarat dari Y_2 jika diberikan A_1, A_2 dan C dapat ditentukan dengan cara yang sama. Batas b dapat distandardisasi menjadi

$$b' = \frac{b}{\sqrt{V(X_1)}} = \frac{b}{\sqrt{\nu^2 + \eta^2 + \kappa^2}}. \qquad (3)$$

Lebih jauh, heritabilitas atau komponen genetic $V_g = \sigma^2_A$ dari status berpenyakit atau tidak dapat ditentukan dengan

$$V_g = \sigma^2{}_A = \frac{V(A_1)}{V(X_1)} = \frac{\nu^2}{\nu^2+\eta^2+\kappa^2},$$

komponen lingkungan bersama $V_s = \sigma^2_C$ dengan

$$V_s = \sigma^2{}_C = \frac{V(C)}{V(X_1)} = \frac{\eta^2}{\nu^2+\eta^2+\kappa^2}$$

dan komponen lingkungan tidak bersama $V_u = \sigma^2_E$ dengan

$$V_u = \sigma^2{}_E = \frac{V(E_1)}{V(X_1)} = \frac{\kappa^2}{\nu^2+\eta^2+\kappa^2}.$$

Misalkan pemetaan $(y_1, y_2, a, c) \rightarrow p(y_1, y_2, a, c)$ adalah fungsi densitas dari vektor (Y_1, Y_2, A, C) dan $y_j \rightarrow p(y_j \mid a, c)$ adalah densitas bersyarat dari Y_j diberikan (A, C) untuk j =1,2. Fungsi likelihood untuk pengamatan vektor dalam n pasangan kembar MZ yang dipilih secara acak (dengan $A := A_1, A_2$) adalah

$$\begin{aligned}
L_{MZ} &= \prod_{i=1}^{n} p(y_{i1}, y_{i2}, a_i, c_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p(y_{i1}, y_{i2} \mid a_i, c_i)\, f_A(a_i)\, f_C(c_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} p(y_{i1} \mid a_i, c_i)\, p(y_{i2} \mid a_i, c_i)\, f_A(a_i)\, f_C(c_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_i, c_i)\, q(y_{i2}, a_i, c_i)\, f_A(a_i)\, f_C(c_i)
\end{aligned}$$

dengan f_A dan f_C masing-masing adalah fungsi densitas dari A dan C yang diberikan oleh

$$f_A(a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}} \exp\left[-\frac{a_i}{2\nu^2}\right],$$

$$f_C(c_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left[-\frac{c_i}{2\eta^2}\right],$$

dan

$$q(y, a, c) = \left[\Phi\left(\frac{b-a-c}{\sqrt{\kappa^2}}\right)\right]^{1-y} \left[1-\Phi\left(\frac{b-a-c}{\sqrt{\kappa^2}}\right)\right]^{y}$$

$$= \left[\Phi\left((b-a-c)\sqrt{\theta_1}\right)\right]^{1-y} \left[1-\Phi\left((b-a-c)\sqrt{\theta_1}\right)\right]^{y}$$

dengan $\theta_1 = 1/\kappa^2$. Fungsi likelihood ini akan sebanding dengan

$$L_{MZ} \propto [\nu^2]^{-n/2} [\eta^2]^{-n/2} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}}{2\nu^2}\right] \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2}}{2\eta^2}\right] \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_i, c_i)\, q(y_{i2}, a_i, c_i)$$

Dengan kata lain, fungsi likelihood untuk *n* pasangan kembar MZ akan sebanding dengan

$$L_{MZ} \propto \theta_3^{-n/2}\, \theta_4^{-n/2} \exp\left[-\frac{\theta_3 \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}}{2}\right] \exp\left[-\frac{\theta_4 \sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2}}{2}\right] \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_i, c_i)\, q(y_{i2}, a_i, c_i)$$

dengan $\theta_3 = 1/\nu^2$ dan $\theta_4 = 1/\eta^2$.

Fungsi likelihood untuk pengamatan (Y_1, Y_2, A_1, A_2, C) dalam *m* pasangan kembar DZ yang dipilih secara acak diperoleh dengan cara yang sama dengan hanya fungsi densitas bersama (A_1, A_2) yang berubah yaitu

$$L_{DZ} = \prod_{i=1}^{n} p(y_{i1}, y_{i2}, a_{i1}, a_{i2}, c_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(y_{i1}, y_{i2} \mid a_{i1}, a_{i2}, c_i)\, f(a_{i1}, a_{i2})\, f_C(c_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(y_{i1} \mid a_{i1}, a_{i2}, c_i)\, p(y_{i2} \mid a_{i1}, a_{i2}, c) f(a_{i1}, a_{i2})\, f_C(c_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c) g(a_{i1} \mid a_{i2})\, f_A(a_{i2})\, f_C(c_i)$$

dengan *f* adalah fungsi densitas bersama dari (A_1, A_2) dan *g* adalah fungsi densitas bersyarat dari A_1 jika diberikan A_2 yang dinyatakan dengan rumus

$$f(a_{i1}, a_{i2}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\nu^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}\left(a_{i1}^{\,2} - 2(0{,}5)\, a_{i1}\, a_{i2} + a_{i2}^{\,2}\right)\right]$$

$$g_A(a_{i1} \mid a_{i2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{3}{4}\right)\nu^2}} \exp\left[- \frac{(a_{i1} - 0{,}5\, a_{i2})^2}{2\left(\frac{3}{4}\right)\nu^2} \right].$$

Hal itu berarti bahwa fungsi likelihoodnya sebanding dengan

$$L_{DZ} \propto [\nu^2]^{-n/2} [\eta^2]^{-n/2} \exp[-x] \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c_i)$$

dengan

$$x = \frac{2\sum_{i=1}^{m}(a_{i1} - 0{,}5a_{i2})^2}{3\nu^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i2}^{\,2}}{2\nu^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i^{\,2}}{2\eta^2}.$$

Dengan kata lain, fungsi likelihood sebanding dengan

$$L_{DZ} \propto \theta_3^{\,m}\, \theta_4^{\,m/2} \exp[-z] \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c_i)$$

dengan

$$z = \frac{2\,\theta_3 \sum_{i=1}^{m}(a_{i1} - 0{,}5a_{i2})^2}{3} + \frac{\theta_3 \sum_{i=1}^{m} a_{i2}^{\,2}}{2} + \frac{\theta_4 \sum_{i=1}^{m} c_i^{\,2}}{2}.$$

Kita memilih prior konjugat untuk parameter θ_3, θ_4, θ_1 dari keluarga distribusi gamma sehingga fungsi densitas priornya adalah

$$\pi_1(\theta_3) = \frac{p_2^{\,p1}}{\Gamma(p_1)} \theta_3^{\,p1-1} \exp(-p_2\theta_3),$$

$$\pi_2(\theta_4) = \frac{p_4^{\,p3}}{\Gamma(p_3)} \theta_3^{\,p3-1} \exp(-p_4\theta_4),$$

$$\pi_3(\theta_1) = \frac{p_6^{\,p5}}{\Gamma(p_5)} \theta_1^{\,p5-1} \exp(-p_6\theta_1),$$

dan distribusi konjugat prior untuk parameter *b* dari keluarga distribusi normal, yaitu fungsi densitas prior :

$$\pi_4(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, p_8}} \exp\left(-\frac{(b - p_7)^2}{2\, p_8}\right).$$

Dalam hal ini p_1, p_2, ..., p_8 adalah parameter yang dipilih yang sesuai. Berdasarkan pada anggapan bahwa parameter saling bebas maka fungsi densitas bersamanya adalah

$$\pi(\theta_3, \theta_4, \theta_1, b) = \pi_1(\theta_3)\, \pi_2(\theta_4)\, \pi_3(\theta_1)\, \pi_4(b).$$

Akibatnya fungsi densitasnya sebanding dengan

$$(\theta_3, \theta_4, \theta_1, b) \rightarrow \pi(\theta_3, \theta_4, \theta_1, b)\, L_{MZ}\, L_{DZ}$$

Fungsi densitas posterior bersama $\pi(\theta_1, \theta_3, \theta_4, b \mid data)$ memenuhi

$$\pi(\theta_1, \theta_3, \theta_4, b \mid data) \propto \theta_3^{\left(p_1 + \frac{n}{2} + m - 1\right)}\, \theta_4^{\left(p_3 + \frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1\right)}\, \theta_1^{p5-1} \exp[-w_1]\, w_2,$$

dengan

$$w_1 = p_6 \theta_1 + u \theta_3 + v \theta_4 + \frac{(b - p_7)^2}{2 p_8},$$

$$w_2 = \prod_{i=1}^{n} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c_i) \prod_{i=1}^{m} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c_i)$$

dan

$$u = p_2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + \frac{2\sum_{i=1}^{m}(a_{i1} - 0{,}5 a_{i2})^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^{m} {a_{i2}}^2}{2}$$

$$v = p_4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {c_{i1}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} {c_{i2}}^2 \ .$$

Berdasarkan pada fungsi densitas bersama, distribusi bersyarat penuh (*full conditional distribution*) untuk masing-masing parameter dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\pi(\theta_3 \mid yang\ lain) \propto \theta_3^{\left(p_1 + \frac{n}{2} + m - 1\right)} \exp p[-u\theta_3] \prod_{i=1}^{m} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c_i),$$

$$\pi(\theta_4 \mid yang\ lain) \propto \theta_4^{\left(p_3 + \frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1\right)} \exp p[-v\theta_4] \prod_{i=1}^{m} q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)\, q(y_{i2}, a_{i2}, c_i),$$

$$\pi(\theta_1 \mid yang\ lain) \propto \theta_1^{p_5 - 1} \exp p[-p_6\theta_1]\, w_2,$$

$$\pi(b \mid yang\ lain) \propto \exp\left[-\frac{(b - p_7)^2}{2 p_8}\right] w_2.$$

Untuk variabel laten, distribusi bersyarat penuh dapat ditentukan dengan

$$\pi(a_i \mid yang\ lain) \propto \exp\left[-\frac{{a_i}^2 \theta_3}{2}\right] q(y_{i1}, a_i, c_i)\, q(y_{i2}, a_i, c_i)$$

untuk i=1,2, ..., n,

$$\pi(c_i \mid yang\ lain) \propto \exp\left[-\frac{{c_i}^2 \theta_4}{2}\right] q(y_{i1}, a_i, c_i)\, q(y_{i2}, a_i, c_i)$$

untuk i=1,2, ..., $n + m$,

$$\pi(a_{i1} \mid yang\ lain) \propto \exp\left[-\frac{2(a_{i1} - 0{,}5\, a_{i2})^2\, \theta_3}{2} \right] q(y_{i1}, a_{i1}, c_i)$$

untuk i=1,2, ..., *m*,

$$\pi(a_{i2} \mid yang\ lain) \propto \exp\left[-\frac{2(a_{i2} - 0{,}5\, a_{i1})^2\, \theta_3}{2} \right] q(y_{i2}, a_{i2}, c_i)$$

untuk i=1,2, ..., *m*.

Untuk mengkonstruksikan penyampel Markov Chain Monte Carlo (MCMC), kita menggunakan algoritma Gibbs Sampler sebagai berikut :

1. Inisialisasi parameter $[\theta_3]_0$, $[\theta_4]_0$, $[\theta_1]_0$, b_0, $[a_1]_0$, $[c_1]_0$, ……., $[a_n]_0$, $[c_n]_0$, $[a_{11}]_0$, $[a_{12}]_0$, $[c_1]_0$, ….,$[a_{m1}]_0$, $[a_{m2}]_0$, $[c_m]_0$, dan diset j=1.
2. Dibangkitkan $[\theta_3]_j \sim \theta_3 \rightarrow \pi(\theta_3 \mid$ yang lain) dengan yang lain berarti parameter yang lain.
3. Dibangkitkan $[\theta_4]_j \sim \theta_4 \rightarrow \pi(\theta_4 \mid$ yang lain).
4. Dibangkitkan $\theta_1 \sim \theta_1 \rightarrow \pi(\theta_1 \mid$ yang lain).
5. Dibangkitkan $b_j \sim b \rightarrow \pi(b \mid$ yang lain).
6. Dibangkitkan $[a_i]_j \sim a_i \rightarrow \pi(a_i \mid$ yang lain).
7. Dibangkitkan $[c_i]_j \sim c_i \rightarrow \pi(c_i \mid$ yang lain).
8. Dibangkitkan $[a_{i1}]_j \sim a_{i1} \rightarrow \pi(a_{i1} \mid$ yang lain).
9. Dibangkitkan $[a_{i2}]_j \sim a_{i2} \rightarrow \pi(a_{i2} \mid$ yang lain).
10. Langkah 2 sampai 9 untuk j = 1, 2, ... sampai rantai Markov (*Markov chain*) menjadi konvergen.

Distribusi bersyarat di atas tidak ada yang merupakan anggota keluarga standard. Untuk menyampelnya kita menggunakan algoritma Metropolis-Hasting yang diusulkan sebagai berikut :

1. Distribusi eksponensial dengan rata-rata nilai θ_3 sebelumnya untuk parameter θ_3 yaitu

$$p(y \mid \theta_3) = \frac{1}{\theta_3} \exp\left(-\frac{y}{\theta_3} \right), y > 0\,,$$

2. Distribusi eksponensial dengan rata-rata nilai θ_4 sebelumnya untuk parameter θ_4,

3. Distribusi eksponensial dengan rata-rata nilai θ_1 sebelumnya untuk parameter θ_1,
4. Distribusi normal dengan rata-rata nilai b sebelumnya dan variansi 1 untuk variabel laten b,
5. Distribusi normal dengan rata-rata nilai a_i sebelumnya dan variansi 1 untuk variabel laten a_i,
6. Distribusi normal dengan rata-rata nilai c_i sebelumnya dan variansi 1 untuk variabel laten c_i,
7. Distribusi normal dengan rata-rata nilai a_{i1} sebelumnya dan variansi 1 untuk variabel laten a_{i1},
8. Distribusi normal dengan rata-rata nilai a_{i2} sebelumnya dan variansi 1 untuk variabel laten a_{i2}.

C. Studi Simulasi, Hasil dan Pembahasan

Paket program R digunakan untuk membangkitkan data kategorikal pada sampel pasangan kembar MZ dan DZ dengan menggunakan model pada persamaan (2). Dalam simulasi ini, kami memilih menggunakan 400 pasangan kembar dan menggunakan input pengaruh faktor genetik σ^2_A = 0,3, pengaruh lingkungan bersama σ^2_C = 0,4 dan pengaruh lingkungan tidak bersama σ^2_E = 0,3 untuk memberikan gambaran bagaimana metode ini digunakan. Tabel 1 dan Tabel 2 merupakan contoh dari hasil simulasi tersebut. Dari tabel tersebut, terlihat bahwa terdapat 400 pasangan kembar. Tabel 1 berarti bahwa dari 400 pasang tersebut, terdapat 313 pasang yang keduanya tidak berpenyakit tertentu yang menjadi perhatian (*categorical trait*), 30 pasang kembar yang orang kembar 1 tidak berpenyakit sedangkan orang kembar 2 berpenyakit, 25 pasang kembar yang orang kembar 1 berpenyakit sedangkan orang kembar 2 tidak berpenyakit, dan 32 pasang yang keduanya berpenyakit.

Tabel 1. Tabel kontingensi dari status berpenyakit tertentu (kategori 1) atau tidak (kategori 0) pada pasangan kembar MZ.

	Kembar 2	
Kembar 1	Kategori 0	Kategori 1
Kategori 0	313	30
Kategori 1	25	32

Tabel 2. Tabel kontingensi dari status berpenyakit tertentu (kategori 1) atau tidak (kategori 0) pada pasangan kembar DZ.

	Kembar 2	
Kembar 1	Kategori 0	Kategori 1
Kategori 0	300	40
Kategori 1	34	26

Tabel 3. Data hasil simulasi dari status berpenyakit tertentu atau trait kategori (*categorical trait*) pada pasangan kembar MZ dan DZ serta estimasi kembali pengaruh faktor genetik $\sigma^2_{\mathbf{A}}$, lingkungan bersama $\sigma^2_{\mathbf{C}}$ dan lingkungan tidak bersama $\sigma^2_{\mathbf{E}}$ dengan menggunakan metode Bayesian.

	MZ				**DZ**				**Metode Bayesian**		
No	**(0,0)**	**(0,1)**	**(1,0)**	**(1,1)**	**(0,0)**	**(0,1)**	**(1,0)**	**(1,1)**	σ^2_A	σ^2_C	σ^2_E
1	313	30	25	32	300	40	34	26	0.26 (0.10, 0.55)	0.36 (0.20, 0.49)	0.38 (0.28, 0.48)
2	298	33	29	40	306	34	38	22	0.34 (0.04, 0.63)	0.36 (0.12, 0.63)	0.30 (0.20, 0.42)
3	305	34	29	32	308	37	28	27	0.20 (0.06, 0.52)	0.47 (0.17, 0.63)	0.33 (0.22, 0.44)
4	292	27	36	45	296	44	37	23	0.56 (0.27, 0.75)	0.16 (0.02, 0.41)	0.27 (0.18, 0.38)
5	318	22	27	33	284	41	41	31	0.55 (0.10, 0.67)	0.19 (0.02, 0.50)	0.26 (0.16, 0.38)

Bila simulasi dilakukan n=5 kali maka akan diperoleh hasil lengkap seperti dinyatakan pada Tabel 3. Berdasarkan data kategorikal pasangan kembar MZ dan DZ, untuk mengestimasi besarnya komponen genetik $V_g=\sigma^2_{\mathbf{A}}$, komponen lingkungan bersama $V_s=\sigma^2_{\mathbf{C}}$ dan komponen lingkungan tidak bersama $V_u=\sigma^2_{\mathbf{E}}$ metode yang telah dijelaskan di atas diimplementasikan dalam WinBUGS versi 1.4 (untuk gambaran penggunaan WINBUGS versi 1.4 dalam estimasi Bayesian, lihat makalah Cowles, 2004). Untuk parameter $1/\nu^2$, $1/\eta^2$ dan $1/\kappa^2$, dipilih prior $\Gamma(1,1)$. Berdasarkan pada prior ini, variansi dari variabel laten X_1 yang dinyatakan dengan $V(X_1) = \nu^2 + \eta^2 + \kappa^2$ akan memberikan probabilitas yang tinggi pada interval (2,20). Prior dari b' digunakan distribusi N(0,1) sehingga dalam pandangan persamaan (3), parameter b memberikan probabilitas yang tinggi pada interval

$$(-3\sqrt{(20-2)}, 3\sqrt{(20-2)})$$

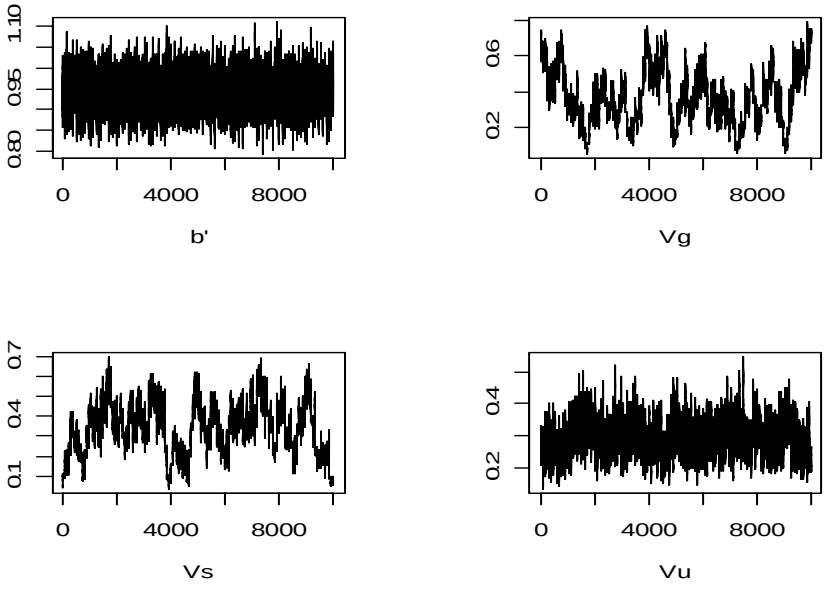
sehingga prior distribusi N(0 , 18) akan merupakan pemilihan yang beralasan untuk parameter b. Dalam hal ini digunakan median dari rantai Markov dalam MCMC untuk mengestimasi ketiga komponen tersebut. Nilai dalam tanda kurung memberikan estimasi interval kredibel 95 % (*credible interval*) untuk metode Bayesian. Gambar 1 dan Gambar 2 masing-masing memberikan plot MCMC dan estimasi density (*kernel density estimation*) untuk parameter-parameter yang diperlukan. Apabila digunakan

input pengaruh faktor genetik σ^2_A = 0,8, pengaruh lingkungan bersama σ^2_C = 0,1 dan pengaruh lingkungan tidak bersama σ^2_E = 0,1 akan dihasilkan Tabel 4 sedangkan bila digunakan input pengaruh faktor genetik σ^2_A = 0,1, pengaruh lingkungan bersama σ^2_C = 0,4 dan pengaruh lingkungan tidak bersama σ^2_E = 0,3 akan dihasilkan Tabel 5. Berdasarkan pada Tabel 3, Tabel 4 dan Tabel 5, terlihat bahwa metode Bayesian memberikan estimasi yang relatif memuaskan karena sesuai dengan parameter yang digunakan untuk membangkitkan data pasangan kembar MZ dan DZ.

Tabel 4. Data hasil simulasi dari status berpenyakit tertentu atau trait kategori (*categorical trait*) pada pasangan kembar MZ dan DZ serta estimasi kembali pengaruh faktor genetik σ^2_A, lingkungan bersama σ^2_C dan lingkungan tidak bersama σ^2_E dengan menggunakan metode Bayesian. Dalam hal ini digunakan input σ^2_A = 0,8, σ^2_A = 0,1 dan σ^2_A = 0,1.

	MZ				DZ				Metode Bayesian		
No	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	σ^2_A	σ^2_C	σ^2_E
1	313	17	21	49	285	46	40	29	0.77 (0.52, 0.89)	0.12 (0.03, 0.34)	0.12 (0.06, 0.19)
2	321	13	20	46	306	32	39	23	0.79 (0.57, 0.92)	0.11 (0.01, 0.29)	0.09 (0.05, 0.15)
3	323	19	21	37	302	42	35	21	0.68 (0.43, 0.85)	0.15 (0.02, 0.38)	0.17 (0.09, 0.26)
4	319	12	20	49	294	34	45	27	0.85 (0.57, 0.94)	0.07 (0.01, 0.32)	0.08 (0.04, 0.15)
5	320	16	13	51	288	36	46	30	0.81 (0.58, 0.91)	0.12 (0.03, 0.38)	0.07 (0.04, 0.17)

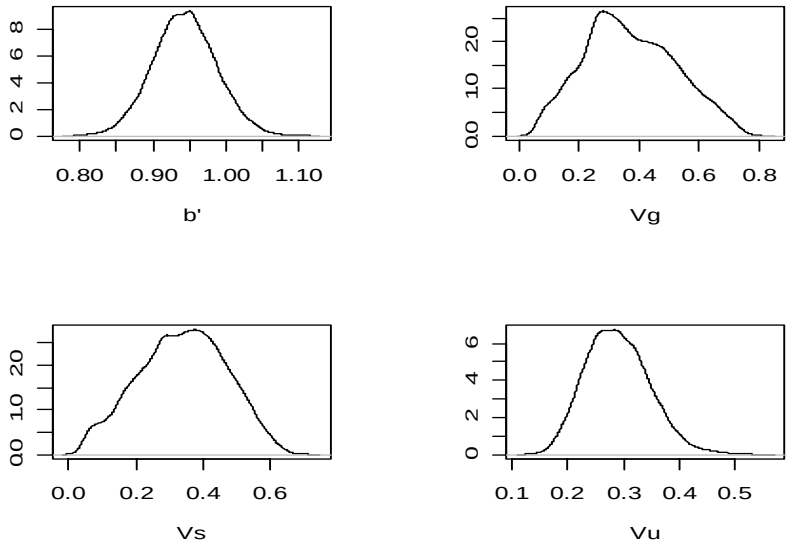
Gambar 1. Plot MCMC dengan ukuran sampel 10000 untuk batas *b*' pengaruh faktor genetik $V_g = \sigma^2_A$, lingkungan bersama $V_s = \sigma^2_C$ dan lingkungan tidak bersama $V_u = \sigma^2_E$.



Tabel 5. Data hasil simulasi dari status berpenyakit tertentu atau trait kategori (*categorical trait*) pada pasangan kembar MZ dan DZ serta estimasi kembali pengaruh faktor genetik σ^2_A, lingkungan bersama σ^2_C dan lingkungan tidak bersama σ^2_E dengan menggunakan metode Bayesian. Dalam hal ini digunakan input $\sigma^2_A = 0{,}1$, $\sigma^2_A = 0{,}8$ dan $\sigma^2_A = 0{,}1$.

	MZ				DZ				Metode Bayesian		
No	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	σ^2_A	σ^2_C	σ^2_E
1	321	22	13	44	324	18	18	40	0.10 (0.01, 0.24)	0.80 (0.67, 0.89)	0.10 (0.05, 0.15)
2	318	20	19	43	301	27	31	41	0.19 (0.07, 0.45)	0.65 (0.42, 0.78)	0.14 (0.08, 0.22)
3	307	19	17	57	315	27	24	34	0.25 (0.06, 0.55)	0.65 (0.36, 0.82)	0.10 (0.05, 0.17)
4	320	20	18	42	321	15	21	43	0.05 (0.00, 0.16)	0.84 (0.72, 0.90)	0.11 (0.07, 0.17)
5	310	16	24	50	307	17	21	55	0.06 (0.02, 0.17)	0.84 (0.73, 0.90)	0.10 (0.06, 0.15)

Gambar 2. Estimasi densitas untuk batas *b*' pengaruh faktor genetik $V_g = \sigma^2_A$, lingkungan bersama $V_s = \sigma^2_C$ dan lingkungan tidak bersama $V_u = \sigma^2_E$.



Pendekatan Bayesian dengan bantuan MCMC dalam kasus ini merupakan masalah yang relatif baru (Eaves dan Erkanli, 2003). Makalah atau hasil penelitian lain yang terkait dengan pendekatan Bayesian dalam studi pasangan kembar (*twin study*) sebagai contohnya adalah ditulis oleh Eaves et al. (2004), Eaves et al. (2005), van den Berg et al. (2006) dan Setiawan (2007).

D. Kesimpulan

Dalam makalah ini telah dijelaskan bagaimana pendekatan Bayesian digunakan untuk menentukan besarnya pengaruh genetik terhadap sifat fenotip tertentu dari data yang diperoleh dengan cara simulasi. Penelitian ini dapat dikembangkan pada studi simulasi yang menggunakan dua trait kategorikal pada pasangan kembar MZ dan DZ.

E. Daftar Pustaka

[1] Lange, K. [2002], *Mathematics and Statistical Methods for Genetic Analysis*, Springer, New York

[2] Berg, S. M. van den, Setiawan, A., Bartels, M., Polderman, T.J.C., van der Vaart, A.W., Boomsma, D.I., (2006), Individual Differences in Puberty Onset in Girls : Bayesian Estimation of Heritabilities and Genetic Correlations, *Behavior Genetics*, 36 (2) : 261-270.

[3] Cowles, M. K., (2004), Review of WinBUGS 1.4, *Am. Stat.* 58:330-336.

[4] Eaves, L. J., and Erkanli, A. (2003). Markov Chain Monte Carlo approaches to analysis of genetic and environmental components of human developmental change and G × E interaction. *Behav. Genet*. 33:279-299·

[5] Eaves, L., Silberg, J., Foley, D., Bulik, C., Maes H., Erkanli A., Angold A., Costello E. J., Worthman C. (2004). Genetic and environmental influences on the relative timing of pubertal change, *Twin Res.* 7:471-481.

[6] Eaves, L., Erkanli, A., Silberg, J., Angold, A., Maes, H. H., Foley, D., (2005), Application of Bayesian Inference using Gibbs Sampling to Item Response Theory Modeling of Multi Sympton genetic Data, *Behavior Genetics* 35 (6) : 765-780.

[7] Setiawan, A. [2007] , *Statistical Data Analysis of Genetic Data in Twin Studies and Association Studies*, Vrije Universiteit, Amsterdam, Ph.D Thesis, ISBN 978-90-9021728.

[8] Setiawan, A. [2008] , Penentuan Besarnya Pengaruh Faktor Genetik terhadap Sifat Fenotip dengan Metode Pasangan Kembar, *Prosiding Seminar Basic Science V 2008 di Universitas Brawijaya, Malang.*

Penduga Maksimum Likelihood untuk Parameter Dispersi Model Poisson-Gamma dalam Konteks Pendugaan Area Kecil

The Maximum Likelihood of Estimating Dispersion Parameter for Poisson-Gamma Model in Small Area Estimation Context

Alfian F. Hadi[1)]
Nusyirwan[1)]
Khairil Anwar Notodiputro[2)]

[1)]Mahasiswa Program Doktor Statistika
Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor
afhadi@unej.ac.id

[2)]Guru Besar Statistika, Departemen Statistika, Institut Pertanian Bogor

Abstract

The Poisson-Gamma (Negative Binomial) distribution is considered to be able to handle overdispersion better than other distributions. Estimation of the dispersion parameter, ϕ, is thus important in refining the predicted mean when the Empirical Bayes (EB) is used. In GLM's sense dispersion parameter (ϕ) have effects at least in two ways, (i) for Exponential Dispersion Family, a good estimator of ϕ gives a good reflection of the variance of Y, (ii) although, the estimated β doesnt depend on ϕ, estimating β by maximizing log-likelihood bring us to Fisher's information matrix that depends on its value. Thus, ϕ does affect the precision of β, (iii) a precise estimate of ϕ is important to get a good confidence interval for β. Several estimators have been proposed to estimate the dispersion parameter (or its inverse). The simplest method to estimate ϕ is the Method of Moments Estimate (MME). The Maximum Likelihood Estimate (MLE) method, first proposed by Fisher and later developed by Lawless with the introduction of gradient elements, is also commonly used. This paper will discuss the use of those above methods estimating ϕ in Empircal Bayes and GLM's of Poisson-Gamma model that is applied on Small Area Estimation.

Keywords: Small Area Estimation, Empirical Bayes, Poisson-Gamma, Negative Binomial, dispersion parameter, MLE, MME.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Dalam pendugaan area kecil (*small area estimation*), berbagai metode telah dikembangkan khususnya menyangkut metode yang berbasis model (*model-based area estimation*). Metode tersebut adalah penduga prediksi tak bias linier terbaik empirik atau *empirical best linear unbiased prediction* selanjutnya disebut *EBLUP*, Bayes empirik atau *empirical Bayes* disingkat *EB*, dan Bayes hierarkhi atau *Hierarchical Bayes* yang disingkat *HB*. Metode *EBLUP* merupakan metode untuk data kontinu sedangkan *EB* dan *HB* adalah metode untuk data biner atau cacahan.

S ebaran poisson mempunyai peran yang penting dalam metode *empirical bayes*. Hal ini disebabkan antara lain oleh dapat ditemukannya rataan poisson tanpa pendugaan sebaran prior secara explisit. Namun model poisson mempunyai keterbatasan yakni pada kesamaan nilai tengah dan ragamnya, sehingga umumnya dijumpai fenomena overdispersi. Penanganan overdispersi, seringkali dilakukan melalui pendekatan model campuran Model Poisson-Gamma (*Negative Binomial)*. Model ini telah dikenal luas untuk menangani pengaruh acak dengan overdispersi secara lebih baik dari pendekatan/distribusi yang lain.

Model binomial negatif (atau secara umum pada keluarga sebaran eksponential berdispersi) memuat suatu parameter ϕ yang disebut parameter dispersi. Dalam pemodelan GLM, ϕ berperan dalam sedikitnya dua, (i) pada keluarga sebaran eksponensial berdispersi, nilai ragam Y proportional terhadap nilai parameter ϕ, artinya penduga $\hat{\phi}$ merefleksikan ragam Y (ii) meskipun, nilai dugaan parameter regresi, β tidak bergantung pada ϕ, tetapi pendugaan β dengan MLE dilakukan melalui matriks turunan kedua, informasi Fisher, dan tergantung pada ϕ . Sehingga ϕ menentukan presisi penduga β, (iii) penduga ϕ yang baik diperlukan untuk mendapatkan selang kepercayaan yang baik bagi β.

Beberapa metode pendugaan ϕ telah diusulkan. Diantaranya adalah metode momen (MME), metode yang cukup sederana untuk menduga ϕ. Metode Maximum Likelihood (MLE) adalah yang paling umum dipakai, pertama kali diusulkan oleh Fisher dan kemudian dikembangkan oleh Lawles melaui gradient elements. Pendugaan parameter dispersi, ϕ, sangat penting dalam memperbaiki penduga, khususnya bila menggunakan Bayes Empirik. Pendugaan ini berperan mendapatkan ϕ yang akan dgunakan sebagai hiperparameter.

Permasalahan

Meskipun pendugaan ϕ terpisah dari pendugaan β, namun perannya tidak dapat diabaikan. Dalam konteks penduga area kecil, menarik untuk dievaluasi bagaimana pengaruh pendugaan parameter dispersi ini terhadap performa penduga komposit Bayes Empiriknya, bukan pada parameter dispersi itu sendiri. Tulisan ini akan membicarakan penggunaan kedua metode di atas untuk menduga parameter dispersi, ϕ dalam skema Bayes Empirik dan model Poisson-Gamma yang digunakan pada penduga area kecil.

Simulasi dilakukan untuk (i) membandingkan metode momen dan maksimum likelihood untuk pendugaan parameter dispersi model poison-gamma dengan dan tanpa peubah tambahan (*auxiliary variable*) dan (ii) membandingkan performa penduga Bayes Empirik pada konteks penduga area kecil yang dibangun dari pendugaan parameter dispersi distribusi negatif binomial melalui kedua metode.

SMALL AREA ESTIMATION

Area kecil didefinisikan sebagai subpopulasi yang memiliki ukuran contoh yang kecil sehingga pendugaan langsung tidak dapat menghasilkan pendugaan yang teliti (Rao, 2003). Area kecil dapat berupa kota, kabupaten, kecamatan, desa/kelurahan, kelompok suku, kelompok jenis kelamin atau kelompok umur.

Small area estimation (SAE) merupakan suatu teknik statistika yang digunakan untuk menduga parameter-parameter area kecil. Teknik ini digunakan dengan memanfaatkan data dari hasil survei domain besar seperti data sensus atau data Survey Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) untuk menduga peubah yang menjadi perhatian pada area kecil.

Pendugaan langsung *(direct estimation)* adalah pendugaan dengan berdasarkan penerapan model penarikan sampel. Pendugaan ini tidak mampu memberikan ketelitian yang baik jika ukuran contoh dalam area kecil dan statistik yang diperoleh akan memiliki ragam yang besar bahkan terkadang pendugaan ini tidak mampu dilakukan karena sampel tidak mewakili populasi.

SAE dikembangkan sebagai teknik pendugaan alternatif yang mampu mengatasi semua masalah diatas, yaitu dengan pendugaan tidak langsung *(indirect estimation)*. Pendugaan ini bersifat meminjam kekuatan dari pengamatan contoh area yang berdekatan dengan memanfaatkan informasi tambahan yakni dari data sensus atau survei berskala nasional (Rao, 2003). Proses pendugaan tidak langsung merupakan pendugaan pada suatu domain dengan cara menghubungkan informasi pada area tersebut dengan area lain melalui model yang tepat. Hal ini berarti bahwa dugaan tersebut mencakup data dari domain lain.

Small Area Estimation Model

Salah satu model dasar area kecil (Rao, 2003) yaitu *Basic area level (type A) model*, yaitu model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk

level area tertentu. Misalkan $x_i = (x_{1i},...,x_{p1})^T$ dan parameter yang akan diduga θ_i, diasumsikan mempunyai hubungan dengan x_i. Data pendukung tersebut digunakan untuk membangun model: $\theta_i = x_i^T \beta + b_i v_i$, dengan i=1,…,m dan $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ sebagai pengaruh acak yang diasumsikan normal serta $\beta = (\beta_1,...,\beta_p)^T$ adalah vektor koefisien regresi berukuran $p \times 1$. Sedangkan b_i adalah konstanta bernilai positif yang diketahui. Untuk melakukan inferensi mengenai θ_i didapatkan dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung y_i tersedia, yaitu: $y_i = \theta_i + e_i$, dimana i=1,…,m dengan sampling error $e_i \sim N(0, \sigma^2_{ei})$ dan σ^2_{ei} diketahui. Pada akhirnya, kedua model digabungkan dan menghasilkan model gabungan: $y_i = x_i^T \beta + b_i v_i + e_i$, dimana i=1,…,m. Model tersebut merupakan bentuk khusus dari model linier campuran *(generalized linear mixed model)* yang terdiri dari pengaruh tetap *(fixed effect)*, yaitu β dan pengaruh acak *(random effect)* yaitu v_i (Rao, 2003, Kurnia & Notodiputro 2006).

MODEL POISSON-GAMMA

Model poisson adalah model peluang standar untuk data cacahan. Model ini akan mengalami keterbatasan dalam rataan dan ragam ketika digunakan untuk pendugaan parameter tunggal. Umumnya, data cacahan (seperti data jumlah) mengalami overdispersi. Oleh karena itu, dikembangkan suatu formulasi poisson yang mengakomodasi ragam ekstra dari pengamatan data contoh. Maka, diperkenalkan model dua tahap untuk data cacahan, yang dikenal dengan model campuran poisson-gamma.

Model poisson-gamma dimana y_i berdistribusi poisson dengan parameter θ_i, sedangkan θ_i sendiri berdistribusi gamma dengan parameter-parameter yang bersesuaian dengan nilai tengah dan keragaman total y_i. Untuk menentukan parameter-parameter sebaran gamma bagi θ_i marilah kita perhatikan model poisson-gamma bagi area level yang digunakan yaitu:

$$y_i = X'\beta + 1v_i + e_i = \theta_i + e_i$$

$$\theta_i = X'\beta + v_i$$

Dengan $y_i \sim Poisson(\theta_i)$, $E(y_i) = X'\beta$, $Var(y_i) = E(y_i) = X'\beta$

$E(e_i) = 0$; $Var(e_i) = \sigma^2{}_{e_i}$; $E(v_i) = 0$; $Var(v_i) = \sigma^2$

$$\theta_i \sim gamma\left(\frac{\mu_i^2}{\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{\mu_i}\right); ; \; E(\theta_i) = \mu_i \; Var(\theta_i) = \sigma^2$$

Empirical Bayes

Dasar perkembangan pendekatan statistik Bayes adalah hukum Bayes yang dibuat oleh Thomas Bayes. Hukum ini diperkenalkan oleh Richard Price tahun 1763, dua tahun setelah Thomas Bayes wafat. Tahun 1774 dan 1781, Laplace memberikan analisis lebih rinci dan lebih relevan untuk statistik Bayes sekarang (Gill, 2002). Metode Bayes akan sangat sulit digunakan dan kadang sangat sensitif karena membutuhkan penaksiran peluang tertentu yang sulit untuk ditaksir. Maka diperkenalkan metode *Empirical Bayes (EB)* dengan mengasumsikan bahwa prior tidak diketahui, selanjutnya data digunakan untuk memperoleh dugaan parameter prior. Rao (2003) menyatakan bahwa metode *EB* dan *HB (Hierarchical Bayes)* yang cocok digunakan dalam menangani data biner dan cacahan pada pendugaan area kecil.

Metode *EB* dalam konteks pendugaan area kecil secara ringkas adalah:

1. Mendapatkan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dari parameter area kecil yang menjadi perhatian.
2. Menduga parameter model dari fungsi kepekatan peluang marginal
3. Menggunakan fungsi kepekatan peluang posterior dugaan untuk membuat inferensi parameter area kecil yang menjadi perhatian.

Pendugaan Parameter Dispersi

Untuk mendapat penduga bayes empirik, parameter-parameter pada sebaran prior (*hyperparameter*) harus diduga. Pendugaan parameter dispersi, ϕ, sangat penting dalam memperbaiki penduga Bayes Empirik. Pendugaan ini berperan mendapatkan ϕ yang akan digunakan sebagai hiperparameter. Lebih dari itu, pada kasus tertentu, nilai dugaan ϕ dapat langsung menjadi salah satu komponen dalam pembobot komposit penduga area kecil.

Bagian ini akan memperkenalkan dua metode penduga parameter dispersi, yaitu MME dan MLE.

Method of Moments Estimate (MME)

Untuk sebuah sebaran binom negatif, ragam σ^2, rataan μ dan parameter dispersi ϕ memiliki hubungan $\sigma^2 = \mu + \frac{\mu^2}{\phi}$. Berdasarkan hubungan ini, MME dikembangkan dan

diduga dengan, $\hat{\phi} = \hat{\alpha} = \frac{\bar{y}}{s^2 - \bar{y}}$ dimana $\bar{y}$ dan s^2 adalah momen contoh takbias pertama dan kedua. Perhatikan bahwa menduga ϕ hanya mungkin jika $s^2 > \bar{y}$ karena $\phi > 0$. Untuk mendapat penduga ϕ dengan baik melalui MME, sangat penting untuk mengetahui ragam karena perubahan sedikit saja pada nilai ragam mengakibatkan variasi besar nilai ϕ. Masalah ini makin besar jika ukuran contoh makin kecil (Zang, et all, 2004).

Maximum Likelihood Estimator (MLE)

Pada kasus tertentu, solusi bagi penduga maksimum likelihood tidak dapat dijumpai dalam bentuk tertutup (*close form*). Namun pendugaan dapat diperoleh secara numerik. Fungsi log-likelihood akan mencapai maksimum jika vektor gradien sama dengan nol. Atau dengan kata lain kita akan memaksimumkannya melalui deferensial tehadap ϕ_j dan β_j, $\partial l/\partial\phi_j = 0$ dan $\partial l/\partial\beta_j = 0$, sehingga kita akan memperoleh parameters ϕ_j dan β_j yang memenuhi kondisi ini berlaku untuk data set yang kita perhatikan. McCullagh and Nelder (1989) menjelaskan algoritna Iterative (re)Weighted Linear Regression (metode scoring) yang dapat digunakan untuk memperoleh dugaan parameter dalam Model Linier Terampat.

Untuk menduga nilai parameter ϕ_j (yang tidak diketahui) dalam binomial negatif dapat digunakan metode skoring yang merupakan modifikasi dari algoritma Newton–Raphson untuk mencari akar-persamaan. Dan solusi dari persamaan model linier Binomial Negatif dapat diperoleh dari algoritma Newton–Raphson klasik (Dobson 1990). Dan untuk itu diperlukan nilai awal untuk ϕ_j dan β_j.

Binomial negatif adalah sebuah sebaran dengan sebuah parameter tambahan ϕ pada fungsi ragam. SAS dengan PROC GENMOD menduga ϕ dengan maximum likelihood , menurut McCullagh & Nelder (1989) atau Lawless (1987).

METODE BAYES EMPIRIK TANPA PEUBAH PENJELAS BAGI MODEL POISSON-GAMMA

Model Poisson-Gamma merupakan model yang sering digunakan untuk mengakomodasi permasalahan overdispersi (ragam melebihi rataan) pada model Poisson. Dua tahapan model Poisson-Gamma adalah :

$$y_i \overset{ind}{\sim} Poisson(\theta_i), i = 1, \ldots, m$$

$$\theta_i \overset{iid}{\sim} gamma\left(\alpha, \alpha^{-1}\right) \qquad (2)$$

dengan y_i adalah banyaknya pengamatan pada area ke-i, θ_i adalah nilai harapan dan ragam y, dan m menyatakan jumlah area, sedangkan α merupakan parameter prior yang belum diketahui. Sebagai prior diasumsikan bahwa $\theta_i \overset{iid}{\sim} gamma\left(\alpha, \alpha^{-1}\right)$ dengan $E\left(\theta_i\right)=1$, $Var\left(\theta_i\right)=1/\alpha$ Berdasarkan kedua asumsi tersebut maka didapatkan sebaran posterior untuk θ_i yaitu $\theta_i \left| y_i, \alpha \right. \overset{ind}{\sim} gamma\left(\alpha + y_i, \frac{\mu_y}{\mu+\alpha}\right)$ serta penduga Bayes bagi θ_i dan ragam posterior bagi θ_i adalah :

$$\hat{\theta}_i^B(\alpha) = E\left(\theta_i \left| y_i, \alpha \right.\right) = (\alpha + y)\left(\frac{\mu}{\mu+\alpha}\right)$$

dan

$$Var\left(\theta_i \left| y_i, \alpha \right.\right) = g_{1i}(\alpha, y_i) = (\alpha + y)\left(\frac{\mu}{\mu+\alpha}\right)^2$$

Penduga Bayes ini mensyaratkan terlebih dulu diketahui nilai parameter sebaran prior. Permasalahannya, seringkali informasi mengenai parameter prior belum diketahui. Pendekatan Bayes empirik atau *empirical Bayes* (*EB*) dapat digunakan untuk mengatasinya. Pada metode ini, informasi parameter prior dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi sebaran marginal $y_i \left| \alpha \right. \overset{iid}{\sim}$ binomial negatif, meski bentuk tertutup untuk bagi penduga parameternya tidak ada (Clayton & Kaldor 1987), kita dapat memanfaatkan model null binomial negatif, untuk menduga α.

Zang, et al. (2006) menggunakan penduga momen sederhana untuk memperoleh dugaan parameter dispersi binomial-negatif yaitu:

$$\hat{\phi} = \hat{\alpha} = \frac{\bar{y}}{s^2 - \bar{y}}$$

Dengan mensubstitusi $\hat{\alpha}$ diperoleh penduga *EB* bagi θ_i yaitu

$$\hat{\theta}_i^{EB} = \hat{\theta}_i^B\left(\hat{\alpha}\right) = \hat{\gamma}_i \hat{\theta}_i + \left(1 - \hat{\gamma}_i\right)\hat{\theta}_{synt.}$$

dengan $\hat{\gamma}_i = \bar{y}/\left(\bar{y} + \hat{\alpha}\right)$, $\hat{\theta}_i = y_i$ sebagai penduga langsung dari θ_i, y_i menyatakan banyaknya pengamatan, $\hat{\theta}_{synt.} = \bar{y}$ adalah penduga sintetik (Rao, 2003).

METODE BAYES LINIER EMPIRIK BAGI MODEL POISSON-GAMMA

Metode Bayes linier empirik (*Empirical Linear Bayes*/*ELB*) merupakan suatu metode yang menghindari adanya asumsi sebaran pada metode Bayes empirik (Rao 2003). Metode ini hanya menggunakan momen pertama dan kedua dalam menentukan penduga liniernya. Secara umum, model dua tahap pada pendugaan Bayes linier adalah :

Dengan model linier poisson-gamma, $y_i \sim Poisson(\theta_i)$, dan prior distribution $\theta_i \sim gamma\left(\frac{\mu_i^2}{\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{\mu_i}\right)$, maka diperoleh posterior Bayes $gamma\left(\alpha + y_i, \frac{X'\beta}{X'\beta + \alpha}\right)$ Nilai tengah posteriornya adalah $(\alpha + y_i)\frac{\mu_i}{\mu_i + \alpha}$, melalui manipulasi nilai tengah diperoleh penduga bayes:

$$\mu_i + \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \alpha}\right)(y_i - \mu_i) = \mu_i + (1 - \gamma^*{}_i)(y_i - \mu_i) = \gamma_i y_i + (1 - \gamma_i)X'\beta ,$$

diperoleh pembobot bagi penduga bayes adalah:

$$1 - \gamma^*{}_i = \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \alpha}\right) = \gamma_i = \left(\frac{X'\beta}{X'\beta + \alpha}\right)$$

Penduga Empirical bayes diperoleh dengan menduga α dan β melalui *Generalized Linear Mixed Model*, dengan memanfaatkan sebaran marginalnya yaitu *Negative-Binomial*. Dimana $\hat{\beta}$ adalah penduga parameter regresi binomial-negatif sedangkan $\hat{\alpha}$ adalah penduga bagi dispersion parameter distribusi *negative-binomial* $(=\hat{\phi})$. Bila model yang digunakan adalah linier dan model poisson-gamma (binom-negatif) dalam fungsi link logaritmik maka parameter regresi yang diperoleh perlu dieksponensialkan terlebih dahulu.

Dengan denikian penduga bayes adalah: $\hat{\theta}_i^{EB} = \hat{\gamma}_i \hat{\theta}^L{}_i + (1 - \hat{\gamma}_i)\hat{\theta}^{TL}{}_i$, dengan penduga langsung bagi θ adalah y_i dan penduga taklangsungnya adalah $X'\hat{\beta}$.

PENDEKATAN *JACKKNIFE* UNTUK PENDUGA *MSE*($\hat{\theta}_i^{EB}$)

Pendekatan *jackknife* merupakan metode yang sering digunakan dalam survei karena konsepnya yang sederhana (Jiang, Lahiri dan Wan 2002). Metode ini diperkenalkan Tukey pada tahun 1958 dan berkembang menjadi suatu metode yang dapat mengkoreksi bias suatu penduga, yaitu dengan menghapus observasi ke-i untuk i=1,…,m dan selanjutnya melakukan pendugaan parameter.

Langkah-langkah pendekatan *jackknife* dalam menduga *MSE* dugaan *empirical Bayes* adalah sebagai berikut (Kurnia & Notodiputro. 2006):

1. Anggap bahwa $\hat{\theta}_i^{EB} = k_i(y_i, \underline{\hat{\beta}}, \hat{\alpha})$, $\hat{\theta}_{i-1}^{EB} = k_i(y_i, \underline{\hat{\beta}}_{-1}, \hat{\alpha}_{-1})$, lalu $\hat{M}_{2i} = \frac{m-1}{m}\sum_{l}^{m}(\hat{\theta}_i^{EB} - \hat{\theta}_{i-1}^{EB})^2$
2. Dengan mencari $\underline{\hat{\beta}}_{-1}$ dan α_{-1} yang merupakan penduga kemungkinan maksimum yang diperoleh dari data ke-1 yang dihapus, maka dihitung $\hat{M}_{1i} = g_{1i}(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\alpha}, y_i) - \frac{m-1}{m}\sum_{i=m}^{m}[g_{1i}(\underline{\hat{\beta}}_{-1}, \hat{\alpha}_{-1}, y_i) - g_{1i}(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\alpha}, y_i)]$
3. Penduga Jackknife bagi kuadrat tengah galat penduga Bayes empirik diberikan oleh $ktg_J(\hat{\theta}_i^{EB}) = \hat{M}_{1i} + \hat{M}_{2i}$

METODOLOGI

Skenario Simulasi

Simulasi dilakukan dengan dua skenario, (i) skenario tanpa peubah penjelas, dan (ii) dengan peubah penjelas. Dengan parameter sebagaimana tabel 1. Dengan penetapan ini, perlu digarisbawahi bahwa nilai Xβ semakin besar dari area 1 ke area 20. Dua hal perlu diperhatikan menyangkut hal ini (i) Xβ adalah nilai harapan Y_i sehingga nilai yi dan Xβ-dugaan akan membesar pula, (ii) Xβ adalah keragaman total yi, artinya keragaman yi menaik dari area 1 ke area 20.

Tabel 1. Parameter-parameter dalam simulasi

Area	X0	X1	mu_i	Area	X0	X1	mu_i	β-0	β-1
1	1	0	1.7214	11	1	3	2.7702	1.7214	0.3496
2	1	0	1.7214	12	1	4	3.1198		
3	1	0	1.7214	13	1	4	3.1198		
4	1	1	2.071	14	1	5	3.4694		
5	1	1	2.071	15	1	5	3.4694		
6	1	1	2.071	16	1	5	3.4694		
7	1	2	2.4206	17	1	6	3.819		
8	1	2	2.4206	18	1	6	3.819		
9	1	3	2.7702	19	1	7	4.1686		
10	1	3	2.7702	20	1	7	4.1686		

Tahapan Simulasi

Pembangkitan data untuk kedua skenario simulasi sama, berbeda pada saat *fitting* model. Model tanpa X *difit* dengan model null, model dengan X dengan regresi.

1. Tetapkan X, β, dan σ^2 ; dengan $\mu_i = X'\beta$

2. Bangkitkan $\theta_i \sim gamma\left(\frac{\mu_i^2}{\sigma^2}, \frac{\sigma^2}{\mu_i}\right); \alpha = \frac{\mu_i^2}{\sigma^2}$; kemudian $y_i \sim Poisson(\theta_i)$

3. Menduga Parameter Dispersi untuk model tanpa X dengan metode momen (MME) dan maksimum likelihood (MLE). Dengan Proc Genmod model null.

4. Menduga Parameter Dispersi untuk model dengan X dengan MME dan MLE. Parameter regresi diduga dengan maksimum likelihood, menggunakan Proc Genmod.

5. Menentukan penduga *Empirical Bayes* bagi langkah 3 dan 4

6. Menghitung KTG/ MSE jackknife bagi penduga bayes.

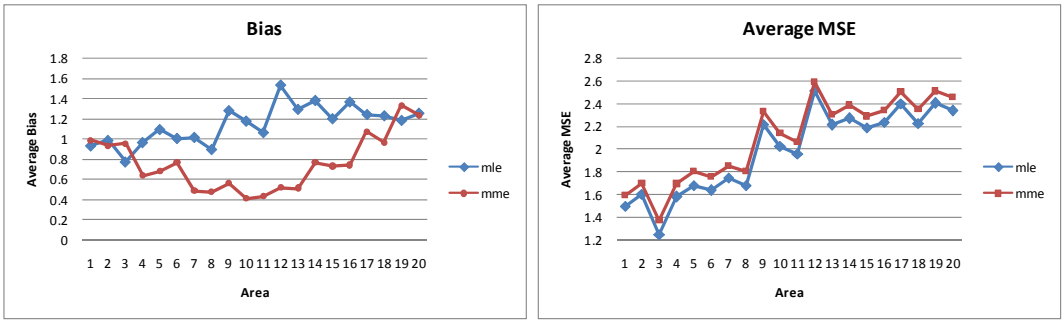
7. Evaluasi simulasi dilakukan dengan memeriksa MSE dan Bias, serta dengan membandingkan dua statistika yaitu Mean Absolute Relative Error (MARE) dan Average Relative Root Mean Square Error (RRMSE). MARE mengukur beda absolute antara parameter penduganya sedangkan RRMSE menghitung keragaman penduga.

MARE = $\frac{\left|\theta - \hat{\theta}\right|}{\theta}$, RRMSE = $\frac{\sqrt{MSE}}{\hat{\theta}}$.

HASIL DAN DISKUSI

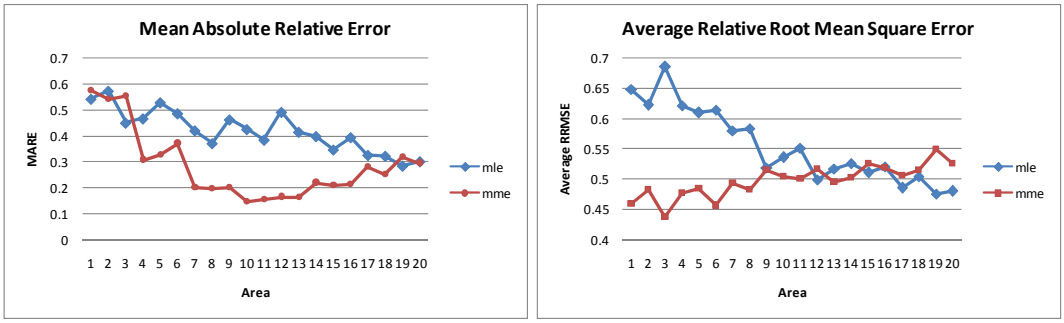
Tanpa Peubah Penjelas

Pada skenario ini peubah X yang merupakan pembentuk nilai tengah dan ragam bagi Y diabaikan. Sehingga pendugaan baik itu penduga langsung maupun sintetiknya diperoleh tanpa informasi tambahan yang seharusnya ada. Meski demikian, perbandingan pada metode pendugaan nilai parameter dispersi sebaran marginal binomial negatif dilakukan pada kondisi yang sama-sama mengabaikan informasi X. Gambar 1 menunjukkan bias MLE tampak naik dengan naiknya nilai harapan dan ragam y. Sedangkan bias dari metode momen relatif rendah pada nilai y yang sedang, pada nilai y yang rendah dan tinggi, bias MME cenderung sama dengan bias MLE.



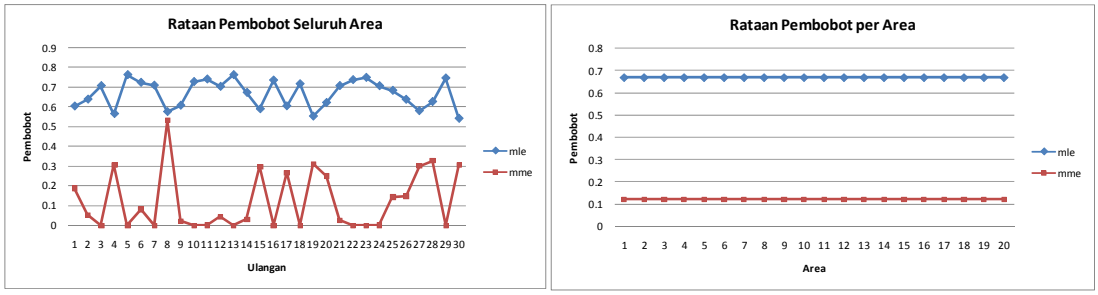
Gambar 1. Rataan Bias dan Rataan MSE bagi model null *EB* Poisson-Gamma

Bila kita perhatikan maka MLE lebih baik karena MSEnya lebih rendah dari MME. Hal ini berarti MLE mempunyai ketelitian yang lebih baik, karena meski biasnya lebih tinggi, variansinya rebih rendah dari MME. Pada RRMSE gambar 2, nilai dugaan MME meningkat pada area-area dengan nilai harapan dan ragam y yang besar. Hal ini sesuai dengan apa yang disebut oleh Zhang, et all. 2002 bahwa perubahan sedikit saja pada nilai ragam mengakibatkan ragam yang besar pada nilai dugaan ϕ.



Gambar 2. MARE dan RRMSE bagi model null Empirical Bayes Poisson-Gamma

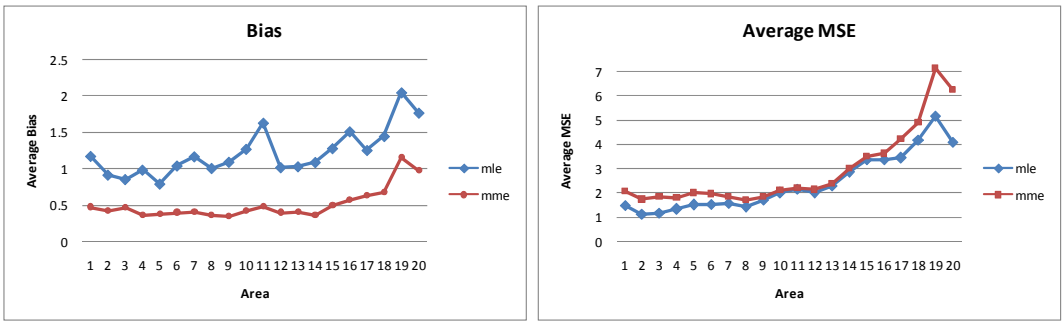
Ketelitian metode MLE dibanding MME ini berasal dari pembobot yang lebih besar dari pembobot MME (gambar 3). MME lebih banyak ditentukan oleh penduga sintetik yang dalam kasus ini diperoleh dengan mengabaikan pengaruh X. Sebaliknya, pada MLE bobot bagi penduga langsung lebih besar.



Gambar 3. Rataan Pembobot Seluruh Area dan per Area bagi model null Empirical Bayes Poisson-Gamma

Dengan Peubah Penjelas

Pada skenario ini peubah X dimodelkan dengan penduga maksimum likelihood dalam model regresi binomiaal-negatif. Nilai penduga bayes empirik ditentukan oleh dua hal (i) pendugaan parameter regresi sebagai penduga tak langsung dan (ii) pembobot komposit bagi penduga langsung dan tak langsung. Namun dalam model poisson-gamma ini keduanya sangat tergantung pada pendugaan parameter regresi.

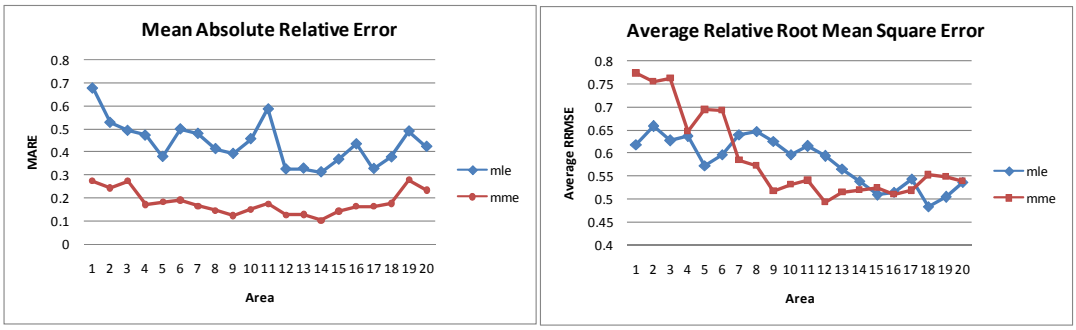


Gambar 4. Rataan Bias dan Rataan MSE bagi Model Linier Empirical Bayes Poisson-Gamma

Baik MME maupun MLE tampak memiliki bias yang menaik dengan naiknya nilai harapan dan ragam y. Namun bias dari MLE tampaknya selalu lebih besar dari bias MME (gambar 4). Demikian pula dengan bias relatifnya, tampak MLE selalu menghasilkan bias yang lebih tinggi dari MME.

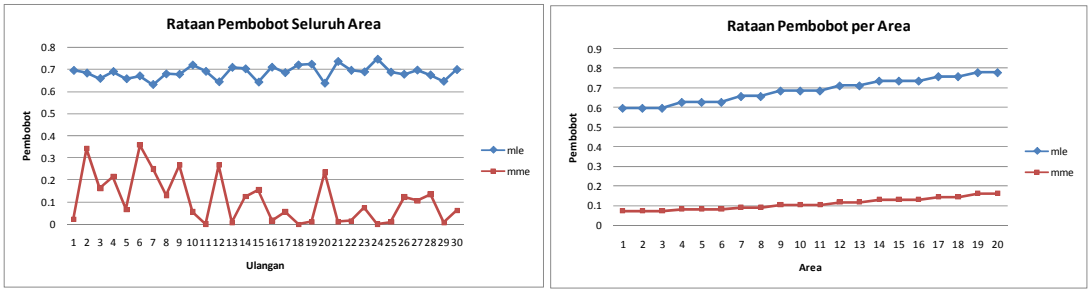
Namun gambar 5 menunjukkan bahwa pada MSE terjadi yang sebaliknya, MLE tampak lebih baik**.** Hal ini menunjukkan bahwa ragam dari MLE sangat rendah, karena dengan

bias yang lebih tinggi MLE memiliki MSE yang lebih redah. Artinya MLE memberikan penduga area kecil yang lebih baik ketelitiannya.



Gambar 5. Rataan Bias dan Rataan MSE bagi Model Linier Empirical Bayes Poisson-Gamma

Bila kita perhatikan gambar 6, tampak besarnya pembobot komposit pada kedua metode, terlihat bahwa metode momen selalu memberikan pembobot yang rendah. Artinya, penduga area kecilnya akan lebih banyak ditentukan oleh penduga tak langsung yaitu pengaruh X'β.



Gambar 6. Rataan Pembobot Seluruh Area dan per Area bagi Model Linier Empirical Bayes Poisson-Gamma

Bias pada MLE diperkirakan berasal dari penduga langsung, meski secara teoritik penduga ini tak bias namun pada kasus poisson, nilainya sangat rentan terhadap nilai tengah yang mendekati nol.

PENUTUP

Beberapa hal dapat kita catat disini adalah:

1. Secara umum pendugaan parameter dispersi dengan MLE memberikan penduga area kecil yang lebih teliti meskipun tidak sangat tepat, baik itu melibatkan peubah penjelas ataupun tidak.
2. Ketelitian metode MLE dibanding MME pada model null berasal dari pembobot yang lebih besar dari pembobot MME. MME lebih banyak ditentukan oleh penduga sintetik yang dalam kasus ini diperoleh dengan mengabaikan pengaruh X. Sebaliknya, pada MLE bobot bagi penduga langsung lebih besar.
3. Bias pada MLE diperkirakan berasal dari penduga langsung, meski secara teoritik penduga ini tak bias namun pada kasus poisson, nilainya sangat rentan terhadap nilai tengah yang mendekati nol.
4. Penduga lain bagi parameter dispersi, yang mungkin dapat dikaji adalah penduga yang berbasis sisaan model yaitu *Deviance scale* dan *Pearson scale.*

DAFTAR PUSTAKA

Clayton, D.G. and Kaldor, J. 1987. Empirical Bayes estimates of age-standardized relative risks for use in disease mapping. Biometrics 43, 671–682.

Gill J. 2002. *Bayesian Methods:A Social and Behavioral Sciences Approach.* Boca Raton: Chapman and Hall.

Dobson, A.J. 1990. An Introduction to generalized linear models. Chapman and Hall, New York.

Jiang, J., P. Lahiri, S. Wan. 2002. A Unified Jackknife Theory For Empirical Best Prediction With M-Estimation. The Annals of Statistics. Vol. 30, No. 6, 1782–1810

Kurnia A, KA Notodiputro. 2006. Penerapan Metode *Jackknife* dalam pendugaan Area Kecil. Forum Statistika dan Komputasi, April 2006, p:12-15.

Kismiantini. 2007. Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson-Gamma [Tesis] Bogor: Institut Pertanian Bogor, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam.

Lawless, J.F. Negative Binomial and Mixed Poisson Regression. The Canadian Journal of Statistics 15, pp. 209-225, 1987.

McCullagh, P. and J.A. Nelder. 1989. Generalized Linear Models. 2nd ed. Chapman and Hall, London.

Power J. H. & E. B. Moser, 1999. Linear model analysis of net catch data using the negative binomial distribution. Can. J. Fish. Aquat. Sci. 56: 191–200.

Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. New York: John Wiley & Sons.

Ruoyan, M. 2004. Estimation of Dispersion Parameters in GLMs with and without Random Effects. Mathematical Statistics. Stockholm University Examensarbete 2004:5. http://www.matematik.su.se/matstat.

Wakefield J. 2006. *Disease mapping and spatial regression with count data*. http://www.bepress.com/uwbiostat/paper286.pdf [24 April 2008].

Zang Y, Z. Ye, & D. Lord, 2004. Estimating the Dispersion Parameter of the Negative Binomial Distribution for Analyzing Crash Data Using a Bootstrapped Maximum Likelihood Method. Zachry Department of Civil Engineering. Texas A&M University. Working Paper.

Penentuan Sampling Minimal Dalam Eksperimen *Life-Testing* menggunakan *Order Statistics*

Oleh:

Budhi Handoko

Staff Pengajar Jurusan Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Padjadjaran Bandung
Email : budhihandoko@yahoo.com

ABSTRAK

Analisis reliabilitas merupakan salah satu alat statistika yang digunakan untuk mengukur tingkat berfungsinya suatu alat/komponen. Suatu alat/komponen dikatakan reliabel jika masih berfungsi dengan baik dalam suatu jangka waktu tertentu. Selama ini proses pengukuran *lifetime* lampu pijar yang diproduksi PT Phillips Ralin Electronics Surabaya dilakukan sampai semua lampu yang diambil sebagai sampel mati, sehingga proses ini memerlukan waktu dan biaya yang cukup besar.

Salah satu cara yang bisa dilakukan untuk mengurangi waktu dan biaya dalam eksperimen *life-testing* adalah dengan menentukan sampling minimal dalam eksperimen *life-testing* lampu pijar yang bisa diperoleh berdasarkan urutan kerusakan yang terjadi. Sehingga proses pengukuran *lifetime* lampu pijar tidak perlu dilakukan sampai semua lampu yang diambil sebagai sampel mati. Hal ini bisa didapatkan dengan cara memperoleh momen order ke-*k* dari fungsi densitas *order statistics* yang sesuai dengan distribusi data waktu kerusakan dari *lifetime* lampu pijar.

Berdasarkan momen order ke-*k* dari fungsi densitas *order statistics* yang sesuai dengan distribusi waktu kerusakan Weibull, dapat diketahui sampling minimal yang dibutuhkan dalam eksperimen *life-testing* lampu pijar berdasarkan spesifikasi lampu 220V/40W/A60/CL/E27 adalah 18 (urutan kerusakan ke-18 dari 26 sampel lampu). Sehingga penghematan yang bisa dilakukan adalah sebesar 39,3 %.

Kata Kunci: Distribusi weibull**,** Fungsi *hazard rate*, *Order statistics*, Reliabilitas.

1. Pendahuluan

Eksperimen *life-testing* merupakan suatu percobaan yang bertujuan untuk mengukur masa hidup suatu komponen dalam suatu waktu tertentu pada sebuah industri pembuatan komponen tersebut. Sebelum suatu komponen/produk dipasarkan, maka harus diuji terlebih dahulu apakah *lifetime* (masa hidup)-nya sudah memenuhi standar nasional Indonesia atau belum. PT. Phillip Ralin Electronics Surabaya merupakan salah satu perusahaan yang memproduksi lampu pijar. Selama ini proses pengukuran *lifetime* lampu dilakukan sampai semua lampu yang diambil sebagai sampel mati, sehingga proses ini memerlukan waktu dan biaya yang cukup besar.

Waktu dan biaya dalam eksperimen *life-testing* dapat dikurangi dengan cara menentukan sampling minimal dalam lampu pijar yang bisa diperoleh berdasarkan urutan kerusakan yang terjadi. Sehingga proses pengukuran *lifetime* lampu pijar tidak perlu dilakukan sampai semua bola lampu yang diambil sebagai sampel mati. Hal ini bisa didapatkan dengan cara memperoleh momen order ke-*k* dari fungsi densitas *order statistics* yang sesuai dengan distribusi data waktu kerusakan dari *lifetime*-nya. Berdasarkan pengamatan yang terurut dalam pengukuran *lifetime* ini bisa diperoleh informasi mengenai fungsi *hazard rate.* Nelson (1982) memperkenalkan fungsi *hazard rate* yang diperoleh dengan menggunakan plot.

Fungsi-fungsi *hazard rate* lainnya yaitu *bathtub-shaped* yang diperkenalkan pertama kali oleh Hjorth (1980) dan kemudian dikembangkan oleh Dhillon (1983). Bentuk lain dari fungsi *hazard rate* dikaji oleh Lai dan Xie (2003) yang mempunyai distribusi laju kerusakan merupakan modifikasi dari distribusi Weibull (*Modified Weibull Distribution*). Menurut Pal (2005), sulit untuk menentukan momen dari fungsi densitas *order statistics* yang sesuai dengan fungsi-fungsi hazard tersebut.

Oleh karena itu, Pal (2005) memberikan alternatif lain dari jenis fungsi *hazard rate* yang dapat digunakan untuk mencari fungsi densitas dari *order statistics* yaitu fungsi *hazard rate* konstan, fungsi *hazard rate* yang meningkat secara linier, dan fungsi *hazard rate* yang meningkat secara eksponensial. Makalah ini akan membahas mengenai momen order ke-*k* dari fungsi densitas *order statistics* yang sesuai dengan distribusi waktu kerusakan Weibull, untuk menentukan sampling minimal dalam eksperimen *life-testing* lampu pijar yang akan diterapkan pada data *lifetime* lampu pijar yang diproduksi oleh PT. Phillips Ralin Electronics Surabaya.

2. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu dari distribusi yang dapat digunakan untuk memodelkan suatu fenomena kerusakan dengan *hazard rate* $h(t)$ tergantung pada usia pakai suatu alat/komponen tersebut. Misalnya jangka waktu kerusakan dari kapasitor, *lifetime* lampu pijar, dan sebagainya. Distribusi Weibull yang digunakan dalam penelitian ini adalah distribusi Weibull dengan dua parameter yaitu β dan θ.

Distribusi Weibull dua parameter dapat merepresentasikan *hazard rate* yang meningkat, konstan, dan menurun (Evans, Hastings, dan Peacock, 2000), dengan fungsi densitas peluang sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}\right],$$

dengan:

t = waktu , t > 0

β = parameter bentuk, β>0

θ = parameter skala, θ>0

3. *Order Statistics*

Misalkan T adalah variabel acak nonnegatif yang mencerminkan masa hidup setiap alat/komponen. Maka pengamatan eksperimen akan dinyatakan dengan , $T_{1:n}$, $T_{2:n,...}$ $T_{r:n}$. Jika $T_{r:n}$ menyatakan waktu kerusakan dari alat/komponen ke-r dari ukuran sampel n, yang mempunyai CDF $F(t)$ dan pdf $f(t)$, dan fungsi *hazard rate* $h(t)$.

Maka fungsi densitas dari $T_{r:n}$ adalah sebagai berikut:

$$f_{r:n}(t) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\{\mathrm{F(t)}^{\mathrm{r-1}}\{1 - \mathrm{F(t)}\}^{\mathrm{n-r}}\ \mathrm{f(t)}$$

dengan:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] = 1 - \exp[-H(t)], \qquad 0 < t < \infty \quad f(t) = h(t)\{1 - F(t)\} = h(t)\exp[-H(t)], \qquad 0 < t < \infty$$

sehingga:

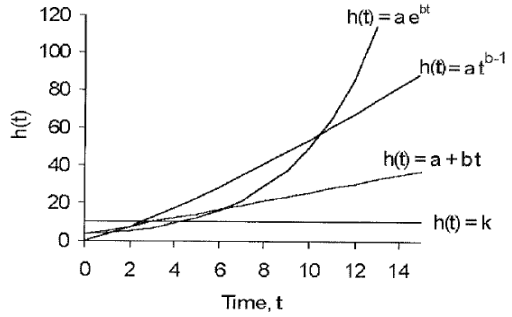
$$f_{r:n}(t) = C_{r,n}\{e^{-H(t)}\}^{n-r+1}\{1 - e^{-H(t)}\}^{r-1}h(t)$$

dengan :

$$C_{r:n} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)}$$

4. Momen Order ke-k dari Distribusi Weibull

Misalkan *h(t)* menyatakan fungsi laju kerusakan atau fungsi *hazard rate* (hrf) pada waktu ke-*t*. Terdapat berbagai jenis fungsi hazard seperti konstan, meningkat secara linier, meningkat secara eksponensial dll. Gambar di bawah ini menunjukkan beberapa fungsi *hazard rate* umum.



Gambar 1 Grafik fungsi *hazard rate* secara umum

Fungsi kumulatif hazard (Chrf) merupakan integral dari fungsi *hazard* yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt$$

Berdasarkan berbagai jenis fungsi *hazard*, akan didapatkan berbagai jenis distribusi *life-testing* untuk waktu kerusakan seperti distribusi eksponensial, Weibull, Rayleigh, dll.

Berikut ini adalah contoh fungsi *hazard rate* yang menunjukkan waktu kerusakan berdistribusi Weibull.

$$h(t) = at^{b-1}, \quad a,b > 0$$

Fungsi densitas *order statistics* ke- r dari $T_{r:n}$, dengan: $1 \le r \le n$ adalah:

$$f_{r:n}(t) = C_{r:n} a t^{b-1} e^{-(n-r+1)\frac{a}{b}t^b} (1 - e^{-\frac{a}{b}t^b})^{r-1}$$

dengan :

$a = \dfrac{\beta}{\theta^\beta}$, θ = parameter skala dari distribusi Weibull, θ>0

$b = \beta$ = parameter bentuk dari distribusi Weibull, β>0

Setelah fungsi densitas *order statistics* dari distribusi Weibull diperoleh, selanjutnya momen order ke-k ($\mu_{r:n}^{(k)}$) akan dijabarkan melalui langkah-langkah berikut ini:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \int_0^\infty t^k f_{r:n}(t)dt$$

$$= C_{r,n} \int_0^\infty t^k a \frac{t^b}{t} e^{-(n-r+1)\frac{a}{b}t^b} \left[1-e^{-\frac{a}{b}t^b}\right]^{r-1} dt$$

misalkan

$$u = t^b \rightarrow du = bt^{b-1}dt$$

$$t = u^{\frac{1}{b}} \rightarrow dt = \frac{1}{b}u^{\frac{1}{b}-1} du$$

sehingga:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = C_{r,n} \int_0^\infty u^{\frac{k}{b}} \frac{au}{u^{\frac{1}{b}}} e^{-(n-r+1)\frac{a}{b}u} \left[1-e^{-\frac{a}{b}u}\right]^{r-1} \frac{1}{b}u^{\frac{1}{b}-1} du$$

$$= C_{r,n} \frac{a}{b} \int_0^\infty u^{\frac{k}{b}} e^{-(n-r+1)\frac{a}{b}u} \left[1-e^{-\frac{a}{b}u}\right]^{r-1} du \qquad (1)$$

Untuk menyederhanakan (1) di atas diperlukan rumusan teorema Binomial. Menurut Taylor dan Karlin (1998), rumusan teorema Binomial sebagai berikut:

$$\left(1-e^{-\frac{a}{b}u}\right)^{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} e^{-\frac{a}{b}uj} \qquad (2)$$

Apabila (2) disubstitusikan ke (1) akan diperoleh

$$\mu_{r:n}^{(k)} = C_{r,n} \frac{a}{b} \int_0^\infty u^{\frac{k}{b}} e^{-(n-r+1)\frac{a}{b}u} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} e^{-\frac{a}{b}uj} du$$

$$= C_{r,n} \frac{a}{b} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \int_0^\infty u^{\frac{k}{b}} e^{-(n-r+1+j)\frac{a}{b}u} du \qquad (3)$$

hasil pada (3) di atas dapat ditulis seperti berikut ini:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = C_{r,n} \frac{a}{b} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \int_0^\infty u^{\left(\frac{k}{b}+1\right)-1} e^{-(n-r+1+j)\frac{a}{b}u} du \qquad (4)$$

Integrasi pada (4) akan diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan memisalkan :

$$\frac{k}{b}+1 = \alpha, \text{ dan } -(n-r+1+j)\frac{a}{b} = \frac{1}{\beta_j}$$

$$\text{atau } \beta_j = -\frac{b}{a(n-r+1+j)}$$

Mengingat sifat pdf dari gamma (Casela dan Berger, 2002) adalah:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta_j{}^{\alpha}} X^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta_j}} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} X^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta_j}} dx = \Gamma(\alpha)\beta_j{}^{\alpha}$$

Jika x = u, maka integrasi pada (4) bisa dirubah ke dalam bentuk fungsi gamma menjadi:

$$\int_0^{\infty} u^{\left(\frac{k}{b}+1\right)-1} e^{-\frac{(n-r+1+j)a}{b}u} du = \Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)\left[\frac{b}{a(n-r+1+j)}\right]^{\frac{k}{b}+1} \qquad (5)$$

Apabila (5) disubstitusikan ke (4), maka rumusan $\mu_{r:n}^{(k)}$ menjadi:

$$\mu_{\mathrm{r:n}}^{(k)} = C_{r,n}\frac{a}{b}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\left[\frac{b}{a(n-r+1+j)}\right]^{\frac{k}{b}+1}\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)$$

$$= C_{r,n}\frac{a}{b}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\left[\frac{b}{a(n-r+1+j)}\right]^{\frac{k}{b}}\left[\frac{b}{a(n-r+1+j)}\right]\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)$$

$$= C_{r,n}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\left[\frac{b}{a(n-(r-1-j))}\right]^{\frac{k}{b}}\left[\frac{1}{(n-(r-1-j)}\right]\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)$$

Misalkan:

i = r-1-j, sehingga j = r-1-i

jika j = 0, maka i = r-1

untuk j = r-1, maka i = 0

Sehingga:

$$\mu_{\mathrm{r:n}}^{(k)} = C_{r,n}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{r-1-i}\binom{r-1}{r-1-i}\left[\frac{b}{a(n-i)}\right]^{\frac{k}{b}}\left[\frac{1}{(n-i)}\right]\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)$$

:

$$= C_{r,n}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{r-1-i}\binom{r-1}{i}\left[\frac{b}{a(n-i)}\right]^{\frac{k}{b}}\left[\frac{1}{(n-i)}\right]\Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right)$$

Dari tahapan-tahapan yang dilakukan di atas diperoleh momen order ke-k ($\mu_{r:n}^{k}$) adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\mathrm{r:n}}^{(k)} = C_{r,n} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-1-i} \binom{r-1}{i} \left[\frac{b}{a(n-i)}\right]^{\frac{k}{b}} \left[\frac{1}{(n-i)}\right] \Gamma\left(\frac{k}{b}+1\right) \qquad (6)$$

Rata-rata dan standar deviasi dihitung dengan menggunakan rumusan berikut :

$$\mu_{r:n} = \mu_{r:n}^{(1)}$$
$$\sigma_{r:n} = \mu_{r:n}^{(2)} - \left[\mu_{r:n}^{(1)}\right]^2$$

5. Menentukan Ukuran Sampel Minimal

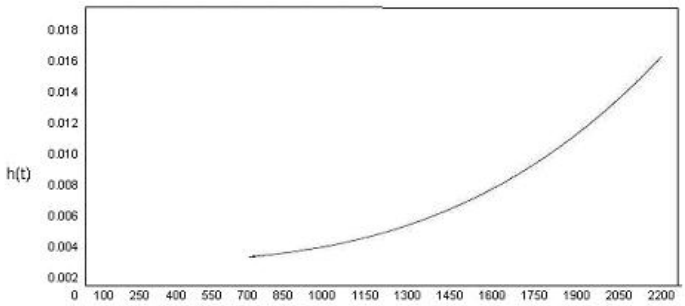
Sampling minimal dalam eksperimen *life-testing* untuk menguji masa hidup lampu yang diproduksi oleh mesin B1 unit 10 dengan spesifikasi 220V/40W/A60/CL/E27 di PT Phillips Ralin Electronics Surabaya dapat dihitung dengan menggunakan momen order ke-k ($\mu_{r:n}^{(k)}$) dari fungsi densitas *order statistics* yang sesuai dengan distribusi data waktu kerusakan dari *lifetime* lampu pijar tersebut yaitu Weibull. Dari hasil estimasi parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan bantuan paket program Easyfit 4.3 diperoleh nilai parameter bentuk (β) = 4,9888 dan nilai parameter skala (θ) = 1230,9.

Parameter skala yang digunakan dalam analisis selanjutnya adalah *a*, nilai $a = \frac{\beta}{\theta^{\beta}}$, dengan θ = parameter skala dari distribusi Weibull, θ>0, dan β merupakan parameter bentuk dari distribusi Weibull, β>0. Sehingga nilai b = β = 4,9888 dan nilai $a = \frac{\beta}{\alpha^{\beta}} = \frac{4,9888}{1230,9^{4,9888}} = 1,9120\text{x}10^{-15}$.

Fungsi *hazard rate* dari data *lifetime* lampu yang menunjukkan waktu kerusakan berdistribusi Weibull adalah:

$$h(t) = at^{b-1}$$
$$= 1,9120x10^{-15} t^{3,9888}$$

yang mempunyai plot seperti ditunjukkan pada Gambar 2



Gambar 2 Grafik Fungsi *Hazard Rate*

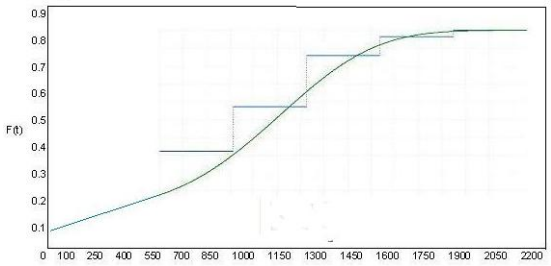
Fungsi *hazard rate* kumulatifnya adalah

$$H(t) = \frac{a}{b} t^{b}$$
$$= \frac{1{,}9120\text{x}10^{-15}}{4{,}9888} t^{4{,}9888}$$
$$= 3{,}83\text{x}10^{-16} t^{4{,}9888}$$

Fungsi distribusi kumulatif-nya adalah

$$F(t) = 1 - \exp[-H(t)]$$
$$= 1 - \exp\left(2{,}83\text{x}10^{-16} t^{4{,}9888}\right)$$

Fungsi distribusi kumulatif mempunyai plot seperti ditunjukkan pada Gambar 3 berikut ini.

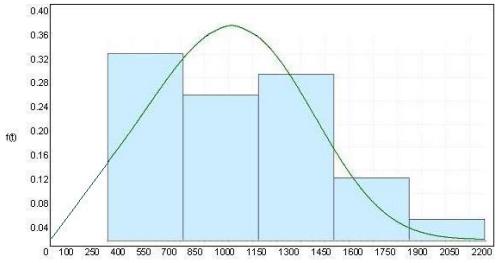


Gambar 3 Grafik Fungsi Distribusi Kumulatif

Berdasarkan fungsi *hazard rate* dan fungsi distribusi kumulatif yang telah diperoleh sebelumnya maka fungsi densitas-nya adalah sebagai berikut

$$f(t) = h(t)\{1 - F(t)\}$$
$$= 1{,}9120x10^{-15} t^{3{,}9888} . \exp\left(3{,}83\text{x}10^{-13} t^{4{,}9888}\right)$$

dengan plot fungsi densitas disajikan pada Gambar 4 berikut



Gambar 4 Grafik Fungsi Densitas

Sehingga fungsi densitas *order statistics* dari data *lifetime* lampu adalah:

$$f_{r:n}(t) = C_{r:n}\, at^{b-1} e^{-(n-r+1)\frac{a}{b}t^{b}} \left(1 - e^{-\frac{a}{b}t^{b}}\right)^{r-1}$$

$$= C_{r:n}\, 1{,}9120x10^{-15} t\, 3{,}9888\, e^{-(n-r+1)3{,}83x10^{-16} t^{4.0495}} x.$$

$$\left(1 - e^{-3{,}83x10^{-15} t^{4.0495}}\right)^{r-1}$$

dengan:

$$C_{r:n} = \frac{26!}{(18-1)!(26-18)!} = 28.120.950$$

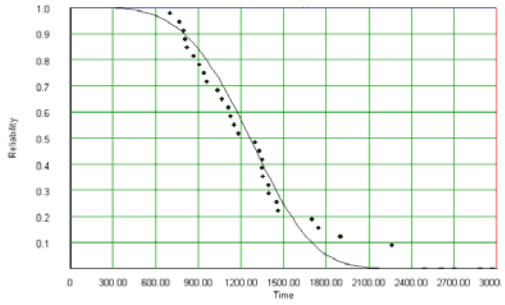
Fungsi reliabilitas dari data adalah

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$= 1 - \left[1 - \exp\left(2{,}83x10^{-16} t^{4{,}9888}\right)\right]$$

$$= \exp\left(2{,}83x10^{-16} t^{4{,}9888}\right)$$

dengan plot grafik fungsi reliabilitas ditampilkan pada Gambar 5



Gambar 5 Grafik Fungsi Reliabilitas

Dengan menggunakan paket program MATLAB, versi 6.5, nilai *a*, dan *b* disubstitusikan ke (8), sehingga diperoleh nilai rata-rata waktu terjadinya kerusakan bola lampu pijar untuk urutan kerusakan lampu (*r*) dan ukuran sampel (*n*) sejumlah 26. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat dalam Tabel 1.

Tabel 1 Nilai Rata-rata Waktu Terjadinya
Kerusakan Bola Lampu Pijar (jam) dan Standar Deviasinya

r	$\mu_{r:n}$	$\sigma_{r:n}$	r	$\mu_{r:n}$	$\sigma_{r:n}$
1	588,2	135,0	14	1155,6	63,9
2	708,9	108,3	15	1180,6	63,4
3	783,2	95,4	16	1205,7	63,1
4	839,1	87,5	17	1231,0	62,8
5	885,0	82,0	**18**	**1256,9**	**62,9**
6	924,7	77,9	19	1283,7	63,4
7	960,2	74,6	20	1311,7	63,9
8	992,6	72,1	21	1341,6	64,9
9	1022,7	70,0	22	1374,2	66,5
10	1051,2	68,3	23	1410,9	69,1
11	1078,4	66,8	24	1454,3	73,3
12	1104,7	65,7	25	1510,5	81,2
13	1130,4	64,7	26	1600,6	101,2

Berdasarkan Tabel 1 tersebut, $\mu_{r:n}$ adalah nilai rata-rata waktu terjadinya kerusakan bola lampu pada urutan ke-r untuk sejumlah *n* sampel bola lampu, sedangkan $\sigma_{r:n}$ adalah standar deviasinya. Untuk *r* = 1, artinya adalah rata-rata waktu terjadinya kerusakan pertama dari 26 bola lampu adalah 588,2 jam dengan standar deviasi-nya 135 jam. Untuk nilai *r* = 2, rata-rata waktu terjadinya kerusakan kedua dari 26 bola lampu adalah 708,9 jam dengan standar deviasi-nya 108,3 jam, demikian seterusnya sampai dengan kerusakan bola lampu yang terakhir. Eksperimen *life-testing* akan dihentikan ketika rata-rata kerusakan bola lampu melebihi ambang nilai maksimum dari Standard Nasional Indonesia (SNI) yaitu 1250 jam yang terjadi pada kerusakan ke-18 dengan rata-rata waktu kerusakan 1256,9 jam dan standar deviasinya 62,9 jam. Sehingga dari sebanyak 26 sampel bola lampu yang seharusnya digunakan dalam eksperimen, ternyata sudah cukup menggunakan sampel sebanyak 18 bola lampu saja.

Sehingga eksperimen *life-testing* untuk menguji masa hidup lampu pijar spesifikasi 220V/40W/A60/CL/E27 diperlukan minimal 18 bola lampu, tanpa

mengurangi informasi apabila menggunakan ke-26 sampel lampu tersebut. Dengan demikian, dapat mengurangi waktu dan biaya yang dikeluarkan dalam melakukan eksperimen *life-testing*. Penghematan yang dapat dilakukan dalam menerapkan metode ini adalah dapat menghemat waktu dalam melakukan eksperimen *life-testing* dan juga dapat menghemat jumlah bola lampu yang digunakan dalam eksperimen *life-testing* yaitu sebesar 30,77% .

6. Kesimpulan

Jumlah sampling minimal yang seharusnya diperlukan untuk eksperimen *life-testing* dari lampu pijar di PT Phillips Ralin Electronics yang diproduksi pada mesin B1 unit 10 dengan spesifikasi lampu pijar 220V/40W/A60/CL/E27 adalah 18 dengan rata-rata waktu kerusakan 1256,9 jam dan standar deviasinya 62,9 jam. Hal ini dapat diartikan bahwa pengujian eksperimen *life-testing* dari lampu pijar ini dapat dihentikan ketika rata-rata kerusakan bola lampu melebihi nilai maksimum dari Standard Nasional Indonesia (SNI) yaitu 1250 jam yang terjadi pada urutan kerusakan ke-18. Sehingga pengujian *life-testing* tidak perlu dilakukan sampai semua sampel sebanyak 26 mati, tetapi perusahaan tetap memperoleh informasi mengenai *lifetime* lampu yang sesuai dengan SNI dan dapat menghemat waktu dan biaya. Penghematan jumlah bola lampu yang dapat dilakukan sebesar 30,77%.

7. Daftar Pustaka

Casela, G. Dan Berger, R.L., 2002, *Statistical Inference*, Duxbury, California.

Dhillon, B.S., 1983, *Reliability Engineering in Systems Design and Operation*, Van Nostrand Reinhold, New York.

Ebeling, C.E., 1997, *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*, The Mc Graw-Hill Companies Inc, Singapore.

Evans, M., Hastings, N., dan Peacock, B., 2000, *Statistical Distribution*, John Wiley & Sons, New York.

Franty, Y. K., 2008, *Penggunaan Order Statistics Dalam Eksperimen Life-testing* (*Studi Kasus di PT Phillips Ralin Electronic Surabaya*), Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Hjorth, U., 1980, A reliability distribution with increasing, decreasing, constant, bathtub-shape failure rate, *Technometrics*, 22, 99-107.

Hoyland, A., dan Rausand, M., 1994, *System Reliability Theori Models and Statistical Methods,* John Wiley and Sons, New York.

Lai, C.D. dan Xie, M., 2003, A Modified Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, 52, 33-37.

Nelson, W., 1982, *Applied Life Data Analysis*, John Wiley, New York.

Pal, S., 2005, Order statistics for some common hazard rate functions with an application, *The International Journal of Quality & Reliability Management*, 22, 201-210.

Taylor, H.M. dan Karlin, S., 1998, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, New York.

Analisis Conjoint Sebagai Alat Menentukan Model Preferensi Nasabah Menabung Di Bank

Budiono
Nani Hidayati

Program Studi Statistika Terapan FMIPA Univ.Gajayana
Jl.Merjosari- Dinoyo Malang

Abstrak : Tingkat persaingan antar bank yang semakin ketat, dimana masing-masing bank berusaha untuk memberikan layanan dan produk yang terbaik, serta mengedepankan keunggulan produknya masing-masing. Dalam kondisi pasar yang kompetitif ini, preferensi dan loyalitas dari nasabah adalah kunci kesuksesan. Maka bank dituntut untuk mengembangkan konsep pemasaran baru, melalui atribut-atribut yang ada. Dari berbagai atribut yang ada, dapat dilakukan evaluasi tingkat kepentingan atribut terhadap produk dan layanan perbankan. Analisis conjoint merupakan teknik untuk menentukan tingkat kepentingan dan nilai kepentingan relative dari berbagai atribut suatu produk dan jasa. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui faktor atau atribut beserta level mana saja yang dianggap paling dominan menjadi pertimbangan nasabah dalam menabung di LIPPO BANK Malang. Sedangkan faktor atau atribut dan level yang diteliti adalah : Bunga (1,88%, 2,18%, 4,58%, 5,18%), Hadiah (Barang elektronik, Uang, Sepeda Motor, Mobil), Biaya setoran Awal (150 ribu, 300 ribu, 500 ribu) dan Fasilitas (Kartu ATM. Kartu Debit).Dari hasil analisis conjoint diketahui bahwa, preferensi untuk faktor terpenting yang dipertimbangkan oleh nasabah adalah bunga tabungan dengan nilai penting relative sebesar (34,31%), kedua adalah hadiah tabungan (32,02%), ketiga adalah biaya setoran awal (21,34%) dan keempat adalah faslitas (12,33%). Sedangkan level yang paling disukai dari faktor yang dipertimbangkan adalah bunga tabungan sebesar 5,18%, hadiah berupa mobil, biaya setoran awal 150 ribu dan fasilitas Kartu ATM.

Kata kunci : Preferensi. Analisis Conjoint dan nasabah.

Pendahuluan

Latar Belakang : Persaingan bisnis di era global ini sangat tajam. Persaingan merupakan tantangan yang berat bagi tiap-tiap perusahaan untuk dapat memenangkannya. Dimana lembaga perbankanpun tak lepas dari masalah persaingan ini. Untuk itu maka lembaga perbankan dituntut lebih professional dan selektif dalam sistem kerjanya, sehingga dapat menunjang kegiatan usahanya.

Untuk menarik nasabah baru, maka perlu mengembangkan faktor atau atribut beserta level-levelnya yang dimilikinya, sehingga dapat tercipta suatu pembenahan pemasaran terhadap produknya sesuai dengan preferensi dan kepuasan dari nasabahnya. Faktor atau atribut adalah variabel spesifik yang ditunjukkan oleh dua atau lebih level, sedangkan level adalah nilai spesifik dari faktor. Untuk itu faktor atau atribut dan level

yang diteliti di Lippo Bank adalah Bunga (X_1) dengan level-levelnya (1,88%, 2,18%, 4,58%, 5,18%), Hadiah (X_2) dengan levelnya (Barang elektronik, Uang, Sepeda motor, Mobil) Biaya setoran awal (X_3) levelnya (150 ribu, 300ribu, 500ribu), dan Fasilitas (X_4) levelnya (Kartu ATM, Kartu Debit). Dengan menggunakan Analisis Conjoint dapat dibentuk suatu konsep produk baru yang ideal berdasarkan permintaan dan preferensi nasabah. Selain itu melalui Analisis Conjoint dapat diketahui nilai utilitas atau tingkat kepentingan tiap-tiap atributnya.

Rumusan masalah : Faktor apa saja yang menjadi pertimbangan nasabah untuk menabung di Lippo Bank dan Level mana saja yang lebih disukai oleh nasabah Lippo Bank cabang Malang?

Tujuan penelitian: mengetahui faktor atau atribut mana saja yang dianggap paling dominan menjadi pertimbangan nasabah menabung di Lippo Bank cabang Malang dan level mana saja yang paling disukai oleh nasabah

Manfaat penelitian: memberikan informasi kepada Lippo Bank cabang Malang mengenai preferensi nasabah dan faktor atau atribut-atribut pokok yang disukai oleh nasabah dan digunakan sebagai referensi penelitian selanjutnya.

Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Lippo Bank, Jalan Merdeka Timur no 7 Malang. Data dalam penelitian ini adalah data primer, yang diperoleh langsung melalui pemberian kuesioner kepada responden .Populasi dalam penelitian ini adalah semua nasabah Lippo Bank yang baru saja melakukan transakasi perbankan di Lippo Bank cabang Malang. Metode penarikan sampel yang digunakan adalah *"Teknik Non Probability Sampling Accidental"*.Jumlah sampel 100 orang.Teknik pengumpulan data dengan menyebarkan kuesioner kepada responden ditujukan untuk mendapatkan data preferensi responden terhadap atribut dan level yang disukai.. Penilaian terhadap stimuli dengan menggunakan sakala Likert dengan pemberian ranting dari 1 = Sangat Tidak Setuju sampai 5 = Sangat Setuju. Kriteria penilaian yaitu STS: Sangat Tidak Setuju,TS : Tidak Setuju, B : Biasa, S : Setuju dan SS : Sangat Setuju. Sedangkan untuk menduga nilai proporsi alasan responden menabung di Lippo Bank digunakan kriteria 1 : Bila memilih Bunga dan 0: Bila memilih yang lain.

Faktor utama konsumen memilih Lippo Bank Malang berdasarkan bauran pemasaran dibidang jasa perbankan mengacu pada perilaku konsumen, adalah Variabel (X_1): Bunga, Variabel (X_2): Hadiah,Variabel (X_3): Biaya setoran awal,Variabel (X_4): Fasilitas. Sedangkan level dari setiap variabel adalah (X_1) Bunga : 1,88%, 2,18%, 4,58%, 5,18%. (X_2) Hadiah: Barang-barang elektronik, Uang, Sepeda motor, Mobil. (X_3) Biaya setoran awal : 150.000, 300.000, 500.000. (X_4) Fasilitas :Kartu ATM, Kartu Debit

Stimuli dari empat faktor atau atribut (Bunga, Hadiah, Biaya setoran awal, dan Fasilitas) dan tiga belas level atau subatribut (empat untuk bunga, empat untuk hadiah, tiga untuk biaya setoran awal, dan dua untuk fasilitas), maka kemungkinan kombinasi dari penelitian ini : 4 x 4 x 3 x 2 = 96.Karena ada 96 kemungkinan kombinasi produk, maka hal ini tidak praktis sehingga digunakan stimuli dengan bantuan *SPSS for windows versi 13.00, hasilnya:*

Tabel 1 Kontruksi Stimuli Faktor dan Level

No	Stimuli
1	Bunga : 2,18%, Hadiah : Barang Elektronik, Setoran awal : 300 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
2	Bunga : 5,18%, Hadiah : Barang Elektronik, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu Debit
3	Bunga : 4,58%, Hadiah : Barang Elektronik, Setoran awal : 500 ribu, Fasilitas Kartu Debit
4	Bunga : 1,888%, Hadiah : Sepeda Motor, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
5	Bunga : 5,18%, Hadiah : Uang, Setoran awal : 300 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
6	Bunga : 2,18%, Hadiah : Mobil, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu Debit
7	Bunga : 4,58%, Hadiah : Mobil, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas Kartu ATM
8	Bunga : 4,58%, Hadiah : Uang, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
9	Bunga : 2,18%, Hadiah : Sepeda Motor, Setoran awal : 500 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
10	Bunga : 5,18%, Hadiah : Mobil, Setoran awal : 500 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
11	Bunga : 5,88%, Hadiah : Sepeda Motor, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu Debit

12	Bunga : 1,88%, Hadiah : Barang Elektronik, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu ATM
13	Bunga : 4,58%, Hadiah : Sepeda Motor, Setoran awal : 300 ribu, Fasilitas : Kartu Debit
14	Bunga : 1,88%, Hadiah : Mobil, Setoran awal : 300 ribu, Fasilitas : Kartu Debit
15	Bunga : 2,18%, Hadiah : Uang, Setoran awal : 150 ribu, Fasilitas : Kartu Debit
16	Bunga : 1,88%, Hadiah : Uang, Setoran awal : 500 ribu, Fasilitas : Kartu Debit

Uji validitas digunakan untuk menunjukan sejauh mana suatu alat ukur (kuesioner) yang digunakan telah mengukur informasi yang diperlukan. Uji ini dilakukan dengan mengukur korelasi antara variabel/item dengan skor total variabel. Digunakan validitas konstruk yaitu mencari korelasi antara masing-masing pertanyaan dengan skor total. Uji validitas ini mengguakan teknik korelasi produkt moment model Pearson's dengan rumus sebagai berikut :

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\left\{\left(n\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)^2\right\}\left\{\left(n\sum y^2\right) - \left(\sum y\right)^2\right\}}}$$

dimana :

r_{xy} = koefisien korelasi

x = skor pertanyaan untuk setiap subjek

y = skor total

xy = skor pertanyaan dan skor total

n = jumlah sampel

Menurut Sugiyono (1999) bilamana koefisien korelasi antara skor suatu indikator dengan skor total keseluruhan indikator positif dan lebih besar 0,3 ($r_{xy} \geq 0{,}3$) maka instrument tersebut dianggap valid.

Reliabilitas merupakan indeks yang menunjukan sejauh mana suatu alat pengukuran dapat dipercaya atau dapat diandalkan. Dalam penelitian ini uji reliabilitas dilakukan dengan melihata koefisien α - Cronbach dengan rumus sebagai berikut :

$$\alpha = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{1 - \sum \sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right)$$

dimana :

α = keandalan alpa-Cronbach

k = banyaknya butir pertanyaan

$\sum \sigma_i^2$ = jumlah varian butir

σ_i^2 = varian total

Menurut Malhotra suatu instrument dianggap sudah cukup reliable bilamana α - Cronbach >0,6

Prosedur Analisis *Conjoint* digunakan untuk mengetahui preferensi responden.. Dari hasil kuesioner preferensi merupakan data atau informasi yang akan dipergunakan untuk mengetahui rangking tingkat kepentingan relative dengan *Analisis Conjoint*. Model yang akan diduga adalah :

$$U(X)=\beta_0 + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 + \beta_4 H_1 + \beta_5 H_2 + \beta_6 H_3 + \beta_7 A_1 + \beta_8 A_2 + \beta_9 F_1$$

Dimana :

U (X) : Preferensi keseluruhan

β_0 : Konstanta

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$: Koefesien dari variabel bunga dan koefisien ini untuk mencari nilai relative utilitas dari variabel bunga level 1, 2, 3 dan 4

$\beta_4, \beta_5, \beta_6$: Koefesien dari variabel hadiah dan koefisien ini untuk mencari nilai relative utilitas dari variabel hadiah level 1, 2, 3 dan 4

β_7, β_8 : Koefesien dari variabel biaya administrasi dan koefisien ini untuk mencari nilai relative utilitas dari variabel biaya setoran awal level 1, 2, dan 3

β_9 : Koefesien dari variabel fasilitas dan koefisien ini untuk mencari nilai relative utilitas dari variabel fasilitas level 1, dan 2

B_1, B_2,B_3 : Variabel dummy untuk bunga level 1, 2 dan 3

H_1, H_2, H_3 : Variabel dummy untuk hadiah level 1, 2 dan 3

A_1, A_2 : Variabel dummy untuk biaya setoran awal level 1, dan 2

F_1 : Variabel dummy untuk fasilitas level 1

Koding dari masing-masing variabel untuk variabel dummy nya adalah : Variabel Bunga : B_1 1,88% = 1,lainnya=0.B_2 2,18% = 1,lainnya=0. B_3 4,58% = 1, lainnya=0

Variabel Hadiah : H_1 barang-barang elektronik =1,lainnya=0. H_2uang=1, lainnya=0. H_3 Sepeda motor = 1, lainnya =0.

Variabel biaya setoran awal : A_1 150.000 = 1,lainnya=0. A_2 300.000 = 1, lainnya=0.

Variabel fasilitas : F_1 kartu ATM = 1 , lainnya=0.

Kemudian dibuat matrik koding variabel *dummy*

Tabel 2 Matrik Koding Variabel *Dummy*

Level	**Bunga**			**Hadiah**			**Biaya setoran awal**		**Fasilitas**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**H_1**	**H_2**	**H_3**	**A_1**	**A_2**	**F_1**
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0	0	-
4	0	0	0	0	0	0	-	-	-

Tabel variabel koding pada keseluruhan profil stimuli digunakan sebagai regresi dummy sehingga dari analisis *regresi dummy* variabel dapat dicari :

- Koefisien $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$
- Koefisien utility (α_{ij}) untuk masing-masing faktor

Setiap koefisien dari variabel dummy merupakan perbedaan kontribusi sebesar (α_{ij}) dari variabel bersangkutan dikurangi kontribusi sebagian (α_{ij}) dari level dasar. Untuk mencari nilai (α_{ij}). Variabel bunga persaman untuk mencari $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$

$$\alpha_{11} - \alpha_{14} = \beta_1$$
$$\alpha_{12} - \alpha_{14} = \beta_2$$
$$\alpha_{13} - \alpha_{14} = \beta_3$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} = 0$$

Variabel hadiah, persamaan untuk mencari $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23} dan \alpha_{24}$

$$\alpha_{21} - \alpha_{24} = \beta_4$$
$$\alpha_{22} - \alpha_{24} = \beta_5$$
$$\alpha_{23} - \alpha_{24} = \beta_6$$
$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24} = 0$$

dari koefisien tersebut dicari nilai penting dari masing-masing atribut $I_i = \{\max(\alpha_{ij}) - \min(\alpha_{ij})\}$. I_i digunakan untuk mencari nilai total tingkat kepentingan relative dari seluruh atribut : $W_i = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{m} I}$

sehingga diketahui urutan atribut mana yang paling penting.

Untuk mendesain stimuli digunakan bantuan program *SPSS relase 13.00* dengan eksekusi *SYNTAX*. *EDITOR.*Pembuatan *Conjoint* dengan *SPSS* adalah sama dengan pembuatan stimuli.

Hasil dan Pembahasan

Uji Validitas dan Reliabilitas

Nilai korelasinya (r_{xy}) tiap instrument $\geq$ 0,3 sehingga dapat disimpulkan bahwa instrument sudah valid. Hasil lengkapnya pada tabel berikut :

Tabel 3. Uji Validitas

No	Variabel	Nilai Korelasi	Keterangan
1	X1 (Stimuli ke-1)	0,517	Valid
2	X2 (Stimuli ke-2)	0,594	Valid
3	X3 (Stimuli ke-3)	0,505	Valid
4	X4 (Stimuli ke-4)	0,398	Valid
5	X5 (Stimuli ke-5)	0,538	Valid
6	X6 (Stimuli ke-6)	0,593	Valid
7	X7 (Stimuli ke-7)	0,667	Valid
8	X8 (Stimuli ke-8)	0,650	Valid
9	X9 (Stimuli ke-9)	0,339	Valid
10	X10 (Stimuli ke-10)	0,542	Valid
11	X11 (Stimuli ke-11)	0,405	Valid
12	X12 (Stimuli ke-12)	0,385	Valid
13	X13 (Stimuli ke-13)	0,485	Valid
14	X14 (Stimuli ke-14)	0,378	Valid
15	X15 (Stimuli ke-15)	0,387	Valid
16	X16 (Stimuli ke-16)	0,319	Valid

Berdasarkan hasil uji instrumen dengan pendekatan model *Alpha Cronbach* nilainya sebesar 0,7554 yang nilainya lebih besar dari 0,6 ($\alpha > 0{,}6$). Sehingga dapat disimpulkan bahwa semua instrumen dalam penelitian sudah reliabel.

Dari hasil analisis data penelitian, maka diperoleh data modus preferensi konsumen terhadap stimuli produk tabungan pada tabel berikut ini:

Tabel 4 Modus Preferensi Responden

No. Stimuli	Jumlah Responden	Modus Preferensi
1	100	4
2	100	4
3	100	2
4	100	4
5	100	3
6	100	4
7	100	4
8	100	4
9	100	2
10	100	4
11	100	4
12	100	4
13	100	3
14	100	4
15	100	4
16	100	2

Untuk memudahkan dalam menganalisis *preferensi* responden terhadap stimuli, maka dapat disusun tabel sebagai berikut

Tabel 5. Preferensi Stimuli Berdasarkan Pilihan Responden

Preferensi	Stimuli	Jumlah
1	-	-
2	3, 9, 16	3
3	5, 13	2
4	1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15	11
5	-	-

Dari tabel diatas menunjukkan bahwa :

- Tidak ada stimuli produk tabungan Lippo Bank yang sangat tidak disetuji oleh 100 nasabah, karena para nasabah cenderung tidak memberikan *preferensi* pada stimuli tersebut dengan bobot 1.
- Ada 3 stimuli produk tabungan Lippo Bank yang tidak disetujui oleh 100 nasabah, karena para nasabah cenderung memberikan *preferens*i pada 3 stimuli tersebut dengan bobot 2.
- Ada 2 stimuli produk tabungan Lippo Bank yang oleh 100 nasabah dijawab biasa, karena para nasabah cenderung memberikan *preferens*i pada 2 stimuli tersebut dengan bobot 3.
- Ada 11 stimuli produk tabungan Lippo Bank yang disetujui oleh 100 nasabah, karena para nasabah cenderung memberikan *preferens*i pada 11 stimuli tersebut dengan bobot 4.
- Tidak ada stimuli produk tabungan Lippo Bank yang sangat disetuji oleh 100 nasabah, karena para nasabah cenderung tidak memberikan *preferensi* pada stimuli tersebut dengan bobot 5.

Dengan adanya stimuli yang disetujui atau disukai nasabah Lippo Bank diatas, diharapkan pihak Lippo Bank dapat memenuhi kriteria seperti yang diinginkan nasabah tersebut.

Analisis *Conjoint*

Bentuk input data untuk menduga model dasar analisis *Conjoint* digunakan prosedur analisis *regresi dummy* variabel berdasarkan tabel dibawah ini :

Tabel 5. Koding Variabel *Dummy*

No	Modus Likert Preferensi	Variabel								
		Bunga			Hadiah			Biaya Setoran awal		Fasilitas
		B1	B2	B3	H1	H3	H4	A1	A2	F1
1	4	0	1	0	1	0	0	0	1	1
2	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0
3	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
4	4	1	0	0	0	0	1	1	0	1

5	3	0	0	0	0	1	0	0	1	1
6	4	0	1	0	0	0	0	1	0	0
7	4	0	0	1	0	0	0	1	0	1
8	4	0	0	1	0	1	0	1	0	1
9	2	0	1	0	0	0	1	0	0	1
10	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	4	0	0	0	0	0	1	1	0	0
12	4	1	0	0	1	0	0	1	0	1
13	3	0	0	1	0	0	1	0	1	0
14	4	1	0	0	0	0	0	0	1	0
15	4	0	1	0	0	1	0	1	0	0
16	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0

Dari tabel diatas didapatkan persamaan *regresi dummynya* sebagai berikut:

$U(X) = 3{,}125 - 0{,}250B_1 - 0{,}250B_2 - 0{,}500B_3 - 0{,}500H_1 - 0{,}750H_2 - 0{,}750H_3 + 1{,}500A_1 + 1{,}000A_2 + 0{,}250F_1$

Selanjutnya mencari nilai penting relatif dari masing-masing factor dan tingkat kepentingan atau nilai utilitasnya dengan menggunakan bantuan program *SPSS versi 13.00* dengan eksekusi *syntax*. Secara keseluruhan hasil analisis *conjoint* adalah sebagai berikut :

Tabel 6. Hasil Analisis Conjoint

Faktor	**Level**		**Utilitas**	**Nilai penting Relatif**
	No	**Deskripsi**		
Bunga	1	1,88%	-0,0513	0,3431
	2	2,18%	0,0013	
	3	4,58%	0,0088	
	4	5,18%	0,0413	
Hadiah	1	Barang Elektronik	-0,1113	0,3202
	2	Uang	-0,0688	
	3	Sepeda Motor	-0,1363	
	4	Mobil	0,3163	
Biaya Setoran Awal	1	150 Ribu	0,1233	,02134
	2	300 Ribu	-0,0154	
	3	500 Ribu	-0,1079	
Fasilitas	1	Kartu ATM	0,0475	0,1233
	2	Kartu Debit	-0,0475	

Berdasarkan tabel hasil analisis *conjoint* diatas dapat diketahui nilai utilitas tiap level- level dari faktor-faktor tersebut adalah :

- BUNGA, terlihat bahwa *utility* untuk bunga 2,18%, 4,58%, dan 5,18% adalah positif, maka secara umum nasabah Lippo Bank suka dengan bunga tersebut, namun untuk bunga 5,18% mempunyai nilai lebih besar dibandingkan dengan yang lain yaitu 0,0413 sehingga dapat dianalisis bahwa nasabah lebih suka bunga tabungan sebesar 5,18%. Jadi *preferensi* nasabah terhadap bunga tabungan adalah nasabah paling suka dengan bunga tabungan sebesar 5,18%, *preferensi* kedua dengan bunga 4,58% dan *preferensi* ketiga adalah tabungan dengan bunga 2,18%. Sedangkan tabunga dengan bunga 1,88% nasabah Lippo Bank tidak suka karena hasil analisis menunjukan nilai *utility*nya negatifyaitu (-0,0513)
- HADIAH, terlihat bahwa *utility* untuk hadiah undian mobil adalah positif, maka nasabah Lippo Bank suka dengan hadiah undian berupa mobil. Sedangkan hadiah seperti barang elektronik, uang, sepeda motor nasabah tidak suka, karena dari hasil analisis nilai *utility*nya negative. Jadi tingkat *preferensi* nasabah terhadap hadiah undian adalah nasabah lebih suka tabungan dengan hadiah undian berupa mobil.
- BIAYA SETORAN AWAL, terlihat bahwa *utility* untuk biaya setoran awal sebesar 150 ribu adalah positif, maka nasabah Lippo Bank suka dengan biaya setoran awal sebesar 150 ribu. Sedangkan untuk biaya setoran awal 300 ribu dan 500 ribu nasabah tidak suka, karena dari hasil analisis menunjukkan bahwa nilai *utility* untuk biaya setoran awal 300 ribu dan 500 ribu adalah negatif. Jadi tingkat *preferensi* nasabah Lippo Bank terhadap biaya setoran awal lebih suka dengan tabungan dengan biaya setoran awal sebesar 150 ribu.
- FASILITAS, terlihat bahwa *utility* untuk fasilitas kartu ATM adalah positif, maka nasabah Lippo Bank suka denga fasilitas kartu ATM. Sedangkan untuk fasilitas kartu Debit nasabah tidak suka, karena dari hasil analisis menunjukkan bahwa nilai utility untuk fasilitas kartu Debit adalah negative yaitu (-0,0475). Jadi *preferensi* nasabah Lippo Bank terhadap fasilitas lebih suka pada kartu ATM.

Hasil analisis *conjoint* menunjukkan bahwa nilai penting relatif (*relative importance*) tertinggi dari keempat atribut tersebut adalah atribut bunga sebesar 34,31%. Hal ini menunjukkan bahwa bunga merupakan faktor yang menjadi pertimbangan utama nasabah menabung di Lippo Bank. Pertimbangan kedua adalah hadiah, pertimbangan ketiga adalah biaya setoran awal, Sedangkan untuk pertimbangan keempat adalah fasilitas.

Dari analisis diatas diketahui sebuah level yang disukai oleh nasabah Lippo Bank yaitu tabungan dengan bungan sebesar 5,18%, hadiah undian berupa mobil, biaya setoran awal sebesar 150 ribu dan fasilitas yang didapat adalah kartu ATM.

Analisis conjoint bertujuan untuk mengetahui bagaimana preferensi atau pola pendapat konsumen, yang nantinya akan dibandingkan dengan pendapat konsumen yang sebenarnya. Hal ini dapat dilihat dengan nilai koefisien determinasi, jika menghasilkan nilai yang besar atau tinggi maka model tersebut baik untuk memprediksi pendapat konsumen. Dari hasil analisis *conjoint* didapat koefisien determinasi (R^2) sebesar 0,825 atau 82,5% yang berarti model dapat memprediksi pola pendapat konsumen.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Nilai utilitas tiap level-level dari faktor –faktor tersebut adalah :

- *Preferensi* nasabah Lippo Bank terhadap bunga tabungan yaitu nasabah paling suka dengan bunga tabungan sebesar 5,18%, preferensi kedua bunga tabungan sebesar 4,58% , ketiga bunga tabungan sebesar 2,18% dan yang keempat adalah bunga tabungan sebesar 1,88%.
- *Preferensi* nasabah Lippo Bank terhadap hadiah undian yaitu nasabah paling suka dengan hadiah undian mobil.
- *Preferensi* nasabah Lippo Bank terhadap biaya setoran awal yaitu nasabah paling suka dengan biaya setoran awal sebesar 150 ribu.
- *Preferensi* nasabah Lippo Bank terhadap fasilitas tabungan yaitu nasabah paling suka dengan fasilitas kartu ATM.

Hasil analisis conjoint menunjukkan bahwa nilai penting relatif (*relative importance*) tertinggi dari keempat atribut tersebut adalah atribut bunga (34,31%). Hal ini menunjukkan bahwa bunga merupakan faktor utama yang menjadi pertimbangan

nasabah dalam menabung. Preferensi kedua adalah hadiah (32,02%), preferensi ketiga adalah biaya setoran awal (21,34%), dan preferensi keempat adalah fasilitas (12,33%).

Level yang disukai oleh nasabah Lippo Bank yaitu tabungan dengan bungan sebesar 5,18%, hadiah undian berupa mobil, biaya setoran awal sebesar 150 ribu dan fasilitas yang didapat adalah kartu ATM.

Saran

Bank dalam menarik minat nasabah untuk menabung hendaknya lebih memperhatikan perilaku konsumen terhadap produk yang sesuai dengan keinginan dan kebutuhan konsumen serta harus memelihara dan meningkatkan hubungan dengan konsumen dengan cara meningkatkan produk. Oleh karena itu bank lebih memperhatikan nasabah sebagai dasar pertimbangan dalam menentukan strategi pemasaran untuk langkah berikutnya.

Daftar Rujukan

Kotler, Philip, 1996, *Manajemen Pemasaran, Analisis, Perencanaan, Implementasi, dan Pengendalian*, Salemba Empat-PrenticeHall, Jakarta

Malhotra, Naresh. K, 2005, *Riset Pemasaran Pendekatan Terapan*, PT. Indeks Kelompok gramedia, Jakarta

Santoso S, Fandy, 2001, *Riset Pemasaran Konsep Dan Aplikasi dengan SPSS* PT.Elex Media Komputindo, Jakarta

Simamora, Bilson, 2004, "*Panduan Riset Perilaku Konsumen*", PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

Solimun, M. S. , 2005, *"Kisi-Kisi Analisis Data (Pemodelan Statistik) dan Metode Penelitian"*, Fakultas MIPA Universitas Brawijaya, Malang (Tidak dipublikasikan)

Sugiyono, 1999, *"Metode Penelitian Bisnis"*, Alfabeta, Bandung

Umar, Husein, 2003, *"Riset Pemasaran dan Perilaku Konsumen"*, PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

Tjipto, Fandy, 1998, *"Strategi Pemasaran"*, Penerbit Andi, Yogyakarta

Evaluasi Tingkat Validitas Metode Penggabungan Respon (Indeks Penampilan Tanaman, IPT)

[1]Gusti N Adhi Wibawa
[2]I Made Sumertajaya
[3] Ahmad Ansori Mattjik

[1]Mahasiswa S3 Pascasarjana Statistika IPB
[2,3]Staf Pengajar Departemen Statistika Institut Pertanian Bogor.

Abstrak

Selama ini analisis daya adaptasi tanaman lebih difokuskan hanya pada tingkat produksi atau daya hasil dan kurang memperhatikan aspek morfologi, daya tahan tanaman terhadap serangan hama dan penyakit maupun komponen hasil. Padahal diketahui bahwa setiap aspek-aspek tersebut merupakan komponen penting pada tanaman yang menjelaskan dimensi-dimensi yang berbeda. Sebagai ilustrasi, bobot 1000 butir mencerminkan dimensi bentuk dari butiran gabah, dimana jika bobot 1000 butir rendah dapat diartikan butiran gabah cenderung kurus-kurus sedangkan jika bobot 1000 butir tinggi dapat diartikan butiran gabah cenderung gemuk-gemuk. Dengan demikian analisis daya adapatasi tanaman yang hanya berfokus pada tingkat produksi semata tidak akan mendapatkan gambaran dari karakteristik tanaman secara komprehensif. Metode penggabungan respon merupakan salah satu metode yang dapat diguakan untuk menjawab permasalahan ini. Metode penggabungan respon dengan menggunakan sistem pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3) merupakan metode penggabungan respon yang terbaik, baik pada kelompok peubah berkorelasi rendah maupun tinggi.

Pendahuluan

Saat ini telah banyak berkembang strategi penggabungan peubah seperti metode *range equalization, division by mean, first principal component* (komponen utama pertama) dan jarak Hotelling. Metode-metode ini banyak digunakan pada berbagai aspek seperti penyusunan indeks pembangunan manusia (human development index, HDI), indeks kemiskinan (poverty index, PI), penggabungan atribut ganda dalam analisis pengendalian mutu dan lain-lain. Pendekatan-pendekatan ini tentunya mempunyai kelemahan dan keunggulan pada kondisi-kondisi tertentu. Misalnya pendekatan *range equalization* maupun *divison by mean* menerapkan sistem pembobotan yang sama pada seluruh peubah. Pendekatan ini tentunya akan sangat bagus bila tingkat kepentingan dari seluruh peubah dianggap sama, namun akan tidak baik bila peubah-peubah yang dilibatkan dalam kasus yang dihadapi memiliki tingkat kepentingan yang berbeda. Disamping itu, peubah-peubah yang dilibatkan dalam metode ini harus bersifat searah

atau secara teoritis saling menunjang/menguatkan karena bobot dari semua peubah bertanda positif. Sedangkan pendekatan dengan komponen utama pertama cenderung lebih kuat mewakili peubah-peubah yang memiliki keragaman cukup besar, namun pendekatan ini akan sangat baik bila peubah-peubah yang dilibatkan memiliki korelasi yang cukup kuat.

Tujuan

Tujuan dari kajian ini adalah untuk memperbandingan tingkat validitas beberapa metode penggabungan respon tanaman dilihat dari kemampuan peubah gabungan mengikuti prilaku peubah asal. Langkah ini merupakan salah satu tahapan untuk mendapatkan metode penggabungan respon terbaik.

Bahan dan Metode

Bahan

Data yang digunakan dalam melakukan perhitungan dan evaluasi metode penggabungan respon (indeks penampilan tanaman, ipt) adalah dua gugus data simulasi. Gugus data pertama yaitu peubah-peubahnya berkorelasi rendah ($r<0.5$) dan gugus data kedua yaitu peubah-peubahnya berkorelasi tinggi ($r\geq0.5$). Setiap gugus data dibangkitkan sebanyak 100 kali.

Metode

Penggabungan respon merupakan salah satu strategi yang digunakan untuk menyederhanakan analisis untuk melihat daya adaptasi tanaman secara komprehensip. Respon gabungan yang diperoleh selanjutnya akan disebut sebagai indeks penampilan tanaman (IPT). Ada 6 metode pendekatan yang digunakan untuk menghitung IPT dari lima peubah respon yang diamati (tinggi tanaman, persen gabah isi, jumlah anakan produktif, bobot 1000 butir, dan daya hasil), yaitu metode *range equalization* (IPT1), metode komponen utama pertama (IPT2), metode pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3), metode jarak *Hotelling* (IPT4), metode *Division by Mean* (IPT5) dan metode bobot optimum (IPT6).

a. Pendekatan I (*Range Equalisation*)

   Untuk memperoleh nilai respon gabungan digunakan informasi nilai minimum dan maksimum dari data respon peubah asal (Lawrence *et al*, 2003; Gani & Duncan, 2004; Kundu, 2004). Tahapan yang dilakukan untuk memperoleh nilai respon gabungan (IPT1) adalah:

   1. Carilah nilai SDII (*sub dimension indicator index*) untuk masing-masing peubah asal, yaitu

$$SDII_i = \frac{Y_{ij} - Y_{i\min}}{Y_{i\max} - Y_{i\min}}$$

dengan i= 1, 2, …., p dan j = 1, 2, …., n; p adalah banyaknya peubah asal dan n adalah banyaknya amatan

2. Carilah nilai IPT1 yaitu rata-rata dari seluruh SDII

$$IPT_1 = \sum_{i=1}^{p} \frac{SDII_i}{p}$$

b. Pendekatan II (Skor Komponen Utama Pertama)

Nilai respon gabungan (IPT2) yang diperoleh berdasarkan pendekatan ini merupakan nilai skor komponen utama pertama dari analisis komponen utama terhadap data respon peubah asal (Abeyasekera, 2005).

Tahapan analisis yang dilakukan pada pendekatan ini adalah sebagai berikut: Misal vektor peubah yang diamati adalah $\underline{Y}'=(Y_1, Y_2, ...,Y_p)$

i. Hitunglah matriks koragam (S) atau matriks korelasi (R)

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{p1} & \dots & \dots & S_{pp} \end{bmatrix} \text{ dimana } S_{ii} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (y_{ik} - \bar{y}_i)^2}{n-1}$$

$$S_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (y_{ik} - \bar{y}_i)(y_{jk} - \bar{y}_j)}{n-1}$$

Dan

$${}_pR_p = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ dimana } r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (y_{ik} - \bar{y}_i)(y_{jk} - \bar{y}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_{ik} - \bar{y}_i)^2 \sum_{k=1}^{n} (y_{jk} - \bar{y}_j)^2}}$$

ii. Carilah vektor ciri (*eigen vector*) dan akar ciri (*eigen value*) dari persamaan ciri berikut:

$S\underline{a} = \lambda\underline{a}$ atau $R\underline{a} = \lambda\underline{a}$

Dengan ketentuan sebagai berikut:

- Gunakan matriks koragam (S) jika peubah-peubah yang dianalisis memiliki satuan yang sama dan gunakan matriks korelasi (R) jika peubah-peubah yang dianalisis memiliki satuan yang berbeda
- Tata vektor ciri-vektor ciri $\underline{a}_1$, ..., $\underline{a}_p$ yang berpadanan dengan akar ciri-akar ciri $\lambda_1>.....>\lambda_p$, dengan kendala $\underline{a}_i\underline{a}_i'=1$ dan $\underline{a}_i\underline{a}_j'=0$

iii. Hitung IPT2 sebagai berikut:

IPT2 dapat dihitung menggunakan dua pendekatan sebagai berikut:

- Jika satuan peubah sama, IPT2 = $\underline{a}_1$' $\underline{Y}$ = $a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + ... + a_{1p} Y_p$
- Jika satuan peubah tidak sama, IPT2 = $\underline{a}_1$' $\underline{Z}$ = $a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2 + ... + a_{1p} Z_p$, dimana Z_i adalah peubah Y_i yang sudah dibakukan.

c. Pendekatan III (Pembobotan berdasarkan Analisis Komponen Utama)

Besarnya bobot masing-masing respon akan dilakukan dengan pendekatan komponen utama. Tahapan penggabungan respon sama seperti tahapan yang dilakukan pada IPT2 tetapi respon gabungan tidak hanya ditentukan oleh komponen utama pertama melainkan dapat ditentukan oleh beberapa komponen utama. Banyaknya komponen utama yang dipilih ditentukan berdasarkan persentase keragaman kumulatif. Persentase keragaman kumulatif dapat dihitung sebagai berikut:

$$\textbf{Persentase keragaman komponen ke} - \textbf{i} = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} x100\%$$

$$\textbf{Persentase keragaman kumulatif q komponen} = \frac{\sum_{j=1}^{q} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j} x100\%$$

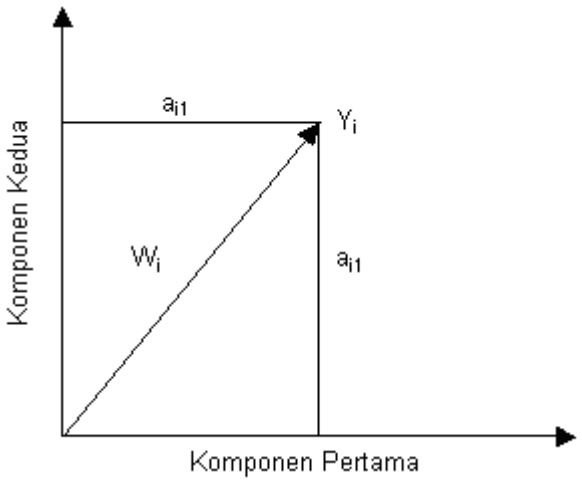
Batas minimal persentase keragaman kumulatif yang digunakan adalah 75%. Penentuan bobot dilakukan sebagai berikut: (kasus dua komponen)

$Z_1 = a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + ... + a_{1p} Y_p$

$Z_2 = a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + ... + a_{2p} Y_p$

Maka bobot untuk peubah ke-i diperoleh sebagai berikut: (lihat Gambar 4.1.)

$$Wi = \sqrt{a_{1i}^2 / \lambda_1 + a_{2i}^2 / \lambda_2}$$



Gambar 1 Bobot peubah Y_i berdasarkan komponen utama pertama dan kedua

Sehingga respon gabungan (IPT3) adalah

$$IPT3 = w_1 Y_1 + w_2 Y_2 + \ldots + w_p Y_p$$

Bobot masing-masing peubah adalah mencerminkan besarnya keragaman peubah asal yang dijelaskan oleh komponen utama yang terpilih.

d. Pendekatan IV (Jarak Hotelling)

Misal vektor peubah respon $\underline{\mathbf{x}}'=(x_1, \ldots, x_p)$, vektor rata-rata peubah respon $\underline{\bar{x}}' = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$ dan matriks kovarian S maka pendekatan Hotelling untuk objek ke-i dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$d_i^2 = (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})' S^{-1} (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})$$

Nilai ini sering juga disebut jarak kuadrat Mahalanobis setiap titik pengamatan ke vector rataan. Jika antar peubah saling bebas maka pendekatan Hotelling dapat diubah menjadi:

$$d_i^2 = (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})' (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})$$

yang sering juga disebut jarak kuadrat Euclid.

Kemudian respon gabungan (IPT4) yang dimaksud adalah nilai d.

e. Pendekatan V (*Division by Mean*)

Untuk memperoleh nilai respon gabungan digunakan informasi nilai rata-rata dari data respon peubah asal (Kundu, 2004). Tahapan yang dilakukan untuk memperoleh nilai respon gabungan (IPT5) adalah:

1. Carilah nilai SDII untuk masing-masing peubah asal, yaitu

$$SDII_i = \frac{Y_{ij}}{\bar{Y}_i}$$

dengan i= 1, 2, …., p dan j = 1, 2, …., n; p adalah banyaknya peubah asal dan n adalah banyaknya amatan

2. Carilah nilai IPT5 yaitu rata-rata dari seluruh SDII

$$IPT_5 = \sum_{i=1}^{p} \frac{SDII_i}{p}$$

Perhitungan dan evaluasi IPT dengan menggunakan data simulasi hanya dilakukan terhadap lima IPT selain IPT6. Tahapan proses perhitungan dan evaluasi IPT berdasarkan data hasil simulasi adalah:

a. Bangkitkan data. Skenario pembangkitan data yang dibuat pada simulasi ini yaitu gugus data pertama peubah-peubahnya berkorelasi rendah yaitu tingkat korelasinya kurang dari 0.5, sedangkan gugus data kedua peubah-peubahnya berkorelasi tinggi yaitu tingkat korelasinya lebih besar atau sama dengan 0.5. Algoritmanya adalah sebagai berikut:
   i. Bangkitkan 5 peubah (Y1, Y2, …., Y5) dengan korelasi tertentu
   ii. Hitung respon gabungan dengan menggunakan kelima metode penggabungan peubah, yang selanjutnya disebut IPT1, IPT2, IPT3, IPT4 dan IPT5.
   iii. Hitung korelasi setiap IPT dengan kelima peubah asal
   iv. Simpan nilai mutlak korelasi minimum setiap IPT dengan kelima peubah asal.
b. Evaluasi validitas masing-masing pendekatan (IPT) berdasarkan kedekatan IPT dengan peubah asal, yang didekati dengan nilai korelasi antara IPT dengan seluruh peubah asal. Tingkat validasi masing-masing IPT merupakan nilai korelasi minimum antara IPT dengan seluruh peubah asal. Kekonsistenan tingkat validasi masing-masing IPT akan dilihat dari hasil simulasi 100 kali pembangkitan data untuk setiap kelompok peubah (berdasarkan korelasi).

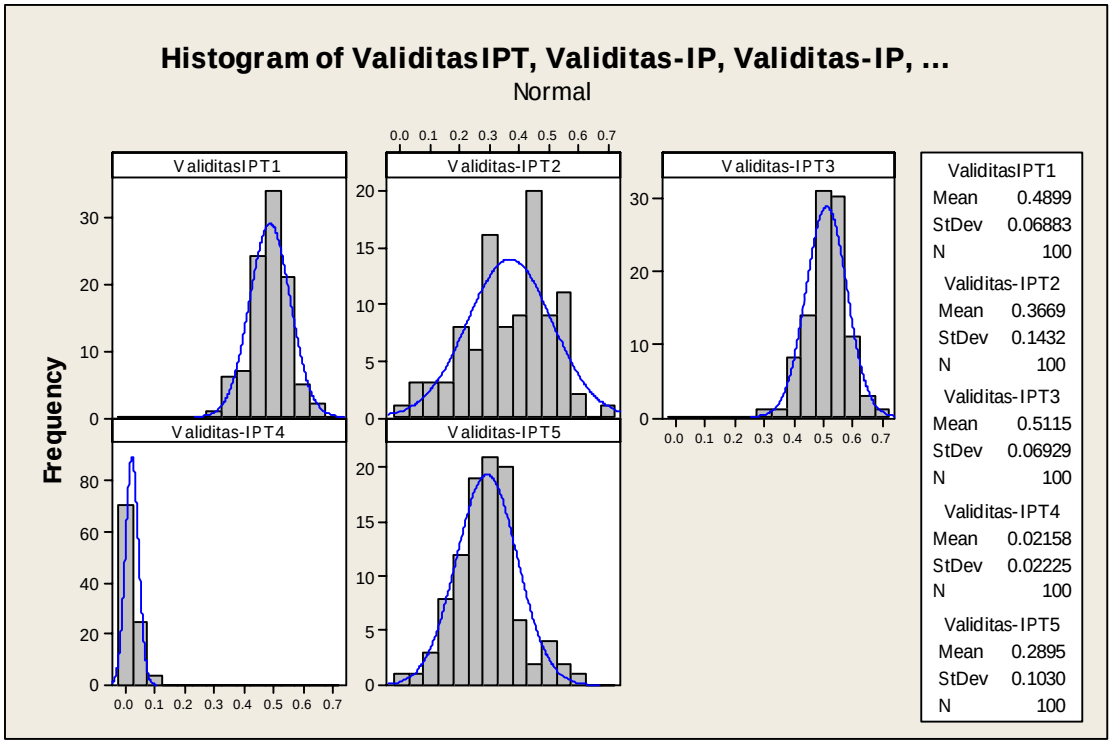
Hasil dan Pembahasan

Penggabungan respon merupakan salah satu strategi yang digunakan untuk menyederhanakan analisis untuk melihat daya adaptasi tanaman secara komprehensip. Respon gabungan yang diperoleh selanjutnya akan disebut sebagai indeks penampilan tanaman (IPT). Tehnik penggabungan respon akan didekati dengan menggunakan lima metode yaitu metode *range equalisation* (IPT1), komponen utama pertama (IPT2), pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3), jarak *Hotelling* (IPT4), dan metode *division by mean* (IPT5).

Validasi masing-masing pendekatan akan diukur berdasarkan kedekatan indeks dengan peubah asal, yang didekati dengan nilai korelasi antara indeks dengan seluruh peubah asal. Tingkat validasi masing-masing indeks merupakan nilai korelasi minimum antara indeks dengan seluruh peubah asal. Kekonsistenan tingkat validasi masing-masing indeks akan dilihat dari hasil simulasi 100 kali pembangkitan data untuk setiap kelompok peubah. Kelompok peubah pertama yang dibangkitkan peubah-peubah yang berkorelasi rendah yaitu dengan tingkat korelasi di bawah 0.5 dan kelompok peubah kedua yang dibangkitkan adalah peubah-peubah yang berkorelasi tinggi dengan tingkat korelasi di atas 0.5. Program simulasinya dapat dilihat pada **Lampiran 1**.

Kelompok peubah berkorelasi rendah

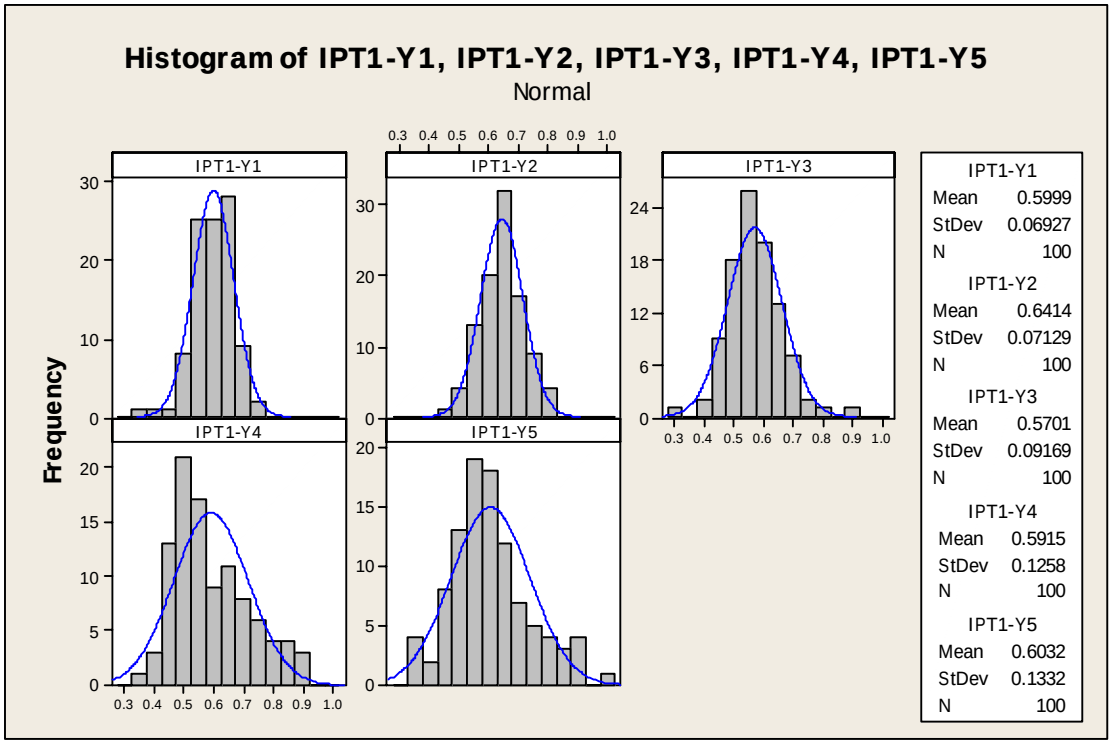
Dari hasil 100 kali simulasi diperoleh metode penggabungan respon yang memiliki tingkat validitas tertinggi adalah metode pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3) yaitu dengan tingkat validitas rata-rata sebesar 0.5115, yang artinya korelasi minimum yang terjadi antara gabungan respon dengan seluruh peubah asal sebesar 0.5115. Sedangkan metode penggabungan respon yang juga memiliki tingkat validitas cukup besar yaitu metode range equalization (IPT1) yaitu sebesar 0.4899, yang disusul kemudian secara berturutan oleh metode komponen utama pertama (IPT2) dengan tingkat validitas sebesar 0.3669, metode *division by mean* (IPT5) dengan tingkat validitas sebesar 0.2895, dan metode jarak Hotelling memiliki tingkat validitas paling kecil yaitu sebesar 0.02158. Hasil selengkapnya dapat dilihat pada **Gambar 2**.



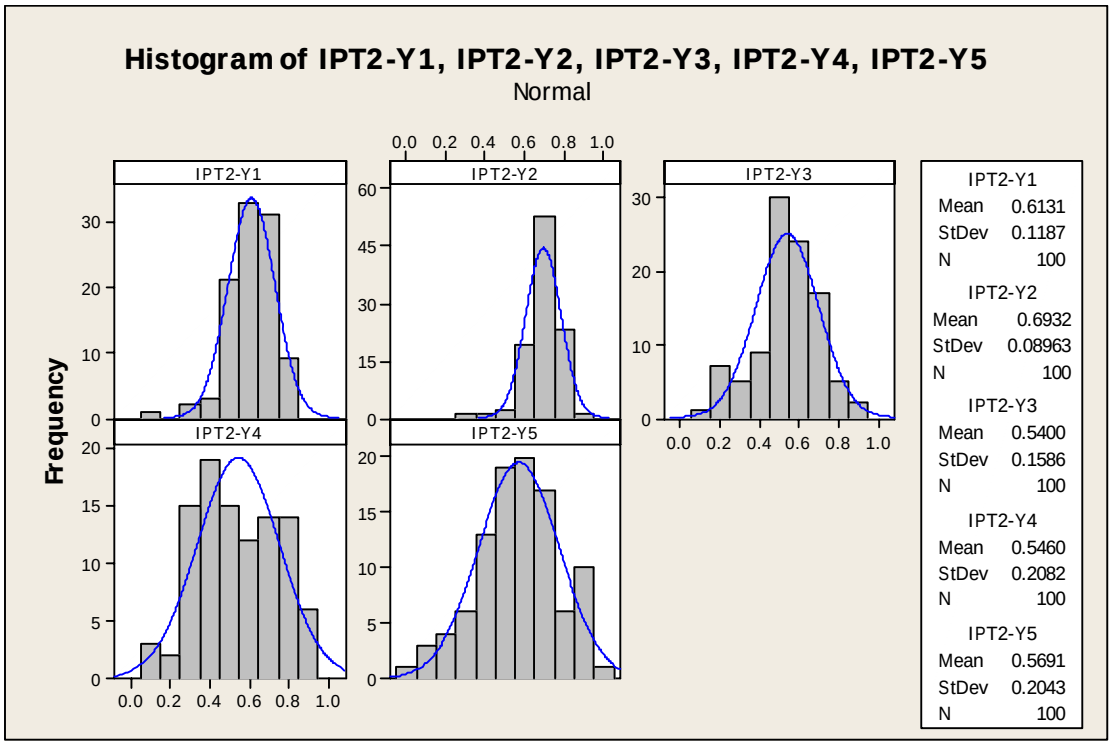
Gambar 2 Perbandingan tingkat validitas kelima metode penggabungan respon yang berkorelasi rendah dari 100 kali simulasi

Hasil ini menunjukkan bahwa metode pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3) untuk sementara merupakan pilihan terbaik dalam menggabungkan respon-respon yang berkorelasi rendah. Namun demikian hasil ini harus diperkuat dengan melihat tingkat korelasi antara gabungan respon dengan setiap peubah asal. Gabungan respon yang baik diharapkan memiliki tingkat korelasi yang tinggi dengan seluruh peubah asal, jika hal ini terjadi berarti gabungan respon mampu menjadi wakil yang baik dalam menjelaskan perilaku seluruh peubah asal.

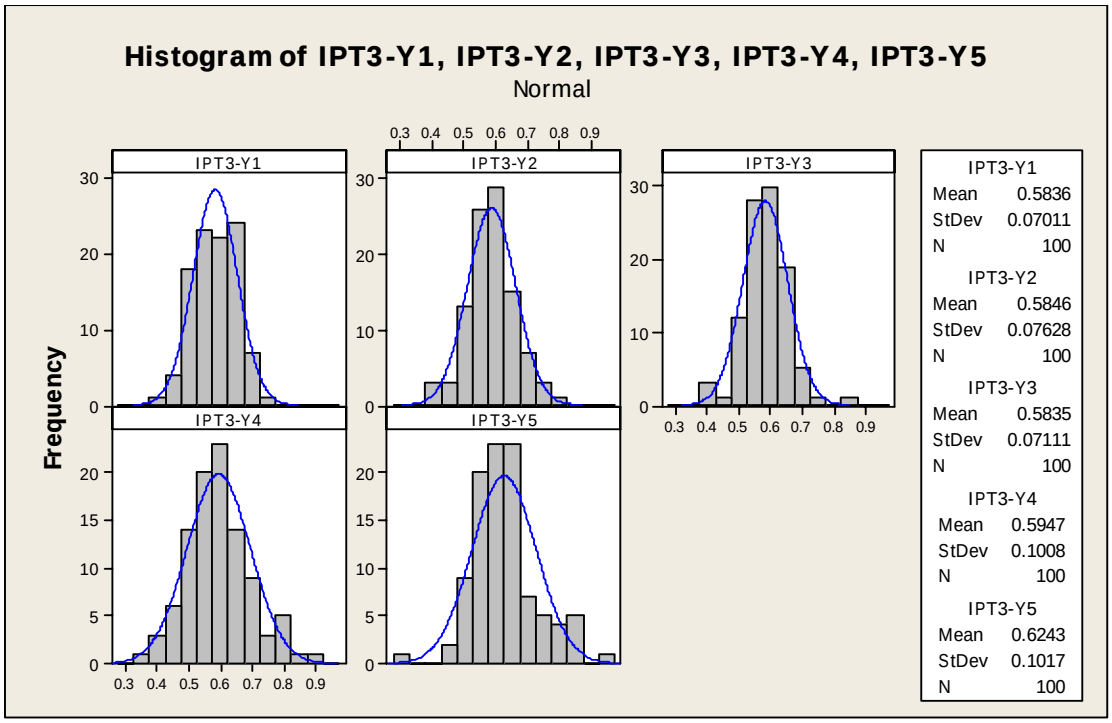
Dari **Gambar 4. 3** sampai **Gambar 4. 7**, terlihat IPT1, IPT2, IPT3 dan IPT5 memiliki tingkat korelasi yang cukup besar dan merata dengan setiap peubah asal yaitu berkisar 0.5 sampai 0.7. Namun demikian jika dilihat dari kestabilan nilai korelasi yang dhasilkan, IPT3 adalah metode penggabungan yang terbaik. Hal ini terlihat dari nilai simpangan bakunya yang paling kecil yaitu berkisar antara 0.07 sampai 0.10. Kemudian secara berturutan diikuti oleh IPT1, IPT5 dan IPT2.



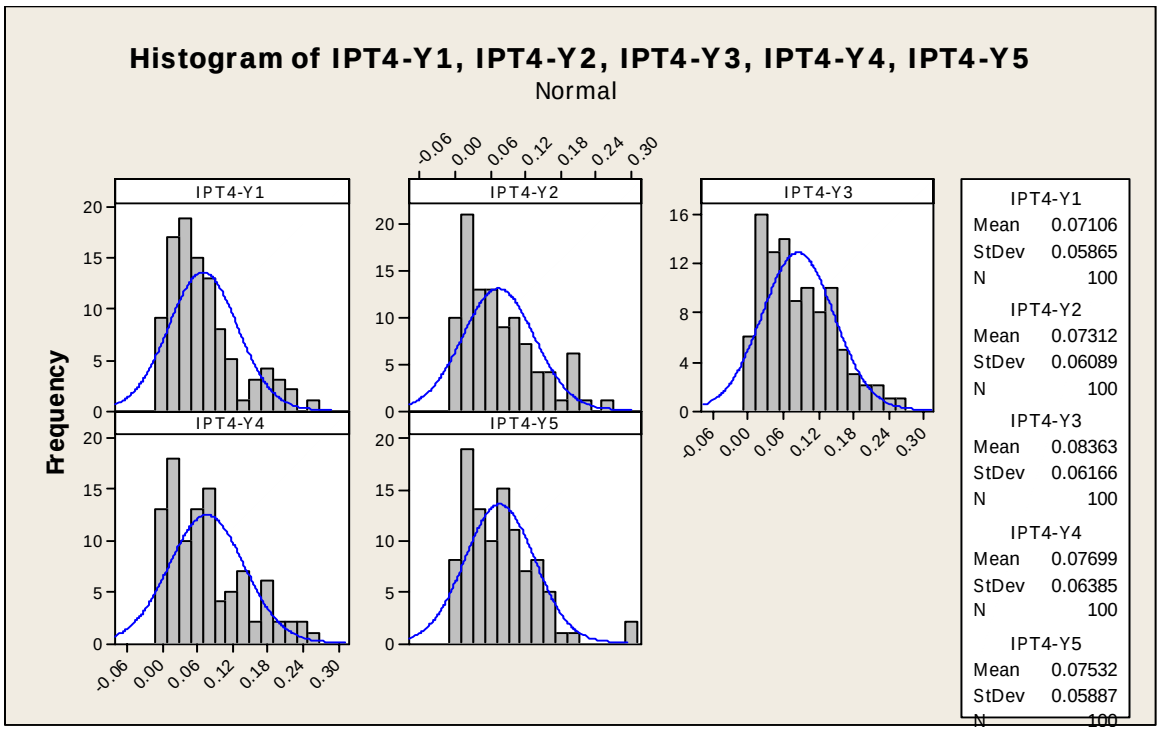
Gambar 3 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode range equalization (IPT1) dengan seluruh peubah asal kelompok pertama dari 100 kali simulasi**



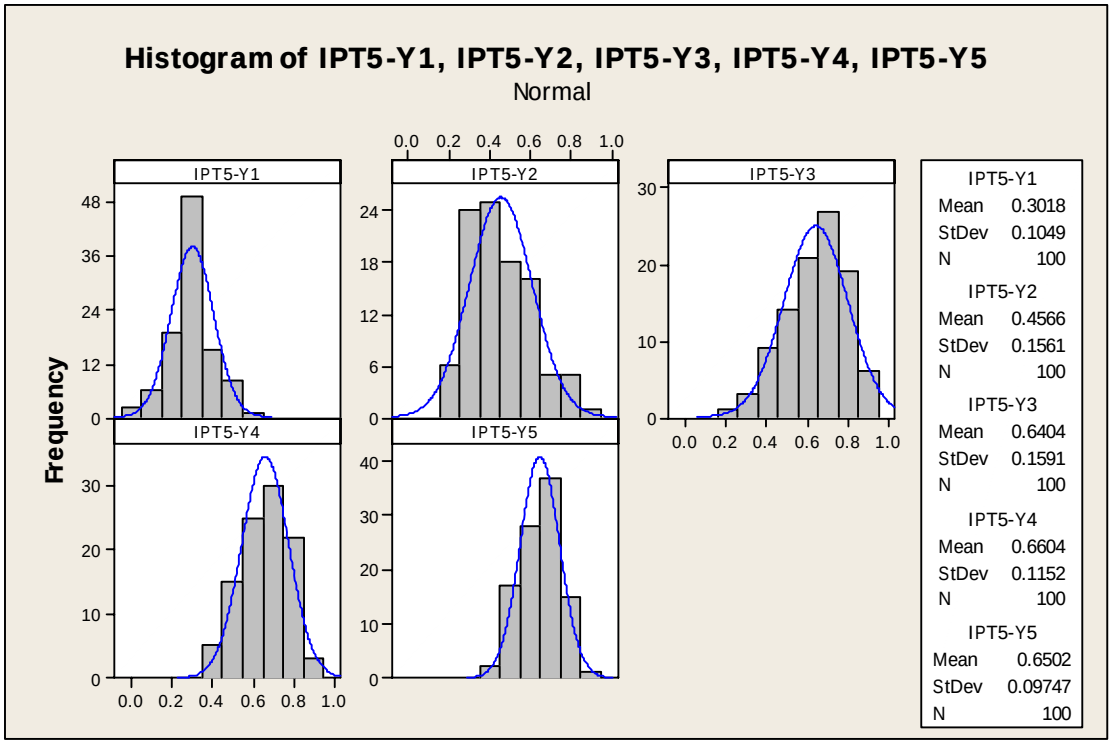
Gambar 4. 4 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode komponen utama pertama (IPT2) dengan seluruh peubah asal kelompok pertama dari 100 kali simulasi**



Gambar 5 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3) dengan seluruh peubah asal kelompok pertama dari 100 kali simulasi**



Gambar 6 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode jarak Hotelling (IPT4) dengan seluruh peubah asal kelompok pertama dari 100 kali simulasi**

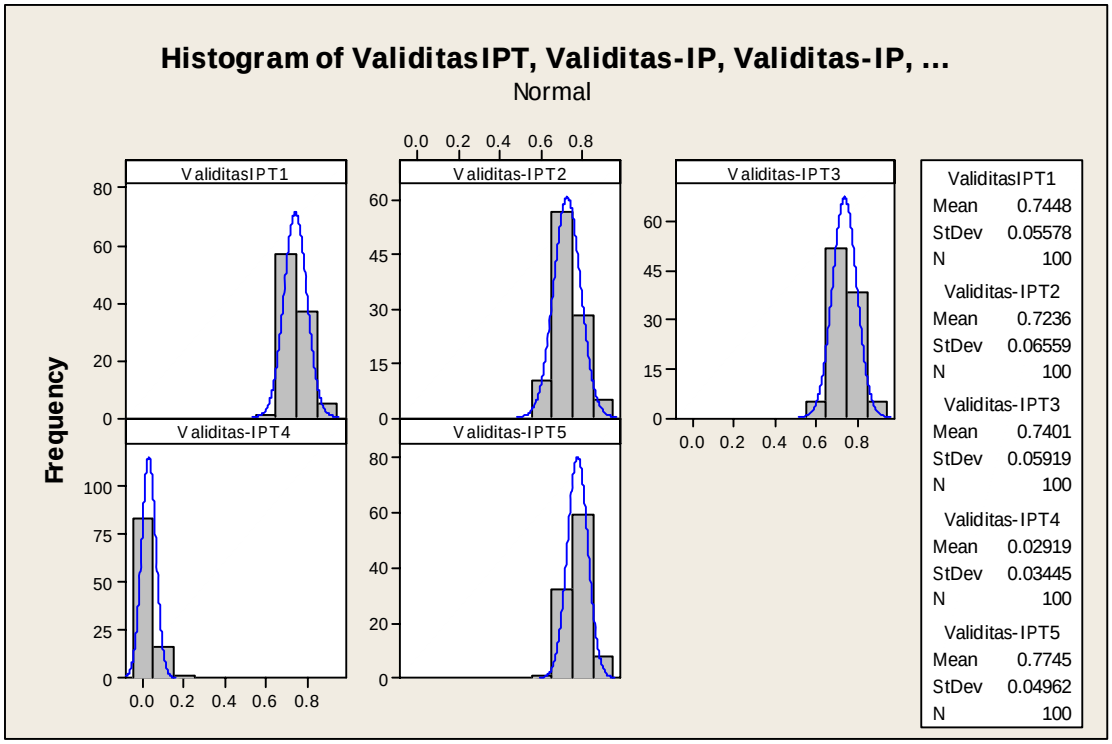


Gambar 7 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode division by mean (IPT5) dengan seluruh peubah asal kelompok pertama dari 100 kali simulasi**

Perilaku yang berbeda ditunjukkan oleh IPT4 dimana tingkat korelasinya dengan peubah asal sangat kecil dibandingkan dengan keempat metode yang lain yaitu berkisar antara 0.07 sampai 0.08, tetapi besaran nilai korelasinya paling stabil dibandingkan dengan metode-metode yang lain yaitu dengan simpangan baku 0.5 sampai 0.6. Namun demikian IPT4 bukan merupakan pewakil yang baik untuk peubah asal karena tingkat korelasinya sangat rendah sehingga IPT4 tidak mampu menjelaskan perilaku peubah-peubah asal dengan baik.

Kelompok peubah berkorelasi tinggi

Pada kelompok peubah berkorelasi tinggi dari hasil 100 kali simulasi diperoleh IPT1, IPT2, IPT3 dan IPT5 memiliki tingkat validitas yang hampir sama yaitu berkisar antara 0.72-0.77. Hasil ini agak berbeda dengan hasil simulasi pada kelompok peubah berkorelasi rendah dimana IPT3 terlihat memiliki tingkat validitas paling tinggi. Hal ini berarti keempat metode dapat dipertimbangkan untuk menggabungkan respon yang berkorelasi tinggi. Hasil selengkapnya dapat dilihat pada **Gambar 4. 8**.

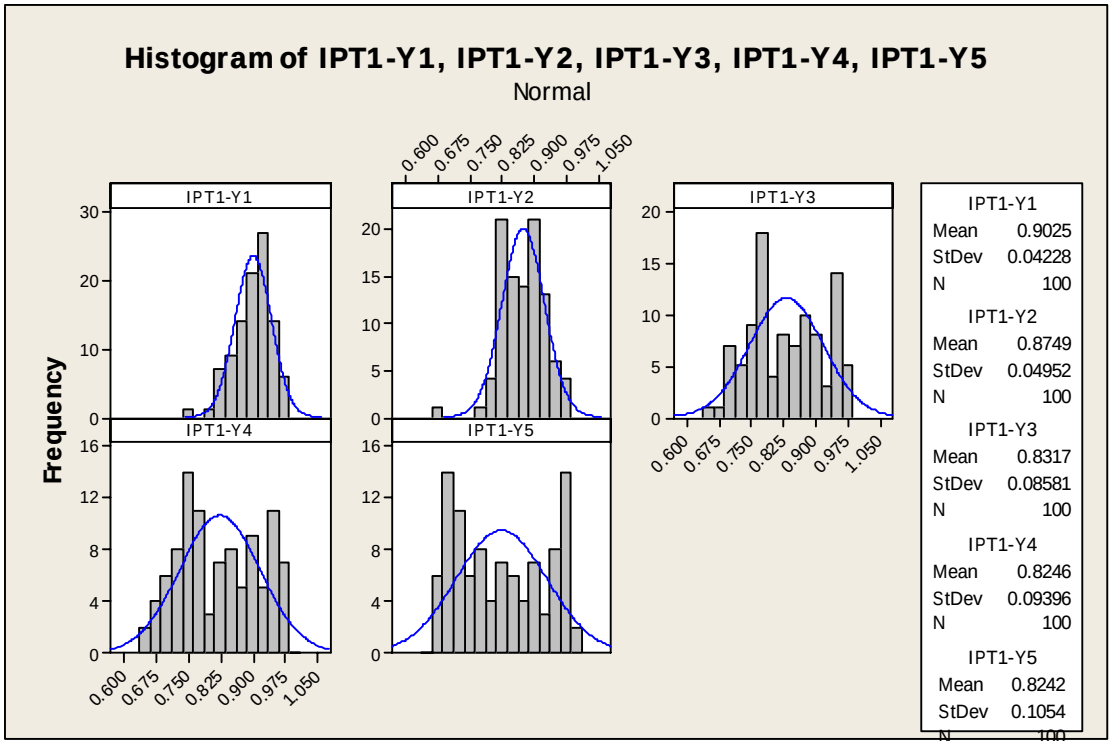


Gambar 8 Perbandingan tingkat validitas kelima metode penggabungan respon yang berkorelasi tinggi dari 100 kali simulasi

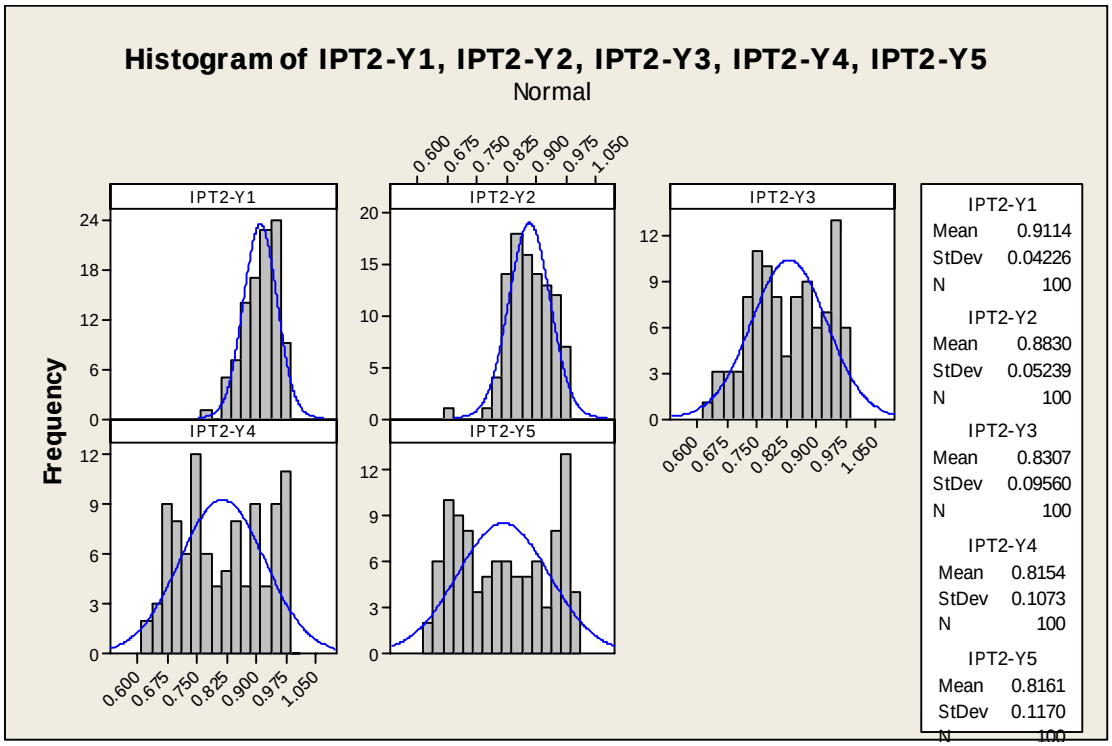
Namun demikian hasil ini juga harus diperkuat dengan melihat tingkat korelasi antara gabungan respon dengan setiap peubah asal. Gabungan respon yang baik diharapkan memiliki tingkat korelasi yang tinggi dengan seluruh peubah asal, jika hal ini terjadi berarti gabungan respon mampu menjadi wakil yang baik dalam menjelaskan perilaku seluruh peubah asal.

Dari **Gambar 9** sampai **Gambar 13**, terlihat IPT1, IPT2, IPT3 dan IPT5 memiliki tingkat korelasi yang cukup besar dan merata dengan setiap peubah asal yaitu berkisar 0.8 sampai 0.9. Namun demikian jika dilihat dari kestabilan nilai korelasi yang dihasilkan, IPT3 tetap merupakan metode penggabungan yang terbaik. Hal ini terlihat dari nilai simpangan bakunya yang paling kecil yaitu berkisar antara 0.06 sampai 0.09. Kemudian secara berturutan diikuti oleh IPT5, IPT1 dan IPT2.

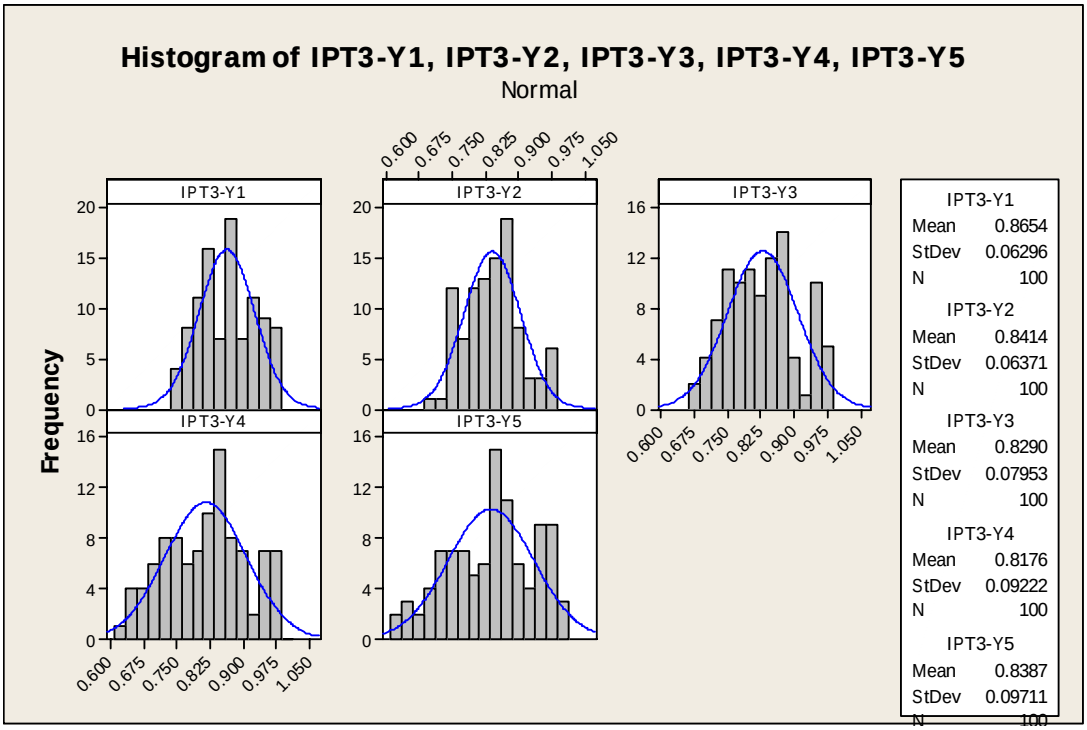
IPT4 bukan merupakan metode penggabungan respon yang dapat mewakili seluruh peubah asal dengan baik, hasil ini terlihat pada kelompok peubah berkorelasi rendah maupun tinggi.



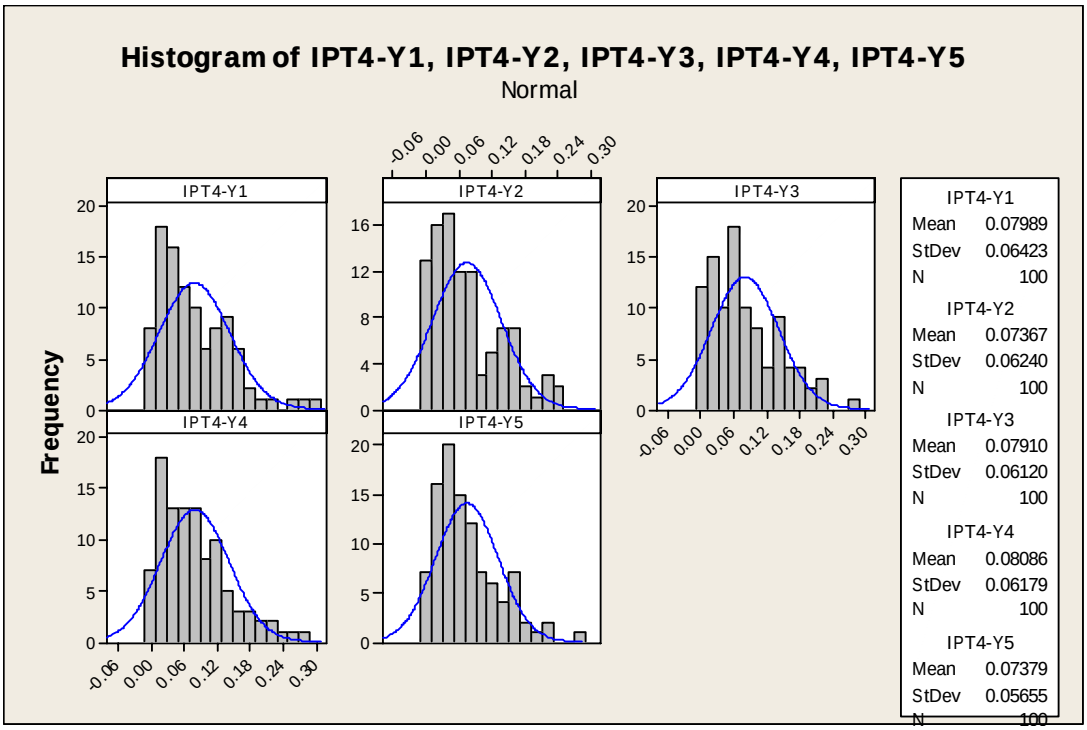
Gambar 9 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode range equalization (IPT1) dengan seluruh peubah asal kelompok kedua dari 100 kali simulasi**



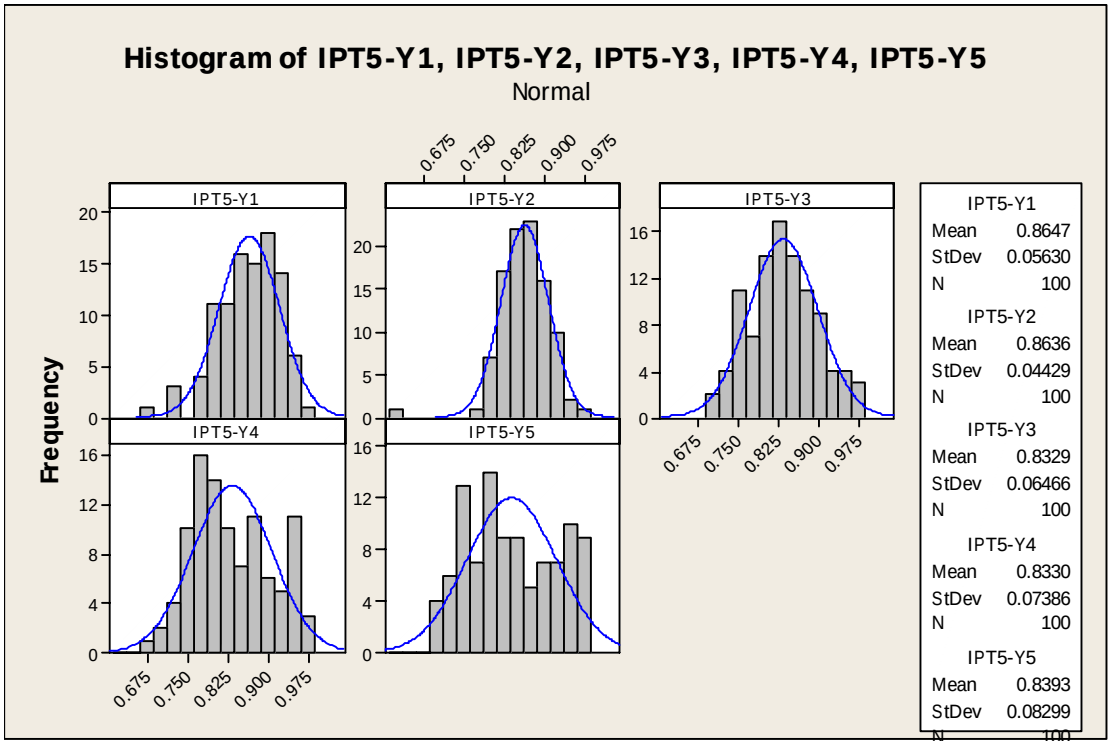
Gambar 10 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode komponen utama pertama (IPT2) dengan seluruh peubah asal kelompok kedua dari 100 kali simulasi**



Gambar 11 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3) dengan seluruh peubah asal kelompok kedua dari 100 kali simulasi**



Gambar 12 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode jarak Hotelling (IPT4) dengan seluruh peubah asal kelompok kedua dari 100 kali simulasi**



Gambar 13 **Keragaan nilai mutlak korelasi antara gabungan respon dengan metode division by mean (IPT5) dengan seluruh peubah asal kelompok kedua dari 100 kali simulasi**

Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang dapat ditarik antara lain:

1. Metode penggabungan respon dengan menggunakan sistem pembobotan berdasarkan komponen utama (IPT3) merupakan metode penggabungan respon yang terbaik, baik pada kelompok peubah berkorelasi rendah maupun tinggi.
2. Metode penggabungan respon yang juga memiliki hasil yang cukup baik adalah *divison by mean* (IPT5), *range equalization* (IPT1) dan skor komponen utama pertama (IPT2).
3. Metode jarak Hotelling (IPT4) kurang baik digunakan untuk menggabungkan respon karena tidak bisa mengikuti prilaku data asal, dimana korelasi minimum antara respon gabungan dengan peubah asal sangat rendah.

Ucapan Terimakasih

Tulisan ini bagian dari Hibah Penelitian Tim Pascasarjana yang didanai oleh Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Nomor : 226/13.11/PL/2008 Tanggal : 02 April 2008

PEMODELAN PERSAMAAN STRUKTURAL DENGAN PARTIAL LEAST SQUARE

I Gede Nyoman Mindra Jaya[1]

I Made Sumertajaya[2]

[1]Staf Pengajar Jurusan Statistika Unpad
[2]Staf Pengajar Departemen Statistika IPB

ABSTRAK

Pemodelan persamaan structural umumnya menggunakan Linear Structural Relationship, Metode pendugaan yang umumnya digunakan adalah metode Maksimum Likelihood. Pendugaan parameter dengan metode ML dalam LISREL membutuhkan berapa asumsi kritis seperti ukuran sampel minimal 10 kali banyaknya indikaor atau lebih dari 100 unit pengamatan, data menyebar mengikuti sebaran normal. LISREL menyediakan beberapa pendekatan yang dapat digunakan dalam pendugaan paremeter model, diantaranya dengan Bootstrap atau menggunakan metode Weighted Least Square. Namun, kedua pendekatan ini tetap membutuhkan data yang relative besar sehingga untuk model yang kompleks dengan ukuran sampel yang relative kecil dan data tidak menyebar normal dibutuhkan suatu pendekatan baru. Salah satu pendekatan baru yang diperkenalkan oleh Herman Wold, adalah Partial Least Square (PLS) dan sering disebut soft modeling. Dengan menggunakan PLS dimungkinkan melakukan pemodelan persamaan structural dengan ukuran sampel relative kecil dan tidak membuhkan asumsi normal multivariate.

Kata Kunci: SEM, PLS

PENDAHULUAN

Pemodelan persamaan structural yang sering disebut dengan *Structural Equation Modeling* (SEM) atau *Linear Structural Relationship* (LISREL). SEM pendekatan terintegrasi antara Analisis Faktor, Model Struktural dan Analisis Path. LISREL sangat membantu penelitian dalam konfirmasi model penelitian yang melibatkan variabel laten. SEM banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu khususnya dalam ilmu-ilmu sosial untuk melihat keterkaitan antara variabel penelitian. Metode pendugaan yang umumnya digunakan adalah metode Maksimum Likelihood. Pendugaan parameter dengan metode ML dalam LISREL membutuhkan berapa asumsi kritis seperti ukuran sampel minimal 10 kali banyaknya indikaor atau lebih dari 100 unit pengamatan, data menyebar mengikuti sebaran normal multivariate. LISREL menyediakan beberapa pendekatan yang dapat digunakan dalam pendugaan paremeter model jika data tidak menyebar

normal multivariate, diantaranya dengan Bootstrap ML atau menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS). Namun, kedua pendekatan ini tetap membutuhkan data yang relative besar sehingga untuk model yang kompleks dengan ukuran sampel yang relative kecil dibutuhkan suatu pendekatan baru. Salah satu pendekatan baru yang diperkenalkan oleh Herman Wold, adalah *Partial Least Square* (PLS) dan sering disebut *soft modeling*. Dengan menggunakan PLS dimungkinkan melakukan pemodelan persamaan structural dengan ukuran sampel relative kecil dan tidak membuhkan asumsi normal multivariate. Selain permasalahan asumsi sebaran dan banyaknya data, kendala lain yang dihadapi pemodelan structural menggunakan LISREL adalah indikator (variabel manifest) penelitian hanya dimungkinkan bersifat reflektif (variabel laten menjelaskan variabel manifest), tidak dimungkinkan untuk indikator bersifat formatif (variabel manifest menjelaskan variabel laten). Dengan menggunakan PLS dimungkinkan penelitian menggunakan indikator bersifat reflektif ataupun formatif.

TINJAUAN PUSTAKA

Gambar Umum PLS

PLS merupakan metode analisis yang *powerful* karena dapat diterapkan pada semua skala data, tidak membutuhkan banyak asumsi dan ukuran sampel tidak harus besar. PLS selain dapat digunakan sebagai konfirmasi teori juga dapat digunakan untuk membangun hubungan yang belum ada landasan terorinya atau untuk pengujian proposisi. PLS juga dapat digunakan untuk pemodelan structural dengan indiaktor bersifat reflektif ataupun formatif. PLS dibandingkan dengan LISREL mampu menangani dua masalah serius :

(a) Solusi yang tidak dapat diterima (*inadmissible solution*); hal ini terjadi karena PLS berbasis varians dan bukan kovarians, sehingga masalah matriks *singularity* tidak akan pernah terjadi. Di samping itu, PLS bekerja pada model struktural yang bersifat rekursif, sehingga masalah *un-identified, under-identified* atau *over-identified* juga tidak akan terjadi.

(b) Faktor yang tidak dapat ditentukan (*factor indeterminacy*), yaitu adanya lebih dari satu faktor yang terdapat dalam sekumpulan indikator sebuah variabel. Khusus indikator yang bersifat formatif tidak memerlukan adanya *comon factor* sehingga

selalu akan diperoleh variabel laten yang bersifat komposit. Dalam hal ini variabel laten merupakan kombinasi linier dari indikator-indikatornya.

Model Indikator Refleksif

Model indikator refleksif dikembangkan berdasarkan pada *classical test theory* yang mengasumsikan bahwa variasi skor pengukuran konstruk merupakan fungsi dari *true score* ditambah *error*.

Ciri-ciri model indikator reflektif adalah:

1. Arah hubungan kausalitas seolah-olah dari konstruk ke indikator
2. Antar indikator diarapkan saling berkorelasi (memiliki *internal consitency reliability*)
3. Menghilangkan satu indikator dari model pengukuran tidak akan merubah makna dan arti konstruk
4. Menghitung adanya kesalahan pengukuran (error) pada tingkat indikator

Model Indikator Formatif

Konstruk dengan indikator formatif mempunyai karakteristik berupa komposit, seperti yang digunakan dalam literatur ekonomi yaitu *index of sustainable economics welfare*, *the human development index*, dan *the quality of life index*. Asal usul model formatif dapat ditelusuri kembali pada "*operational definition*", dan berdasarkan definisi operasional, maka dapat dinyatakan tepat menggunakan model formatif atau reflesif.

Jika η menggambarkan suatu variabel laten dan x adalah indikator, maka: $\eta = \mathbf{x}$

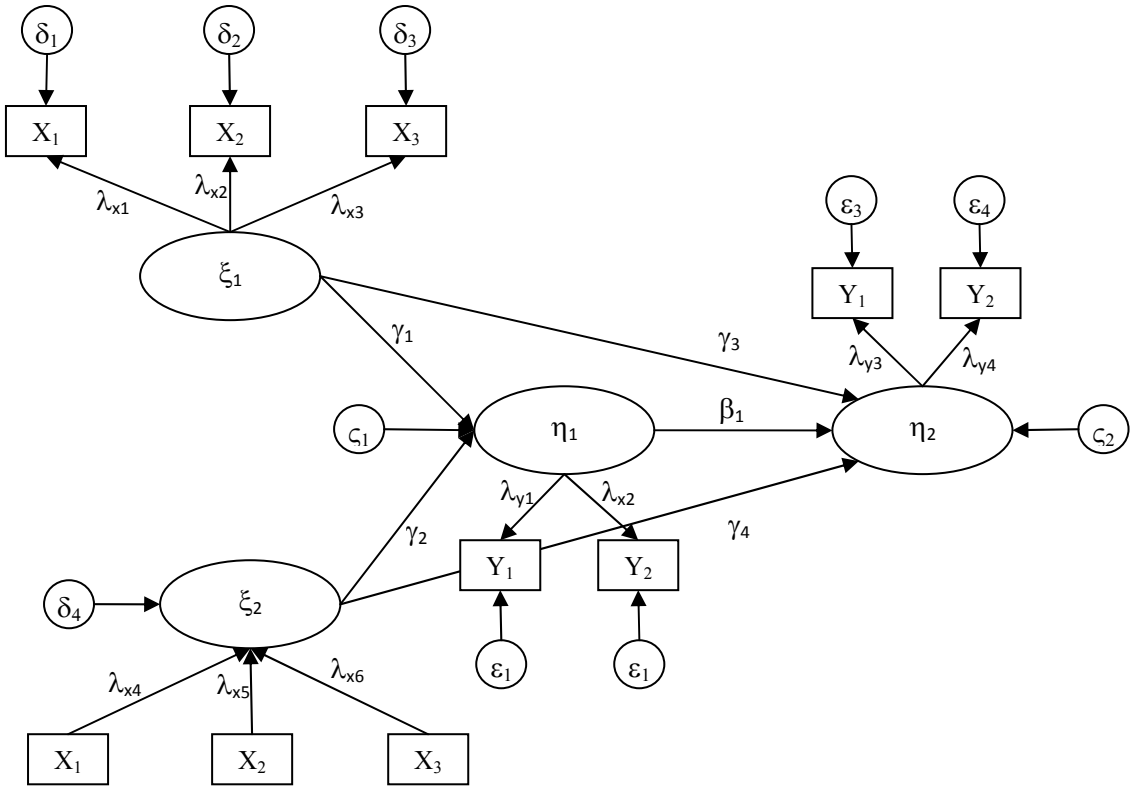
Oleh karena itu, pada model formatif variabel komposit seolah-olah dipengaruhi (ditentukan) oleh indikatornya. Jadi arah hubungan kausalitas seolah-olah dari indikator ke variabel laten.

Ciri-ciri model indikator formatif adalah:

1. Arah hubungan kausalitas seolah-olah dari indikator ke konstruk
2. Antar indikator diasumsikan tidak berkorelasi (tidak diperlukan uji konsistensi internal atau *Alpha Cronbach*)
3. Menghilangkan satu indikator berakibat merubah makna dari konstruk
4. Kesalahan pengukuran diletakkan pada tingkat konstruk (zeta)

Notasi yang digunakan dalam PLS

Ilustrasi pemodelan persamaan struktural dan notasi PLS dapat dilihat pada Gambar 3 di bawah ini.



Gambar 1. Hubungan Antar Variabel Dan Indikator Dalam Model PLS

Di mana notasi-notasi yang digunakan adalah:

ξ = Ksi, variabel latent eksogen

η = Eta, variabel laten endogen

λx = Lamnda (kecil), loading faktor variabel latent eksogen

λy = Lamnda (kecil), loading faktor variabel latent endogen

Λx = Lamnda (besar), matriks loading faktor variabel latent eksogen

Λy = Lamnda (besar), matriks loading faktor variabel laten latent endogen

β = Beta (kecil), koefisien pengaruh variabel endogen terhadap variabel endogen

γ = Gamma (kecil), koefisien pengaruh variabel eksogen terhadap variabel endogen

ς = Zeta (kecil), galat model

δ = Delta (kecil), galat pengukuran pada variabel manifest untuk variabel laten eksogen

ε = Epsilon (kecil), galat pengukuran pada variabel manifest untuk variabel latent endogen

Langkah-langkah pemodelan persamaan struktural berbasis PLS dengan software adalah sebagai berikut :

1. Langkah Pertama: Merancang Model Struktural (*inner model*)

Perancangan model struktural hubungan antar variabel laten pada PLS didasarkan pada rumusan masalah atau hipotesis penelitian.

2. Langkah Kedua: Merancang Model Pengukuran (*outer model*)

Perancangan model pengukuran (*outer model*) dalam PLS sangat penting karena terkait dengan apakah indikator bersifat refleksif atau formatif.

3. Langkah Ketiga: Mengkonstruksi diagram Jalur

Bilamana langkah satu dan dua sudah dilakukan, maka agar hasilnya lebih mudah dipahami, hasil perancangan *inner model* dan *outer model* tersebut, selanjutnya dinyatakan dalam bentuk diagram jalur. Contoh bentuk diagram jalur untuk PLS dapat dilihat pada Gambar 3.

4. Langkah Keempat: Konversi diagram Jalur ke dalam Sistem Persamaan

a. *Outer model*

Outer model, yaitu spesifikasi hubungan antara variabel laten dengan indikatornya, disebut juga dengan *outer relation* atau *measurement model*, mendefinisikan karakteristik konstruk dengan *variabel manifesnya*. Model indikator refleksif dapat ditulis persamaannya sebagai berikut:

$$x = \Lambda x\xi + \delta$$

$$y = \Lambda y\eta + \varepsilon$$

Di mana x dan y adalah indikator untuk variabel laten eksogen (ξ) dan endogen (η). Sedangkan Λx dan Λy merupakan matriks *loading* yang menggambarkan seperti koefisien regresi sederhana yang menghubungkan variabel laten dengan indikatornya. Residual yang diukur dengan δ dan ε dapat diinterpretasikan sebagai kesalahan pengukuran atau *noise*.

Model indikator formatif persamaannya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\xi = \Pi_{\xi} X_i + \delta$$

$$\eta = \Pi_\eta Y_i + \varepsilon$$

Dimana ξ,η , X, dan Y sama dengan persamaan sebelumnya. Dengan Π_ξ dan Π_η adalah seperti koefisen regresi berganda dari variabel laten terhadap indikator, sedangkan δ dan ε adalah residual dari regresi.

Pada model PLS Gambar 3 terdapat *outer model* sebagai berikut:

Untuk variabel latent eksogen 1 (reflektif)

$$x_1 = \lambda_{x1}\xi_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \lambda_{x2}\xi_1 + \delta_2$$

$$x_3 = \lambda_{x3}\xi_1 + \delta_3$$

Untuk variabel latent eksogen 2 (formatif)

$$\xi_2 = \lambda_{x4} X_4 + \lambda_{x5} X_5 + \lambda_{x6} X_6 + \delta_4$$

Untuk variabel latent endogen 1 (reflektif)

$$y_1 = \lambda y_1 \eta_1 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \lambda y_2 \eta_1 + \varepsilon_2$$

Untuk variabel latent endogen 2 (reflektif)

$$y_3 = \lambda_{y3}\eta_2 + \varepsilon_3$$

$$y_4 = \lambda_{y4}\eta_2 + \varepsilon_4$$

b) *Inner model*

Inner model, yaitu spesifikasi hubungan antar variabel laten (*structural model*), disebut juga dengan *inner relation*, menggambarkan hubungan antar variabel laten berdasarkan teori substansif penelitian. Tanpa kehilangan sifat umumnya, diasumsikan bahwa variabel laten dan indikator atau variabel manifest diskala *zero means* dan unit varian sama dengan satu, sehingga parameter lokasi (parameter konstanta) dapat dihilangkan dari model.

Model persamaannya dapat ditulis seperti di bawah ini:

$$\eta = \beta\eta + \Gamma\xi + \varsigma$$

Dimana menggambarkan vektor variabel endogen (dependen), adalah vektor variabel laten eksogen dan adalah vektor residual (*unexplained variance*). Oleh karena PLS didesain untuk model rekursif, maka hubungan antar variabel laten, berlaku bahwa setiap variabel laten dependen , atau sering disebut *causal chain system* dari variabel laten dapat dispesifikasikan sebagai berikut:

$$\eta_j = \Sigma_i \beta_{ji} \eta_i + \Sigma_i \gamma_{jb} \xi_b + \varsigma_j$$

Dimana γ_{jb} (dalam bentuk matriks dilambangkan dengan Γ) adalah koefisien jalur yang menghubungkan variabel laten endogen (η) dengan eksogen (ξ). Sedangkan β_{ji} (dalam bentuk matriks dilambangkan dengan β) adalah koefisien jalur yang menghubungkan variabel laten endogen (η) dengan endogen (η); untuk range indeks **i** dan **b**. Parameter ς_j adalah variabel *inner residual*.

Pada model PLS Gambar 3 *inner model* dinyatakan dalam sistem persamaan sebagai berikut:

$$\eta_1 = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \varsigma_1$$

$$\eta_2 = \beta_1 \eta_1 + \gamma_3 \xi_1 + \gamma_4 \xi_2 + \varsigma_2$$

c) *Weight relation*

Weight relation, estimasi nilai kasus variabel latent. *Inner* dan *outer model* memberikan spesifikasi yang diikuti dengan estimasi *weight relation* dalam algoritma PLS:

$$\xi_b = \Sigma_{kb}\, w_{kb}\, x_{kb}$$

$$\eta_i = \Sigma_{ki}\, w_{ki}\, y_{ki}$$

Dimana w_{kb} dan w_{ki} adalah *k weight* yang digunakan untuk membentuk estimasi variabel laten ξ_b dan η_i. Estimasi variabel laten adalah *linear agregat* dari indikator yang nilai *weight*-nya didapat dengan prosedur estimasi PLS.

5. Langkah Kelima: Estimasi

Metode pendugaan parameter (estimasi) di dalam PLS adalah metode kuadrat terkecil (*least square methods*). Proses perhitungan dilakukan dengan cara iterasi, dimana iterasi akan berhenti jika telah tercapai kondisi konvergen.

Pendugaan parameter di dalam PLS meliputi 3 hal, yaitu :

1) *Weight estimate* digunakan untuk menciptakan skor variabel laten
2) Estimasi jalur (*path estimate*) yang menghubungkan antar variabel laten dan estimasi *loading* antara variabel laten dengan indikatornya.
3) *Means* dan lokasi parameter (nilai konstanta regresi, intersep) untuk indikator dan variabel laten.

Secara jelas algoritma untuk menentukan pembobot-pembobot, koefisien-koefisien lintas, dan nilai peubah laten dalam PLS :

Tahap 1. Pendugaan iterative dari pembobot-pembobot awal dan nilai-nilai peubah laten awal dimulap ada langkah #3, kemudian dilanjutkan dari hangkah #1

sampai dengan langkah #3 diulangi hingga konvergen, dengan batas kekonvergenan $((w_{ki}^{*} - w_{ki}) / w_{ki}) \leq 10^{-5}$

1. Pendugaan Model Struktural

$\hat{\eta}_i^{*} = \Sigma_i v_{ji} \xi_i$ dengan v_{ji} dengan v_{ji}=signcov(η_j,ξ_i) untuk i=1,2,..,*m*

$\hat{\eta}_l^{*} = v\eta_j + \Sigma_i v_{li} \xi_i$ dengan v=signcov(η_l,η_i)

v_{li}= signcov(η_l,ξ_i) untuk i=1,2,…,*m*

$$\text{signcov}(\eta, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{Untuk } \eta \text{ dan } \xi \text{ yang berhubungan} \\ 0 & \text{Untuk } \eta \text{ dan } \xi \text{ yang tidak berhubungan} \end{cases}$$

2. Pembobot model pengukuran

$y_{kj} = \hat{w}_{kj}^{*} \eta_j^{*} + e_{kj}$ untuk k=1,2,...,r_j dan j=1,2,…,n,

r_j = banyaknya peubah manifest pada blok ke-j

3. Pendugaan Model Pengukuran

$\hat{\xi}_i = \Sigma_{ki} \hat{w}_{ki} x_{ki}$ untuk k=1,…,s_i dan i=1,2…,m

s_i = banyaknya peubah manifest pada blok ke-i

$\hat{\eta}_j = \Sigma_{kj} \hat{w}_{kj} y_{kj}$ untuk k=1,…,r_j dan j=1,2…,n

r_j = banyaknya peubah manifest pada blok ke-j

Tahap 2 : Pendugaan Koefisien jalur

6. Langkah Keenam: *Goodness of Fit*

a). *Outer Model*

Convergent validity

Korelasi antara skor indikator refleksif dengan skor variabel latennya. Untuk hal ini *loading* 0.5 sampai 0.6 dianggap cukup, pada jumlah indikator per konstruk tidak besar, berkisar antara 3 sampai 7 indikator.

Discriminant validity

Membandingkan nilai *square root of average variance extracted* (AVE) setiap konstruk dengan korelasi antar konstruk lainnya dalam model, jika *square root of average variance extracted* (AVE) konstruk lebih besar dari korelasi dengan seluruh konstruk lainnya maka dikatakan memiliki *discriminant validity* yang baik. Direkomendasikan nilai pengukuran harus lebih besar dari 0.50.

$$AVE = \frac{\Sigma \lambda_i^2}{\Sigma \lambda_i^2 + \Sigma_i \text{ var}(\varepsilon_i)}$$

***Composite reliability* (ρc)**

Kelompok Indikator yang mengukur sebuah variabel memiliki reliabilitas komposit yang baik jika memiliki *composite reliability* ≥ 0.7, walaupun bukan merupakan standar absolut.

$$\rho c = \frac{(\Sigma \lambda_i)^2}{(\Sigma \lambda_i)^2 + \Sigma_i \text{ var}(\varepsilon_i)}$$

b). Inner model

Goodness of Fit Model diukur menggunakan R-square variabel laten dependen dengan interpretasi yang sama dengan regresi; *Q-Square predictive relevance* untuk model struktural, megukur seberapa baik nilai onservasi dihasilkan oleh model dan juga estimasi parameternya. Nilai Q-square > 0 menunjukkan model memiliki *predictive relevance*; sebaliknya jika nilai Q-Square ≤ 0 menunjukkan model kurang memiliki *predictive relevance*. Perhitungan Q-Square dilakukan dengan rumus:

$Q^2 = 1 – (1 – R_1^2) (1 – R_2^2) ... (1- R_p^2)$

dimana R_1^2 , R_2^2 ... R_p^2 adalah R-square variabel endogen dalam model persamaan. Besaran Q^2 memiliki nilai dengan rentang $0 < Q^2 < 1$, dimana semakin mendekati 1 berarti model semakin baik. Besaran Q^2 ini setara dengan koefisien determinasi total pada analisis jalur (*path analysis*). R_m^2

7. Langkah Ketujuh: Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis (β, γ, dan λ) dilakukan dengan metode resampling Bootstrap yang dikembangkan oleh Geisser & Stone. Statistik uji yang digunakan adalah statistik t atau uji t, dengan hipotesis statistik sebagai berikut:

Hipotesis statistik untuk *outer model* adalah:

$H_0 : \lambda_i = 0$ lawan

$H_1 : \lambda_i \neq 0$

Sedangkan hipotesis statistik untuk *inner model*: pengaruh variabel laten eksogen terhadap endogen adalah

$H_0 : \gamma_i = 0$ lawan

$H_1 : \gamma_i \neq 0$

Sedangkan hipotesis statistik untuk *inner model*: pengaruh variabel laten endogen terhadap endogen adalah

$H_0 : \beta i = 0$ lawan

$H_1 : \beta i \neq 0$

Penerapan metode resampling, memungkinkan berlakunya data terdistribusi bebas (*distribution free*), tidak memerlukan asumsi distribusi normal, serta tidak memerlukan sampel yang besar (direkomendasikan sampel meinimum 30). Pengujian dilakukan dengan *t-test*, bilamana diperoleh *p-value* $\leq$ 0,05 (alpha 5 %), maka disimpulkan signifikan, dan sebaliknya. Bilamana hasil pengujian hipotesis pada *outter model* signifikan, hal ini menunjukkan bahwa indikator dipandang dapat digunakan sebagai instrumen pengukur variabel laten. Sedangkan bilamana hasil pengujian pada *inner model* adalah signifikan, maka dapat diartikan bahwa terdapat pengaruh yang bermakna variabel laten terhadap variabel laten lainnya.

CONTOH APLIKASI

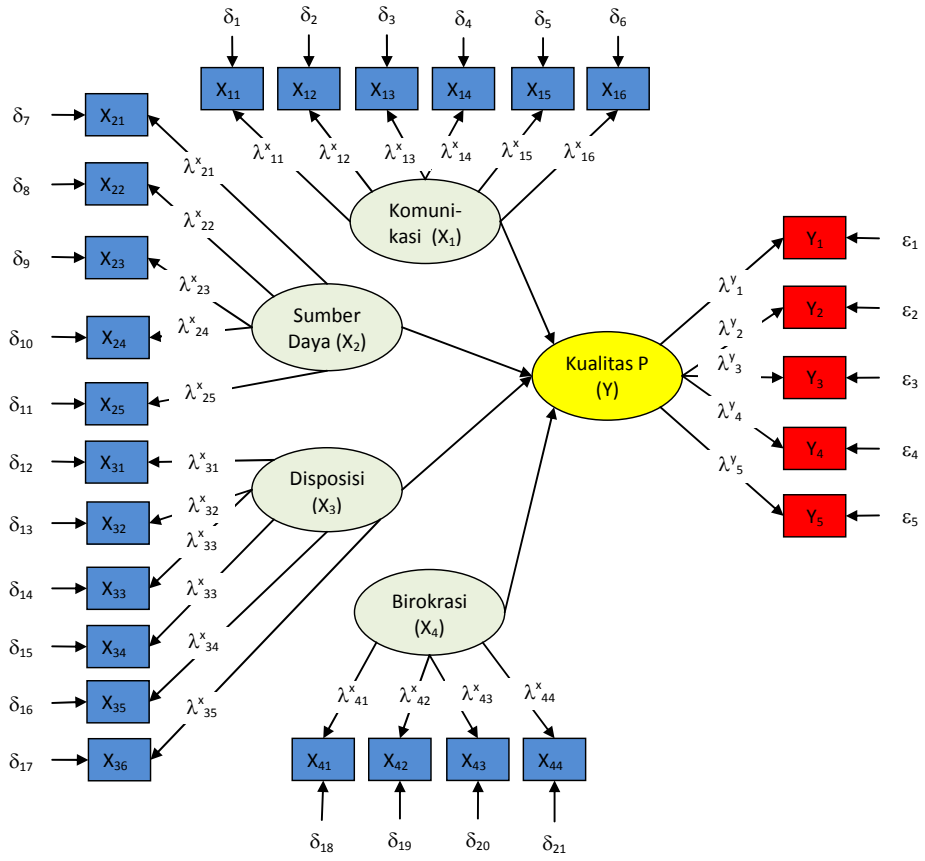
Untuk contoh aplikasi, penulis akan menerapkan metode PLS dalam menjelaskan Pengaruh Implementasi Kebijakan Pemberian Kredit Pemilikan Rumah Terhadap Kualitas Pelayanan Konsumen Masyarakat Berpenghasilan Rendah. Data penelitain ini bersumber dari Disertasi dengan Judul "Pengaruh Implementasi Kebijakan Pemberian Kredit Pemilikan Rumah Terhadap Kualitas Pelayanan Konsumen Masyarakat Berpenghasilan Rendah" oleh **Herijanto Bekti (2008).**

Variabel yang dikaji dalam penelitian ini adalah "

1. Implementasi Kebijakan (X):
   a. Strategi komunikasi kebijakan (X_1)
   b. Sumber-sumber proses Implementasi Kebijakan (X_2)
   c. Sikap pelaksana kebijakan (X_3)
   d. Struktur Birokrasi (X_4)
2. Kualitas Pelayanan (Y) :
   a. Tangible (Y1)
   b. Reability (Y2)
   c. Responsiveness (Y3)
   d. Assurance (Y4)

e. Empathy (Y5)

Model konseptual penelitian ini digambarakan dalam diagram jalur berikut :



Gambar 3.2

Model Persamaan Struktural

Unit sampel dalam penelitian ini adalah pejabat dan staf Bank Tabungan Negara Cabang Utama Bandung dengan banyak sampel adalah 57 orang responden. Ukuran sampel ini jika dibandingkan dengan indikator variabel sangatlah kecil sehinggga pemodelan persamaan struktural tidak dapat dilakukan dengan LISREL.

Data dikumpulkan dengan menggunaka kuesioner dengan skala pengukuran ordinal, kemudian dilakukan peningkatan skala pengukuran dengan metode Successive Interval (MSI).

HASIL ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Analisis data dilakukan dengan menggunakan software VPLS 1.4. Hasil analisis yang disajikan adalah nilai loading faktor. Nilai loading faktor lebih mudah diinterpretasikan dibandingkan dengan menggunakan bobot (weight). Uji signifikansi partial dilakukan dengan metode Jacknife.

Hasil analisis disajikan di bawah ini.

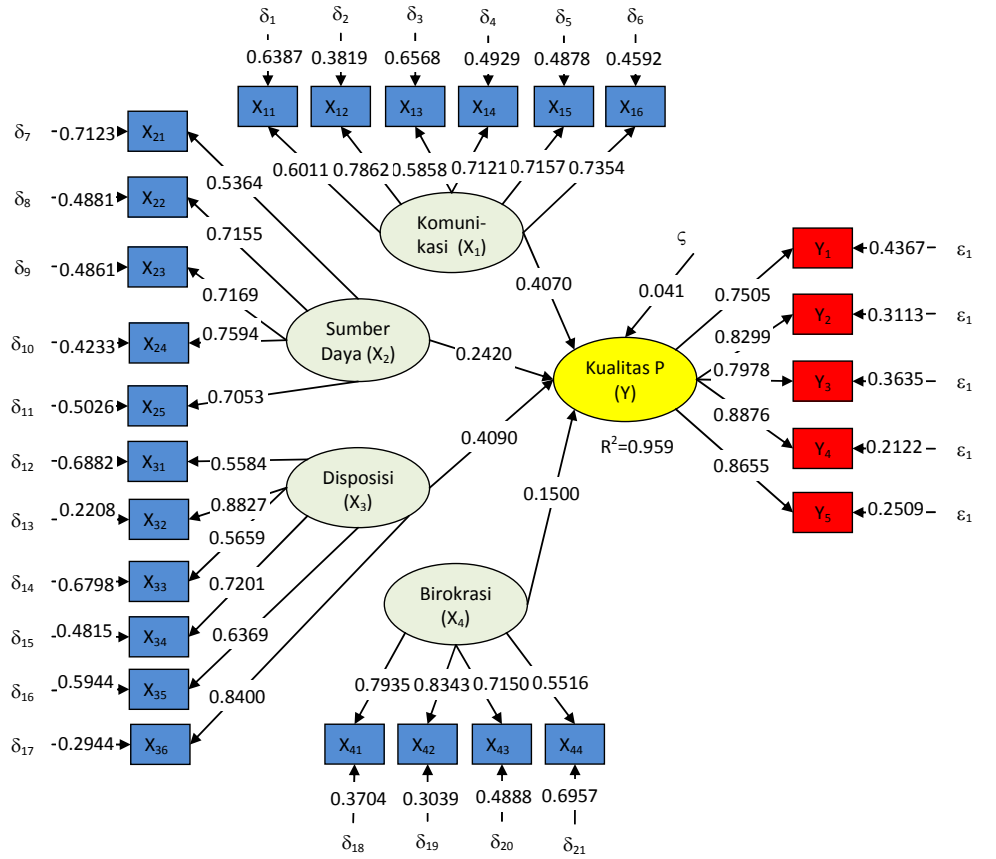
Tabel 2. Dugaan Parameter Model Pengukuran

Variabel	Sub Variabel	Entire Sample estimate	Mean of Subsamples	Standard error	T-Statistic
X-1	X1	0.601	0.588	0.128	4.688
	X2	0.786	0.783	0.051	15.488
	X3	0.586	0.543	0.125	4.673
	X4	0.712	0.721	0.070	10.189
	X5	0.716	0.684	0.101	7.103
	X6	0.735	0.736	0.091	8.112
X-2	X7	0.536	0.488	0.151	3.563
	X8	0.716	0.728	0.079	9.042
	X9	0.717	0.728	0.087	8.218
	X10	0.759	0.753	0.075	10.087
	X11	0.705	0.680	0.099	7.123
X-3	X12	0.558	0.531	0.123	4.546
	X13	0.883	0.874	0.026	33.678
	X14	0.566	0.610	0.127	4.468
	X15	0.720	0.709	0.086	8.404
	X16	0.637	0.612	0.104	6.122
	X17	0.840	0.831	0.046	18.431
X-4	X18	0.794	0.785	0.062	12.788
	X19	0.834	0.847	0.039	21.563
	X20	0.715	0.686	0.123	5.800
	X21	0.552	0.527	0.125	4.401
Y	Y1	0.751	0.759	0.052	14.326
	Y2	0.830	0.815	0.043	19.452
	Y3	0.798	0.780	0.063	12.650
	Y4	0.888	0.879	0.027	32.467
	Y5	0.866	0.860	0.033	26.474

Tabel 2. Dugaan Parameter Model Struktural

Persamaan Struktural		Koefisien Jalur (Distandar-kan)	R^2
Variabel Laten Endogen	Variabel Laten Eksogen		
Kualitas Pelayanan	Komunikasi	0.4070	0,959
	Sumber daya	0.2420	
	Disposisi atau sikap pelaksana	0.4090	

	Struktur Birokrasi	0.1500	



Gambar 4. Visualisasi Analisis PLS

Tabel 3

Hasil Uji Kebaikan Model Pengukuran

Construct	Composite Reliability	AVE	Cronbach Alpha	Keterangan
Komunikasi (X1)	0.845879	0.480452	0.780685	Baik (*fit*)
Sumber Daya (X2)	0.818611	0.477554	0.728685	Baik (*fit*)
Disposisi (X3)	0.856586	0.506833	0.79445	Baik (*fit*)
Struktur Birokrasi (X4)	0.818412	0.535298	0.699949	Baik (*fit*)
Kualitas Pelayanan (Y)	0.915521	0.685038	0.883891	Baik (*fit*)

Dari hasil pengujian kebaikan model, untuk model pengukuran dilihat dari nilai composite reliability, AVE, dan Cronbach Apla, semuanya memberikan nilai yang memenuhi kiriteria kefitan model. Sehingga untuk model pengukuran dapat dinyatakan sudah baik.

Uji Kebaikan Model Struktural

Uji kebaikan model strktural dapat dilihat dari nilai Q^2 seperti di bawah ini :

$Q^2 = 1-(1-R^2)$

$=1-(1-0.959)=0.959$

Nilai Q^2 mendekati nilai 1 sehingga dapat dinyatakan model structural juga fit dengan data.

Kedua hasil pengujian ini menunjukkan model secara keseluruhan fit dengan data atau mampu mencerminkan realitas dan fenomena yang ada dilapangan. Sehingga hasil penelitian ini dapat dinyatakan valid dan reliable.

Hasil analisis menunjukkan bahwa semua variabel indikator valid dan reliable merefleksikan vairabel laten dengan pengujian model menghasilkan kesimpulan model fit. Hasil pengujian partial dengan pendekatan jacknife menunjukkan bahwa semua variabel eksogen memberikan pengaruh signifikan terhadap vairabel endogen.

KESIMPULAN

1. Pemodelan struktural dengan ukuran sampel relatif kecil dan asumsi normalitas multivariate tidak terpenuhi dapat menggunakan pendekatan Partial Least Square (PLS)
2. Untuk pengujian model dengan ukuran sampel relatif besar dan sebaran data mengikuti sebaran multivariate, penedektan LIREL merupakan pendekatan yang terbaik.

DAFTAR PUSTAKA

Bekti, H. 2008. Pengaruh Implementasi Kebijakan Pemberian Kredit Pemilikan Rumah Terhadap Kualitas Pelayanan Konsumen Masyarakat Berpenghasilan Rendah. Disertasi Pascasarjana Universitas Padjajaran Bandung.

Bollen, K.A. 1989. Structural Equation With Latent Variabels. John Wiley and Sons, New York

Chin, W.W., 2000. Partial Least Squares for Researcher : An Overview and Prosentation of Recent Advances Using the PLS approach. <http://disc-nt.cba.uh.edu/chin/icis2000plstalk.pdf > [20 Maret 2008]

Chin, W. W., Marcolin, B. L., & Newsted, P. N. (2003). A partial least squares approach for measuring interaction effects: Results from a Monte Carlo simulation study and an electronic mail emotion/adoption study. Information Systems Research, 14(2), 189–217.

Rencher, Alvin C, 2002. Method of Multivariate Analysis 2rded. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, USA.

Sheng -Hsun Hsu,. 2006. Robustness Testing of PLS, LISREL,EQS and ANN-based SEM for Measuring Customer Satisfaction, Total Quality Management Vol. 17, No. 3, 355–371,Chung-Hua University.

Wold H. (1982) Soft modeling: the basic desing and some extensions, In: *Systems under Indirect Observation, Part 2,* Jöreskog K.G., Wold H. (eds). North-Hollad, 1-5

Penggerombolan Model Parameter Regresi dengan *Error-Based Clustering*

[1]I Made Sumertajaya
[2]Gusti Adhi Wibawa
[3]I Gede Nyoman Mindra Jaya

[1]Staf Pengajar Departemen Statistika IPB
[2,3]Mahsiswa Pascasarjana Statistika IPB

ABSTRAK

Ketersediaan data tidak dalam format standar yaitu tidak dalam bentuk vektor dalam dimensi ruang p, sering kali menjadi kendala dalam penggunaan analisis gerombol tradisonal. Untuk dapat menggunakan teknik analisis gerombol tradisional, data terlebih dahulu harus dirubah ke dalam struktur yang diinginkan untuk mempermudah analisis. Namun tidak jarang dalam proses mengubah struktur data awal menjadi struktur data baru banyak informasi yang hilang. Dalam setiap teknik ini disajikan statistik varians-kovarians atau matriks kekeliruan (measurement Error) yang terkait dengan hasil perubahan struktur data tersebut yang merupakan ukuran informasi yang hilang selama proses tranformasi. Metode Error based clustering memungkinkan melakukan penggerombolan objek dengan emmperhatikan kekeliruan pengukuran. Salah satu aplikasi dari metode ini adalah penggerombolan parameter regresi dalam kasus klasifikasi sekuritas dalam perdagangan saham.

Key Word : *Error-Based Clustering, kError*

PENDAHULUAN

Teknik analisis gerombol adalah suatu proses pengorganisasian data yang sangat besar kedalam kelompok-kelompok yang lebih kecil dengan data yang memiliki kemiripan ditempatkan pada kelompok yang sama sedangkan yang kurang mirip ditempakan dalam kelompok yang berbeda. Teknik ini diharapkan mampu mengungkapkan informasi yang tersimpan dalam data sehingga bisa membantu dalam pengambilan keputusan yang tepat terkait dengan kajian yang sedang dilakukan.

Pemanfaatan data yang tidak standar yaitu tidak dalam bentuk vektor dalam dimensi ruang *p*, sering kali menjadi kendala dalam penggunaan analisis gerombol tradisonal. Untuk dapat menggunakan teknik analisis gerombol tradisional, data terlebih dahulu harus dirubah ke dalam struktur yang diinginkan untuk mempermudah analisis. Namun tidak jarang dalam proses mengubah struktur data awal menjadi struktur data baru banyak informasi yang hilang. Beberapa contoh teknik yang digunakan untuk

mengubah struktur data yaitu menghitung rataan, mereduksi data dengan teknik analisis komponen utama ataupun menggunakan model-model statistik yang lain. Dalam setiap teknik ini disajikan statistik varians-kovarian atau matriks kekeliruan (*measurement Error*) yang terkait dengan hasil perubahan struktur data tersebut yang merupakan ukuran informasi yang hilang selama proses tranformasi. Hasil transformasi ini kemudian dijadikan unit pengamatan baru yang digerombolkan tanpa memperhatikan matriks kekeliruan yang menyertai setiap unit pengamatan baru tersebut.

Analisis gerombol klasik yang didasarkan pada jarak kuadrat *Euclidean* memiliki kelemahan yaitu tidak mempertimbangkan adanya informasi kekeliruan ataupun unsur ketidakpastian yang terkait dengan data. Memasukkan informasi kekeliruan dalam proses penggerombolan akan memberikan hasil pengelompokkan yang berbeda dan tentunya lebih baik dibandingkan dengan analisis gerombol tradisional seperti K-*means* dan Ward's *hierarchical clustering*.

Salah satu pendekatan baru dalam metode penggerombolan yang memasukkan informasi kekeliruan yang terkait dengan data adalah metode *Error-based clustering* (Kumar, 2007). Dalam metode *Error-based clustering* dikembangkan model statistik dan algoritma penggerombolan yang melibatkan *measurement Error.*

Terdapat dua algoritma penggerombolan dalam *Error-based clustering* yaitu (1) *hError*, yaitu algoritma pengelompokkan hirarki yang menghasilkan sebuah rangkaian gerombol tersarang, (2) *kError*, yaitu algoritma partisi, yang mempartisi data menjadi beberapa gerombol spesifik.

Salah satu aplikasi metode ini adalah penggeromobolan parameter model regresi yang dapat diterapkan pada kasus pengerombolan sekuritas saham. Model yang umumnya digunakan dalam kajian sekuritas adalah *Capital Asset Pricing Model* (CAPM).

TUJUAN PENELITIAN

Menerapkan teknik penggerombolan *Error-based clustering* khususnya k*Error* dalam penggerombolan model parameter regresi.

MODEL *ERROR-BASED CLUSTERING*

Data yang akan dianalisis terdiri dari n observasi, $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ (vector kolom) dalam ruang dimensi p (R^p) dan n matriks definit positif $\boldsymbol{\Sigma}_1,\ldots, \boldsymbol{\Sigma}_n$ dalan R^{pxp}, dimana $\boldsymbol{x}_i$ variabel pengukur dengan p karaketeristik dan $\boldsymbol{\Sigma}_i$ menyatakan matriks varians-kovarians yang terkait dengan nilai observasi $\boldsymbol{x}_i$. Misalkan bahwa setiap data independent dan dibangun dari p-variate distribusi normal dengan G kemungkinan rataan $\theta_1,...,\theta_G$, $G \le n$, dengan $x_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i)$ dengan $\mu_i \in \{\theta_1,...,\theta_G\}$ untuk $i = 1, ..., n$. Tujuan dari *Error-based clustering* adalah menemukan $C_1,...,C_n$ sedemikian sehingga observasi yang memiliki nilai rataan (μ_i) yang sama masuk ke dalam gerombol yang sama sehingga $\mu_i = \theta_k$, k = 1, 2,...,G. Terdapat perbedaan dalam model penggerombolan *Error–based clustering* dengan model peluang yang lain yaitu penggerombolan secara tradisional mengasumsikan bahwa kedua nilai μ_i dan Σ_i tidak diketahui, disini kita mengasumsikan bahwa Σ_i diketahui dan μ_i yang tidak diketahui.

Misalkan $S_k = \{i | x_i \in C_k\}$ k=1,2,...,G. Perhatikan bahwa $S_1,...,S_G$ saling bebas dan bukan merupakan himpunan kosong dari $\{1,...,n\}=\bigcup_{k=1}^{G} S_k$. Sehingga $\mu_i = \theta_k$ untuk $\forall_i \in S_k$, k=1,...,G. Diberikan data pengamatan $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$ dan matriks kekeliruan $\boldsymbol{\Sigma}_1,..., \boldsymbol{\Sigma}_n$, prosedur fungsi kemungkinan maksimum dengan memilih $S=(S_1,...,S_G)$ dan $\theta=(\theta_1,...,\theta_G)$ sedemikian sehingga memaksimumkan fungsi likelihoodnya. Fungsi kemungkinan maksimumnya adalah:

$$L(x|S,\theta(= \prod_{k=1}^{G}\prod_{i\in S_k} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}|\Sigma_i|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_k)^t \Sigma_i^{-1}(x_i-\theta_k)}, \quad (1)$$

Dengan $|\boldsymbol{\Sigma}_i|$ determinan dari $\boldsymbol{\Sigma}_i$ untuk i=1,...,G

Lemma 1. Penduga fungsi kemungkinan maksimum dari $S_1,...,S_g$ adalah partisi dari n observasi ke dalam G gerombol sehingga diperoleh penyelesaian :

$$\min_{S_1,...,S_G} \sum_{k=1}^{G}\sum_{i\in S_k} (x_i - \hat{\theta}_k)^t \Sigma_i^{-1}(x_i - \hat{\theta}_k), \quad (2)$$

Dimana $\hat{\theta}_k$ adalah penduga kemungkinan maksimum dari θ_k yang diberikan oleh :

$$\hat{\theta}_k = (\sum_{i\in S_k} \Sigma_i^{-1})^{-1}(\sum_{i\in S_k} \Sigma_i^{-1} x_i), \; k = 1,...,G \quad (3)$$

Peminimuman ini memumculkan pemikiran bahwa setiap data dibobot oleh kebalikan matriks varians-kovarians kekeliruan, sehingga data dengan kekeliruan kecil akan

memiliki bobot yang lebih tinggi. Perhatikan bahwa $\hat{\theta}_k$ adalah bobot rata-rata dari data pada gerombol C_k. Jika dikaitkan dengan ukuran jarak Mahalanobis, maka $\hat{\theta}_k$ adalah rataan Mahalanobis untuk gerombol C_k. Misalkan ψ_k adalah matriks kekeliruan *p*x*p* dari yang terkait dengan $\hat{\theta}_k$, maka ψ_k dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\psi_k = Cov(\hat{\theta}_k) = [\sum_{i \in S_k} \Sigma_i^{-1}]^{-1} \quad (4)$$

Terdapat dua hal yang menarik dari fungsi tujuan pada persamaan 2. Pertama, ketika matriks kekeliruan merupakan matriks diagonal $\Sigma_i=\sigma^2 I$, dengan bentuk *spherical*, fungsi tujuan *Error-based clustering* akan sama dengan fungsi tujuan pada algoritma *K*-Means yaitu meminimumkan jumlah kuadrat jarak *euclidean*. Kedua, fungsi tujuan dari *Error-based clustering* invarians skala seperti pada jarak Malahanobis.

ALGORITMA *kERROR*

Algoritma *kError* adalah algoritma dalam *Error-based clustering* jika jumlah gerombol G sudah diteteapkan. Konsep dasar algoritma *kError* sama dengan algoritma K-Means. Algoritma ini merupakan algoritma iterative yang mengikuti dua langkah yaitu :

Langkah 1. Untuk banyaknya gerombol yang diberikan, hitung pusat penggerombolan sebagai rata-rata jarak mahalanobis dari gerombol

Langkah 2. Perlakukan kembali setiap data untuk pusat gerombol terdekat menggunakan formulasi jarak pada persamaan 5.

Jarak data x_i dari pusat gerombol $\hat{\theta}_k$ untuk gerombol C_k adalah :

$$d_{ik} = (x_i - \hat{\theta}_k)^t \Sigma_i^{-1} (x_i - \hat{\theta}_k) \quad (5)$$

Algoritma *kError*

Algorithma 2 : *kError* (x, Σ, G)

---

1. Input : (x_i , Σ_i, G), i = 1, …, n
2. Output : Cluster C_1,…,C_G
3. Initialization :
4. Temukan inisial partisi secara acak dari data ke dalam G gerombol.
5. End initialization;

---

6. Step 1
7. Hitung pusat gerombol G dengan mengunakan persamaan 3
8. End Step 1
9. Step 2
10. Tempatkan data ke dalam gerombol terdekat menggunakan fungsi jarak pada 5
11. End step 2 :
12. If gerombol berubah then
13. Go to step 1;
14. End if
15. Kembali ke $C_1,..,C_G$

PENGGEROMBOLAN PARAMETER MODEL REGRESI

Salah satu aplikasi penggerombolan parameter model adalah penggerombolan parameter dalam model analisis regresi. Misalkan terdapat *n* objek yang diukur oleh set parameter yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil. Misalkan terdapat m_i observasi untuk objek ke-*i* dengan *i*=1,2...,*n*. Asumsikan bahwa observasi ke-*i* mengikuti model linier sebagai berikut :

$$Y_i = X_i \beta_i + \varepsilon_i, \tag{6}$$

Dengan Y_i adalah vektor dengan m_i observasi, X_i adalah matriks dengan elemen yang telah diketahui dan berukuran m_i *x p*, β_i adalah vektor dari *p* varameter yang tidak diketahui, dan ε_i adalah vektor kekeliruan dari m_i observasi dengan rataan 0, dan varians σ^2. Pendugaan metode kuadrat terkecil memberikan dugaan β_i sebagai berikut :

$$b_i = (X_i^t X)^{-1} X_i^t Y_i, \quad i = 1,...,n, \tag{7}$$

yang meninimumkan jumlah kuadrar residual sebagai berikut :

$$SSE_i = (Y_i - X_i b_i)^t (Y_i - X_i b_i) \tag{8}$$

untuk semua pilihan b_i.

Sedangkan matriks varians kovarians yang terkait dengan b_i adalah :

$$\Sigma_i = \sigma^2 (X_i^t X_i)^{-1} \tag{9}$$

dengan σ^2 diduga sebagai berikut :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y_i - X_i b_i)^t (Y_i - X_i b_i)}{m_i - p} \tag{10}$$

Asumsikan bahwa objek yang akan dikelompokkan digolongkan dengan baik oleh koefisien regresi dugaan sehinga kesamaan dalam koefisen regresi menunjukkan kesamaan dalam objek sesungguhnya, atau dengan kata lain, objek yang sama memiliki koefisien regresi yang sama.

Dalam kasus ini, input penggerombolan terdiri dari n set koefisien regresi dugaan b_i, dan terkait dengan matriks kekeliruan Σ_i, untuk i=1,...,n. Tujuannya adalah mempartisi b_i ke dalam G gerombol sehingga b_i yang relatif sama berada dalam gerombol yang sama, sehingga C_k memiliki dugaan parameter β_i yang sama.

Misalkan gerombol C_k berisi n_k objek dengan indeks $S_k=\{i_1, i_2,..., i_{nk}\}$. Sehingga dapat dituliskan :

$$Y_{Sk} = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in_k} \end{pmatrix}, \quad X_{Sk} = \begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{in_k} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

Y_{Sk} vektor berdimensi $\sum_{j=1}^{n_k} m_{ij}$ dan X_{Sk} adalah matriks berdimensi $\sum_{j=1}^{n_k} m_{ij} xp$.

Sehingga :

$$\sum_{i \in S_k} X_i^t X_i = X_{Sk}^t X_{Sk} \tag{12}$$

$$\sum_{i \in S_k} X_i^t Y_i = X_{Sk}^t Y_{Sk} \tag{13}$$

$$\sum_{i \in S_k} Y_i^t Y_i = Y_{Sk}^t Y_{Sk} \tag{14}$$

Misalkan β_{Sk} adalah parameter regresi bersama untuk objek dalam C_k, kemudian pendugaan dengan metode kuadrat terkecil diberikan sebagai berikut :

$$b_{S_k} = (X_{S_k}^t X)^{-1} X_{S_k}^t Y_{S_k} \tag{15}$$

Sedangkan matriks varians-kovarins dari dugaan parameter regresinya adalah

$$\Sigma_{S_k} = \sigma^2 (X_{S_k}^t X_{S_k})^{-1} \tag{16}$$

CONTOH APLIKASI
PENGGEROMBOLAN MODEL PARAMETER REGRESI

Untuk aplikasi *Error based clustering* pada model regresi linier multiple, akan diambil sebuah masalah penggerombolan yang sering terjadi dalam kasus bisnis saham.

Misalkan akan dikelompokkan portofolio berdasarkan pada kesamaan *performance* nya dibandingkan dengan seluruh *performance* market yang ada. Biasanya digunakan model untuk mengukur performance portofolio dibandingkan performance market yaitu dengan model Capital Asset Pricing Model (CAPM)

$$R_{it} - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_{mt} - R_f) + \varepsilon_{it}, \text{ i=1,...,N} \quad \text{t=1,...,T} \qquad (17)$$

dengan :

R_{it} = Tingkat keuntungan sekuritas ke-i pada periode ke-t

R_f = Tingkat keuntungan bebas risiko investasi

R_{mt} = Tingkat keuntungan sekuritas pasar pada period e ke-t

β_i = Koefisien beta untuk sekuritas i yang mengukur risiko sekuritas

α_i = Ukuran kebaikan nilai portofolio sebenarnya dibandingkan dengan nilai prediksi.

Persamaan di atas juga dapat ditulis dalam bentuk

$$R_{it\,f} = \alpha_i^* + \beta_i R_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad (18)$$

Dengan $\alpha_i^* = \alpha_i + R_f - \beta_i * R_f$

parameter regresi dapat diduga dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dengan setiap dugaan akan disertai matriks covariansnya yang merupakan matriks kekeliruan. Untuk membuktikan bahwa teknik penggerombolan k*Error* lebih baik dibandingkan dengan metode penggerombolan k-means baik untuk data tidak distandarkan terhadap satuan pengukuran juga data distandarkan terhadap satuan pengukuran, Kumar (2007) telah melakukan simulasi dengan hasil sebagai berikut :

Tabel 1. Perbandingan Kesalahan Klasifikasi Metode Penggerombolan

Metode Penggerombolan	Rata-rata Kesalahan Klasifikasi
k*Error*	0%
k-Means	8.53%
k-Means dengan standardisasi	5.31%

Untuk menjelaskan proses perhitungan dan menunjukkan perbedaan dari k*Error* dengan k-Means, penulis akan meggerombolkan portofolio berdasarkan pada kesamaan *performance* nya dibandingkan dengan performance pasar. Sembilan perusahaan yang

termasuk dalam LQ-45 diambil sebagai sampel. Data return Saham dan return pasar ditunjukkan dalam tabel di bawah ini .

Tabel 2. Data Return Saham 9 Perusahaan dan Return Pasar

Bulan	Return Saham									Return Pasar
	Rif(A)	Rif(B)	Rif(C)	Rif(D)	Rif(E)	Rif(F)	Rif(G)	Rif(H)	Rif(I)	Rm
Juni	26.34	10.16	29.41	8.85	15.45	2.46	25.14	22.38	22.50	13.38
Juli	-5.83	-12.04	-9.09	-0.33	5.12	0.64	-6.25	16.57	1.22	-4.45
Agustus	-6.34	-17.77	8.50	-5.71	-7.49	6.04	-1.91	7.23	-8.07	-5.24
September	-15.99	-4.36	-9.22	-3.81	-8.87	0.75	-15.05	1.48	-20.18	-9.66
Oktober	-4.15	-5.97	4.06	-13.67	-2.27	10.12	2.86	7.30	-3.85	-3.80
Nopember	31.34	34.33	-2.44	2.08	27.73	6.08	9.44	-14.97	5.71	5.89
Desember	-1.52	0.00	0.00	-16.33	6.05	0.00	6.60	0.00	-16.22	-3.00
Januari	-0.39	-11.11	-15.00	18.29	-20.47	-0.64	2.86	25.20	80.65	-8.47
Februari	7.72	31.25	0.00	20.62	20.25	-0.64	2.78	7.03	3.57	12.40
Maret	-7.17	-23.81	0.00	-17.09	-16.84	0.65	-2.70	-6.57	-3.45	-11.03
April	-11.58	-0.63	-8.82	-1.03	5.06	0.00	-2.78	-2.24	-30.36	-5.99
Mei	6.55	18.24	19.36	25.00	16.47	1.28	6.67	11.11	35.90	13.30

Dari perhitungan model CAPM dengan menggunakan penduga kuadrat terkecil diperoleh penduga parameter CAPM beserta matriks varians kovariasnnya sebagai berikut :

Tabel 3. Nilai Parameter Model dan Matriks Kovarians

Perusahaan	Aphpa	Betha	Matriks Kovariance	
A	2.250	1.190	7.95	0.06
			0.06	0.1
B	2.450	1.660	10	0.07
			0.07	0.13
C	1.930	0.960	7.72	0.06
			0.06	0.1
D	1.970	1.000	10.85	0.08
			0.08	0.14
E	4.120	1.370	6.02	0.04
			0.04	0.08
F	2.230	0.010	1.05	0.01
			0.01	0.01
G	2.730	0.760	4.36	0.03
			0.03	0.06

Perusahaan	Aphpa	Betha	Matriks Kovariance	
H	6.330	0.220	12.17	0.09
			0.09	0.16
I	6.050	0.780	76.02	0.54
			0.54	0.97

Data di atas ini akan menjadi imput dalam analisis clustering parameter model regresi dengan tujuan menggerombolkan perusahaan-perusahaan berdasarkan risiko investasinya. Teknik penggerombolan yang digunakan adalah *kError* dengan menetapkan ada sebanyak dua gerombol yaitu perusahaan dengan risiko rendah dan perusahaan dengan risiko tinggi.

Proses perhitungan penggerombolan dengan k*Error* :

1. Menentukan keanggotaan gerombol pertama dengan teknik k-means untuk k=2
   Dari analisis gerombol dengan k-means diperoleh keanggotaan pengerombolan sebagai berikut :

Tabel 4. Penggerombolan Awal

Perusahaan	Gerombol
A	1
B	1
C	1
D	1
E	2
F	1
G	1
H	2
I	2

2. Iterasi Pertama :
   Menghitung centroid k*Error* dengan rumus : $\hat{\theta}_k = (\sum_{i \in S_k} \Sigma_i^{-1})^{-1} (\sum_{i \in S_k} \Sigma_i^{-1} x_i),\ k = 1,2$

   Diperoleh nilai :

$$\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 2.3257 \\ 0.3629 \end{bmatrix} dan\ \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 3.9036 \\ 0.7721 \end{bmatrix}$$

Menghitung jarak setiap objek ke centroid dengan rumus : $d_{ik} = (x_i - \hat{\theta}_k)^t \Sigma_i^{-1} (x_i - \hat{\theta}_k)$ diperoleh :

Tabel 6. Hasil Perhitungan Jarak Eucledean Iterasi 1

Objek	Jarak Euclidean		Gerombol 1	Gerombol 2	Jumlah Kuadrat (1)	Jumlah Kuadrat (2)
	Centroid 1	Centroid 2				
A	6.9	2.2	1	2	47.367	4.859
B	13.0	6.4	1	2	168.358	41.451
C	3.6	0.9	1	2	13.245	0.845
D	2.9	0.8	1	2	8.686	0.585
E	13.0	4.5	2	2	19.972	19.972
F	12.5	58.9	1	1	156.676	156.676
G	2.6	0.3	1	2	6.959	0.100
H	1.5	2.5	2	1	6.368	2.263
I	0.3	0.1	2	2	0.004	0.004
Total					427.63	226.75

Terlihat dari perhitungan jarak Euclidean untuk k*Error*, terjadi perubahan gerombol dimana dengan keanggotaan gerombol terlihat pada gerombol 2.

3. Iterasi Kedua :

   Karena terjadi perubahan keanggotaan penggerombolan maka dilakukan iterasi tahap dua dengan hasil sebagai berikut :

   $\hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 2.5578 \\ 0.0236 \end{bmatrix} dan\ \hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 2.7462 \\ 1.1076 \end{bmatrix}$

   Jarak objek ke centroid :

Tabel 7. Hasil Perhitungan Jarak Eucledean Iterasi 2

Objek	Jarak Euclidean		Gerombol 3	Jumlah Kuadrat (3)
	Centroid 1	Centroid 2		
A	13.7	0.1	2	0.011
B	20.7	2.4	2	5.678
C	9.0	0.3	2	0.082
D	6.9	0.1	2	0.017

Objek	Jarak Euclidean		Gerombol 3	Jumlah Kuadrat (3)
	Centroid 1	Centroid 2		
E	22.8	1.1	2	1.250
F	0.1	120.8	1	0.013
G	9.0	2.0	2	4.077
H	1.3	6.3	1	1.816
I	0.7	0.3	2	0.074
Total				13.02

Perhatikan jarak Euclidean di atas terlihat tidak ada lagi keangotaan gerombol yang berpindah. Selain itu jumlah kuadar dari gerombol terakhir jauh lebih kecil dibandingkan dengan gerombol sebelumnya sehingga gerombol pada iterasi terakhir dinyatakan tepat.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa Peruhaan A, B, C, D, E, G, dan I masuk dalam gerombol 2 sedangkan F dan H masuk ke dalam gerombol 1.

Jika diperhatikan gerombol 1 adalah perusahaan dengan tingkat resiko return yang paling rendah dan untuk gerombol 2 adalah perusahaan-peruhaan dengan resiko return tinggi.

KESIMPULAN

1. Metode *Error based clustering* khususnya k*Error* merupakan suatu teknik pengerombolan non-hirarkikal yang baik digunakan untuk data dengan kekeliruan pengukuran. Kekeliruan pengukuran ini muncul karena adanya suatu peroses penyederhanaan data.
2. Salah satu aplikasi dari k*Error* adalah untuk penggerombolan model parameter regresi dalam pembentukan *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) memberikan hasil yang sedikit berbeda dengan k-means. Hasil simulasi yang dilakukan oleh Kumar(2007) menunjukkan kesalahan klasifikasi untuk k*Error* dalam pemodelan parameter regresi adalah 0%.

DAFTAR PUSTAKA

Banfield J.D. and A.E. Raftery. Model-based gaussian and non-gaussian clustering. *Biometrics*, 49:803–821, 1993

Celeux G. and G. Govaert. Normal parsimonious clustering models.*Pattern Recognition*, 28:781–793, 1995.

Kumar, M., Patel, *N*.R., and Woo, J., 2007. Clustering Data With Measurement *Error*, Computational Statistics & Data Analysis, Volume 51, Issue 12,6081-6101: 2007

Magidson j. and J.K. Vermut. Latent class models for clustering: A comparison with k-means. *Canadian Journal of Marketing Research*, 20:37–44, 2002.

Rice J.A.. *Mathematical Statistics and Data Analysis*. Duxbury Press,2nd edition, 1986.

Scott A. J. and M. J. Symons. Clustering methods based on likelihood ratio criteria. *Biometrics*, 27:387–397, 1971.

Zhang *N*.L.. Hierarchical latent class models for cluster analysis. *AAAI-02*, pages 230–237, 2002.

KOREKSI METODE CONNECTED AMMI DALAM PENDUGAAN DATA TIDAK LENGKAP

[1]I Made Sumertajaya
[2] Ahmad Ansori Mattjik
[3]I Gede Nyoman Mindra Jaya

[1,2]Dosen Departemen Statistika Institut Pertanian Bogor
[,3] Mahasiswa Pasca Sarjana Institut Pertanian Bogor

ABSTRAK

Percobaan multilokasi mempunyai peranan penting dalam perkembangbiakan tanaman dan penelitian agronomi. Kajian mengenai interaksi antara genotipe dan lingkungan diperlukan dalam penyeleksian genotipe yang akan dilepas. Metode statistika yang biasa digunakan untuk mengolah data hasil percobaan multilokasi salah satunya adalah AMMI (Additive Main effect and Multiplicative Interaction). Metode ini menggabungkan analisis ragam aditif bagi pengaruh utama perlakuan dengan analisis komponen utama pada pengaruh interaksinya.Hambatan utama dalam menggunakan analisis AMMI adalah keseimbangan data. Sedangkan pada percobaan multilokasi kejadian data menjadi tidak seimbang peluangnya sangat besar. Agar setiap kombinasi genotipe dan lokasi memiliki jumlah ulangan yang sama, maka harus dilakukan pendugaan terhadap data yang tak lengkap. Pada kasus data tidak lengkap, diperlukan suatu metode pendugaan data untuk mempermudah analisis. Pada penelitian ini digunakan metode connected data dan algoritma EM-AMMI untuk menduga data yang tak lengkap dengan fungsi tujuannya adalah Mean Absolute Percentage Error (MAPE). Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin besar keragaman dari data maka semakin besar pula nilai MAPE semakin besar selaras juga dengan semakin tingginya persentas ketidaklengkapan data. Metode EM-AMMI memberikan MAPE yang lebih baik jika nilai awal dalam proses iterasi ditetapkan denga menggunakan metode Connected. Sehingga metode Connected –EM AMMI merupakan metode yang layak untuk dijadikan dasar pendugaan data tidak lengkap dalam analisis AMMI.

Kata Kunci : AMMI, Connected AMMI, EM-AMMI

1. PENDAHULUAN

Pada setiap rancangan percobaan sering dijumpai data tidak lengkap yang disebabkan oleh banyak faktor. Data tidak lengkap yang dimaksudkan dalam kajian ini bisa pengamatan tidak lengkap atau bisa juga perlakuan yang tidak lengkap. Faktor-faktor yang berpotensi menyebabkan ketidaklengkapan data percobaan antara lain gangguan alam, atau bisa juga karena disengaja untuk efesiensi terutama percobaan-percobaan yang berskala besar.

Pada kasus data yang tidak lengkap ada dua cara untuk menganalisis data yaitu dengan menganalisis data yang teramati saja atau melakukan pendugaan terhadap data tidak lengkap lalu dilanjutkan dengan analisis datanya. Khusus dalam analisis AMMI kelengkapan data merupakan hal yang sangat penting, jika data tidak lengkap tidak diduga maka harus ada baris dan kolom yang dikorbankan untuk menyeimbangkan data. Pengorbanan data yang telah dikumpulkan bukan merupakan strategi yang baik karena akan menghilangkan informasi dari beberapa perlakuan yang lain.

Dalam analisis AMMI terdapat teknik pendugaan data tidak lengkap yaitu EM-AMMI, yang merupakan metode pendugaan data tidak lengkap secara iteratif yaitu menduga data tidak lengkap, mengepaskan model dan menduga kembali data tidak lengkap berdasarkan model yang diperoleh. Proses ini berhenti sampai kriteria konvergensi terpenuhi (Gauch, 1992). Untuk mendapatkan proses konvergensi lebih cepat maka diperlukan metode penentuan nilai awal yang lebih baik. Dalam kajian ini, nilai awal untuk data tidak lengkap akan dilakukan dengan metode connected data. Dalam metode connected data, data tidak lengkap diduga berdasarkan data yang teramati saja dengan menghubungkan perubahan kondisi disekitar data tidak lengkap. Dengan kombinasi metode connected data dengan algoritma EM-AMMI diharapkan pendugaan data tidak lengkap menjadi lebih teliti dan konvergensinya lebih cepat.

2. TINJAUAN PUSTAKA

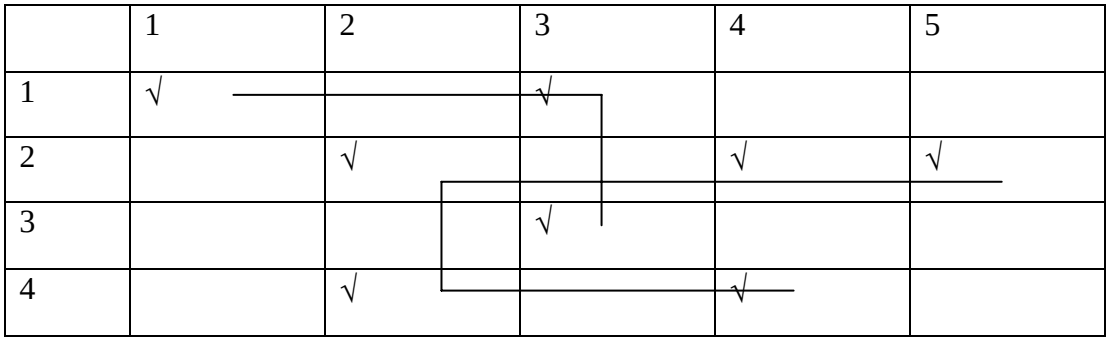
Data Terhubungkan (Connected Data)

Menurut Weeks and Williams dalam Searle (1987), data pada tabel klasifikasi dua arah dikatakan terhubungkan secara geometri (*g-connected*) bila data pada sel-selnya dapat dihubungkan oleh garis lurus (garis horisontal maupun vertikal), yang mengikuti arah dari sel-sel terisi.

	1	2	3	4	5
1	√		√		
2		√		√	
3			√		√
4	√			√	

Gambar 1 Struktur Data yang Bersifat G-connected

Gambar 1, menunjukkan struktur data yang terhubungkan secara geometri dimana setiap data yang ada dalam tabel dua arah tersebut dapat dihubungkan dengan suatu garis lurus yang tidak terputus. Sedangkan pada Gambar2, terlihat bahwa data-data yang ada terpisah menjadi dua kelompok data, dimana kedua kelompok data tersebut tidak dapat dihubungkan dengan suatu garis sehingga struktur data pada Gambar2 termasuk salah satu contoh struktur data yang bukan g-connected.



Gambar 2. Struktur Data yang Bersifat bukan G-connected

Data yang tidak terhubungkan secara geometri biasanya memiliki beberapa kelompok data yang terhubungkan secara geometri (kasus Gambar2, terdiri dari dua kelompok g-connected), pendekatan analisis dapat dilakukan secara tepisah untuk masing-masing kelompok.

Untuk data g-connected berimplikasi bahwa seluruh dari kontras baris (μi) maupun kolom (τj) dapat diduga, hal ini berarti dalam tabel dua arah tanpa interaksi seluruh perbedaan $\mu i - \mu i'$, untuk $i \neq i'$, dan $\tau j - \tau j'$, untuk $j \neq j'$ dapat diduga (estimable). Akibatnya seluruh rata-rata sel dapat diduga, baik untuk sel-sel yang terisi maupun sel-sel yang kosong.

Untuk sel-sel terisi, pendugaan tidak menjadi masalah. Tetapi misal sel (i,j) kosong maka untuk data g-connected, ada beberapa sel (i,j') dalam baris yang sama dan atau beberapa sel (i',j) dalam kolom yang sama yang terisi. Maka,

$$\mu_{ij} = \mu_i + \tau_j = \mu_i + \tau_j - \tau_{j'} + \tau_{j'} = \mu_{ij'} + (\tau_j - \tau_{j'})$$

karena kedua suku dapat diduga maka μij dapat diduga.

EM-AMMI (Expectation - Maximization AMMI)

EM-AMMI ini merupakan perluasan metode AMMI dengan proses pendugaan (untuk data tidak lengkap) secara iteratif. Dalam penggunaan algoritma EM-AMMI ada beberapa hal yang membuat pendugaan ini tidak bisa dilakukan yaitu jika semua pengamatan hilang, pengamatan untuk satu genotipe atau satu lingkungan atau satu kelompok semua hilang, dan jika jumlah data tidak lengkap melebihi derajat bebas galat.

Ada dua tahap dasar dalam algoritma EM-AMMI yaitu :

1. Tahap E (Expectation) yaitu tahapan menduga data yang hilang.
2. Tahap M (Maximization) yaitu tahapan pembentukan model dari data yang ada.

Pada dasarnya metode ini bertujuan menduga model dengan data yang ada dengan mengabaikan data tidak lengkap. Lalu secara iteratif menduga data yang hilang kemudian dipaskan (dicari modelnya) hingga dicapai keadaan yang konvergen yaitu keadaan di mana perubahan nilai dugaan antar iterasi relatif kecil yaitu < 0.00001(Gauch, 1992).

Jika pada analisis AMMI biasa skor KUI selalu tetap, misalnya skor KUI1 model AMMI1 sama dengan skor KUI1 pada model AMMI yang lebih tinggi, maka pada algoritma EM-AMMI skor KUI ini berubah pada tiap-tiap iterasi. Hal ini disebabkan nilai dugaan mempengaruhi nilai parameter aditif maupun multiplikatifnya.

Banyaknya iterasi untuk mencapai keadaan konvergen itu dipengaruhi oleh dua hal penting yaitu besar ukuran matriks dan persentase data tidak lengkap yang ada. Semakin besar ukuran matriks maka akan semakin lama pula iterasi yang diperlukan dan semakin besar persentase data tidak lengkap maka akan semakin besar pula jumlah iterasi yang dibutuhkan untuk mencapai kekonvergenan.

3. RANCANGAN SIMULASI DATA TIDAK LENGKAP

Untuk simulasi pendugaan data tidak lengkap dilakukan secara bertahap mulai dari penghilangan data lengkap lalu pemberian nilai awal dengan melihat pengaruh utamanya lalu menggunakan algoritma EM-AMMI untuk menghasilkan penduga bagi tiap-tiap data yang hilang. Data lengkap yang dihilangkan adalah data daya hasil jagung yang merupakan hasil percobaan multilokasi Jagung Hibrida yang dilakukan dari tanggal 23 Juli 2006 sampai 10 April 2007 yaitu pada musim hujan dan kemarau.

Percobaan ini menggunakan 7 genotipe Jagung Hibrida Harapan dan 5 genotipe Jagung Hibrida Komersial. yang ditanam pada 18 lokasi tersebar di 6 Propinsi.

Secara ringkas algoritma simulasi pendugaan data tidak lengkap adalah sebagai berikut:

1. Penghilangan data secara acak tetapi tetap mempertahankan pola connected.
2. Pemberian nilai dugaan awal bagi data tidak lengkap menggunakan metode connected data. Pada tahap ini pengaruh genotif dan lokasi diasumsikan aditif, sehingga dugaan awal bagi data yang tidak lengkap dapat dilakukan sebagai berikut: (misalnya data tidak lengkap pada posisi genotif ke-2 dan lokasi ke-1, μ_{12})

Tabel 1. Struktur data pengamatan dengan perlakuan tidak lengkap

	L_1	L_2	.	L_b	Pengaruh genotif
G_1	μ_{11}	μ_{12}		μ_{1b}	α_1
G_2	Data tidak lengkap	μ_{22}		μ_{2b}	α_2
G_a	μ_{a1}	μ_{a2}		μ_{ab}	α_a
Pengaruh lokasi	β_1	β_2		β_b	μ

Keterangan: μ_{ij} rata-rata genotif ke-i dan lokasi ke-j; α_i pengaruh genotif ke-i; β_j pengaruh lokasi ke-j; dan μ rataan umum.

Penduga bagi sel genotif ke-2 dan lokasi ke-1 adalah:

$$\hat{\mu}_{21} = \mu_{11} + (\alpha_2 - \alpha_1) \quad \text{atau} \quad \hat{\mu}_{21} = \mu_{22} + (\beta_1 - \beta_2)$$
$$\hat{\mu}_{21} = \bar{Y}_{11.} + (\bar{Y}_{2..} - \bar{Y}_{1..}) \quad\quad \hat{\mu}_{21} = \bar{Y}_{22.} + (\bar{Y}_{.1.} - \bar{Y}_{.2.})$$

Penduga bagi masing-masing parameter dihitung berdasarkan data yang diamati saja, sebagai berikut:

Penduga bagi rata-rata genotif ke-i dan lokasi ke-j: $\hat{\mu}_{ij} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}}{n_{ij}} = \bar{Y}_{ij.}$,

Penduga bagi pengaruh genotif ke-i: $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{...}$,

Penduga bagi pengaruh lokasi ke-j: $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$

3. Pembangunan model AMMI, berdasarkan data yang sudah lengkap dengan tahapan sebagai berikut:
   - Penyusunan matriks dugaan pengaruh interaksi

- Penguraian nilai singular matriks interaksi menjadi Komponen-komponen Utama Interaksi (KUI).
- Penentuan banyaknya KUI dengan Metode *Posdictive Success*.
- Pembentukan model AMMI.

4. Memperbaiki nilai dugaan data tidak lengkap berdasarkan model AMMI terbaru.
5. Pemeriksaan tingkat perubahan relatif nilai dugaan data tidak lengkap :
   - Jika tingkat perubahan < 10^{-3} maka nilai dugaan baru tersebut merupakan nilai dugaan akhir.
   - Jika tingkat perubahan > 10^{-3} maka ganti nilai dugaan dengan nilai dugaan baru dan ulangi langkah ke-3 sampai ke-5.
6. Ketelitian nilai dugaan data tidak lengkap diukur dengan menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), sebagai berikut:

$$MAPE = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|Y_i - F_i\|}{Y_i} x100\%$$

Besaran nilai MAPE lebih besar dari 0%, semakin kecil nilai MAPE mengindikasikan nilai dugaan semakin teliti.

Banyaknya data tidak lengkap yang disimulasikan yaitu 5%, 10%, 20%, 30%, 40% dan 50%. Setiap gugus data yang dihilangkan akan dicoba 10 pola connected. Penghilangan data dilakukan dengan tetap mempertahankan syarat dari *connected data*.

4. HASIL SIMULASI DATA TIDAK LENGKAP

Pendugaan Data tidak lengkap Dengan Metode *Connected*

Pendugaan data tidak lengkap melalui metode *connected* secara teknis tidak terlalu sulit untuk dikerjakan. Data yang teramati dipersyaratkan terhubungkan dalam rangkaian garis linier yang tak terputus dimaksudkan agar seluruh data yang hilang dapat dijelaskan dari kondisi data sekitarnya. Sebagai ilustrasi data pengamatan yang mengandung data tidak lengkap seperti terlihat pada **Tabel 2**.

Model linier aditif diasumsikan sebagai berikut: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

Dimana μ rataan umum, α_i pengaruh genotif ke-i, β_j pengaruh lokasi ke-j, ε_{ij} pengaruh acak genotif ke-i dan lokasi ke-j.

Langkah pertama adalah menduga pengaruh genotif dan lokasi berdasarkan data yang teramati dengan metode kuadrat terkecil (*least square*) dengan restriksi jumlah pengaruh genotif dan lokasi sama dengan nol, sebagai berikut:

Pengaruh genotype ke-i:

$\alpha_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$

$\alpha_1 = 8.887 - 9.182 = -0.295$

$\alpha_2 = 9.021 - 9.182 = -0.161$

dan seterusnya

Pengaruh lokasi ke-i:

$\beta_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$

$\beta_1 = 6.912 - 9.182 = -2.271$

$\beta_2 = 11.218 - 9.182 = 2.036$

dan seterusnya

Tabel 2. Data Rata-Rata Daya Hasil yang Dihilangkan Sebanyak 5% yang Mengikuti Pola Terhubungkan (*connected*).

LOKASI	GENOTYPE												Rataan Lokasi	Pengaruh Lokasi
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L		
L2	7.590	6.333	6.103	6.490	7.240	7.440	6.917	6.370	7.580	6.677	7.063	7.187	6.912	-2.271
L3	10.194	10.165	11.813	13.100	13.131	.	10.527	10.897	11.646	10.250	.	10.459	11.218	2.036
L4	7.352	8.968	8.737	8.103	7.906	7.895	6.808	7.168	9.142	8.391	7.565	8.387	8.035	-1.147
L5	9.167	9.471	9.637	.	9.560	9.785	8.216	9.234	9.199	8.677	9.860	8.528	9.212	0.030
L6	8.011	9.584	7.668	8.274	8.415	8.301	7.332	.	8.698	9.563	7.758	8.854	8.405	-0.777
L7	7.591	9.105	7.549	9.173	8.728	7.471	8.931	7.943	8.584	6.388	8.891	8.626	8.248	-0.934
L8	7.783	7.790	8.854	10.426	9.355	9.038	9.554	8.800	9.187	8.303	9.108	8.788	8.915	-0.267
L9	9.614	10.623	10.706	.	11.460	11.401	12.041	12.163	10.207	10.415	10.414	9.910	10.814	1.631
L10	9.175	8.533	8.948	10.499	9.704	10.357	10.146	9.845	9.780	8.025	9.887	9.139	9.503	0.321
L11	10.245	9.438	10.284	.	11.087	10.940	9.660	11.048	10.665	.	9.913	10.932	10.421	1.239
L13	7.504	7.760	8.076	9.328	7.651	.	6.919	7.230	6.980	.	8.743	6.920	7.711	-1.471
L14	11.677	11.357	12.472	12.957	11.701	11.706	11.958	12.531	11.916	10.994	10.570	11.462	11.775	2.593
L15	10.765	9.441	9.354	10.084	10.935	10.748	10.299	10.197	10.611	10.758	10.473	10.158	10.318	1.136
L16	7.926	7.832	7.955	9.006	7.379	8.126	6.915	7.796	7.436	6.717	7.586	.	7.698	-1.485
L17	13.226	12.523	14.146	15.055	13.067	13.339	13.062	12.826	12.666	11.853	12.674	13.069	13.125	3.943
L18	4.874	5.415	4.631	5.079	4.841	5.236	4.496	5.168	4.982	4.684	4.423	5.276	4.859	-4.324
Rataan Genotype	8.887	9.021	9.183	9.813	9.510	9.413	8.986	9.281	9.311	8.692	8.995	9.176	9.182	
Pengaruh Genotype	-0.295	-0.161	0.001	0.631	0.327	0.231	-0.196	0.099	0.129	-0.490	-0.187	-0.006		

Hasil selengkapnya dapat dilihat pada **Tabel 2** kolom paling kanan untuk pengaruh genotif dan baris paling bawah untuk pengaruh lokasi.

Selanjutnya pendugaan data tidak lengkap dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\mu_{ij} = \mu_{ij'} + (\beta_{j'} - \beta_j)$$

atau

$$\mu_{ij} = \mu_{i'j} + (\alpha_{i'} - \alpha_i)$$

Dengan demikian penduga data tidak lengkap pada **Tabel 2** di atas dapat diduga sebagai berikut:

Genotif F di lokasi L3.

$$\hat{y}_{3,1} = \hat{\mu}_{3,1} = \hat{\mu}_{2,1} + (\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_2) = 8.103 + (0.030 - (-1.147)) = 9.280$$

Hasil pendugaan selengkapnya dapat dilihat pada **Tabel 3.**

Tabel 3. Nilai Sebenarnya, Nilai Dugaan dengan Metode Connected dan Persentase Penyimpangan Relatif Antara Nilai Sebenarnya Dengan Dugaan

Lokasi	Genotype	Data Asli	Data Connected	Persentase Simpangan Mutlak
L3	F	11.984	11.746	1.984
L3	K	10.380	11.370	9.532
L5	D	10.708	9.280	13.342
L6	H	7.336	8.427	14.886
L9	D	11.533	12.324	6.861
L11	D	12.201	11.416	6.430
L11	J	10.716	8.943	16.549
L13	F	8.306	8.230	0.912
L13	J	6.594	6.233	5.478
L16	L	7.103	7.537	6.123
MAPE				8.209693

Besarnya nilai persentase simpangan mutlak (APE) bervariasi dari satu data ke data tidak lengkap yang lain. Hal ini mengindikasikan jika pengamatan yang hilang memiliki karakteristik yang jauh berbeda dengan nilai pengamatan disekitarnya maka nilai APE-nya akan cenderung besar sedangkan jika pengamatan yang hilang memiliki karakteristik yang mirip dengan nilai pengamatan disekitarnya maka nilai APE-nya akan cenderung kecil.

Rata-rata persentase simpangan mutlak (MAPE) untuk kelima buah data yang hilang adalah sebesar 8.21%. Dari nilai MAPE yang diperoleh dapat disimpulkan metode connected cukup baik menduga data yang hilang untuk pola yang pertama.

Dari 50 pola data yang dihilangkan untuk 5%, 10%, 20%, 30%, 40% dan 50% data yang hilang diperoleh nilai MAPE seperti pada **Tabel 4**. Besarnya nilai MAPE terlihat cenderung membesar jika jumlah data yang dihilangkan semakin besar. Hal ini berarti jika semakin banyak data yang hilang maka akan menyebabkan tingkat ketelitian pendugaan akan menurun.

Tabel 4. Nilai MAPE untuk Pendugaan Data tidak lengkap Dengan Metode Connected

% Data Tidak Lengkap	CONNECTED
5	8.0427
10	8.1716
20	8.2429
30	8.2584
40	8.3186
50	8.3360

Pendugasan Data tidak lengkap dengan Metode EM-AMMI

Pendugaan data tidak lengkap dengan metode EM-AMMI membutuhkan nilai awal untuk data yang hilang. Dalam kajian ini nilai dugaan awal untuk EM-AMMI ditentukan sesuai dengan besaran dari dugaan metode connected. Hal ini dilakukan sekaligus untuk mengevaluasi apakah dugaan berdasarkan metode connected optimum berdasarkan metode EM-AMMI.

Sebagai ilustrasi pendugaan data tidak lengkap seperti pada **Tabel 5**, selanjutnya akan diduga dengan metode EM-AMMI.

(i). Berikan nilai dugaan awal

$\hat{y}_{26} = 11.747,\ \hat{y}_{211} = 11.370,\ \hat{y}_{44} = 9{,}280,\ \hat{y}_{58} = 8{,}427, \hat{y}_{84} = 12{,}324,\ \hat{y}_{104} = 11{,}416$

$\hat{y}_{1010} = 8{,}943, \hat{y}_{116} = 8{,}230, \hat{y}_{1110} = 6{,}233,\ \hat{y}_{1412} = 7{,}537$

(ii). Bangun model AMMI

Model linier AMMI yang digunakan adalah model AMMI tanpa ulangan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \sum_{k=1}^{5} \sqrt{\lambda_k}\, \phi_{ki} \theta_{kj}$$

Dimana penduga masing-masing parameternya adalah sebagai berikut:

Proses pendugaan ini konvergen pada iterasi ke-25, hasil pendugaan selengkapnya dapat dilihat pada **Tabel 5**

Tabel 5. Nilai Sebenarnya, Nilai Dugaan Dengan Metode EM-AMMI dan Persentase Penyimpangan Relatif Antara nilai Sebenarnya Dengan Dugaan

Lokasi	Genotype	Data Asli	Data Connected-EM AMMI	Persentase Simpangan Mutlak
L3	F	11.984	11.649	2.799
L3	K	10.380	11.352	9.366
L5	D	10.708	9.908	7.471
L6	H	7.336	8.044	9.652
L9	D	11.533	12.209	5.864
L11	D	12.201	11.483	5.889

Lokasi	Genotype	Data Asli	Data Connected-EM AMMI	Persentase Simpangan Mutlak
L11	D	12.201	11.483	5.889
L11	J	10.716	9.460	11.725
L13	F	8.306	7.893	4.978
L13	J	6.594	6.294	4.545
L16	L	7.103	7.516	5.814
MAPE				6.810

Rata-rata persentase simpangan mutlak (MAPE) untuk kelima buah data yang hilang adalah sebesar 6.810%. Dari nilai MAPE yang diperoleh dapat disimpulkan untuk pola pertama, metode EM-AMMI cukup baik menduga data yang hilang untuk pola yang pertama bahkan hasilnya terlihat lebih teliti dibandingkan dengan metode connected.

Dari 50 pola data yang dihilangkan untuk 5%, 10%, 20%, 30%, 40% dan 50% data yang hilang diperoleh nilai MAPE seperti pada **Tabel 6** Besarnya nilai MAPE dengan metode EM-AMMI juga terlihat cenderung membesar jika jumlah data yang dihilangkan semakin besar. Namun demikian sampai dengan 50% data tidak lengkap nilai MAPE masih dibawah 10% dan diperkirakan setelah data tidak lengkap melebihi 50% nilai MAPE akan lebih besar dari 10%

Tabel 6. Nilai MAPE untuk Pendugaan Data tidak lengkap Dengan Metode Connected-EM AMMI

% Data Tidak Lengkap	CONNECTED EM- AMMI
5	7.5159
10	7.5395
20	7.4140
30	7.4323
40	7.6707
50	7.7630

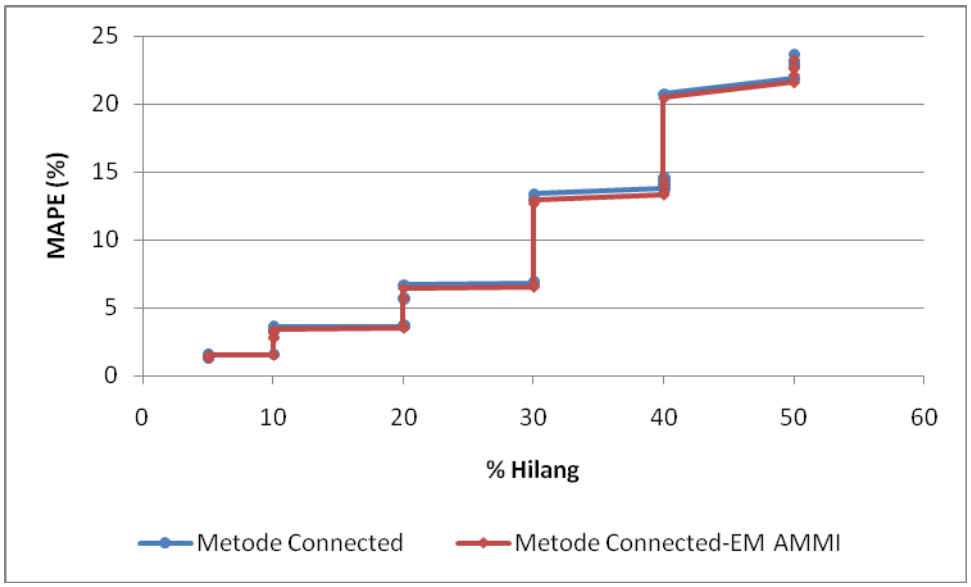
Selain menggunakan data asli, juga disimulasikan pendugaan data tidak lengkap dengan menggunakan data bangkitan. Analisa lebih lengkap mengenai data tidak lengkap disajikan di bawah ini :

Untuk simulasi data tidak lengkap dilakukan dengan menggunakan data bangkitan dan data asli yang beberapa persen datanya disimulasikan hilang. Di bawah ini merupakan hasil perbandingan pendugana data tidak lengkap menggunakan data hasil simulasi untuk $\varepsilon\sim(0,1)$, $\varepsilon\sim(0,5)$, $\varepsilon\sim(0,10)$, $\varepsilon\sim(0,20)$, dan $\varepsilon\sim(0,30)$.

Tabel 7. Perbandingan Pendugaan Data tidak lengkap dari Data Bangkitan

% Data Tidak Lengkap	Sigma^2 (^{2})	MAPE	
		CONNECTED	CONNECTED EM- AMMI
5%	1	1.268	1.311
	5	1.3292	1.3636
	10	1.4725	1.4614
	20	1.5009	1.4714
	30	1.5308	1.4981
10%	1	1.555	1.528
	5	3.2992	2.7587
	10	3.4378	2.8632
	20	3.5115	3.1636
	30	3.5848	3.3666
20%	1	3.6209	3.5136
	5	3.6556	3.6188
	10	5.6676	5.6968

	20	6.6196	6.4577
	30	6.6785	6.4253
30%	1	6.7905	6.5387
	5	6.8436	6.6974
	10	6.8823	6.6993
	20	12.9824	12.6782
	30	13.3856	12.9261
40%	1	13.7749	13.3326
	5	14.0591	13.4968
	10	14.332	13.9338
	20	14.6253	14.3871
	30	20.7163	20.4327
50%	1	21.8649	21.6013
	5	22.8944	22.1557
	10	23.0911	22.612
	20	23.1065	22.7325
	30	23.6626	23.2874



Gambar 3 Perbandingan Metode Pendugaan Data tidak lengkap Untuk Data Bangkitan

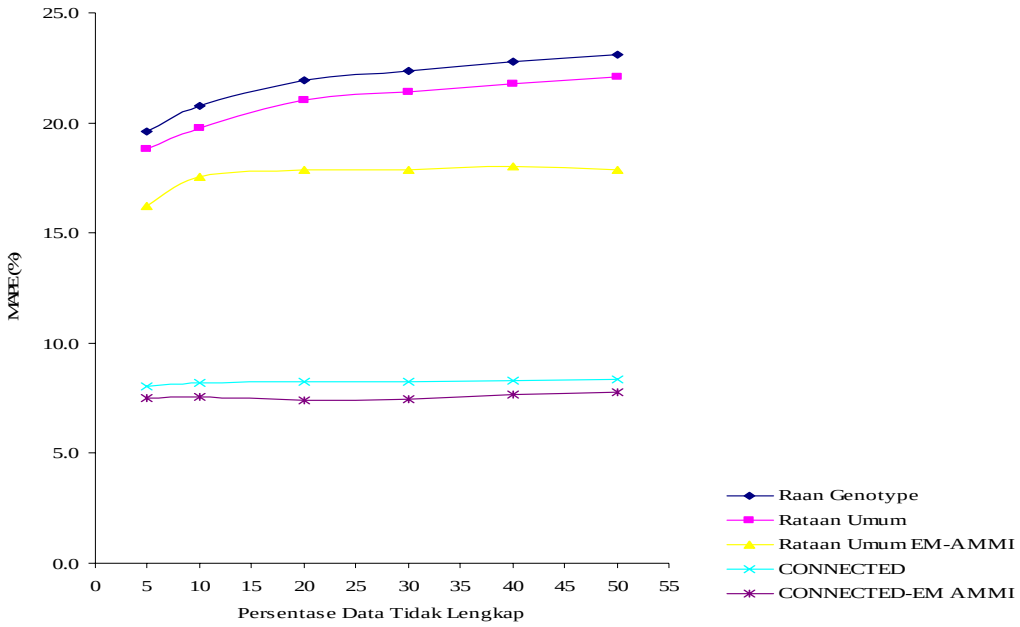
Gambar 3. meperlihakan bahwa semakin besar keragamana dari data maka ada kecenderungan kelima metode pendugaan meberikan nilai MAPE yang semakin besar.

Gambar di atas juga memberikan informasi bahwa dari kedua metode pendugaan data tidak lengkap. Metode Connected EM-AMMI memberikan pendugaan yang relatif paling akurat jika dibandingkan hanya dengan menggunakan metode Connected. \

Tabel 4.8. Perbandingan Pendugaan Data tidak lengkap dari Data Daya Hasil Jagung

% Data Tidak Lengkap	MAPE				
	RATA-RATA GENOTYPE	RATA-RATA UMUM	EM-AMMI	CONNECTED	CONNECTED EM- AMMI
5%	19.6224	18.8177	16.2421	8.0427	7.5159
10%	20.7610	19.7802	17.5465	8.1716	7.5395
20%	21.9265	21.0552	17.8646	8.2429	7.4140
30%	22.3831	21.3948	17.8404	8.2584	7.4323
40%	22.7779	21.7634	18.0011	8.3186	7.6707
50%	23.1133	22.0911	17.8909	8.3360	7.7630

.



Gambar 4. Perbandingan Metode Pendugaan Data Tidak Lengkap Menggunakan Simulasi Data Daya Hasil Jagung

Dari Gambar 4. di atas terlihat bahwa metode Connected dan Connected-EM AMMI memberikan nilai MAPE paling rendah dan metode Connected-EM AMMI lebih baik dibandingkan metode Connected saja.

5. KESIMPULAN

Dari hasil yang diperoleh pada sub bab sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Pendugaan data tidak lengkap untuk ragam populasi yang semakin besar memberikan nilai MAPE yang semakin besar pula. Ini mengindikasikan bahwa semakin besar keragaman populasi metode pendugaan setiap metode penduganan memberikan hasil yang kurang efisien.
2. Metode pendugaan data tidak lengkap yang paling efisien baik data hasil bangkitan ataupun data asli adalah metode Connected EM-AMMI. Metode Connected dapat memperbaiki efisiensi metode EM-AMMI dengan penetapan nilai awal yang lebih baik.
3. Semakin banyak jumlah data yang tidak lengkap mengakibatkan tingkat akurasi pendugaan semakin menurun. Banyaknya data yang tidak lengkap, yang masih dapat diduga dengan akurasi pendugaan cukup tinggi baik dengan menggunakan metode connected data maupun Connected EM-AMMI adalah maksimal 50%.

6. UCAPAN TERIMAKASIH

Kami Ucapan Terimakaasih Kepada Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI). Tulisan ini bagian dari Hibah Penelitian Tim Pascasarjana yang didanai oleh Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Nomor : 266/13.11/PL/2008 Tanggal : 02 April 2008.

7. DAFTAR PUSTAKA

Crossa, J. 1990. Statistical Analysis of Multilocation Trials. *Advances In Agronomy*. 44: 55-85.

Johnson, R. A. and D.W. Winchern. 2002. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 5th ed. London: Prentice Hall International, Inc.

Mattjik, A.A. 2000. Pendugaan Data tidak lengkap dengan Algoritma EM-AMMI pada Percobaan Lokasi Ganda. *Forum Statistika dan Komputasi, Vol. 5 No. 1.*

Mattjik, A.A., dan I.M. Sumertajaya. 2002. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab*. Bogor: IPB Press.

Makridakis, S., S.C. Wheelwright, V.E. McGee. 1983. *Forecasting: Methods and Applications*. 2nd ed. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Montgomery, D.C. 1991. *Design and Analysis of Experiments*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Searle, S.R. 1987. *Linear Models for Unbalance Data*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

8. LAMPIRAN

Rataan Data Asli Daya Hasil Jagung

LOKASI	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
L2	7.59	6.33	6.10	6.49	7.24	7.44	6.92	6.37	7.58	6.68	7.06	7.14
L3	10.19	10.16	11.81	13.10	13.13	11.98	10.53	10.90	11.65	10.25	10.38	10.46
L4	7.35	8.97	8.74	8.10	7.91	7.89	6.81	7.17	9.14	8.39	7.57	8.39
L5	9.17	9.47	9.64	10.71	9.56	9.78	8.22	9.23	9.20	8.68	9.86	8.53
L6	8.01	9.58	7.67	8.27	8.41	8.30	7.33	7.34	8.70	9.56	7.76	8.85
L7	7.59	9.10	7.55	9.17	8.73	7.47	8.93	7.94	8.58	6.39	8.89	8.63
L8	7.78	7.79	8.85	10.43	9.36	9.04	9.55	8.80	9.19	8.30	9.11	8.79
L9	9.61	10.62	10.71	11.53	11.46	11.40	12.04	12.16	10.21	10.41	10.41	9.91
L10	9.18	8.53	8.95	10.50	9.70	10.36	10.15	9.84	9.78	8.02	9.89	9.14
L11	10.25	9.44	10.28	12.20	11.09	10.94	9.66	11.05	10.67	10.72	9.91	10.93
L13	7.50	7.76	8.08	9.33	7.65	8.31	6.92	7.23	6.98	6.59	8.74	6.92
L14	11.68	11.36	12.47	12.96	11.70	11.71	11.96	12.53	11.92	10.99	10.57	11.46
L15	10.76	9.44	9.35	10.08	10.94	10.75	10.30	10.20	10.61	10.76	10.47	10.16
L16	7.93	7.83	7.96	9.01	7.38	8.13	6.91	7.80	7.44	6.72	7.59	7.10
L17	13.23	12.52	14.15	15.05	13.07	13.34	13.06	12.83	12.67	11.85	12.67	13.07
L18	4.37	5.41	4.63	5.08	4.84	5.24	4.50	5.17	4.68	4.68	4.42	5.28

Program Metode Connected EM-AMMI

```
option nodate ps=120 ls=120;
Data EMAMMI;
Do i=13 To 180 By 1;
Output;
End;
PROC  SURVEYSELECT DATA=EMAMMI
      METHOD=SRS n=10
```

```
                rep=10
                OUT=SAMPLEREP;
run;

data tidak lengkap;
set samplerep;
nk=12;
bagi=(i/nk);
sisa=mod(i,nk);
baris=int(bagi)+1;
if sisa=0 then do; kolom=nk; baris=baris-1; end; else kolom=sisa;
drop sisa bagi;
run;

PROC IML;
load _all_;
use hilang;
read all;
b=(baris);
k=(kolom);
bk=(b||k);
n=10;
ul=10;
no=(1:n)`;
ulangan=(1:ul)`;
asli=repeat(0,n,1);
con=repeat(0,n,1);
mapec=repeat(0,ul,1);
mapem=repeat(0,ul,1);
em=repeat(0,n,1);

MEG={Matrik Data};

/*connected AMMI*/

sumasli=repeat(0,n,1);
sumcon=repeat(0,n,1);
sumem=repeat(0,n,1);
do i=1 to ul;
                        program lengkap hubungi Penulis

/*EM-AMMI*/
  meg2=meg1;
  em0=con;

DO UNTIL (Y<0.0001);
        RG=MEG2[:,]; RE=MEG2[,:]; R=MEG2[:];
```

```
        MRG=REPEAT(RG,16,1); MRE=REPEAT(RE,1,12);
MR=REPEAT(R,16,12);
        MPEG=MEG2-MRE-MRG+MR;
        CALL SVD(U,Q,V,MPEG);
        F=Q##2; sumF=F[+,];
        G=(F/SUMF)*100;
   s=0;
        do p=1 to 12;
     s=s+g[p,];
     A=p;
     if s>80 then p=13;
```

program lengkap hubungi Penulis

```
PRINT no rataASLI rataCON rataEM;
print ulangan mapec mapem;
print 'Rata-rata MAPE';
print rmapec rmapem;
QUIT;
```

PENDEKATAN METODE PEMULUSAN KERNEL PADA PENDUGAAN AREA KECIL (*SMALL AREA ESTIMATION*)

Indahwati[1], Kusman Sadik[1], Ratih Nurmasari[2]

[1]Dosen Departemen Statistika FMIPA IPB
[2]Mahasiswa S1 Departemen Statistika FMIPA IPB

ABSTRAK

Pendugaan area kecil merupakan pendugaan parameter suatu area yang lebih kecil dengan memanfaatkan informasi dari luar area, dari dalam area itu sendiri, dan dari luar survei. Berdasarkan peubah penjelas yang digunakan, terdapat dua model area kecil, yaitu *basic area level model* dan *basic unit level model*, dimana kedua model tersebut mengasumsikan bahwa penduga langsung memiliki hubungan yang linier dengan peubah penjelas. Ada kalanya asumsi tersebut tidak dapat dipenuhi dan salah satu solusinya adalah dengan menggunakan pendekatan nonparametrik, seperti pemulusan Kernel. Simulasi yang telah dilakukan menunjukkan bahwa pemulusan Kernel dapat mereduksi bias pendugaan pada pola hubungan yang tidak linier dengan berbagai jumlah area. Nilai *Mean Square Error* (MSE) pendugaan area kecil dengan menggunakan pemulusan Kernel pada pola hubungan yang tidak linier relatif lebih kecil dibandingkan metode parametrik yang menggunakan model Fay-Herriot. MSE pada pemulusan Kernel memiliki kecenderungan semakin kecil jika jumlah area semakin banyak.

Kata Kunci : nonparametrik, pendugaan area kecil, pemulusan Kernel

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Metode pendugaan area kecil dapat dilakukan dengan cara memodelkan penduga langsung dengan peubah penjelas. Berdasarkan peubah penjelas yang tersedia, terdapat dua model area kecil, yaitu *basic area level model* dan *basic unit level model*. Kedua model tersebut mengasumsikan bahwa penduga langsung memiliki hubungan yang linier dengan peubah penjelas (Mukhopadhyay & Maiti 2004). Salah satu solusi untuk mengatasi masalah asumsi tersebut adalah dengan menggunakan pendekatan nonparametrik.

Beberapa peneliti telah mencoba mengkaji pendekatan nonparametrik pada pendugaan area kecil, diantaranya Pushpal K. Mukhopadhyay dan Tapabrata Maiti yang telah mengkaji metode Kernel pada tahun 2004 serta *local polynomial*

regression pada tahun 2006, Opsomer *et al* juga telah melakukan pengkajian mengenai metode *penalized spline* pada pendugaan area kecil pada tahun 2004.

Metode nonparametrik yang digunakan pada penelitian ini adalah metode pemulusan Kernel. Mukhopadhyay dan Maiti (2004) telah mengkaji metode ini untuk area sebanyak 100, sedangkan penelitian ini juga akan mengkaji penerapan metode Kernel pada jumlah area yang berbeda-beda.

Tujuan

1. Mengkaji penerapan salah satu metode nonparametrik, yaitu pemulusan Kernel, pada pendugaan area kecil.
2. Mengetahui keefektifan pendugaan area kecil dengan metode pemulusan Kernel pada pola hubungan yang linier dan tak linier antara penduga langsung dengan peubah penjelas.
3. Mengetahui keefektifan pendugaan area kecil dengan metode pemulusan Kernel pada jumlah area yang berbeda-beda.

TINJAUAN PUSTAKA

Pendugaan Area Kecil

Area kecil atau *small area* diartikan sebagai bagian dari populasi, baik berdasarkan area geografi maupun sosial-demografi. Suatu daerah disebut area kecil jika di dalam daerah tersebut, contoh yang terambil kurang banyak untuk mendapatkan nilai penduga langsung dengan presisi yang memadai. Pendugaan area kecil merupakan pendugaan parameter suatu area yang lebih kecil dengan memanfaatkan informasi dari luar area, dari dalam area itu sendiri, dan dari luar survei (Rao 2003).

Dua jenis model eksplisit pada pendugaan area kecil adalah *basic area level model* dan *basic unit level model* (Rao 2003).

1. *Basic area level model* mengasumsikan bahwa peubah penjelas yang tersedia hanya ada untuk level area tertentu. Misalkan tersedia vektor peubah penjelas $\boldsymbol{x_i} = (\boldsymbol{x_{1i}}, \boldsymbol{x_{2i}}, \ldots, \boldsymbol{x_{pi}})^T$, dan parameter θ_i yang akan diduga diasumsikan memiliki hubungan dengan x_i. Peubah penjelas tersebut dimodelkan:

$$\theta_i = \mathbf{x_i}^T \boldsymbol{\beta} + u_i \quad \text{.....(1)}$$

dengan i = 1, 2, ... , m dan $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, dimana m merupakan banyaknya area kecil, $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor koefisien regresi, dan u_i merupakan pengaruh acak pada area ke-i. Parameter θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa penduga langsung pada area ke-i (y_i) telah tersedia, yaitu:

$$y_i = \theta_i + \varepsilon_i \quad \text{.....(2)}$$

dimana i = 1, 2, ... , m, ε_i merupakan *sampling error* dan diasumsikan $\varepsilon_i \sim N(0, D_i)$. Model gabungan dari persamaan (1) dan (2) adalah:

$$y_i = \mathbf{x_i}^T \boldsymbol{\beta} + u_i + \varepsilon_i \quad \text{.....(3)}$$

dimana i = 1, 2, ... , m.

2. *Basic unit level model* merupakan model yang data-data pendukungnya bersesuaian secara individu dengan data respon, misal $\boldsymbol{x_{ij}} = (\boldsymbol{x_{ij1}}, \boldsymbol{x_{ij2}}, \ldots, \boldsymbol{x_{ijp}})^T$, sehingga dapat dibuat suatu model regresi tersarang:

$$y_{ij} = \mathbf{x_{ij}}^T \boldsymbol{\beta} + u_i + \varepsilon_i \quad \text{.....(4)}$$

dimana i = 1, 2, ..., m , j = 1, ..., n_i, dengan n_i merupakan banyaknya contoh yang tersurvei pada area ke-i, $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, dan $\varepsilon_i \sim N(0, D_i)$.

Pemulusan Kernel

Secara sederhana, model regresi nonparametrik adalah:

$$y = m(x) + \varepsilon \quad \text{.....(5)}$$

dimana y merupakan peubah respon yang diamati, $m(x)$ merupakan fungsi regresi yang ingin diduga dan tidak dapat didekati dengan model parametrik, serta ε merupakan eror pengamatan yang tidak dapat dijelaskan oleh fungsi regresi $m(x)$.

Beberapa metode pemulusan yang biasa digunakan untuk menduga $m(x)$ pada persamaan (5) adalah *local polynomial smoothers*, *regression splines*, *smoothing splines*, *penalized splines*, dan *Kernel smoothers*.

Salah satu ide untuk menduga fungsi *m(x)* adalah dengan menggunakan *local averaging procedure* atau rata-rata lokal terboboti sebagai fungsi pemulus, yaitu:

$$\hat{m_h}(x_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \hat{W}_{hi}(x) y_i \quad \text{.....(6)}$$

dimana $\hat{m_h}(x_i)$ merupakan dugaan dari fungsi regresi pada titik pengamatan ke-i, *m* merupakan banyaknya pengamatan, y_i merupakan peubah respon pada pengamatan ke-i, dan $\hat{W}_{hi}(x)$ merupakan fungsi pembobot pada daerah di sekitar x_i dengan lebar jendela *h* (Hardle 1994).

Lebar jendela (*h*) merupakan parameter pemulusan yang menentukan kemulusan kurva yang dihasilkan. Beberapa cara yang dapat digunakan untuk menentukan *h* antara lain *least square cross validation*, *likelihood cross validation*, dan *generalized cross validation*. Nilai *h* juga bisa ditentukan secara subjektif atau berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya (Silverman 1986). Menurut Hardle (1994), lebar jendela optimum yang menghasilkan *asymptotic mean square error* (AMSE) minimum adalah $h \cong m^{-1/5}$.

Fungsi $\hat{W}_{hi}(x)$ yang digunakan pada pemulusan Kernel (*Kernel smoothers*):

$$\hat{W}_{hi}(x) = \frac{K_h(x - x_i)}{\hat{f}_h(x)} \quad \text{..... (7)}$$

dimana $\hat{f_h}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i)$ dan K(.) merupakan fungsi Kernel yang dapat dinyatakan sebagai $K_h(u) = \frac{1}{h}K(\frac{u}{h})$. Fungsi K(.) memiliki sifat simetris, kontinu dan terhingga, serta $\int K(x)dx = 1$. Beberapa fungsi Kernel yang umum digunakan adalah *Box*, *Parzen*, *Triangle*, dan *Gaussian* (Normal).

Pemulusan Kernel pada Pendugaan Area Kecil

Jika hubungan antara penduga langsung dengan variabel penjelas tidak linier, maka persamaan (1) dapat didekati dengan sebuah fungsi yang lebih umum, yaitu:

$$\theta_i = m(x_i) + u_i \quad \text{.....(8)}$$

dimana:

i = 1, 2, ..., m, sedangkan m merupakan banyaknya area,

$m(x_i)$ = fungsi pemulusan yang menggambarkan hubungan yang sesungguhnya antara x dan y pada area ke-i,

θ_i = parameter pada area ke-i,

u_i = pengaruh acak dari area ke-i dan $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$.

Fungsi $m(x_i)$ diduga dengan persamaan Nadaraya-Watson Kernel, yaitu:

$$\hat{m}_h(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i) y_i}{\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i)} \quad \text{.....(9)}$$

Dugaan parameter pada area kecil ke-i, $\hat{\theta}_i$, adalah:

$$\hat{\theta}_i = E(\theta_i \mid y_i) = \gamma_i y_i + (1 - \gamma_i)\hat{m}_h(x_i) \quad \text{.....(10)}$$

dimana $\gamma_i = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + D_i}$, dan σ_u^2 dapat diduga dengan metode momen, yaitu:

$\hat{\sigma}_u^2 = \max(0, \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} W_{hi}(x)\{y_i - \hat{m}(x)\}^2 - D)$ dan D_i diasumsikan konstan untuk semua area.

Pendugaan Area Kecil dengan Model Fay-Herriot

Model yang digunakan oleh Fay dan Herriot (1979) adalah sebagai berikut:

$$y_i = \theta_i + \varepsilon_i = \mathbf{x_i}^T \boldsymbol{\beta} + u_i + \varepsilon_i \quad \text{.....(11)}$$

dengan i = 1, 2, ... , m dan $u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$, dimana m merupakan banyaknya area kecil, y_i merupakan penduga langsung pada area ke-i, θ_i merupakan parameter area kecil yang menjadi perhatian dan akan diduga, $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor koefisien regresi, u_i merupakan pengaruh acak pada area ke-i, ε_i merupakan *sampling error* dan diasumsikan $\varepsilon_i \sim N(0, D_i)$. Nilai $\boldsymbol{\beta}$ dapat diduga dengan menggunakan *weighted least square*, sedangkan σ_u^2 diduga dengan *maximum likelihood* atau *restricted maximum likelihood*. $\hat{\theta}_i$ diperoleh dengan cara menghitung rata-rata terboboti antara penduga langsung, y_i, dan penduga sintetik, $x_i^T \hat{\beta}$, yaitu:

$$\hat{\theta}_i = \gamma_i y_i + (1 - \gamma_i) x^T \hat{\beta} \quad \text{.....(12)}$$

dimana $\gamma_i = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + D_i}$.

DATA DAN METODE

Data

Peubah penjelas diasumsikan hanya tersedia untuk level area tertentu sehingga digunakan *basic area level model*. Data yang digunakan adalah data simulasi untuk beberapa area kecil dengan satu peubah penjelas. Jumlah area kecil (m)

yang dibangkitkan adalah m=100, m=50, dan m=25. Pola data yang dibangkitkan juga berbeda-beda, yaitu linier dan tidak linier (kubik dan logaritma natural).

Metode

1. Membangkitkan data untuk setiap pola hubungan dan banyaknya area (m) tertentu dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. membangkitkan peubah penjelas (x_i) sebanyak m, dimana x_i ~ uniform(0,1)
   b. memetakan x_i melalui fungsi matematis tertentu untuk memperoleh $m(x_i)$
   c. membangkitkan pengaruh acak area (u_i) sebanyak m, dimana u_i ~N(0,0.04)
   d. menghitung parameter area kecil θ_i, dimana $\theta_i = m(x_i)+u_i$
   e. membangkitkan eror (ε_i) sebanyak m, dimana sepertiga area pertama ε_i ~N(0,0.01), sepertiga area kedua ε_i ~N(0,0.04), dan sepertiga area terakhir ε_i ~N(0,0.09)
   f. menghitung penduga langsung (y_i), dimana $y_i = \theta_i + \varepsilon_i$.

   Langkah a-b dilakukan sebanyak satu kali karena x_i diasumsikan tetap (*fixed*). Langkah c-f diulang sebanyak R kali, dimana R yang digunakan adalah 100.
2. Menduga parameter area kecil dengan menggunakan dua pendekatan, yaitu pendekatan nonparametrik dengan menggunakan pemulusan Kernel dan pendekatan parametrik yang menggunakan model Fay-Herriot.
3. Mengukur performa simulasi pendugaan yang dilakukan dengan menghitung:

- *Absolute Relative Bias* (ARB): $$ARB(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{R}\left|\frac{\sum_{j=1}^{R}(\hat{\theta}_{ij} - \theta_{ij})}{\theta_{ij}}\right| \quad \text{.....(13)}$$
- *Mean Square Error* (MSE): $$MSE(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R}(\hat{\theta}_{ij} - \theta_{ij})^2 \quad \text{.....(14)}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembangkitan Data dan Pendugaan Parameter Area Kecil

Fungsi $m(x_i)$ yang digunakan untuk memetakan x_i adalah sebagai berikut:

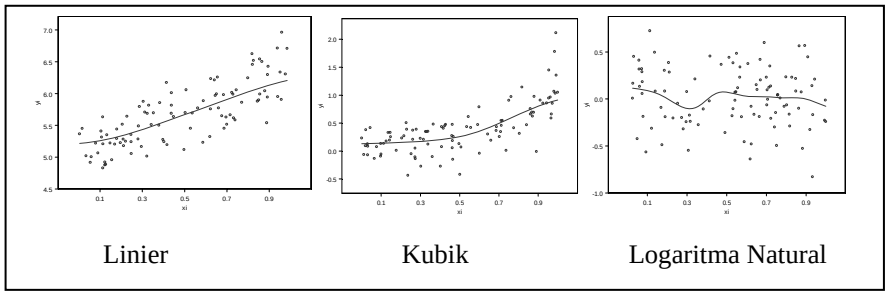
1. Linier: $m(x_i) = 5 + 1.5x_i$
2. Kubik: $m(x_i) = 0.1 + 0.2x_i + 0.3x_i^2 + 0.4x_i^3$

3. Logaritma natural: $m(x_i) = -0.005\ln(x_i)$

Fungsi pemulus yang digunakan adalah fungsi Kernel *Gaussian* karena fungsi tersebut memanfaatkan semua titik pengamatan dengan bobot yang berbeda-beda untuk memperoleh penduga $m(x_i)$. Bobot yang diberikan fungsi Kernel *Gaussian* semakin kecil jika titik pengamatan semakin jauh dari titik yang akan diduga. Persamaan matematis fungsi Kernel *Gaussian* adalah sebagai berikut:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2), -\infty < x < \infty \quad \text{.....(15)}$$

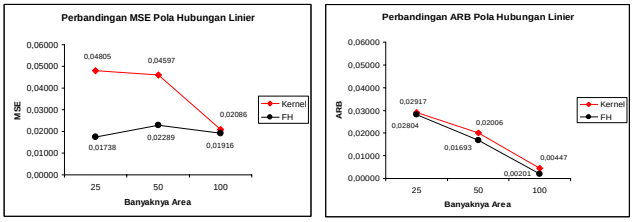
Lebar jendela yang digunakan pada penelitian ini mengikuti formula dari Hardle (1994), yaitu sebesar $m^{-1/5}$. Untuk jumlah area sebanyak 100, 50, dan 25, lebar jendela yang digunakan masing-masing adalah 0.40, 0.46, dan 0.53.



Linier Kubik Logaritma Natural

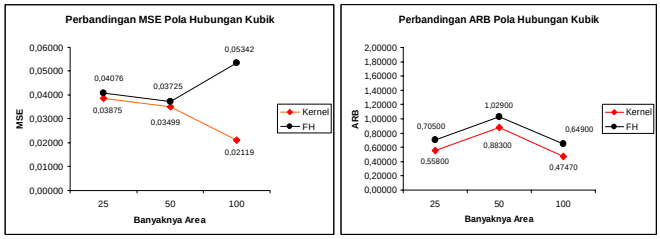
Proporsi keragaman area kecil terhadap keragaman total (γ_i) adalah sebesar 0.8 untuk sepertiga area pertama, 0.5 untuk sepertiga area kedua, dan 0.308 untuk sepertiga area terakhir. Nilai γ_i menunjukkan besarnya kontribusi yang diberikan oleh penduga langsung terhadap dugaan parameter area kecil, sedangkan 1-γ_i menunjukkan besarnya kontribusi penduga sintetik. Penduga sintetik dari pemulusan Kernel berupa dugaan dari pemulusan Kernel ($m(\hat{x}_i)$) dari persamaan Nadaraya-Watson Kernel. Sedangkan pada model Fay-Herriot, penduga sintetik diperoleh dari $x^T \hat{\beta}$ dimana β diduga dengan *weighted least square*.

Perbandingan Metode Kernel dengan Metode Parametrik pada Pola Linier



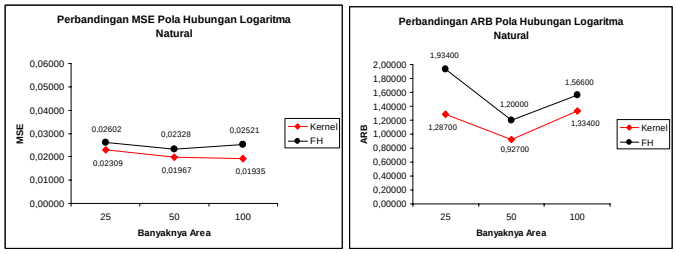
Pemulusan Kernel menghasilkan MSE dan ARB yang lebih besar daripada model Fay-Herriot. Selisih MSE pada m=100 sangat kecil, mengindikasikan bahwa pemulusan Kernel pada pola hubungan yang linier dengan jumlah area yang besar akan menghasilkan pendugaan yang hampir sama baiknya dengan model Fay-Herriot. Pada jumlah area yang semakin sedikit, model Fay-Herriot menghasilkan pendugaan yang jauh lebih baik dibandingkan pemulusan Kernel. Pendugaan dengan metode pemulusan Kernel menghasilkan MSE yang semakin kecil jika jumlah area semakin banyak.

Perbandingan Metode Kernel dengan Metode Parametrik pada Pola Kubik



MSE dan ARB pemulusan Kernel lebih kecil daripada model Fay-Herriot. Pada jumlah area sebesar 25 dan 50 selisih MSE tidak terlalu jauh, namun pada saat jumlah area sebesar 100 selisih MSE keduanya menjadi sangat besar. Hal ini mungkin disebabkan karena pola hubungan kubik hampir menyerupai pola hubungan linier pada saat jumlah area relatif sedikit. Secara visual, pola hubungan kubik pada saat m=50 dan m=25 dapat dlihat pada Lampiran 1. Nilai MSE dari pemulusan Kernel semakin kecil jika jumlah area semakin besar.

Perbandingan Metode Kernel dengan Metode Parametrik pada Pola Logaritma Natural



Pemulusan Kernel menghasilkan MSE dan ARB yang lebih kecil dibandingkan model Fay-Herriot. MSE dari metode Kernel semakin kecil jika jumlah area semakin besar. Selisih MSE dari kedua metode hampir sama dan relatif cukup

kecil pada semua jumlah area. Selisih ARB antara pemulusan Kernel dan model Fay-Herriot cukup besar pada berbagai jumlah area.

KESIMPULAN

Pemulusan Kernel sebagai salah satu pendekatan nonparametrik dapat diterapkan pada pendugaan area kecil. Pendugaan area kecil dengan menggunakan pemulusan Kernel lebih baik dibandingkan metode parametrik pada pola hubungan yang tidak linier, sedangkan pada pola hubungan yang linier, metode parametrik tetap lebih baik dibandingkan metode Kernel. MSE dari metode pemulusan Kernel cenderung semakin kecil jika jumlah area semakin banyak.

SARAN

Beberapa hal yang dapat dikaji lebih lanjut antara lain:

1. Peubah penjelas yang digunakan lebih dari satu.
2. Lebar jendela pada pemulusan Kernel dipilih dengan menggunakan metode-metode tertentu.
3. Menggunakan proporsi keragaman area kecil yang lebih beragam.
4. Ragam pengaruh acak area kecil (σ_u^2) dan ragam *sampling error* (D_i) diduga dari data.

DAFTAR PUSTAKA

Fay RE, Herriot RA. 1979. *Estimation of Income for Small Places: An Application of James-Stein Procedures to Census Data*. Journal of the American Statistical Associations: 269-277.

Hardle W. 1994. *Applied Nonparametric Regression*. http://www.quantlet.com. [25 April 2008].

Mukhopadhyay P, Maiti T. 2004. *Two Stage Non-Parametric Approach for Small Areas Estimation*. Proceedings of ASA Section on Survey Research Methods: 4058-4065.

Mukhopadhyay P, Maiti T. 2006. *Local Polynomial Regression for Small Area Estimation*. Proceedings of ASA Section on Survey Research Methods: 3447-3452.

Opsomer et al. 2004. *Nonparametric Small Area Estimation Using Penalized Spline Regression.* Proceedings of ASA Section on Survey Research Methods: 1- 8.

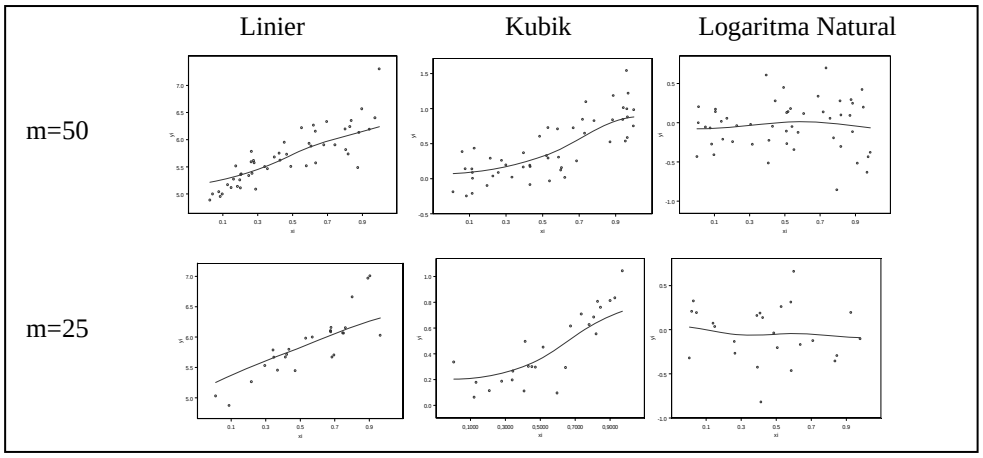
Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. New Jersey: John Willey &Sons, Inc.

Silverman BW. 1986**.** *Density Estimation For Statistics and Data Analysis.* London: Chapman and Hall.

Wu H, Zhang JT. 2006. *Nonparametric Regression Methods for Longitudinal Data Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Kurva hasil pemulusan Kernel.



Lampiran 2 Tabel perbandingan MSE.

Banyaknya Area	Statistik	Linier		Kubik		Logaritma Natural	
		Kernel	FH	Kernel	FH	Kernel	FH
25	Rata-rata	0,04805	0,01738	0,03875	0,04076	0,02309	0,02602
	St. deviasi	0,03249	0,01371	0,00869	0,03353	0,00489	0,00652
50	Rata-rata	0,04597	0,02289	0,03499	0,03725	0,01967	0,02328
	St. deviasi	0,04805	0,01112	0,03119	0,03002	0,00933	0,01143
100	Rata-rata	0,02086	0,01916	0,02119	0,05342	0,01935	0,02521
	St. deviasi	0,01056	0,00867	0,01160	0,02684	0,00928	0,00990

Lampiran 3 Tabel perbandingan ARB.

Banyaknya Area	Statistik	Linier		Kubik		Logaritma Natural	
		Kernel	FH	Kernel	FH	Kernel	FH
25	Rata-rata	0,02917	0,02804	0,55800	0,70500	1,28700	1,93400
	St. deviasi	0,02168	0,01854	0,76900	0,80600	2,45400	3,82300
50	Rata-rata	0,02006	0,01693	0,88300	1,02900	0,92700	1,20000
	St. deviasi	0,01656	0,02025	1,02800	4,29600	1,32600	2,03000
100	Rata-rata	0,00447	0,00201	0,47470	0,64900	1,33400	1,56600
	St. deviasi	0,00415	0,00171	0,71100	1,13600	3,80900	1,91500

PENERAPAN METODE PEMULUSAN KERNEL PADA PENDUGAAN AREA KECIL
(Studi Kasus Pendugaan Pengeluaran Per Kapita di Kota Bogor Tahun 2005)

Indahwati[1], Utami Dyah Syafitri[1], Renita Sukma Mayasari[2]

[1]Dosen Departemen Statistika FMIPA IPB
[2]Mahasiswa Departemen Statistika FMIPA IPB

Abstrak

Pada pendugaan area kecil umumnya digunakan pemodelan parametrik untuk menghubungkan statistik area kecil dengan peubah-peubah pendukungnya. Namun pemodelan parametrik kurang fleksibel untuk pola hubungan yang tidak linier. Dalam penelitian ini diterapkan pemodelan nonparametrik yaitu pemulusan Kernel untuk memodelkan hubungan antara statistik area kecil dengan peubah pendukungnya. Penerapan metode pemulusan Kernel terhadap data riil dalam penelitian ini menunjukkan tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan hasil pendugaan langsung.

Kata Kunci: Pendugaan area kecil, pendugaan langsung, pemulusan Kernel, RRMSE

PENDAHULUAN

Saat ini statistik area kecil *(small area statistics)* sangat diminati dalam berbagai bidang. Berbagai metode pendugaan area kecil (*small area estimation*) telah dikembangkan khususnya menyangkut metode yang berbasis model (*model-based area estimation*). Istilah *small area* menunjukkan suatu subpopulasi dimana pendugaan langsungnya tidak dapat menghasilkan presisi yang cukup. Pendugaan secara langsung pada area kecil akan menghasilkan nilai ragam yang besar jika contoh yang diambil berasal dari data survey yang dirancang untuk skala besar/nasional. Salah satu solusi yang digunakan adalah melakukan pendugaan tidak langsung dengan cara menambahkan peubah-peubah pendukung dalam menduga parameter.

Pada pendugaan area kecil umumnya digunakan pemodelan parametrik untuk menghubungkan statistik area kecil dengan peubah-peubah pendukungnya. Namun pemodelan parametrik kurang fleksibel untuk pola hubungan antara statistik area kecil dengan peubah pendukung yang tidak linier. Beberapa peneliti, diantaranya Mukhopadhyay & Maiti (2004, 2006), juga Opsomer *et al* (2004) telah mencoba mengkaji pemodelan nonparametrik untuk pendugaan area kecil. Dalam penelitian ini

diterapkan salah satu pemodelan nonparametrik yaitu pemulusan Kernel untuk menduga pengeluaran per kapita kota Bogor tahun 2005 dan membandingkannya dengan hasil pendugaan langsung.

TINJAUAN PUSTAKA

Pendugaan Area Kecil

Istilah area kecil (*small area)* biasanya menandakan suatu area geografis kecil, seperti suatu daerah kabupaten/kota, kecamatan, maupun kelurahan/desa. Area kecil ini juga dapat diartikan sebagai bagian dari wilayah populasi *(small domain)* baik berdasarkan geografi, ekonomi, sosial budaya, ataupun yang lainnya (Rao 2003).

Model Area Kecil

Ada dua model dasar pendugaan area kecil yaitu *Basic area level model* dan *basic unit level model* (Rao 2003).

a. *Basic area level model* yaitu model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu, dan parameter yang akan diduga θ_i, diasumsikan mempunyai hubungan dengan x_i. Data pendukung tersebut digunakan untuk membangun model:

   $\theta_i = x_i^T \beta + b_i v_i$, i=1,..., n .....(1)

   Kesimpulan mengenai θ_i, dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung y_i telah tersedia yaitu :

   $y_i = \theta_i + e_i$, i=1, ..., n .....(2)

   Pada akhirnya model (1) dan (2) digabungkan dan menghasilkan model gabungan :

   $y_i = x_i^T \beta + b_i v_i + e_i$, i=1, ..., n

b. *Basic unit level model* yaitu suatu model dimana data-data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon sehingga dapat dibangun suatu model regresi tersarang :

   $y_{ij} = x_{ij}^T \beta + v_i + e_{ij}$, i=1, ..., n dan j=1, ..., N_i

Metode Pemulusan Kernel

Pemulusan Kernel adalah suatu teknik pemulusan dalam statistika nonparametrik untuk menduga kondisi yang diharapkan dari variabel acak. Mukhopadhyay dan Maiti (2004)

menjelaskan bahwa untuk mengurangi bias relatif yang besar dari statistik area kecil dengan peubah penjelasnya dan untuk mendapatkan penduga MSE yang lebih baik dapat dirumuskan sebagai :

$y_i = \theta_i + e_i$ .....(4) dan $\theta_i = m(x_i) + u_i$ .....(5)

dimana i = 1, 2, ..., n menunjukkan jumlah area kecil.

Untuk menduga $m(x_i)$ dapat menggunakan penduga kernel Nadaraya-Watson yaitu :

$\hat{m}_h = \frac{\sum_i K_h(x - x_i) y_i}{\sum_i K_h(x - x_i)}$ ……..…..(6) dimana $K_h(.)$ adalah fungsi Kernel dengan lebar jendela h

Berdasarkan persamaan di atas dapat diperlihatkan bahwa penduga terbaik dari nilai area kecil θ_i dengan σ_u^2 tidak diketahui, adalah :

$\hat{\theta}_i = \hat{\gamma}_i y_i + (1 - \hat{\gamma}_i)\hat{m}_h(x_i)$ .....(7) dengan $\hat{\gamma}_i = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_u^2 + D_i}$.

Penduga dari σ_u^2 dirumuskan dengan :

$\hat{\sigma}_u^2(x) = \max\left\{0, \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} W_{hi}(x)\{y_i - \hat{m}(x_i)\}^2 - D\right\}$ .....(8)

dengan $W_{hi}(x) = \frac{K_h(x - x_i)}{1/n\sum_i K_h(x - x_i)}$ ….....(9)

MSE dari $\hat{\theta}_i$ dapat diduga dari :

$mse\left(\hat{\theta}_i\right) = \frac{D \times \hat{\sigma}_u^2}{D + \hat{\sigma}_u^2} + (1 - \hat{\gamma})^2 mse\left[\hat{m}_h(x_i)\right] + 2D^2\left(\hat{\sigma}_u^2 + D\right)^{-3} mse\left(\hat{\sigma}_u^2\right)$.....(10)

Dalam penelitian ini digunakan pendekatan *jackknife* untuk menduga MSE.

Pendekatan *Jackknife*

Tahapan-tahapan untuk menghitung nilai MSE_J adalah sebagai berikut:

(a) hitung nilai M_{1i} dengan rumus:

$M_{1i} = g_{1i}(s_v^2) - \left(\frac{n-1}{n}\right)\sum_{u=1}^{m}\left[g_{1i}(s_{v(-u)}^2) - g_{1i}(s_v^2)\right]$

nilai $g_{1i}(s^2_{v(-u)})$ diperoleh dengan menghapus pengamatan ke-u pada himpunan data $g_{1i}(s_v^2)$ dan *u* = 1, 2, . . . ,n.

(b) hitung nilai M_{2i} dengan rumus:

$$M_{2i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sum_{u=1}^{m}\left[(\hat{\theta}_{i(-u)}) - (\hat{\theta}_i)\right]^2$$

dimana $\hat{\theta}_{i(-u)}$ diperoleh dengan menghapus pengamatan ke-u pada himpunan data $\hat{\theta}_i$

(c) hitung nilai MSE dengan rumus sebagai berikut:

$$MSE_J(\hat{\theta}_i) = M_{1i} + M_{2i}$$

DATA DAN METODE

Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data SUSENAS 2005 dengan informasi data berbasis rumah tangga serta PODES 2005 sebagai sumber data peubah pendukung.

Peubah respon yang diamati dan menjadi perhatian dalam penelitian ini adalah pengeluaran per kapita rumah tangga di kota Bogor. Peubah pendukung X yang diasumsikan mempengaruhi dan menggambarkan pengeluaran per kapita yaitu persentase jumlah surat miskin yang dikeluarkan desa.

III.2 Metode

Tahapan-tahapan pada penelitian ini adalah:

1. Menduga pengeluaran per kapita rumah tangga untuk masing-masing desa secara langsung (*direct estimation*) dan dengan metode pemulusan Kernel.
2. Menghitung MSE untuk masing-masing pendugaan.
3. Membandingkan nilai RRMSE pendugaan langsung dengan nilai RRMSE pendugaan pemulusan kernel dengan perhitungan RRMSE sebagai berikut :

$$RRMSE\left(\hat{\theta}_i\right) = \frac{\sqrt{MSE\left(\hat{\theta}_i\right)}}{\hat{\theta}_i} x100\,\%$$

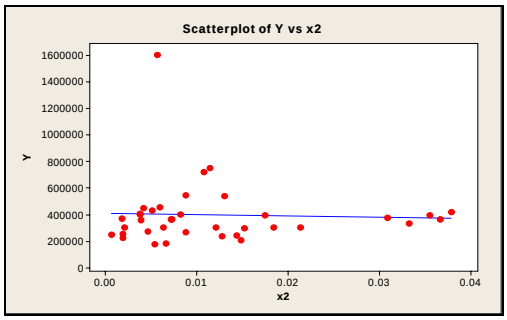
Software yang digunakan pada penelitian ini adalah *Minitab 14*, *S-Plus 2000*, *SAS 9.1*, dan *Microsoft Excel 2003*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Eksplorasi Data

Eksplorasi untuk peubah dilakukan dengan menggunakan *scatterplot* antara pengeluaran per kapita dengan persentase jumlah surat miskin yang dikeluarkan. *Scatterplot* yang

diperoleh menunjukkan bahwa pengeluaran per kapita berbanding terbalik dengan persentase jumlah surat miskin yang dikeluarkan.



Gambar 1. Scatterplot persentase jumlah surat miskin

Pendugaan Langsung

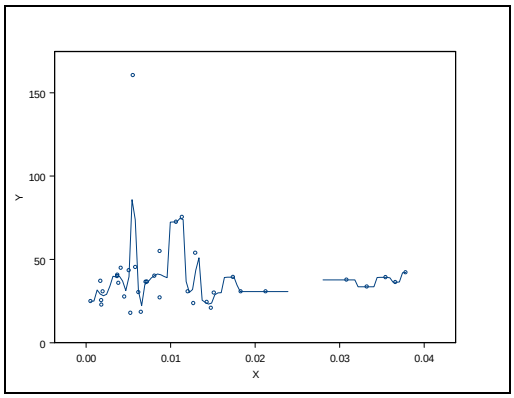
Hasil yang didapatkan dari pendugaan langsung pengeluaran per kapita yaitu besarnya pengeluaran per kapita anggota rumah tangga pada beberapa desa di Kota Bogor dan nilai simpangan bakunya.

Nilai ragam *sampling error* (D_i) yang menjadi perhatian diduga oleh s_i^2/n_i yang merupakan rasio antara ragam di dalam area dengan banyaknya contoh. Nilai D_i dapat dihitung dari hasil pendugaan langsung. Hasil pendugaan langsung dan nilai ragam *sampling error* (D_i) dapat dilihat di Lampiran 1.

Pendugaan langsung pengeluaran per kapita rumah tangga pada beberapa desa di kota Bogor dilakukan berdasarkan data survei dengan objek survei sebanyak 16 rumah tangga untuk masing-masing desa, kecuali untuk desa Kedung Halang sebanyak 15 rumah tangga dan desa Kedung Badak sebanyak 32 rumah tangga. Jumlah tersebut termasuk kecil untuk merepresentasikan seluruh rumah tangga pada masing-masing desa sehingga ragam hasil dugaannya besar.

Pendugaan dengan Pemulusan Kernel

Penelitian ini menggunakan fungsi Kernel Normal atau *Gaussian.* Hasil pemulusan yang diperoleh dari metode pemulusan Kernel sangat bergantung dari lebar jendela (*h*) yang digunakan. Lebar jendela untuk pemulusan Kenel ini diperoleh sebesar 0.0006. Hasil dari pemulusan dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Hasil pemulusan dengan metode Kernel

Pendugaan parameter area kecil ($\hat{\theta}_i$) dengan metode pemulusan Kernel diperoleh dari persamaan (7) dan hasilnya dapat dilihat pada Lampiran 2. Secara umum hasil pendugaan dengan pemulusan Kernel lebih besar dari pendugaan langsung, tetapi ada beberapa desa yang nilai penduga langsungnya lebih besar yaitu desa Batu Tulis, Empang, Bantar Jati, Tegal Gundil, Tanah Baru, Cibuluh, Kedung Halang, Pabaton, Kebon Kelapa, Gunung Batu, Cilendek Barat, Sindang Barang, Semplak, dan Kedung Badak. Hasil perbandingan pendugaan langsung dan tidak langsung pada pengeluaran per kapita beberapa desa beserta nilai MSE nya dapat dilihat pada Lampiran 3.

Evaluasi hasil pendugaan langsung dan tidak langsung dapat diketahui dengan membandingkan nilai RRMSE keduanya. Nilai RRMSE untuk metode pemulusan kernel lebih kecil daripada nilai RRMSE pendugaan langsung. Hal ini menunjukkan bahwa pendugaan tidak langsung dengan metode pemulusan kernel dapat memperbaiki hasil dari pendugaan langsung. Hasil tersebut juga memperlihatkan bahwa pendugaan area kecil (*small area estimation*) baik digunakan untuk pendugaan parameter pada level desa/kelurahan yang memiliki ukuran contoh kecil dengan nilai keragaman yang besar.

KESIMPULAN

Dalam penelitian ini pendugaan tidak langsung dengan menggunakan metode pemulusan Kernel dapat memperbaiki hasil dari pendugaan langsung seperti ditunjukkan oleh nilai RRMSE yang lebih kecil dibandingkan RRMSE pendugaan langsung, sehingga metode pemulusan Kernel mempunyai harapan untuk dikembangkan sebagai alternatif pendugaan area kecil untuk mengatasi masalah pola hubungan antara statistik area kecil dan peubah pendukung yang tidak linier.

DAFTAR PUSTAKA

Kurnia A, Notodiputro KA. 2006. Penerapan Metode *Jackknife* dalam Pendugaan Area Kecil. Forum Statistika dan Komputasi, April 2006, Vol. 11 No.1, p:12-16

Mukhopadhyay P, Maiti T. 2004. *Two Stage Non-Parametric Approach for Small Ares Estimation*. Proceedings of ASA Section on Survey Research Methods: 4058-4065.

Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. New Jersey: John Willey &Sons, Inc.

Syafitri UD. 2000. *Pemodelan Sebaran Paparan Gamma di Reaktor Serbaguna G.A Siwabessy dengan Fungsi Kepekatan Peluang Kernel* [Skripsi]. Bogor: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor

Yunita A. 2008. *Penerapan Metode Empirical Bayes pada Pendugaan Area Kecil (Studi Kasus Pendugaan Pengeluaran Per Kapita di Kota Bogor Tahun 2003)* [Skripsi]. Bogor: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor.

Lampiran 1 Pendugaan langsung pengeluaran per kapita (xRp. 10.000,00) beserta nilai D_i

Kode	Desa	n	pengeluaran per kapita	Stdev	Stderr	Di
3271010002	Pamoyanan	16	18.3632	4.454138	1.113535	1.239959
3271010004	Genteng	16	20.7841	6.933272	1.733318	3.0043913
3271010008	Harjasari	16	22.6618	3.542113	0.885528	0.7841601
3271010011	Cipaku	16	23.6735	8.557615	2.139404	4.5770481
3271010013	Batu Tulis	16	45.3536	34.85021	8.712552	75.908561
3271010015	Empang	16	40.6404	12.12642	3.031604	9.1906254
3271010016	Cikaret	16	35.7589	11.33135	2.832838	8.0249717
3271020002	Sindang Rasa	16	42.0702	14.53018	3.632546	13.195387
3271020004	Katulampa	16	17.8106	3.702897	0.925724	0.8569654
3271020005	Baranang Siang	16	30.673	16.93307	4.233268	17.920557
3271020006	Sukasari	16	30.6155	25.12068	6.28017	39.440539
3271030001	Bantar jati	16	30.673	16.93307	4.233268	17.920557
3271030002	Tegal Gundil	16	36.9802	23.64346	5.910865	34.938319
3271030003	Tanah Baru	16	44.84	19.00568	4.751421	22.575997
3271030004	Cimahpar	16	25.4101	10.61619	2.654047	7.0439659
3271030006	Cibuluh	16	39.8739	19.52166	4.880415	23.818445
3271030007	Kedung Halang	15	54.8728	38.10604	9.838937	96.804673
3271030008	Ciparigi	16	24.8663	11.76474	2.941185	8.6505714
3271040003	Babakan Pasar	16	36.5351	28.9822	7.245551	52.498005
3271040004	Tegal Lega	16	30.6965	14.54145	3.635363	13.215864
3271040007	Pabaton	16	160.4853	69.61809	17.40452	302.91739
3271040010	Kebon Kelapa	16	72.4294	31.02148	7.75537	60.14577
3271050001	Pasir Mulya	16	40.1122	14.17603	3.660236	23.342508
3271050003	Pasir Jaya	16	27.0578	8.877303	2.219326	4.9254071
3271050004	Gunung Batu	16	39.2413	8.116347	2.029087	4.1171932
3271050006	Menteng	16	36.4357	15.13379	3.783448	14.31448
3271050008	Cilendek Barat	16	39.3071	7.081146	1.770287	3.1339146
3271050009	Sindang Barang	16	75.3777	74.63168	18.65792	348.118
3271050012	Situgede	16	33.5765	12.79117	3.197793	10.225878
3271050014	Semplak	16	43.3293	16.01698	4.004244	16.033971
3271060001	Kedung Waringin	16	27.6136	10.51945	2.629861	6.9161704
3271060002	Kedung Jaya	16	36.2728	19.16673	4.791683	22.960226
3271060003	Kebon Pedes	16	30.1871	8.43248	2.10812	4.4441699
3271060005	Kedung Badak	32	53.7855	38.5595	6.816422	46.463603
3271060008	Cibadak	16	37.7285	27.52982	7.108168	44.211694
3271060009	Kayu Manis	16	29.9903	13.7546	3.43865	11.824317
3271060011	Kencana	16	24.2673	11.54668	2.88667	8.3328649

Lampiran 2 Pendugaan tidak langsung dengan metode pemulusan kernel (xRp. 10.000,00)

Kode	Desa	n	Y	$\hat{m}(x)$	Di	$\hat{\theta}_{\text{ker } nel}$
3271010002	Pamoyanan	16	18.363189	38.880219	1.239959	19.477771
3271010004	Genteng	16	20.784123	23.183967	3.0043913	21.077342
3271010008	Harjasari	16	22.661771	29.198563	0.7841601	22.890921
3271010011	Cipaku	16	23.673486	30.205144	4.5770481	24.816199
3271010013	Batu Tulis	16	45.353603	34.897128	75.908561	37.212184
3271010015	Empang	16	40.640446	34.006944	9.1906254	38.659462
3271010016	Cikaret	16	35.758905	39.859819	8.0249717	36.870345
3271020002	Sindang Rasa	16	42.070165	42.070159	13.195387	42.070163
3271020004	Katulampa	16	17.810639	31.026775	0.8569654	18.315308
3271020005	Baranang Siang	16	30.673045	30.673044	17.920557	30.673045
3271020006	Sukasari	16	30.615457	30.615456	39.440539	30.615457
3271030001	Bantar jati	16	30.673045	28.200591	17.920557	29.551488
3271030002	Tegal Gundil	16	36.980206	24.972623	34.938319	29.558052
3271030003	Tanah Baru	16	44.840001	39.391703	22.575997	42.054721
3271030004	Cimahpar	16	25.410061	31.641738	7.0439659	26.943324
3271030006	Cibuluh	16	39.873931	29.009613	23.818445	34.174558
3271030007	Kedung Halang	15	54.872782	39.789488	96.804673	42.539499
3271030008	Ciparigi	16	24.866323	24.866338	8.6505714	24.866327
3271040003	Babakan Pasar	16	36.535149	41.289778	52.498005	39.904458
3271040004	Tegal Lega	16	30.696505	36.753494	13.215864	32.996688
3271040007	Pabaton	16	160.48533	85.77190	302.91739	90.739857
3271040010	Kebon Kelapa	16	72.429353	72.426856	60.14577	72.427515
3271050001	Pasir Mulya	16	40.112202	40.714366	13.397326	40.342815
3271050003	Pasir Jaya	16	27.057751	39.060438	4.9254071	29.287748
3271050004	Gunung Batu	16	39.241324	36.433872	4.1171932	38.791603
3271050006	Menteng	16	36.435729	40.176275	14.31448	37.927226
3271050008	Cilendek Barat	16	39.307128	30.615459	3.1339146	38.20518
3271050009	Sindang Barang	16	75.37768	72.429556	348.118	72.601681
3271050012	Situgede	16	33.576471	33.576472	10.225878	33.576471
3271050014	Semplak	16	43.329309	39.594822	16.033971	41.737594
3271060001	Kedung Waringin	16	27.613568	39.844147	6.9161704	30.581473
3271060002	Kedung Jaya	16	36.272811	42.050759	22.960226	39.250975
3271060003	Kebon Pedes	16	30.187111	36.4922	4.4441699	31.263629
3271060005	Kedung Badak	32	53.785483	31.940291	46.463603	38.86958
3271060008	Cibadak	16	37.728507	37.728506	50.526053	37.728506
3271060009	Kayu Manis	16	29.990304	30.621441	11.824317	30.213678
3271060011	Kencana	16	24.26731	25.450344	8.3328649	24.596815

Lampiran 3 Pendugaan pengeluaran per kapita (x Rp. 10.000,00) dengan pendugaan langsung dan pendugaan pemulusan kernel dengan pendekatan *jackknife* beserta nilai RRMSE(%)

Kode	Desa	Pendugaan Langsung			Kernel-*Jackknife*		
		Theta_hat	**MSE**	**RRMSE**	**Theta_hat**	**MSE**	**RRMSE**
3271010002	Pamoyanan	18.3632	1.239959	6.0639491	19.477771	1.1725986	5.5594962
3271010004	Genteng	20.7841	3.0043913	8.3396253	21.077342	2.6373075	7.7048563
3271010008	Harjasari	22.6618	0.7841601	3.9075859	22.890921	0.7566711	3.8000587
3271010011	Cipaku	23.6735	4.5770481	9.03713	24.816199	3.7762939	7.8306468
3271010013	Batu Tulis	**45.3536**	75.908561	19.210275	**37.212184**	16.806097	11.016618
3271010015	Empang	**40.6404**	9.1906254	7.4595747	**38.659462**	6.445999	6.5673372
3271010016	Cikaret	35.7589	8.0249717	7.9220494	36.870345	5.8500229	6.5599658
3271020002	Sindang Rasa	42.0702	13.195387	8.6344931	42.070163	8.1891679	6.802142
3271020004	Katulampa	17.8106	0.8569654	5.1975916	18.315308	0.8242415	4.9569326
3271020005	Baranang Siang	30.6730	17.920557	13.801264	30.673045	9.7914131	10.201542
3271020006	Sukasari	30.6155	39.440539	20.51307	30.615457	13.950291	12.199749
3271030001	Bantar Jati	**30.6730**	17.920557	13.801264	**29.551488**	9.7914131	10.588717
3271030002	Tegal Gundil	**36.9802**	34.938319	15.983861	**29.558052**	13.342168	12.357693
3271030003	Tanah Baru	**44.8400**	22.575997	10.596388	**42.054721**	11.03469	7.8988763
3271030004	Cimahpar	25.4101	7.0439659	10.444867	26.943324	5.3108451	8.5532398
3271030006	Cibuluh	**39.8739**	23.818445	12.239612	**34.174558**	11.323395	9.8465802
3271030007	Kedung Halang	**54.8728**	96.804673	17.93045	**42.539499**	17.649587	9.8758595
3271030008	Ciparigi	24.8663	8.6505714	11.827987	24.866327	6.175593	9.9937317
3271040003	Babakan Pasar	36.5351	52.498005	19.831726	39.904458	15.295943	9.800917
3271040004	Tegal Lega	30.6965	13.215864	11.842922	32.996688	8.1970501	8.6767773
3271040007	Pabaton	**160.4853**	302.91739	10.84493	**90.739857**	20.149226	4.9468768
3271040010	Kebon Kelapa	**72.4294**	60.14577	10.707497	**72.427515**	15.884427	5.5027805
3271050001	Pasir Mulya	40.1122	13.397326	9.1249935	40.342815	8.2664968	7.1267996
3271050003	Pasir Jaya	27.0578	4.9254071	8.2021814	29.287748	4.0103085	6.8375878
3271050004	Gunung Batu	**39.2413**	4.1171932	5.1707909	**38.791603**	3.4576666	4.7935122
3271050006	Menteng	36.4357	14.31448	10.383896	37.927226	8.6067554	7.7351484
3271050008	Cilendek Barat	**39.3071**	3.1339146	4.5037292	**38.20518**	2.7365905	4.3299477
3271050009	Sindang Barang	**75.3777**	348.118	24.75258	**72.601681**	20.324766	6.2096354
3271050012	Situgede	33.5765	10.225878	9.5239096	33.576471	6.9386824	7.8451898
3271050014	Semplak	**43.3293**	16.033971	9.2414216	**41.737594**	9.1999661	7.2671763
3271060001	Kedung Waringin	27.6136	6.9161704	9.523801	30.581473	5.237874	7.4837474
3271060002	Kedung Jaya	36.2728	22.960226	13.210123	39.250975	11.125692	8.4979284
3271060003	Kebon Pedes	30.1871	4.4441699	6.9835104	31.263629	3.685381	6.1404727
3271060005	Kedung Badak	**53.7855**	46.463603	12.673348	**38.86958**	14.738243	9.8767259
3271060008	Cibadak	37.7285	50.526053	18.840311	37.728506	15.123962	10.307733
3271060009	Kayu Manis	29.9903	11.824317	11.465874	30.213678	7.6394223	9.1480107
3271060011	Kencana	24.2673	8.3328649	11.895303	24.596815	6.0119561	9.9684821

Ket : yang di cetak tebal adalah hasil pendugaan langsung yang lebih besar dari metode pemulusan Kernel

ZERO INFLATED NEGATIVE BINOMIAL MODELS IN SMALL AREA ESTIMATION

Irene Muflikh Nadhiroh[1], Khairil Anwar Notodiputro[2], Indahwati[2]

[1]Mahasiswa S1 Departemen Statistika FMIPA IPB
[2]Dosen Departemen Statistika FMIPA IPB

Abstract

The problem of over-dispersion in Poisson data is usually solved by introducing prior distributions which lead to negative binomial models. Poisson data sometime is also suffered by excess zero problems, a condition when data contains too many zero or exceeds the distribution's expectation. Zero Inflated Negative Binomial (ZINB) method can be utilized to solve such problems. This paper demonstrates the adoption of ZINB methods in Small Area Estimation with excess zero data. It is shown that the excess zero problem has substantially influenced the Empirical Bayes (EB) estimates, and the adoption of ZINB methods has improved the precision and reliability of the estimates.

Key Words: Small Area Estimation, Zero-Inflation, Poisson-Gamma, Negative Binomial Regression, Empirical Bayes

INTRODUCTION

Background

Direct estimation is very difficult to adopt in some cases, which the sample is drawn from big scale survey such as National Economics and Social Survey. It is because the number of sample in region level is too small. Regarding the problem, indirect estimation, which adds covariates to estimate the parameter, is usually used. This type of estimation is broadly known as Small Area Estimation.

Kismiantini (2007) conducted a research in Small Area Estimation based on Poisson-Gamma models. She used Maximum Likelihood Estimator with Negative Binomial Regression technique to estimate prior parameter. Moreover, Negative Binomial Regression was used to resolve over-dispersion problem in the data.

In reality, count data is not characterized by over-dispersion only, but sometimes by excess-zero. Excess-zero is a condition when data contains too many zero or exceeds

the distribution's expectation. In this paper, Zero-Inflated models were used to take care of this type of situation.

Objectives

The research objectives are:

1. To investigate the performance of Negative Binomial Regression on Small Area Estimation in case of excess-zero.
2. To apply Zero-Inflated Count Models on Small Area Estimation in case of excess-zero.
3. To observe the performance of Zero-Inflated Count Models in estimating prior parameter toward the result of Small Area Estimation.

LITERATURE REVIEW

Small Area Estimation

In general, small area is used to denote any domain which the direct estimation with adequate precision can not be produced (Rao 2003). Small Area Estimation is used in effort to make estimation with adequate level of precision. It works as indirect estimation that lend the strength of variable interest values from related areas through the use of supplementary information related to variable interest such as, recent census count and current administrative records (Rao 2003).

Small Area Models

There are two link models in indirect estimation (Rao 2003):

1. Basic area level (type A) model.

Basic area level model or aggregate model includes all models that relate small area with area-specific auxiliary variables. These models are essential if unit (element) level data are not available. Assuming, parameter estimators, θ_i, is related to area specific auxiliary data or covariate variables, x_i, by a linear model:

$\theta_i = x_i^T \beta + b_i v_i$, with i=1,…,m, $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ are area-specific random effect and β is $p \times 1$ vector of regression coefficients. Therefore, b_i are known as positive constants.

For making inferences about θ_i, direct estimators y_i are assumed available. Accordingly, assuming:

$y_i = \theta_i + e_i$, where i=1,…,m, with sampling error e_i ~N$(0, \sigma^2{}_{ei})$ and $\sigma^2{}_{ei}$ are known. At the end, both models are combined and as a result is new model: $y_i = x_i{}^T \beta + b_i v_i + e_i$, where i=1,…,m. (Rao 2003).

2. Basic unit level (type B) model.

Unit level model includes all models that relate unit values of the study variable to unit-specific auxiliary variables. Assuming, unit-specific auxiliary variables, x_{ij}, and correspondingly, a nested regression model: $y_{ij} = x_{ij}{}^T \beta + v_i + e_{ij}$, where i=1,…,m, and j=1,…, n_i, with v_i ~N$(0, \sigma_v^2)$ and also e_i ~N$(0, \sigma^2{}_{ei})$.

Empirical Bayes Methods

Novick on Good (1980) said that Bayes method is difficult to adopt and sometimes very sensitive, because it needs prior probability information, which is very difficult to obtain. So Robbin (1955) for the first time introduced Empirical Bayes methods with assumed that the prior is undefined, and then the data used to estimate the prior parameter. (Rao 2003) EB methods in Small Area Estimation may be summarized as follows:

1. Obtain the posterior probability density function of the small area's parameter interest.
2. Estimate the model parameters from the marginal density function.
3. Use the estimated posterior density for making inferences about small area parameters interest.

Poisson-Gamma Models

Poisson model is standard model in dealing with count data. This model is limited on variance and means when utilized to estimate single parameter. Generally, count data experience over-dispersion. Because of that, a Poisson formula had been developed to accommodate extra variance from sample data. So, two-stage models have been introduced for count data, known as mixed model Poisson-Gamma. Wakefield (2006) introduced Poisson-Gamma model which was more easy to use, with SMR (Standard

Mortality Ratio) as direct estimator. This study used Wakefield model with alteration in direct estimator.

If y_i is number of specific individual at small area-*i*, which has specific characteristic interest, and written as follow:

$$y_i = \sum_j y_{ij}$$

And y_{ij} are j-object at i-small area where j=1,…,n and i=1,…,m.

At first stage $y_i \overset{ind}{\sim} Poisson(\mu_i \theta_i)$ is assumed where $\mu_i = \mu(\underline{x}_i, \underline{\beta})$ describes a regression model in area level, $\underline{x}_i$, covariates and $\underline{\beta}_i = (\beta_i, ..., \beta_p)^T$, vector of regression coefficients.

At second stage $\theta_i \overset{iid}{\sim} gamma(\alpha, 1/\alpha)$ is assumed as prior with mean 1 and variance $1/\alpha$. The marginal distribution $y_i \mid \underline{\beta}, \alpha$ is negative binomial.

Then Wakefield (2006) using Bayes Theorem acquired posterior as: $\theta_i \mid y_i, \underline{\beta}, \alpha \sim gamma(y_i + \alpha, 1/\alpha + \mu_i)$ and EB estimator as:

$$\hat{\theta}_i^{EB} = \hat{\theta}_i^{B}(\hat{\underline{\beta}}, \hat{\alpha}) = \hat{\gamma}_i \hat{\theta}_i + (1 - \hat{\gamma}_i)\mu_i$$

with $\hat{\gamma}_i = \hat{\mu}_i / (\hat{\alpha} + \hat{\mu}_i)$, $\hat{\theta}_i = y_i$ are direct estimation from θ_i.

Negative Binomial Regression

The negative binomial distribution function is written as:

$$g(y \mid x) = \frac{\Gamma(y+k)}{\Gamma(\mu)\Gamma(y+1)} \left(\frac{k}{\mu+k}\right)^k \left(\frac{\mu}{\mu+k}\right)^y$$

where y=0,1,2,… ; k and μ are negative binomial parameter with $E(y) = \mu$ and $\text{var}(y) = \mu + \mu^2 k$; k mention as disperse parameter which is shown that the data consist of over-dispersed.

Zero-Inflated Models

Zero-Inflated models consider two distinct sources of zero outcomes. One source is generated from individuals who do not enter into the counting process, the other from those who do enter the count process but result in a zero outcome (Hardin & Hilbe 2007).

For the zero-inflated model, the probability of observing a zero outcome equals the probability that an individual is in the always-zero group plus the probability that individual is not that group times the probability that the counting process produces a zero. If $B(0)$ as the probability that the binary process result in a zero outcomes and $\Pr(0)$ as the probability that the counting of a zero outcomes, the probability of a zero outcome for the system is then given by (Hardin & Hilbe 2007):

$$\Pr(y = 0) = B(0) + (1 - Z)\Pr(0)$$

The probability of a nonzero count is:

$$\Pr(y = k; k > 0) = [1 - B(0)]\Pr(k)$$

Zero-Inflated Negative Binomial

This model is used in over-disperse and excess-zero data. As a result, among parameter estimators, there would be k parameters which indicate that over-disperse occur in data, just as disperse parameter in negative binomial regression.

The probability distribution of this model is as follow:

$$P(Y_i = y_i \mid x_i) = \begin{cases} \varphi(\phi' x_i) + \{1 - \varphi(\phi' x_i)\} g(0 \mid x_i) \\ \{1 - \varphi(\phi' x_i)\} g(y_i \mid x_i) \end{cases}$$

Where φ is a function of $z_i'\phi$; x_i are vector of zero-inflated covariate and ϕ is a vector of zero-inflated coefficient, which will be estimated. Meanwhile, $g(y_i \mid x_i)$ is probability distribution of negative binomial, written as:

$$g(y_i \mid x_i) = \frac{\Gamma(y_i + \alpha)}{\Gamma(\mu_i)\Gamma(y_i + 1)} \left(\frac{\alpha}{\mu_i + \alpha} \right)^{\alpha} \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \alpha} \right)^{y_i}$$

Mean and variance of ZINB are:

$$E(y_i \mid x_i) = \mu_i (1 - \varphi_i)$$
$$V(y_i \mid x_i) = \mu_i (1 - \varphi_i)(1 + \mu_i (\varphi_i + \alpha))$$

Jackknife Method of Estimating MSE($\hat{\theta}_i^{EB}$)

This methods have been known by Tukey (1958) and developed to be a method that capable to be bias corrected of estimator by remove observation-i for i=1,…,m and performs parameter estimation.

Rao (2003) the Jackknife step to estimate MSE($\hat{\theta}_i^{EB}$) are :

1. Assume that $\hat{\theta}_i^{EB} = k_i(y_i, \underline{\hat{\beta}}, \hat{\alpha})$, $\hat{\theta}_{i-1}^{EB} = k_i(y_i, \underline{\hat{\beta}}_{-1}, \hat{\alpha}_{-1})$, then calculate:

$$\hat{M}_{2i} = \frac{m-1}{m}\sum_{l}^{m}(\hat{\theta}_i^{EB} - \hat{\theta}_{i-1}^{EB})^2$$

2. Calculate the delete-i estimator $\underline{\hat{\beta}}_{-1}$ dan α_{-1}, then calculate :

$$\hat{M}_{1i} = g_{1i}(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\alpha}, y_i) - \frac{m-1}{m}\sum_{i=m}^{m}[g_{1i}(\underline{\hat{\beta}}_{-1}, \hat{\alpha}_{-1}, y_i) - g_{1i}(\underline{\hat{\beta}}, \hat{\alpha}, y_i)]$$

   The estimator $\hat{M}_{1i}$ correct the bias of $g_{1i}(\hat{\sigma}_v^2)$

3. Calculate the jackknife estimator of MSE($\hat{\theta}_i^{EB}$) as:

$$MSE_J(\hat{\theta}_i^{EB}) = \hat{M}_{1i} + \hat{M}_{2i}$$

SUBJECT AND METHOD

Subject

This research assumed that the available auxiliary data is on area level, so this research used basic area level model. The data were simulated with 30 small areas and one covariate. Every batch generated different conditions of excess-zeros data, start from 0.1 until 0.9 probability of zero in small area. This research assumed structure of relation between respond and covariate was linear.

Method

Steps of generating data in SAS 9.1 were:

1. Fix the value of $\mathrm{X_i}$, where i =the number of area
2. Fix the expected probability of zero in each small area $(P(Y_i = 0))$, then calculate: $Lambda_i = -\log(P(Y_i = 0))$
3. Generate : $\theta_i \sim Gamma(1,1)$
4. Calculate : $\lambda^* = \log(Lambda_i / \theta_i)$
5. Do linear regression between λ^* and $\mathrm{X_i}$ to get predicted of β_0 and β_1
6. Calculate : $\mu_i = \exp(\mathrm{X_i}`\beta)$
7. Count: $parmlambda = \mu_i \times \theta_i$

8. Generate : $y_i \sim Poisson(parmlambda)$

And steps of analyzing data were:

1. Generate the negative binomial regression with *genmod* procedure in SAS 9.1 and Zero-Inflated Negative binomial Regression with *countreg* procedure in SAS 9.2.
2. Estimate the prior parameter, which are β and α ,
3. Calculate the estimation using EB method.
4. Calculate MSE for indirect estimation.
5. Calculate RRMSE (Root Relative Mean Square Error):

$$RRMSE(\hat{\theta}_i) = \frac{\sqrt{MSE(\hat{\theta}_i)}}{\hat{\theta}_i}$$

RESULT AND DISCUSSION

EB Estimator with Negative Binomial Regression on Estimated Prior Parameter

In case of non-excess-zero data, EB estimator with Negative Binomial Regression produced small and consistent MSE. Meanwhile, if data had contained excess-zero, approximately 30% or more with expected probability of zero is 0.6, it would have performed poorly and unreliably. As a result, EB estimation would produce negative values, which were meaningless as count estimators. RRMSE of EB estimator with NBR is increasing simultaneously with increase number of zero in data.

Table 1 Mean of MSE for EB estimator with NBR

Probability of zero	Mean of MSE	Median of MSE
0.1	0.333613	0.159448
0.2	0.353033	0.196963
0.3	0.400207	0.231014
0.4	0.41875	0.271669
0.5	0.452955	0.306641
0.6	-128.75	0.330078
0.7	2536.714	0.402092
0.8	-584495	0.301527
0.9	39135606	0.159682

Table 2 Mean of RRMSE for EB estimator with NBR

Probability of zero	Mean of RRMSE	Median of RRMSE
0.1	0.18188	0.1356
0.2	0.262006	0.205182
0.3	0.361013	0.299247
0.4	0.503566	0.422426
0.5	0.717336	0.588924
0.6	-0.38057	0.813734
0.7	-12.1606	1.355566
0.8	309.4627	2.115163
0.9	1.16E+10	6.639631

From table 1 shows that iterative process produced negative values of MSE, one simplest way to solve this problem is change the negative value to zero. This is do to the fact that, minimum value of MSE is zero. And the result were:

Table 3 Mean of MSE for EB estimator (II) with NBR

Probability of zero	Mean of MSE	Median of MSE
0.1	0.333613	0.159448
0.2	0.353033	0.196963
0.3	0.400207	0.231014
0.4	0.419181	0.271669
0.5	0.456258	0.306641
0.6	261.9677	0.330078
0.7	9500.073	0.402092
0.8	1444250	0.301527
0.9	41595285	0.159682

Table 4 Mean of RRMSE for EB estimator (II) with NBR

Probability of zero	Mean of RRMSE	Median of RRMSE
0.1	0.18188	0.1356
0.2	0.262006	0.205182
0.3	0.361013	0.299247
0.4	0.502895	0.422209
0.5	0.712314	0.585765
0.6	-0.34911	0.750369
0.7	-10.0163	0.995659
0.8	220.5437	1.104113
0.9	6.77E+09	0.557622

EB estimator (II) with NBR when data had expected probability of zero by 0.6 to 0.9 produced huge MSE. Similar with the MSE number, EB estimator (II) with NBR

produced big RRMSE when data had 0.8 to 0.9 expected probability of zero. But when data had 0.6 to 0.7 expected probability of zero, the value of RRMSE is negative due to the negative value of EB estimator.

EB Estimator with Zero Inflated Negative Binomial Regression on Estimated Prior Parameter

ZINB method produced EB estimator that was quite similar to which NBR method had given, although it slightly outperformed NBR method when the data only contained small number of zeros. In particular, if data had expected probability of zero by 0.1 to 0.5, ZINB would have produced bigger MSE for EB estimator than which NBR would have produced.

Whereas, if data had expected probability of zero by 0.6 to 0.7, ZINB would have given better estimator. The estimator was also unbiased as it covered parameter values adequately. However, ZINB would have begun to produce inconsistent estimator if data had expected probability of zero by 0.8 or more due to enormous MSE.

Table 5 Mean of MSE for EB estimator with ZINB

Probability of zero	Mean of MSE	Median of MSE
0.1	0.449506	0.168797
0.2	0.425844	0.201463
0.3	0.707983	0.277017
0.4	0.540615	0.284338
0.5	0.859252	0.334706
0.6	0.60793	0.376514
0.7	0.584152	0.255331
0.8	-1.27819	-1.4E-07
0.9	2954790	-1E-06

Table 6 Mean of RRMSE for EB estimator with ZINB

Probability of zero	Mean of RRMSE	Median of RRMSE
0.1	0.238099	0.136424
0.2	0.326097	0.210692
0.3	0.519524	0.317195
0.4	0.630776	0.420396
0.5	73228.07	0.662251
0.6	298.1671	1.033578
0.7	2181.192	1.942286
0.8	16269.7	3.754705
0.9	3.5E+278	6095.076

Besides, when data had expected probability of zero by 0.5 or more, EB estimator with ZINB produced huge RRMSE. It is because ZINB produced a small estimator, which is quite closed with the parameter value.

Table 7 Mean of MSE for EB estimator (II) with ZINB

Probability of zero	Mean of MSE	Median of MSE
0.1	0.450626	0.168797
0.2	0.428006	0.201463
0.3	0.716543	0.277017
0.4	0.549835	0.284338
0.5	0.94973	0.334706
0.6	0.749436	0.376514
0.7	1.501268	0.255331
0.8	1.755486	0
0.9	2954908	0

Table 8 Mean of RRMSE for EB estimator (II) with ZINB

Probability of zero	Mean of RRMSE	Median of RRMSE
0.1	0.23675	0.135647
0.2	0.320663	0.20709
0.3	0.506882	0.311937
0.4	0.606317	0.405926
0.5	65612.35	0.576343
0.6	234.0612	0.698814
0.7	1346.552	0.688797
0.8	7335.062	0
0.9	1.2E+278	0

EB estimator (II) with ZINB produced bigger average of MSE than EB estimator with ZINB. It is because, when negative value of MSE changed to zero, it doesn't have reduction factor in the average calculation**.**

CONCLUSION

Excess-zero in data would give high influence to the result of EB estimation. Conventional method such as negative binomial regression in prior estimation would provide unbiased and unreliable EB estimator for data with expected probability of zero by 0.6. It could be seen from the big number of MSE and negative value of estimator.

Meanwhile, EB estimation by ZINB method produced better and reliable estimator even though data had expected probability of zero by 0.6 to 0.7.

The ZINB methods just provide a reliable estimator for data with less than 53.33% of zeros. It because perform of ZINB decline when data had expected probability of zero by 0.8 or more. It identify in the big MSE and inconsistent estimator.

SUGGESTION

This research is still based on many assumptions and boundaries. If the assumptions and boundaries can be decreased, it will give better result because it will be closer to the real application. These are:

1. The generating process is not equal with real sampling process.
2. If population is generated first, it will be better because it can include the correction factor or offset.
3. The limited number of areas. It will be more interesting if experiment take account of larger number of areas, because the number of areas will influence data modeling.
4. Do the theoretical research about ZINB and EB estimator. So that will include all parameter of ZINB to the EB process.

REFERENCES

Hardin JW, JM Hilbe. 2007. *Generalized Linear Models and Extensions.* Texas: A Stata Press Publication.

Kismiantini. 2007. Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson-Gamma [Tesis] Bogor: Institut Pertanian Bogor, Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam.

McCullagh, P, J. A. Nelder. 1983. *Generalized Linear Models.* London: Chapmann and Hall.

Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. New York: John Wiley & Sons.

Wakefield J. 2006. *Disease mapping and spatial regression with count data*. http://www.bepress.com/uwbiostat/paper286.pdf [24 April 2008].

Aplikasi *Multidimensional Scaling* Untuk Peningkatan Pelayanan Proses Belajar Mengajar (PBM).

Irlandia Ginanjar
Staf Pengajar Jurusan Statistika FMIPA, Unpad Bandung.

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengelompokan karakteristik pelayanan Proses Belajar Mengajar (PBM) berdasarkan presepsi mahasiswa dengan menggunakan Analisis *multidimensional scaling,* yang mana dari hasil pengelompokan karakteristik pelayanan tersebut dapat dijadikan masukan dalam merumuskan kebijakan serta tindakan-tindakan oleh pemimpin institusi dalam meningkatkan PBM di institusi tersebut.

Masalah dalam penelitian ini adalah, bagaimana cara mendapatkan peta presepsi dengan menggunakan *Multidimensional Scaling* sehingga dapat diketahui karakteristik pelayanan PBM mana yang menjadi prioritas untuk diperbaiki oleh institusi. Objek penelitian yang diteliti yaitu sebuah perguruan tinggi, dengan data yang dipakai adalah data skunder berupa data presepsi mahasiswa terhadap pelayanan institusi.

Kesimpulan yang didapatkan adalah terbentuknya empat kelopok karakteristik pelayanan PBM dengan karakteristik masing-masing kelompok adalah: Kelompok 1, kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi prioritas pertama untuk diperbaiki. Kelompok 2, kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi prioritas kedua untuk diperbaiki. Kelompok 3, kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi prioritas ketiga untuk diperbaiki. Kelompok 4, kelompok karakteristik pelayanan yang tidak harus diperbaiki.

Kata Kunci: *Multidimensional Scaling*, Pemetaan, Peta presepsi

I. Pendahuluan

Perguruan Tinggi (Institusi) merupakan industri yang bergerak dalam bidang jasa pendidikan, yang tidak lepas dari peranan mahasiswa sebagai bahan dasar untuk menghasilkan sarjana dan juga sebagai konsumen internal dari institusi tersebut. Berdasarkan hal itu institusi tidak boleh menghiraukan kepuasan mahasiswa, karena hal tersebut menentukan kualitas sarjana yang merupakan merupakan output dari institusi. Variabel kepuasan mahasiswa terhadap karakteristik pelayanan suatu institusi bermacam-macam, dan institusi memerlukan informasi karakteristik pelayanan apa saja yang harus diperbaiki oleh institusi tersebut.

Untuk mengidentifikasi karakteristik pelayanan yang menjadi prioritas perbaikan oleh institusi tersebut diperlukan suatu metoda statistik. Ada berbagai macam metoda statistik yang dapat digunakan untuk melihat bagaimana keadaan karakteristik pelayanan suatu institusi. Salah satu diantaranya metoda yang dapat dipergunakan adalah pemetaan (*mapping*).

Pemetaan bisanya dilakukan melalui beberapa analisis statistik, dan analisis-analisis tersebut kebanyakan memiliki asumsi diantaranya ialah hubungan antar variabel harus linier, menggunakan asumsi tentang distribusi dan model harus dihipotesiskan. Pada prakteknya asumsi-asumsi itu akan sulit dipenuhi, untuk mencapai asumsi tersebut dibutuhkan biaya yang lebih besar dan menyita lebih banyak waktu. Pada kenyataan praktis data yang sering kita temui adalah hubungan antar variabel non-linier, tidak ada asumsi tentang distribusi dan model tidak dihipotesiskan.

Ada beberapa alat statistik yang bisa digunakan salah satunya adalah dengan menggunakan Analisis *Multidimensional Scaling* (MDS), suatu metoda analisis yang dapat memberikan output berupa plot antara baris dan kolom dari matriks data kategori, dan akurasi hasilnya tidak kalah dengan analisis statistik yang menggunakan asumsi seperti yang telah dikutip sebelumnya, dan analisis ini memungkinkan kita untuk membuat map yang berasal dari tabel kontingensi atau *row data*.

Tujuan yang dicapai dari penelitian ini adalah:

1) Memperoleh peta presepsi dengan menggunakan metode MDS.
2) Menentukan karakteristik pelayanan yang penilaiannya seragam.

Penelitian ini bermanfaat untuk:

1) Mengetahui teknik untuk mendapatkan peta presepsi dengan menggunakan MDS.
2) Memperoleh informasi dari peta presepsi untuk mencari karakteristik pelayanan mana yang harus diperbaiki oleh institusi, sehingga institusi bisa menginvestasikan modalnya untuk perbaikan-perbaikan karakteristik tertentu yang memang penting untuk diperbaiki.
3) Hasil dari analisis ini memungkinkan untuk dipakai dalam penelitian lain, misalkan untuk menganalisis detail dari variabel kepuasan mahasiswa yang harus diperbaiki.

2. Metode Penelitian

2.1. Pendekatan Masalah Penelitian

Masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah, bagaimana caranya mengolah data karakteristik pelayanan institusi untuk mencari peta presepsi dengan menggunakan Analisis MDS yang mana peta presepsi tersebut dapat dipakai untuk mendapatkan informasi karakteristik pelayanan mana yang harus diperbaiki oleh institusi. Ada tiga hal penting yang perlu diperhatikan dalam penelitian ini, pertama Analisis *Multidimensional*

Scaling, kedua penentuan karakteristik pelayanan mana yang harus diperbaiki dan mana yang tidak, dan ketiga pengambilan informasi dari hasil analisis yang telah dilakukan.

2.2. Objek Penelitian

Institusi di sebuah perguruan tinggi menjadi objek dalam penelitian ini, dengan variabel yang diteliti adalah variabel kepuasan mahasiswa melalui karakteristik pelayanan institusi tersebut, untuk mencari karakteristik pelayanan mana yang harus diperbaiki oleh institusi.

2.3. Pengumpulan dan Pengolahan Data

Data yang digunakan dalam penelitain ini adalah data skunder berupa data presepsi mahasiswa tentang karakteristik pelayanan institusi.

Dalam mempersiapkan analisis data harus dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Memeriksa dokumen data skunder secara fisik.
2. Membuat pengkodean secara numerik.
3. Menyunting data.
4. Memasukan data kedalam file computer.
5. Validasi file data

2.4. Variabel-variabel Penelitian.

Diambil 33 variabel karakteristik pelayanan yang merupakan hasil dari Teknik Insiden kritis *(Critical Incident Technique)*:

1. Fasilitas fisik perkuliahan
    1) Jumlah kursi di ruangan kuliah memadai (FF01)
    2) Jumlah fasilitas OHP memadai (FF02)
    3) Jumlah fasilitas *infocus* memadai (FF03)
    4) Jumlah ruangan kuliah memadai (FF04)
    5) Koleksi buku di perpustakaan lengkap (FF05)
    6) Fasilitas di lab komputer lengkap (FF06)
2. Fasilitas penunjang
    1) Fasilitas kantin memuaskan (FP01)
    2) Fasilitas ibadah memuaskan (FP02)
    3) Kursi tunggu memuaskan (FP03)
3. Kenyamanan ruangan
    1) Ruangan kuliah bersih (KR01)

2) Toilet bersih (KR02)
3) Lab. Komputer bersih (KR03)
4) Ruangan perkuliahan rapi (KR04)
5) Ruangan perpustakaan rapi (KR05)

4. Pelayanan administrasi akademis
   1) Pengeluaran KKS tepat waktu (PA01)
   2) Kuliah sesuai jadwal perkuliahan (PA02)
   3) Sistem pelaksanaan UAS diatur dengan baik (PA03)
   4) Pelaksanaan bimbingan diatur dengan baik (PA04)
   5) Pelaksanaan sidang diatur dengan baik (PA05)
   6) Pelaksanaan seminar diatur dengan baik (PA06)
   7) Pegawai TU melayani mahasiswa dengan cepat (PA07)
   8) Prosedur pembuatan transkrip akademik tidak berbelit-belit (PA08)
5. Pengembangan program perkuliahan.
   1) Kurikulum Institusi mengarah pada pengaplikasian teori (PP01)
   2) Ada program semester pendek (PP02)
   3) Ada program penerapan mata kuliah untuk masalah nyata di masyarakat (PP03)
6. Keseriuasan dosen melayani mahasiswa.
   1) Dosen wali sangat membantu mahasiswa (KD01)
   2) Dosen sering berada di kampus (KD02)
   3) Penilaian transparan (KD03)
   4) Dosen menyampaikan materi perkuliahan dengan baik (KD04)
   5) Dosen memiliki kompetensi keilmuan yang memadai (KD05)
7. Media Informasi.
   1) Penyediaan informasi magang dan lowongan pekerjaan memuaskan (MI01)
   2) Penyediaan informasi beasiswa memuaskan (MI02)
   3) Penyediaan informasi prosedur pengerjaan Tugas Akhir memuaskan (MI03)

Skala pengukuran Ke 33 variabel di atas berbentuk ordinal dengan pernyataan:

1. Sangat Tidak Setuju
2. Tidak Setuju
3. Netral
4. Setuju
5. Sangat Setuju

2.5. Metode Analisis Data

Proses pembuatan peta presepsi akan menggunakan Analisis *Multidimensional Scalling* non-metrik karena skala pengukuran untuk *row data* berbentuk ordinal yang merupakan skala psikologi. MDS non-metrik ini proses perhitungannya hampir sama dengan analisis MDS metrik, bedanya dalam analisis non-metrik ada perhitungan nilai stress dan perhitungan dilakukan berulang sampai didapatkan nilai stress minimal.

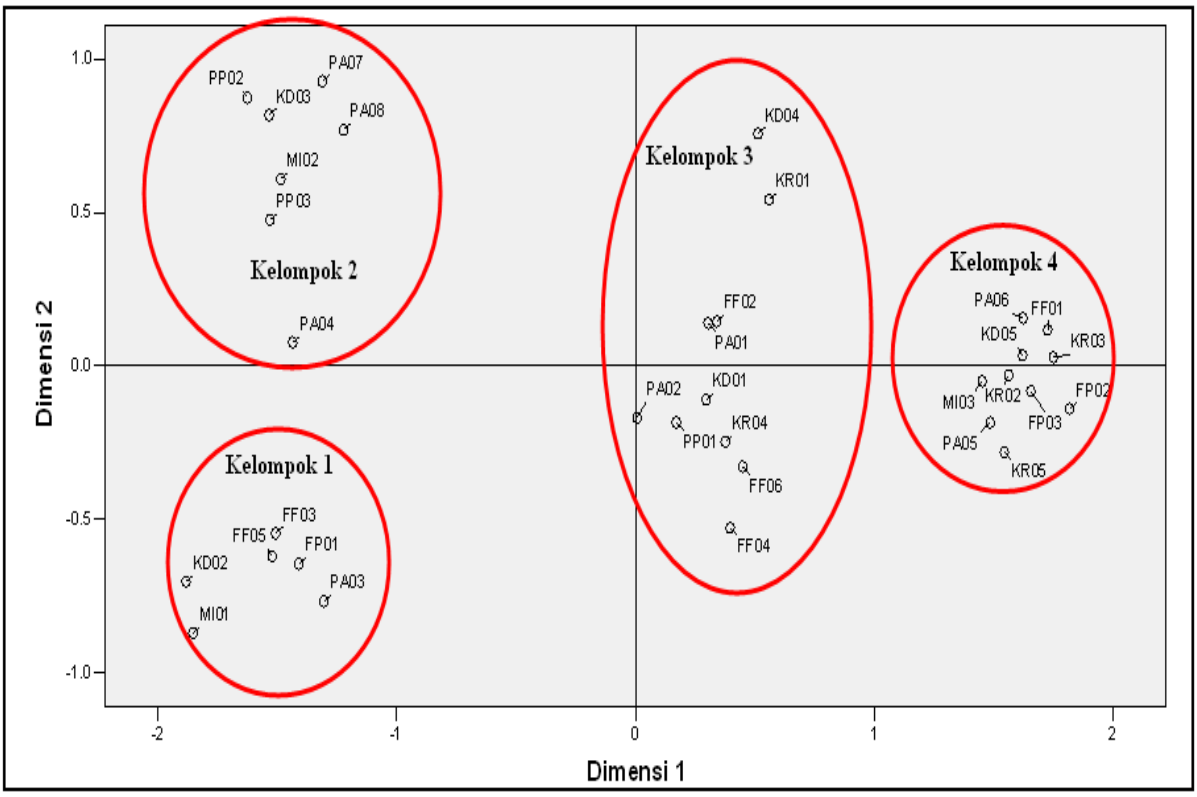
2.6. Interprestasi Hasil

Melalui peta presepsi yang merupakan gambaran titik-titik koordinat dalam dua dimensi tersebut didapatkan dua informasi utama yaitu, pertama mirip tidaknya dua variabel karakteristik pelayanan dengan berdasarkan kedekatan dari sejumlah variabel karakteristik pelayanan dan kedua adalah teridentifikasinya bagaimana presepsi mahasiswa terhadap karakteristik pelayanan yang semua itu dapat diketahui secara visual. Hasil ini akan dijadikan dasar bagi penulis untuk mencari karakteristik pelayanan mana yang harus diperbaiki oleh institusi.

3. Hasil Pembahasan

Tahap pertama peneliti membuat matriks jarak dengan menggunakan rumus jarak euclidean, selanjutnya lakukan analisis MDS non-metrik. Hasil analisis ini menghasilkan nilai stress 0,16358 berarti peta yang terbentuk dapat menerangkan data sebenarnya sebesar 83,642%. Peta presepsi yang dihasilkan dapat dilihat pada Gambar 1.

Pada peta presepsi terlihat karakteristik pelayanan mengelompok dalam 4 kelompok yang mana penentuan kelompok ini ditentukan secara *rule of thumb*/ peneliti memutuskan berdasarkan visual karena peneliti belum menemukan teknik penentuan kelompok yang standar.



Gambar 1. Peta presepsi karakteristik pelayanan institusi berdasarkan presepsi mahasiswa.

Kelompok yang berada di sebelah kiri bawah itu adalah kelompok yang penilaian presepsi karakteristik pelayanannya kecil (nilai jaraknya kecil) dan di sebelah kanan atas adalah kelompok yang penilaian presepsi karakteristik pelayanannya besar (nilai jaraknya besar), sehingga hasil pengelompokan sebagai berikut :

- Kelompok 1: Kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi **prioritas pertama** untuk **diperbaiki**. Adapuan Karakteristik tersebut menurut urutan prioritas karakteristik dalam kelompoknya adalah sebagai berikut: Penyediaan informasi magang dan lowongan pekerjaan memuaskan (MI01), Dosen sering berada di kampus (KD02), Koleksi buku di perpustakaan lengkap (FF05), Jumlah fasilitas *infocus* memadai (FF03), Fasilitas kantin memuaskan (FP01), Sistem pelaksanaan UAS diatur dengan baik (PA03).
- Kelompok 2: Kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi **prioritas Kedua** untuk **diperbaiki**. Adapuan Karakteristik tersebut menurut urutan prioritas karakteristik dalam kelompoknya adalah sebagai berikut: Pelaksanaan bimbingan diatur dengan baik (PA04), Ada program penerapan mata kuliah untuk masalah nyata di masyarakat (PP03), Penyediaan informasi beasiswa memuaskan (MI02), Penilaian transparan (KD03), Ada program semester pendek (PP02), Prosedur pembuatan transkrip

akademik tidak berbelit-belit (PA08), Pegawai TU melayani mahasiswa dengan cepat (PA07)

- Kelompok 3: Kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi **prioritas Ketiga** untuk **diperbaiki**. Adapuan Karakteristik tersebut menurut urutan prioritas karakteristik dalam kelompoknya adalah sebagai berikut: Kuliah sesuai jadwal perkuliahan (PA02), Kurikulum Institusi mengarah pada pengaplikasian teori (PP01), Jumlah ruangan kuliah memadai (FF04), Dosen wali sangat membantu mahasiswa (KD01), Ruangan perkuliahan rapi (KR04), Fasilitas di lab komputer lengkap (FF06), Pengeluaran KKS tepat waktu (PA01), Jumlah fasilitas OHP memadai (FF02), Ruangan kuliah bersih (KR01), Dosen menyampaikan materi perkuliahan dengan baik (KD04).
- Kelompok 4: Kelompok karakteristik pelayanan yang **tidak harus diperbaiki**. Karakteristik tersebut adalah: Penyediaan informasi prosedur pengerjaan Tugas Akhir memuaskan (MI03), Pelaksanaan sidang diatur dengan baik (PA05), Ruangan perpustakaan rapi (KR05), Toilet bersih (KR02), Dosen memiliki kompetensi keilmuan yang memadai (KD05), Kursi tunggu memuaskan (FP03), Pelaksanaan seminar diatur dengan baik (PA06), Jumlah kursi di ruangan kuliah memadai (FF01), Lab. Komputer bersih (KR03), Fasilitas ibadah memuaskan (FP02)

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan nilai stress sebagai penentu baik tidaknya output dari penelitian ini dihasilkan empat kelompok karakteristik pelayanan, dengan hasil pengelompokan sebagai berikut: Kelompok 1, kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi **prioritas pertama** untuk **diperbaiki**. Kelompok 2, kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi **prioritas Kedua** untuk **diperbaiki**. Kelompok 3, kelompok karakteristik pelayanan yang menjadi **prioritas Ketiga** untuk **diperbaiki**. Kelompok 4, kelompok karakteristik pelayanan yang **tidak harus diperbaiki**.

4.2. Saran

Penelitian ini bermaksud untuk mempermudah para pengambil keputusan di suatu institusi untuk menentukan prioritas perbaikan pelayanan terhadap mahasiswa, namun ada beberapa saran yang harus diperhatikan dalam pengunaan analisis MDS ini, yaitu:

1) Variabel karakteristik pelayanan di setiap institusi belum tentu sama dengan yang dipakai dalam penelitian, maka sebelum analisis ini digunakan harus dilakukan dulu

pengidentifikasian variabel karakteristik pelayanan, bisa dengan menggunakan Teknik Insiden kritis (*Critical Incident Technique*), atau berdasarkan penentuan pakar.

2) Jika data berasal dari sampel harus mengunakan teknik pengambilan sampel peluang (*Probability sampling*) bila hasil analisis yang di inginkan bisa mempresentasikan populasi.
3) Belum ada nilai standar berapa besar nilai stress yang layak untuk mengambil kesimpulan dari analisis ini yang pasti jika nilai stress besar lebih baik menggunakan alat analisis lain yang bisa menerangakan data lebih baik lagi, karena semakin besar nilai stress akan semakin besar kesalahan/*error* perhitungan sehingga bisa mengakibatkan kesalahan pengambilan keputusan.
4) Penentuan kelompok dari peta presepsi akan lebih baik jika tidak hanya menggunakan visual tetapi juga dengan menggunakan pertimbangan pakar atau menggunakan teknik lain yang sifatnya lebih statistis/matematis.

5. Daftar Pustaka

Carmone, Jr, Frank.J.; Green, Paul.E.; Smith, Scott.M., 1989 *Multidimensional Scaling Concepts and Applications,* Allyn and Bacon, Boston.

Dillon, W.R.; Matthew G., 1984. *Multivariate Analysis: Methods and Application,* John Willey and Sons Inc, New York.

Goldberg, Jack.L., 1991. *Matrix Theory With Apllications,* McGraw-Hill Inc, New York.

Hair, Jr, J.F.; Black, W.C.; Babin, B.J.; Anderson, R.E.; Tatham, R.L., 2006. *Multivariate Data Analysis, 6th Ed,* Pearson Education Inc, Singapore.

Johnson, R.A.; Wichern, D.W., 1992. *Applied Multivariate Statistical Analysis,* Prentice-Hall Inc, New Jersey

.

Latin, J.; Carrol , J.; Douglas.; Green.; Paul.E., 2003. *Analyzing Multivariat Data,* Duxbury Applied Series, Canada.

Morrison, D.F., 2005. *Multivariate Statistical Methods, 4th Ed,* Thomson Learning Inc, Singapore.

Maholtra, N.K., 1999. *Marketing Research An Applied Orientation, 3th Ed,* Prentice-Hall Inc, New Jersey.

Sudman, S.; Blair, E., 1998. *Marketing Research A Problem Solving Approach,* McGraw-Hill Companies Inc. Singapore.

Peranan Formulasi Inversi pada Fungsi Karakteristik Suatu Variabel Acak

John Maspupu

Pusfatsainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjunan No. 133 Bandung 40173,
Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998
E-mail: john_mspp@yahoo.com

Abstract: In the probability theory, we know there is the one-to-one correspondence between distributions and characteristic functions. The while, in various procedures involving Fourier or Laplace transforms may be used in actually computing the distribution of a random variable from its characteristic function. But, there is also an explicit formula for the distribution function in terms of the characteristic function and that usually known as *inversion formula.* Thus, from a characteristic function we can hope to obtain a distribution function unique only up to additive constant (*utac*).

Keywords : Inversion formula, Characteristic function, Random variable.

1. Pendahuluan

Sebuah fungsi yang erat kaitannya dengan fungsi distribusi dalam teori probabilitas biasanya dikenal dengan sebutan fungsi karakteristik (lihat [4]) . Salah satu formulasi penting yang berhubungan dengan fungsi karakteristik di sini adalah formulasi inversi dan ini dapat dibaca pada [3] maupun [4]. Formulasi ini secara eksplisit diturunkan dari fungsi distribusi F(x) bilamana fungsi karakteristik φ(t) diketahui. Dari formulasi ini juga dapat ditunjukkan keterkaitan antara turunan fungsi distribusi F'(x) atau fungsi densitasnya dengan fungsi karakteristik φ(t). Pengertian fungsi karakteristik ini dan kaitannya dengan fungsi distribusi secara aksiomatis dinyatakan dalam bentuk definisi, satu teorema dan lemma yang dapat dilihat pada *Definisi 3, Teorema 4* dan *Lemma 5* dalam pembahasan makalah ini ataupun di [2]. Namun yang menjadi masalah adalah bagaimana menunjukkan peranan formulasi inversi pada fungsi karakteristik suatu variabel acak atau dengan perkataan lain bagaimana caranya membuktikan makna dari *Teorema 4* dan *Lemma 5* secara matematis. Dengan demikian jelas tujuan pembahasan makalah ini adalah untuk membuktikan makna dari *Teorema 4* dan *Lemma 5*. Sedangkan kontribusi dari fungsi karakteristik ini diharapkan dapat mewakili peranan fungsi distribusi ataupun fungsi densitas suatu variabel acak dalam berbagai aplikasi konsep probabilitas.

2. Metodologi

Dalam pembuktian *Teorema 4* dan *Lemma 5* diperlukan latarbelakang pemahaman tentang konsep-konsep integral tak wajar, *integral Riemann* dengan sifat-sifatnya serta didukung oleh dua teorema penting yaitu: *Teorema Fubini dan Teorema Lebesque dominasi konvergen* (*Lebesque's Theorem on Dominated Convergence*) yang dinyatakan sebagai berikut;

Teorema1.(Fubini's Theorem) Jika *f(t,s)* suatu fungsi terukur yang didefinisikan pada

$E = E_t \times E_s$ dengan E , E_t , E_s adalah himpunan-himpunan yang terukur demikian rupa sehingga $\int_{Es} |f(t,s)|\, ds$ ada hampir dimana-mana di E_t dan juga terintegral di E_t yang berarti $\int_{Et} \left(\int_{Es} |f(t,s)|\, ds\right) dt$ ada, maka *f(t,s)* terintegral di E dan berlaku pernyataan berikut di bawah ini,

$$\int_E f(t,s)\, d(ts) = \int_{Et} \left(\int_{Es} |f(t,s)|\, ds\right) dt = \int_{Es} \left(\int_{Et} |f(t,s)|\, dt\right) ds.$$

Teorema 2. (Lebesque's Theorem on Dominated Convergence)

Misalkan S_1 adalah himpunan fungsi-fungsi naik yang terbatas bawah dan himpunan

$S_2 = \{ h = f - g \mid f, g \in S_1 \}$. Jika himpunan barisan fungsi $\{f_n\} \subset S_2$ dengan

$f_n(t) \longrightarrow f(t)$ bilamana $n \to \infty$ dan untuk suatu $g \in S_2$, $|f_n(t)| \leq g(t)$ maka $f \in S_2$ dan $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$.

Kedua teorema di atas ini dapat dilihat pada [1] lengkap dengan buktinya.

3. Hasil dan Pembahasan

Definisi 3. Jika X suatu variabel acak dengan fungsi distribusinya F_x atau fungsi kepadatannya f_x maka fungsi karakteristik φ_x didefinisikan sebagai berikut:

$$\varphi_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,t\,x}\, dF_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,t\,x} f_x(x)\, dx \,, \quad \text{dengan } t \in R \,, \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{dan}$$

$$e^{i\,t\,x} = \cos t\,x + i \sin t\,x$$

Teorema 4. Jika F suatu fungsi distribusi dan φ adalah fungsi karakteristiknya, maka berlaku hubungan $F(a + h) - F(a - h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi(t)dt$, untuk $a \in R$ dan $h > 0$, bilamana $(a \pm h) \in C_F$.

Bukti : Misalkan $\theta(t) = \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi(t)$ dan $I_T = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi(t)dt.$

Karena $\theta(t)$ adalah fungsi terukur jadi $|\theta(t)|$ juga terukur. Selanjutnya untuk $h > 0$, tinjau $|\theta(t)| = |\frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi(t)| = |\frac{\sin th}{t}| . |e^{-ita}| . |\varphi(t)| = h. |\frac{\sin th}{th}| .1.1.$

Karena $|\frac{\sin th}{th}| \le 1$, jadi $|\theta(t)| \le h$. Dengan demikian $\int |\theta(t)| dt \le \int hdt < \infty$.

Karena $|\theta(t)|$ terukur dan $\int |\theta(t)| dt$ terbatas akibatnya $|\theta(t)|$ terintegral sehingga $\theta(t)$ juga terintegral , jadi I_T ada dan berhingga. Sekarang tinjau pernyataan berikut di bawah ini,

$$I_T = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{-ita} [\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{i(x-a)t} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)dt .$$

Karena $\theta(t)$ terukur dan $\int \theta(t)dt$ ada, maka menurut *Teorema Fubini* pertukaran integral pada I_T dibolehkan. Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut,

$$I_T = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} e^{i(x-a)t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)[\int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} \cos(x-a)tdt + i \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{t} \sin(x-a)tdt] .$$

Tulis $B_1 = \frac{\sin th}{t} \cos(x-a)t$ dan $B_2 = \frac{\sin th}{t} \sin(x-a)t$.

Karena B_1 adalah fungsi genap dan B_2 adalah fungsi ganjil maka pernyataan I_T di atas menjadi

$$I_T = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int_{0}^{T} \frac{\sin th}{t} \cos(x-a)tdt \quad \text{atau} \quad I_T = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,T)dF(x) ,$$

dengan $g(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}\cos(x-a)t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t - \sin(x-a-h)t}{t}dt$

atau $g(x,T) = \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(x-a-h)t}{t}dt$.

Sebut $p(h,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}dt$, akibatnya $g(x,T) = \frac{1}{2}p(x-a+h,T) - \frac{1}{2}p(x-a-h,T)$.

Karena $\int_0^\infty \frac{\sin th}{t}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & untuk \quad h>0 \\ 0, & untuk \quad h=0 \\ \frac{-\pi}{2}, & untuk \quad h<0 \end{cases}$, jadi akan diperoleh pernyataan

$\lim_{T\to\infty} p(h,T) = \lim_{T\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\sin th}{t}dt = \begin{cases} 1, & untuk \quad h>0 \\ 0, & untuk \quad h=0 \\ -1, & untuk \quad h<0 \end{cases}$. Dengan demikian $p(h,T)$

terbatas untuk setiap $h \in R$ dan $T > 0$, begitu juga $g(x,T)$ terbatas untuk setiap $x \in R$ dan $T > 0$ sehingga berlaku pernyataan berikut yaitu,

$\lim_{T\to\infty} g(x,T) = \begin{cases} 0, & untuk \quad x < a-h, atau, x > a+h \\ \frac{1}{2}, & untuk \quad x = a-h, atau, x = a+h \\ 1, & untuk \quad a-h < x < a+h \end{cases}$. Selanjutnya gunakan *Lebesque*

Theorem on Dominated Convergence (Teorema 2) akan diperoleh pernyataan

$\lim_{T\to\infty} I_T = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,T)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{T\to\infty} g(x,T)]dF(x)$. Karena $(a \pm h) \in C_F$,

jadi $\lim_{T\to\infty} I_T = \int_{a-h}^{a+h} dF(x) = F(a+h) - F(a-h)$. Dengan perkataan lain dapat disimpulkan

bahwa $F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\sinh t}{t}\, e^{-i\,t\,a}\,\varphi(t)\,dt$. # .....(1)

Selanjutnya misalkan $a + h = b$ dan $a - h = a$ akibatnya $a + b = 2a$, $b - a = 2h$.

Tinjau Pernyataan berikut, $\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \frac{\cos ta - i\sin ta \;-\; (\cos tb - i\sin tb)}{2i}$.

Atau $\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \frac{\cos ta - \cos tb + i(\sin tb - \sin ta)}{2i}$

$$= \frac{2\sin(\frac{a+b}{2})t\sin(\frac{b-a}{2})t + 2i\cos(\frac{a+b}{2})t\sin(\frac{b-a}{2})t}{2i}$$

$$= \frac{2\sin ta\sin th + 2i\cos ta\sin th}{2i} = \frac{2i\sin th(\cos ta - i\sin ta)}{2i}.$$

Jadi $\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \sin th\, e^{-ita}$, dengan demikian $\frac{\sin th}{t}e^{-ita} = \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2it}$ ..... (2)

Oleh karena itu jika $a,b \in C_F$ dengan $a < b$ maka teorema inversi di (1) menjadi

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,dt \qquad .....(3)$$

Lemma 5. Jika F terdiferensial pada x dengan F'(x) = f(x) maka berlaku hubungan

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt. \qquad .....(4)$$

Jika dan hanya jika ruas kanan dari persamaan (4) ada. Jika φ terintegral pada R dan f(x) ada untuk setiap $x \in R$ maka $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{R} e^{-itx}\varphi(t)dt$.

Bukti : $(\Rightarrow)$ Sebutlah b = a + h dan gantilah a dengan x akibatnya b = x + h.

Dengan demikian $\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2i} = \frac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{2i}$ .....(5)

Tinjau persamaan (4) yaitu $f(x) = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-itx}-e^{-i(x+h)t}}{it}\right)\varphi(t)dt.$$

Akibatnya bentuk formula inversi di (3) berubah menjadi seperti di bawah ini

$$F(x+h) - F(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{e^{-itx}-e^{-i(x+h)t}}{it}\right)\varphi(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{it}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Atau $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\frac{1-e^{-iht}}{iht}\right)e^{-itx}\varphi(t)dt.$ .....(6)

Ini berarti persamaan (4) di atas menjadi $f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x) \right)$.

Karena F terdiferensial di x , jadi $f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x)$.

Dengan perkataan lain ruas kanan persamaan (4) ada dan berhingga. #

Bukti:($\Leftarrow$) Dari persamaan (6) dapat diperlihatkan bahwa ruas kanan persamaan (4) adalah sebagai berikut, $\lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi(t)dt = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$

F'(x). Karena F'(x) = f(x) , jadi $f(x) = \lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi(t)dt$. #

Dari persamaan-persamaan (2) dan (5) diperoleh $\left(\frac{1-e^{-iht}}{2it} \right) e^{-itx} = \frac{\sin th}{t} e^{-ita}$.

Dan ini akan mengakibatkan hubungan

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin th}{th} e^{-itx} \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin th}{th} e^{-itx} \varphi(t)dt .$$

Karena f(x) ada untuk setiap $x \in R$ akibatnya dari persamaan (4) diperoleh

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1-e^{-iht}}{iht} \right) e^{-itx} \varphi(t)dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin th}{th} e^{-itx} \varphi(t)dt .$$

Atau $f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{R} \frac{\sin th}{th} e^{-itx} \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{R} \lim_{h\to 0} \frac{\sin th}{th} e^{-itx} \varphi(t)dt$.

Karena $\lim_{h\to 0} \frac{\sin th}{th} = 1$, jadi $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{R} e^{-itx} \varphi(t)dt$. #

4. Simpulan

Dari hasil pembuktian *Teorema 4* dan *Lemma 5,* dapat dikatakan bahwa jika diketahui fungsi karakteristik dari suatu variabel acak maka dapat dihitung nilai fungsi distribusinya pada suatu lokasi tertentu. Bahkan dapat pula ditentukan fungsi densitas dari variabel acak tersebut. Dengan mengacu pada *Definisi 3, Teorema 4* dan *Lemma 5,* ternyata ada suatu korespondensi satu-satu di antara kedua fungsi tersebut yaitu fungsi karakteristik dengan fungsi distribusi dan ini sesuai informasi yang diperoleh dari teori probabilitas.

Daftar Rujukan

1. Arthur Wouk., *Applied Functional Analysis* , John Wiley & Sons, New York, 1999.
2. Ash Robert B., *Real Analysis and Probability* , Academic Press Inc., London, 2002.
3. Bhat Ramdas, *Modern Probability Theory*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 2001.
4. Loeve Michel, *Probability Theory*, D. Van Nostrad Company Inc., Canada, 2003.

PENDUGAAN BERBASIS MODEL UNTUK KASUS BINER PADA *SMALL AREA ESTIMATION*

Kismiantini

Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta
Karangmalang, Yogyakarta 55281, Indonesia

e-mail : kismi_uny@yahoo.com

ABSTRAK

Small Area Estimation (*SAE*) berguna untuk menduga parameter subpopulasi (area) yang berukuran sampel kecil. Parameter subpopulasi dalam *SAE* ini dapat berasal dari peubah respons kontinu atau peubah respons diskret (seperti biner, cacahan). Berbagai metode telah dikembangkan untuk melakukan pendugaan terhadap parameter area tersebut khususnya metode berbasis model. Pada makalah ini, akan dibahas pendugaan komposit berbasis model untuk kasus biner yaitu pendugaan berbasis model linear, berbasis model logit dan berbasis model logit dengan pengaruh acak area dapat digunakan. Pendugaan berbasis model ini mampu memberikan hasil pendugaan pada area yang apabila dengan pendugaan langsung diperoleh penduga sebesar nol.

Kata-kata kunci : *small area estimation*, kasus biner, metode berbasis model.

1. Pendahuluan

Small area estimation (*SAE*) merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil (Rao, 2003). Di Indonesia, subpopulasi tersebut dapat berupa provinsi, kabupaten/kota, kecamatan atau kelurahan/desa. Secara umun ada tiga pendekatan untuk mendapatkan penduga parameter dalam *SAE* yaitu pendugaan langsung (*direct estimation*), pendugaan tak langsung (*indirect estimation*) dan pendugaan komposit (*composite estimation*). Bila ukuran contoh pada subpopulasi kecil bahkan nol maka statistik dari pendugaan langsung akan memiliki ragam galat yang besar bahkan pendugaan tidak dapat dilakukan (Rao, 1999). Untuk mengatasi hal tersebut, dapat digunakan pendugaan tak langsung (penduga sintetik). Sedangkan pendugaan komposit adalah pendugaan yang dilakukan dengan memboboti antara penduga langsung dengan penduga tak langsung. Pendugaan ini untuk menyeimbangkan bias dari penduga tak langsung sintetik dengan ketidakstabilan dari penduga langsung yaitu dengan memberikan rata-rata terboboti untuk kedua penduga tersebut (Ghosh & Rao, 1994).

Dalam *SAE*, peubah respons dapat dikategorikan dalam dua jenis yaitu peubah kontinu dan peubah diskret. Bila ingin melakukan pendugaan tentang pendapatan per kapita di suatu wilayah maka peubah respons yang menjadi perhatian merupakan peubah kontinu. Sedangkan bila ingin mengetahui proporsi pengangguran di suatu wilayah, banyaknya orang yang menderita demam berdarah maka peubah respons yang menjadi perhatian merupakan peubah diskret. Suatu peubah respons yang menyatakan "sukses" atau "gagal" sering disebut sebagai peubah biner. Jenis dari peubah respons ini akan mempengaruhi bagaimana melakukan pendugaan terhadap parameternya. Berbagai metode *SAE* telah dikembangkan menurut jenis dari peubah yang menjadi perhatian, khususnya menyangkut metode yang berbasis model (*model-based area estimation*) yaitu diantaranya untuk peubah biner adalah metode berbasis model linear, berbasis model logit, berbasis model logit dengan pengaruh acak area. Pada makalah ini akan dibahas tentang pendugaan proporsi status kepemilikan kartu sehat di 14 kecamatan di kota Yogyakarta dengan metode berbasis model.

2. Pendugaan Langsung

Suatu peubah respon yang menyatakan "sukses" atau "gagal" disebut sebagai peubah biner. Pada *SAE* untuk kasus biner, peubah yang menjadi perhatian berupa proporsi. Penduga langsung bagi proporsi merupakan penduga kemungkinan maksimum (Rao, 2003) yaitu $\hat{p}_i = y_i / n_i$, dengan mengasumsikan peubah respons diasumsikan menyebar binomial, $y_i \overset{iid}{\sim} Binomial(n_i, p_i)$. Penduga langsung ini mempunyai ragam yang besar karena hanya berdasarkan jumlah objek survei yang terdapat pada area kecil tersebut.

3. Pendugaan Sintetik Berbasis Model Linear

Penduga sintetik berbasis model linear untuk proporsi mengikuti model berikut (Arrieta, 2008):

$$p_i = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \qquad (1)$$

dengan

p_i adalah proporsi sukses pada area kecil ke-i

$\mathbf{x}$ adalah $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ vektor peubah penyerta yang diperoleh dari data populasi

ε_i adalah galat yang bersifat acak, $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$.

Penduga untuk masing-masing area kecil ke-i diperoleh berikut

$$\hat{p}_i = \mathbf{x}^T \mathbf{b} \tag{2}$$

dengan $\mathbf{b} = \left(\mathbf{x}^T \mathbf{x}\right)^{-1} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{y}\right)$.

4. Pendugaan Sintetik Berbasis Model Logit

Penduga sintetik berbasis model logit untuk proporsi mengikuti model berikut (Arrieta, 2008):

$$\text{logit}\left(p_i\right) = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} \tag{3}$$

dengan

p_i adalah proporsi sukses pada area kecil ke-i

$\mathbf{x}$ adalah $\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\right)$vektor peubah penyerta yang diperoleh dari data populasi

Penduga untuk masing-masing area kecil ke-i diperoleh berikut

$$\hat{p}_i = \frac{\exp\left(\mathbf{x}^T \mathbf{b}\right)}{1+\exp\left(\mathbf{x}^T \mathbf{b}\right)} \tag{4}$$

5. Pendugaan Sintetik Berbasis Model Logit dengan Pengaruh Acak Area

Penduga sintetik berbasis model logit dengan pengaruh acak area untuk proporsi mengikuti model berikut (Arrieta, 2008):

$$\text{logit}\left(p_i\right) = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} + u_i \tag{5}$$

dengan

p_i adalah proporsi sukses pada area kecil ke-i

u_i adalah pengaruh acak area kecil ke-i, $u_i \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_u^2\right)$

$\mathbf{x}$ adalah $\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\right)$vektor peubah penyerta yang diperoleh dari data populasi

Penduga *Empirical Bayes* untuk masing-masing area kecil ke-i diperoleh berikut

$$\hat{p}_i = \frac{\exp\left[\left(\mathbf{x}^T \mathbf{b}\right) + \hat{u}_i\right]}{1+\exp\left[\left(\mathbf{x}^T \mathbf{b}\right) + \hat{u}_i\right]} \tag{6}$$

6. Pendugaan Komposit

Penduga komposit untuk proporsi diperoleh dengan memboboti penduga langsung dengan penduga tak langsung (sintetik) dengan pembobot dari Ghosh & Maiti (2004) yaitu

$$w_i = \frac{1}{1+\lambda/n_i} \tag{7}$$

Menurut Sinha (2004), nilai λ yang sering digunakan adalah 0.5 atau 1.

Tabel 1. Penduga Komposit untuk Proporsi

	Penduga Komposit
Model Linear	$\hat{p}_i = w_i \frac{y_i}{n_i} + (1-w_i)\mathbf{x}^T\mathbf{b}$
Model Logit	$\hat{p}_i = w_i \frac{y_i}{n_i} + (1-w_i)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}^T\mathbf{b})}{1+\exp(\mathbf{x}^T\mathbf{b})}\right)$
Model Logit dengan Pengaruh Acak Area	$\hat{p}_i = w_i \frac{y_i}{n_i} + (1-w_i)\left(\frac{\exp[(\mathbf{x}^T\mathbf{b})+\hat{u}_i]}{1+\exp[(\mathbf{x}^T\mathbf{b})+\hat{u}_i]}\right)$

7. Analisis Data

Data yang diamati adalah data sekunder tentang status kepemilikan kartu sehat yang diperoleh dari Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) 2003 dengan materi informasi berbasis rumahtangga dan PODES 2003. Data ini diambil dari 14 kecamatan di kota Yogyakarta. Peubah yang menjadi perhatian adalah proporsi status kepemilikan kartu sehat, peubah pengamatan y_i adalah jumlah rumahtangga pemilik kartu sehat pada kecamatan ke-*i*, dan n_i adalah jumlah rumahtangga pada kecamatan ke-*i*. Peubah penyertanya adalah peubah-peubah yang diasumsikan mempengaruhi proporsi status kepemilikan kartu sehat pada suatu area, meliputi: persentase rumah tangga prasejahtera dan sejahtera 1, persentase rumah tangga pelanggan listrik PLN, dan persentase rumah tangga pelanggan telepon.

Analisis menggunakan SAS 9.1 meliputi: MS EXCEL untuk memperoleh penduga proporsi, PROC GENMOD untuk mendapatkan **b** untuk model linear dan model logit, PROC GLIMMIX untuk mendapatkan **b** dan $\hat{u}_i$ untuk model logit dengan pengaruh acak area.

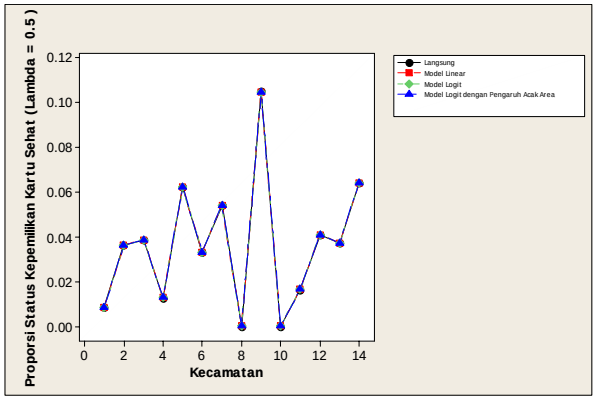
Tabel 2. Pendugaan Proporsi Status Kepemilikan Kartu Sehat ($\lambda = 0.5$)

No	Kecamatan	n_i	y_i	Penduga			
				Langsung	Model Linear	Model Logit	Model Logit dengan Pengaruh Acak Area
1	Mantrijeron	117	1	0.0085	0.0087	0.0087	0.0087
2	Kraton	110	4	0.0364	0.0364	0.0364	0.0364
3	Mergangsan	180	7	0.0389	0.0389	0.0389	0.0389
4	Umbulharjo	307	4	0.0130	0.0130	0.0130	0.0131
5	Kotagede	128	8	0.0625	0.0624	0.0624	0.0625
6	Gondokusuman	270	9	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333
7	Danurejan	129	7	0.0543	0.0542	0.0542	0.0543
8	Pakualaman	62	0	**0.0000**	**0.0003**	**0.0003**	**0.0004**
9	Gondomanan	57	6	0.1053	0.1047	0.1047	0.1048
10	Ngampilan	41	0	**0.0000**	**0.0005**	**0.0005**	**0.0007**
11	Wirobrajan	120	2	0.0167	0.0168	0.0168	0.0168
12	Gedongtengen	97	4	0.0412	0.0412	0.0412	0.0412
13	Jetis	161	6	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373
14	Tegalrejo	202	13	0.0644	0.0643	0.0643	0.0643

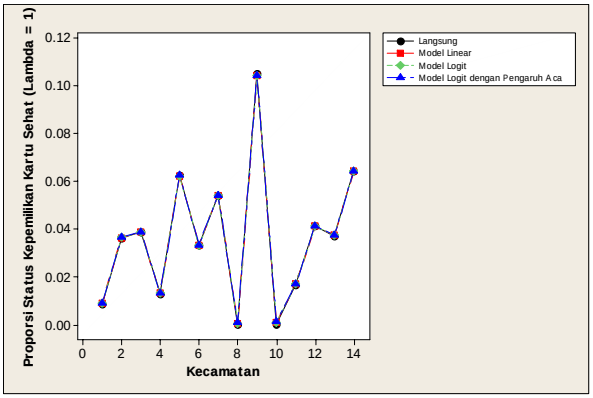
Tabel 3. Pendugaan Proporsi Status Kepemilikan Kartu Sehat ($\lambda = 1$)

No	Kecamatan	n_i	y_i	Penduga			
				Langsung	Model Linear	Model Logit	Model Logit dengan Pengaruh Acak Area
1	Mantrijeron	117	1	0.0085	0.0088	0.0088	0.0089
2	Kraton	110	4	0.0364	0.0364	0.0364	0.0365
3	Mergangsan	180	7	0.0389	0.0389	0.0389	0.0390
4	Umbulharjo	307	4	0.0130	0.0131	0.0130	0.0131
5	Kotagede	128	8	0.0625	0.0623	0.0623	0.0624
6	Gondokusuman	270	9	0.0333	0.0333	0.0333	0.0334
7	Danurejan	129	7	0.0543	0.0542	0.0542	0.0542
8	Pakualaman	62	0	**0.0000**	**0.0007**	**0.0007**	**0.0008**
9	Gondomanan	57	6	0.1053	0.1042	0.1042	0.1044
10	Ngampilan	41	0	**0.0000**	**0.0010**	**0.0011**	**0.0013**
11	Wirobrajan	120	2	0.0167	0.0169	0.0169	0.0170
12	Gedongtengen	97	4	0.0412	0.0412	0.0411	0.0412
13	Jetis	161	6	0.0373	0.0373	0.0373	0.0373
14	Tegalrejo	202	13	0.0644	0.0642	0.0642	0.0643

Secara umum dari Tabel 2 dan Tabel 3 dapat dilihat bahwa penduga proporsi status kepemilikan kartu sehat dari penduga komposit berbasis model linear, berbasis model logit dan berbasis model logit dengan pengaruh acak area relatif sama. Bahkan relatif sama dengan penduga langsung, kecuali untuk kecamatan Pakualaman dan Ngampilan. Pada kecamatan Pakualaman dan Ngampilan, dari jumlah sampel (rumahtangga) yang terpilih, jumlah rumahtangga pemilik kartu sehat tidak ada (nol) sehingga penduga langsung untuk proporsi status kepemilikan kartu sehat bernilai nol, padahal belum tentu di kecamatan tersebut semua rumahtangga tidak memiliki kartu sehat.



Gambar 1. Plot Proporsi Status Kepemilikan Kartu Sehat untuk Masing-masing Kecamatan (λ=0.5)



Gambar 2. Plot Proporsi Status Kepemilikan Kartu Sehat untuk Masing-masing Kecamatan (λ=1)

Dari Gambar 1 dan Gambar 2 dapat diketahui bahwa penduga komposit berbasis model linear, berbasis model logit dan berbasis model logit dengan pengaruh acak area relatif sama dengan penduga langsung yang ditunjukkan oleh titik-titik dan garis-garis yang berhimpit, hal ini dapat disebabkan oleh peubah-peubah penyerta yang dipilih kurang memberikan pengaruh terhadap peubah pengamatan.

8. Simpulan

Small area estimation untuk kasus biner dengan pendugaan komposit berbasis model linear, berbasis model logit dan berbasis model logit dengan pengaruh acak area mampu memberikan hasil pendugaan pada area yang apabila dengan pendugaan langsung diperoleh penduga sebesar nol. Penduga komposit berbasis model linear, berbasis model logit, berbasis model logit dengan pengaruh acak area akan memberikan hasil yang relatif sama dengan penduga langsung diantaranya disebabkan oleh pemilihan peubah penyerta yang kurang berpengaruh terhadap peubah pengamatan.

9. Daftar Pustaka

Arrieta JI. 2008. Small-area extimation in the survey of the population in relation to activity in the A.C. of the basque country. www.eustat.es.

Ghosh M & Rao JNK. 1994. Small area estimation: an appraisal. *Statistical Science* 9: 55-76.

Ghosh M, Maiti T. 2004. Small-area estimation based on natural exponential family quadratic variance function models and survey weights. *Biometrika* 91: 95-112.

Rao JNK. 1999. Some recent advances in model-based small area estimation. *Survey Methodology* 25: 175-186.

Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Sinha K. 2004. Some contributions to small area estimation. Unpublished Ph.D. Dissertation. Florida: University of Florida.

Pendugaan Komponen Utama pada Pengaruh Acak Model Linear Campuran Terampat

Mohammad Masjkur
Departemen Statistika, FMIPA-IPB

Abstrak

Model linear campuran terampat (*generalized linear mixed model*) merupakan model yang memberikan ekstra flexibilitas dalam pengembangan model yang sesuai bagi data, sedangkan analisis komponen utama merupakan teknik 'reduksi dimensi' data yang terandalkan. Tujuan penelitian ini adalah mengetahui pendugaan komponen utama pada pengaruh acak model linear campuran terampat dan membandingkannya dengan model linear campuran terampat berdasarkan data asli. Penelitian ini menggunakan data percobaan lapangan pemupukan P padi sawah pada enam lokasi. Percobaan lapangan menggunakan rancangan acak kelompok (RAK) dengan 4 ulangan. Perlakuan terdiri dari 5 tingkat pupuk P yaitu : 0, 23, 46, 69, dan 115 kg P_2O_5/ha. Peubah respons yang diamati ialah serapan P tanaman pada saat panen. Sifat-sifat tanah yang diukur terdiri dari : pH H_2O, C organik, P-H2O, Pi-NaHCO3, Pi-NaOH, P-HCl25, P-Truog, P-Olsen, P-Bray1, dan P-Mehlich 1. Model linear campuran terampat digunakan untuk menduga respons serapan P padi sawah terhadap pengaruh pemupukan P dan sifat-sifat tanah. Faktor pemupukan sebagai pengaruh tetap (*fixed effect*) dan sifat-sifat tanah sebagai pengaruh acak (*random effect*). Pada model pertama, hanya pengaruh acak sisaan digunakan (*the residual only model*) atau model tetap. Pada model kedua, pengaruh acak sifat-sifat tanah dimasukkan dalam model. Pada model ketiga dan seterusnya, komponen utama pengaruh acak dimasukkan secara sekuensial ke dalam model. Keterandalan model diuji dengan membandingkan pada model dengan hanya pengaruh acak sisaan menggunakan uji $\chi 2$ *deviance.* Kebaikan suai model juga dievaluasi menggunakan kriteria informasi Bayesian (*BIC*) dan Akaike (*AIC* dan *AICC*). Hasil penelitian menunjukkan bahwa data kasus serapan P terdiri dari dua kelompok sebaran (bimodus), yaitu kelompok serapan P rendah dan kelompok serapan P tinggi, masing-masing menyebar normal. Pada kelompok serapan P rendah dan kelompok serapan P tinggi, model campuran berdasarkan komponen utama lebih terandalkan daripada model campuran berdasarkan data asli dan model tetap.

Kata kunci : model linear campuran terampat (*generalized linear mixed model*), pengaruh tetap (*fixed effect*), pengaruh acak (*random effect*), komponen utama (*principal component*)

PENDAHULUAN

Berkembangnya konsep pertanian spesifik lokasi (*site specific farming*) memungkinkan bahwa dosis optimum pemupukan tanaman bervariasi tergantung pada lokasi yang bersangkutan. Oleh karena itu, sehubungan dengan pengembangan rekomendasi pemupukan spesifik lokasi, biasanya dilakukan percobaan pemupukan lokasi ganda (*multilocation trials*).

Dalam percobaan pemupukan lokasi ganda, selain pengaruh faktor pemupukan dapat diketahui juga pengaruh interaksi pemupukan dengan lokasi atau dapat diketahui juga pengaruh faktor-faktor spesifik lokasi seperti sifat-sifat lingkungan dari lokasi tersebut. Dengan demikian dapat disusun suatu model umum rekomendasi pemupukan yang mempertimbangkan informasi spesifik lokasi (Kastens et al., 2003).

Model umum repons tanaman dengan faktor pemupukan dan sifat-sifat lingkungan biasanya menggunakan model linear campuran klasik dengan respons tanaman sebagai peubah tak bebas (y) dan faktor pemupukan sebagai pengaruh tetap (*fixed effect*) serta sifat-sifat lingkungan sebagai pengaruh acak (*random effect*). Asumsi yang mendasari model linear campuran klasik adalah bahwa hubungan antara rataan peubah tak bebas y dengan pengaruh tetap dan acak dapat dimodelkan sebagai fungsi linear, ragam bukan merupakan fungsi dari rataan, dan pengaruh acak mengikuti sebaran normal (Cnaan et al., 1997; Kachman, 2008). Namun pada kenyataannya sebagian atau semua dari asumsi-asumsi ini jarang terpenuhi.

Beberapa pendekatan biasanya dilakukan untuk mengatasi kekurangan model linear campuran klasik. Transformasi digunakan untuk menstabilkan ragam, mendapatkan hubungan linear, dan menormalkan sebaran. Namun demikian, transformasi diperlukan untuk menstabilkan ragam belum tentu sama dengan transformasi diperlukan untuk mendapatkan hubungan linear. Misalnya, transformasi log untuk menstabilkan ragam mempunyai efek samping bahwa model pada skala asli multiplikatif (Kachman, 2008). Hal ini dapat mengakibatkan model linear campuran yang kita dapatkan kurang tepat.

Model linear campuran terampat (*generalized linear mixed model*) merupakan model yang memberikan ekstra flexibilitas dalam pengembangan model yang sesuai bagi data, yang tidak memenuhi asumsi model linear campuran klasik, sehingga peneliti

lebih fokus pada pemilihan model-model dan kebaikan suainya (*goodness of fit*) (Kachman, 2008; Schabenberger, 2008).

Pada beberapa keadaan, sifat-sifat lingkungan dari lokasi percobaan yang dapat dipertimbangkan mempengaruhi respons tanaman berkorelasi satu sama lain. Menurut Weisberg (1985) peubah-peubah prediktor yang berkorelasi satu sama lain dapat menyebabkan ragam yang besar dari koefisien-koefisien model dan kurang tepat dalam identifikasi prediktor paling penting.

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk mengatasi hal ini adalah dengan menggunakan analisis komponen utama. Teknik statistika peubah ganda ini mentrasformasi gugus data asli menjadi gugus kombinasi linear peubah-peubah asli. Peubah-peubah baru yang tidak berkorelasi yakni komponen utama, mewakili sebagian besar keragaman data asli. Selanjutnya komponen-komponen utama tersebut digunakan sebagai prediktor membentuk regresi komponen utama (Chang et al., 2001; Shukla et al., 2004). Sousa et al. (2006) mendapatkan bahwa regresi linear berganda berdasarkan komponen utama lebih baik daripada regresi linear berganda berdasarkan data asli. Meyer dan Kirkpatrick (2005) mendapatkan bahwa penggunaan komponen utama pada pengaruh acak genetik dapat mengurangi jumlah parameter yang diduga dan ragam contoh (*sampling variation*).

Tujuan penelitian ini adalah mengetahui pendugaan komponen utama pada pengaruh acak model linear campuran terampat dan membandingkannya dengan model linear campuran terampat berdasarkan data asli.

TINJAUAN PUSTAKA

Model Linear Campuran Terampat

Model linear campuran terampat (GLMM) merupakan model statistika yang mengembangkan kelas model linear terampat (*generalized linear model*) dengan memasukkan pengaruh-pengaruh acak yang menyebar normal. Model linear terampat (GLM) dapat didefinisikan dalam beberapa komponen model :

1. prediktor linear η yang merupakan kombinasi linear dari koefisien-koefisien regresi :

$\eta_i = x'_i \beta$

2. fungsi hubung (*link function*) g (.) yang menghubungkan rataan data dengan prediktor linear :

$g\,[\mathrm{E}(Yi)] = \eta_i$

3. sebaran respons Yi berasal dari sebaran keluarga eksponensial (*exponential family distributions*) (McCullagh dan Nelder, 1983; Dobson, 2002).

Sebaran keluarga eksponensial sangat luas dan terdiri dari beberapa sebaran penting. Misalnya, biner, binom, Poisson, binom negatif, normal, beta, gamma merupakan anggota-anggota keluarga ini. Kasus khusus dari model linear terampat adalah jika Yi menyebar normal dan fungsi hubung adalah fungsi identitas. Model yang didapatkan adalah regresi linear dan analisis ragam dari model dengan sisaan normal.

Model linear terampat (GLM) digunakan jika data tidak berkorelasi, sedangkan dalam beberapa penelitian didapatkan bahwa pengamatan-pengamatan berkorelasi satu sama lain. Model linear campuran terampat mengembangkan model linear terampat dengan memasukkan korelasi diantara respons, yaitu dengan meliputi pengaruh-pengaruh acak pada prediktor linear dan/atau memodelkan korelasi diantara data secara langsung (Schabenberger, 2008).

Model linear campuran terampat dirumuskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}u + \varepsilon \qquad (1)$$

dimana $\boldsymbol{y}$ vektor N pengamatan, β vektor pengaruh tetap, u vektor pengaruh acak, ε vektor sisaan, X dan Z adalah matriks rancangan. Pengaruh acak u menyebar Normal dengan rataan 0 dan matriks ragam **G**. Sebaran dari sisaan ε adalah normal dengan rataan 0 dan ragam **R.**

Model linear campuran terampat meliputi juga prediktor linear, η, dan fungsi hubung dan/atau hubung (kebalikan) (*inverse link function*). Rataan bersyarat, μ , tergantung pada prediktor linear melalui fungsi hubung dan/atau hubung (kebalikan), h (.), dan matriks peragam R, tergantung pada μ melalui fungsi ragam (Tempelman, 1998; Kachman, 2008).

Prediktor Linear

Dalam model linear campuran terampat pengaruh tetap dan pengaruh acak digabung untuk membentuk prediktor linear sebagai berikut :

$\eta = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}u$

(2)

sehingga $\boldsymbol{y} = \eta + \varepsilon$.

Secara ekivalen, keragaman sisaan dapat dimodelkan sebagai,

$\boldsymbol{y} \mid u \sim \mathrm{N}(\eta, \mathrm{R})$

Hubungan antara prediktor linear dan vektor pengamatan pada model linear campuran terampat dimodelkan sebagai,

$\boldsymbol{y} \mid u \sim \mathrm{N}(h(\eta), \mathrm{R})$

dimana notasi $\boldsymbol{y} \mid u \sim \mathrm{N}(h(\eta), \mathrm{R})$ menunjukkan bahwa sebaran bersyarat y bila diketahui u mempunyai rataan, $h(\eta)$, dan ragam, **R**. Sebaran bersyarat y bila diketahui u menunjukkan sebaran sisaan.

3.3. Fungsi Hubung Kebalikan

Fungsi hubung kebalikan merupakan fungsi nilai prediktor linear pada pengamatan i, η_i , terhadap rataan bersyarat pengamatan i, μ_i. Pemilihan fungsi hubung kebalikan biasanya berdasarkan pada sebaran sisaan. Tabel 1 menunjukkan beberapa sebaran dan fungsi hubungnya.

Tabel 1. Fungsi hubung dan fungsi ragam dari beberapa sebaran

Sebaran	Hubung	Hubung Kebalikan	$\upsilon(\mu)$
Normal	Identitas	η	1
Binomial/n	Logit	$e^{\eta} = (1 + e^{\eta})$	$\mu (1 - \mu)/n$
	Probit	$\Phi(\eta)$	
Poisson	Log	e^{η}	μ
Gamma	Inverse	$1/\eta$	μ^2
	Log	e^{η}	

Pendugaan Parameter

Pendekatan pendugaan model linear campuran terampat umumnya berdasarkan prinsip kemungkinan (*likelihood principle*). Misalnya, untuk mendapatkan dugaan kemungkinan maksimum, perlu memaksimumkan kemungkinan marjinal

$L(\beta, \theta, y) = \int f(y|u)\, p(u)\, du$

dimana $f(y|u)$ sebaran bersyarat dari data, dan $p(u)$ sebaran pengaruh acak.

Kachman (2008) mengemukakan persamaan pendugaan pengaruh tetap dan acak model linear campuran terampat adalah :

$$\begin{bmatrix} X'H'R^{-1}HX & X'H'R^{-1}HZ \\ Z'H'R^{-1}HZ & Z'H'R^{-1}HZ + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'H'R^{-1}y^* \\ Z'H'R^{-1}y^* \end{bmatrix}$$

(3)

dimana $\mathbf{H} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta^l}$

$\boldsymbol{R} = var\ (y|u)$

$y^* = y - \mu + H\eta$

Reparameterisasi

Misalkan matriks peragam Σ, dengan dimensi k x k. Penguraian nilai ciri dari Σ adalah

$\Sigma = E\ \Lambda\ E'$

dengan Λ matriks diagonal nilai ciri Σ, λ*i* untuk *i* = 1, . . . , *k*, dan **E** = (**e**1|**e**2| . . . |**e***k*) matriks vektor ciri **e***i*. Bagi nilai ciri tertentu λ*i*, **e***i* yang bersesuaian ditentukan secara proporsional. Prosedur baku bagi penguraian nilai ciri biasanya menunjukkan juga **e***i* dibakukan terhadap panjang satuan, sehingga **E** adalah ortonormal. Nilai ciri dan vektor ciri biasanya diberikan dalam urutan menurun dari besaran λ*i*.

Jika Σ menunjukkan matriks peragam dari vektor peubah-peubah **v**, fungsi linear $\mathbf{e'}_1\mathbf{v}$ dengan ragam λ_1 merupakan kombinasi peubah-peubah asli yang menerangkan keragaman maksimum. Hal yang sama, dengan **E** ortogonal, **E**'**v** dengan matriks peragam Λ memberikan *k* peubah-peubah tidak berkorelasi dengan peubah baru ke-i menerangkan sebagian besar keragaman berurutan dari 1 sampai *i* − 1. Jika kita mempertimbangkan hanya *m* vektor ciri pertama, kita akan mendapatkan *m* kombinasi linear $\mathbf{E'}_m\mathbf{v}$ mencakup maksimum keragaman asal (dengan **E***m* adalah sub-matriks *k* ×*m* dari kolom-kolom 1, . . . ,*m* dari **E**). Hal ini merupakan prinsip penggunaan komponen utama sebagai teknik 'pengurangan dimensi'. Jika λ*m*+1, . . . , λ*k* dekat dengan nol, matriks

$\Sigma^* = \mathbf{E}_m\mathbf{\Lambda}_m\mathbf{E'}_m = \Sigma i\ \lambda i \mathbf{e} i \mathbf{e} i'$

dengan Λ*m* merupakan submatriks Λ bersesuaian dengan **E***m*, merupakan pendekatan dari Σ yang mempunyai pangkat *m* dan dimuluskan (*smoothed*).

Dengan asumsi Σ di atas merupakan $\Sigma u,$, maka kita dapat melakukan reparametrisasi model (1) menjadi

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\circ u\circ + \varepsilon \quad (4)$$

dengan $Var\ (u\circ) = \mathbf{U} \times \Lambda m = \mathbf{G^*}$. Untuk $m = k$, model (4) sama dengan model (1). Jika tidak, yaitu untuk m < k, hal tersebut mereduksi dimensi, dengan mempertimbangkan hanya m komponen utama pertama (Meyer dan Kirkpatrick, 2005).

DATA DAN METODE

Data

Penelitian ini menggunakan data percobaan lapangan pemupukan P padi sawah pada beberapa lokasi. Penelitian dilaksanakan pada tiga lokasi lahan sawah Lampung dan tiga lokasi lahan sawah Jawa Timur pada musim tanam 2005/2006.

Percobaan lapangan menggunakan rancangan acak kelompok (RAK) dengan 4 ulangan. Perlakuan terdiri dari 5 tingkat pupuk P yaitu : 0, 23, 46, 69, dan 115 kg P_2O_5/ha menggunakan SP36. Sebagai pupuk dasar ditambah pupuk urea 300 kg/ha dan 150 kg KCl/ha. Tanaman indikator digunakan padi VUTB *var*. Fatmawati. Peubah yang diamati ialah serapan P tanaman pada saat panen.

Sifat-sifat tanah yang diukur terdiri dari : pH H_2O, C organik, P-H2O, Pi-NaHCO3, Pi-NaOH, P-HCl25, P-Truog, P-Olsen, P-Bray1, dan P-Mehlich 1.

Metode

Model linear campuran terampat digunakan untuk menduga respons serapan P padi sawah terhadap pengaruh pemupukan P dan sifat-sifat tanah. Faktor pemupukan diasumsikan sebagai pengaruh tetap (*fixed effect*) dan sifat-sifat tanah sebagai pengaruh acak (*random effect*). Pada model pertama, hanya pengaruh acak sisaan digunakan (*the residual only model*) atau model tetap. Pada model kedua, pengaruh acak sifat-sifat tanah dimasukkan dalam model. Pada model ketiga dan seterusnya, komponen utama pengaruh acak dimasukkan secara sekuensial ke dalam model. Keterandalan model diuji dengan membandingkan pada model dengan hanya pengaruh acak sisaan menggunakan uji $\chi 2$ *deviance*. Uji $\chi 2$ *deviance* membandingkan perbedaan antara nilai negatif *log-likelihood* dari dua model dengan nilai kritis sebaran $\chi 2$ dengan derajat bebas sama dengan perbedaan jumlah parameter pada dua model. Kebaikan suai model juga dievaluasi menggunakan kriteria informasi Bayesian (*Bayesian Information Criterion (BIC)*) dan Akaike (*Akaike Information Criterion (AIC)* dan *(AICC)*).

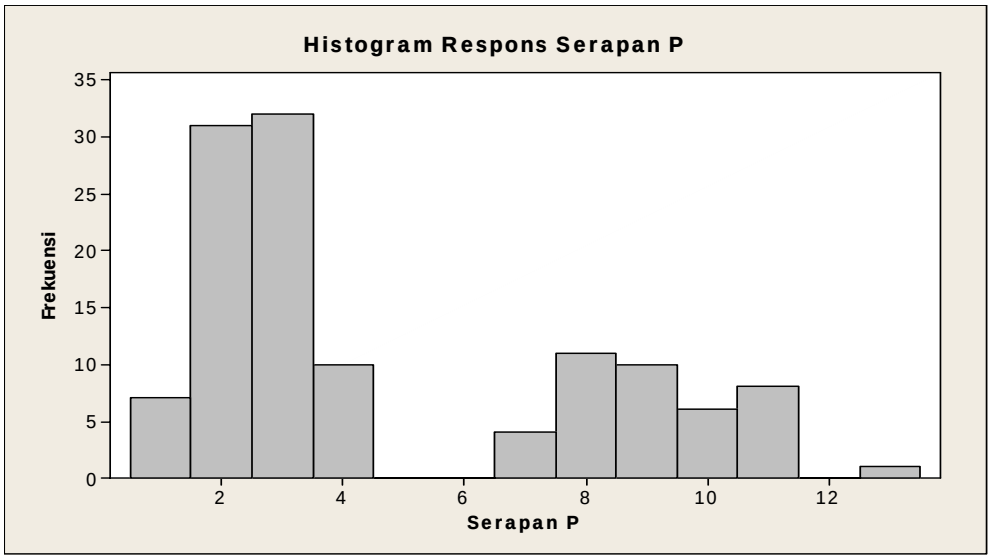
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemeriksaan Sebaran Data

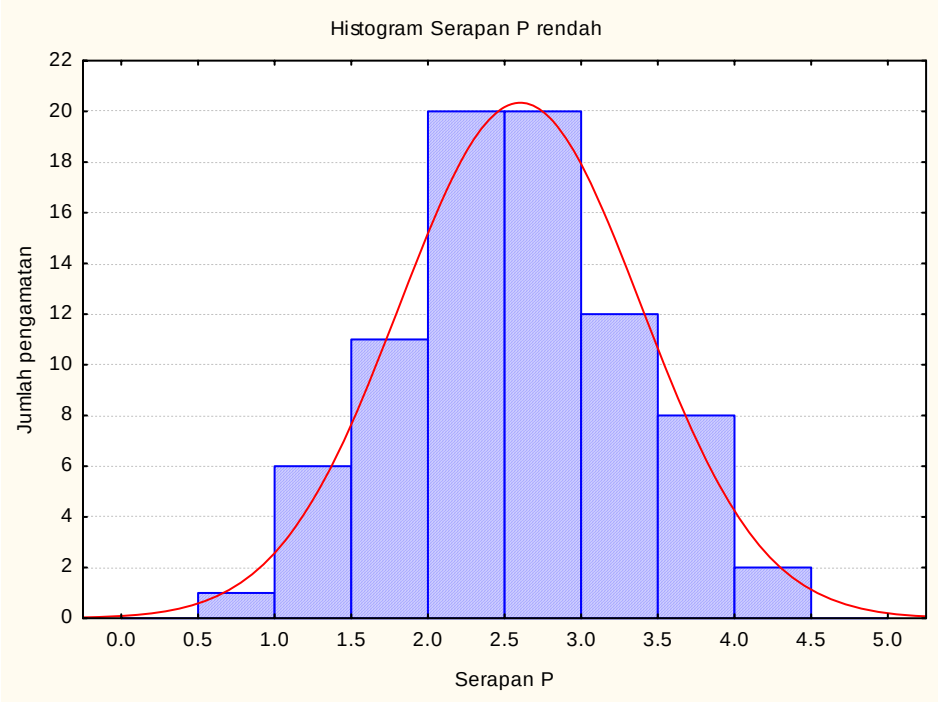
Histogram data respons serapan P pada enam lokasi dapat dilihat pada Gambar 1. Gambar 1 menunjukkan bahwa sebaran data serapan P nampaknya terdiri dari dua kelompok sebaran (bimodus). Sebaran kelompok pertama (sebelah kiri) mempunyai serapan P lebih rendah dari sebaran kelompok kedua (sebelah kanan). Untuk selanjutnya sebaran pertama dinamakan kelompok serapan P rendah, sedangkan sebaran kedua merupakan kelompok serapan P tinggi.

Histogram serapan P rendah dengan *superimposed* kurva normal terdapat pada Gambar 2, sedangkan serapan P tinggi terdapat pada Gambar 3. Gambar 2 dan 3 menunjukkan bahwa sebaran data serapan P rendah dan tinggi nampaknya menyebar normal. Hal ini terlihat dari bentuk sebaran yang relatif simetrik. Plot peluang normal dari data menunjukkan mendekati garis lurus yang berarti bahwa data menyebar normal. Hal ini juga didukung oleh hasil uji kenormalan Kolmogorov-Smirnov yang menunjukkan data menyebar normal dengan *p-value* keduanya >0,15 (Gambar 4 dan 5).

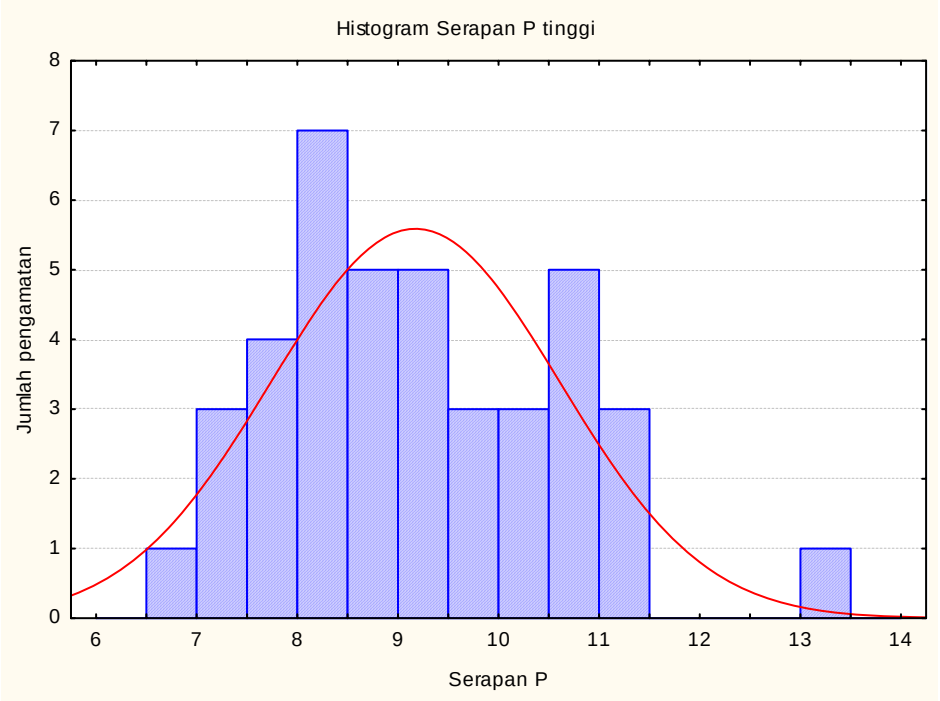
Respons serapan P rendah berkisar dari nilai minimum 0,84 sampai maksimum 4,39 dengan rataan 2,59 dan simpangan baku 0,78, sedangkan serapan P tinggi berkisar dari nilai minimum 6,92 sampai maksimum 13,16 dengan rataan 9,16 dan simpangan baku 1,43.



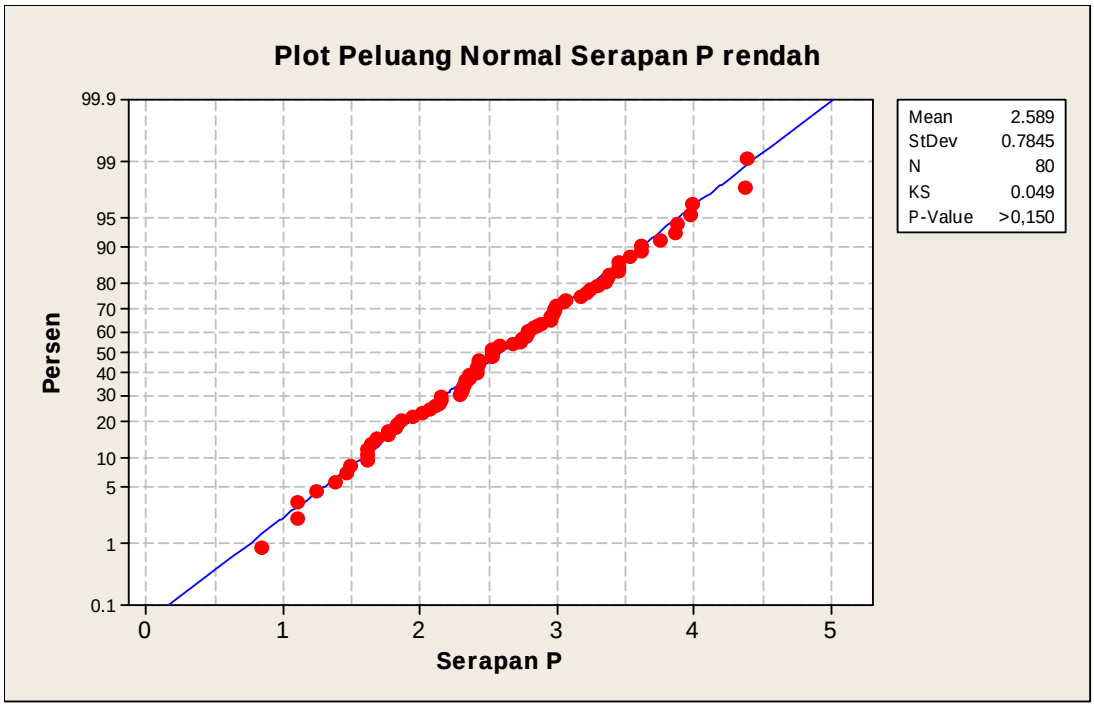
Gambar 1. Histogram respons serapan P (data keseluruhan)



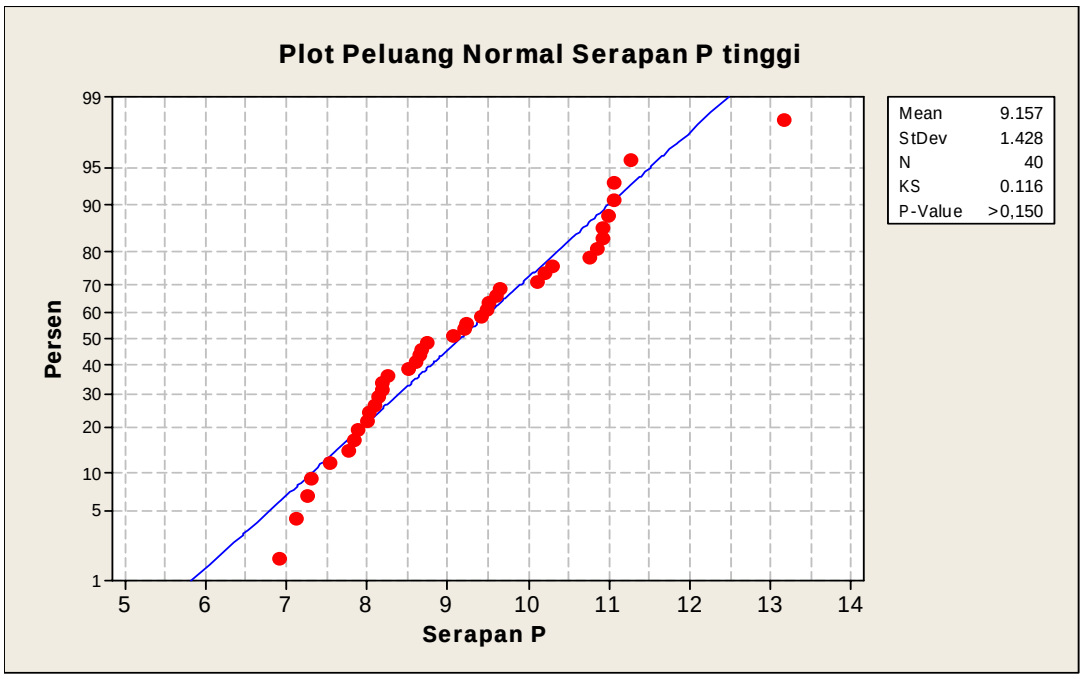
Gambar 2. Histogram respons serapan P rendah



Gambar 3. Histogram respons serapan P tinggi



Gambar 4. Plot peluang normal respons serapan P rendah



Gambar 5. Plot peluang normal respons serapan P tinggi

Pemeriksaan Korelasi Antar Peubah Sifat Tanah dan Serapan P

Hasil analisis korelasi antar peubah sifat tanah dan respons serapan P pada kelompok serapan P rendah dan tinggi masing-masing dapat dilihat pada Tabel Lampiran 1 dan 2.

Tabel Lampiran 1 menunjukkan adanya korelasi (kolinearitas) antar sifat-sifat tanah. pH H2O berkorelasi positif nyata dengan P-H2O (0,66*); berkorelasi negatif nyata dengan Pi-NaHCO3, P-Truog, P-Olsen, P-Bray1 dan P-Mehlich (masing-masing -0,61*, -0,71*, -0,81**, -0,67*, dan -0,71*). C-organik berkorelasi nyata dengan P-H_2O, Pi-NaC, P-Tru, P-Ols, Pi-NaOH dan Pi-NaO. P-H_2O berkorelasi nyata dengan P-NaCl, P-Tru, P-Ols, P-Meh pada taraf α = 1% dan P-NaOl pada taraf α = 5%. Pi-NaC berkorelasi nyata dengan P-Cl, P-Tru, P-Ols pada taraf α = 1% dan P-NaOl pada taraf α = 5%. Adapun sifat tanah yang berkorelasi nyata dengan serapan P adalah C organik dan P-H2O (positif), Pi-NaHCO3, Pi-NaOH, P-Truog, P-Olsen, dan P-Mehlich 1 (negatif).

Tabel Lampiran 2 menunjukkan bahwa pada kelompok serapan P tinggi juga terdapat korelasi (kolinearitas) antar sifat-sifat tanah. pH H2O berkorelasi positif nyata dengan Pi-NaHCO3, P-HCl 25%, P-Truog, P-Olsen, P-Bray1 dan P-Mehlich. Pi-NaHCO3 berkorelasi positif nyata dengan P-HCl 25%, P-Olsen, P-Bray 1, dan P-Mehlich 1. Sifat tanah yang diukur pH H2O, Pi-NaHCO3, P-HCl 25%, P-Truog, P-Olsen, P-Bray 1, dan P-Mehlich 1 semuanya berkorelasi positif nyata dengan serapan P.

Analisis Komponen Utama

Tabel 1 dan 2 menunjukkan matriks pembobot komponen utama pada kelompok serapan P rendah dan tinggi, yang mencerminkan hubungan relatif masing-masing peubah sifat-sifat tanah pada tiap komponen utama.

Pada pada kelompok serapan P rendah, dua komponen utama pertama mempunyai nilai ciri lebih besar dari 1, menerangkan 83,50 persen keragaman total ragam. Adapun pada kelompok serapan P tinggi, komponen utama pertama mempunyai nilai ciri lebih besar dari 1, menerangkan 91,00 persen keragaman total ragam.

Tabel 1. Matriks pembobot komponen utama, nilai cirri dan proporsi keragaman total kelompok
serapan P rendah

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
pHH	0.32	-0.15	-0.50	-0.01	-0.66	0.36	0.05	0.03	0.03	-0.23
C-org	0.29	0.15	0.25	-0.89	-0.12	-0.10	-0.05	0.10	-0.03	-0.01
P-H2O	0.37	0.06	0.01	-0.01	0.49	0.57	0.51	0.15	0.07	0.10
P-NaCI	-0.33	-0.31	0.21	-0.14	-0.02	0.64	-0.49	0.09	-0.07	0.26
P-NaOI	-0.27	-0.22	-0.72	-0.38	0.43	-0.09	-0.06	-0.08	0.06	-0.05
P-Cl	-0.14	-0.61	0.28	-0.10	-0.01	-0.02	0.40	-0.25	-0.39	-0.38
P-Tru	-0.39	0.06	-0.13	-0.07	-0.25	-0.09	0.43	0.55	-0.32	0.40
P-Ols	-0.39	-0.03	0.17	-0.08	-0.10	0.05	0.22	0.25	0.75	-0.36
P-Br	-0.25	0.53	-0.04	0.00	0.11	0.23	-0.12	0.16	-0.41	-0.62
P-Meh	-0.32	0.38	-0.02	-0.15	-0.20	0.22	0.28	-0.71	0.06	0.23
Nilai ciri	6.21	2.14	0.63	0.47	0.29	0.12	0.08	0.03	0.02	0.01
Proporsi (%)	62.1 0	83.5 0	89.8 0	94.5 0	97.5 0	98.7 0	99.4 0	99.7 0	99.9 0	100.0 0

Tabel 2. Matriks pembobot komponen utama, nilai cirri dan proporsi keragaman total kelompok serapan P tinggi

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
pHH	-0.39	0.08	0.44	0.25	0.67	0.27	-0.25
P-NaCI	-0.35	-0.56	-0.66	0.17	0.27	-0.13	-0.04
P-Cl	-0.39	-0.25	0.13	-0.44	-0.42	0.21	-0.59
P-Tru	-0.36	0.57	-0.46	0.04	-0.14	0.54	0.16
P-Ols	-0.39	-0.27	0.28	-0.39	0.00	0.08	0.74
P-Br	-0.39	-0.02	0.23	0.69	-0.51	-0.24	0.08
P-Meh	-0.37	0.47	-0.07	-0.31	0.15	-0.72	-0.09
Nilai ciri	6.37	0.47	0.13	0.02	0.01	0.01	0.00
Proporsi (%)	91.00	97.60	99.50	99.70	99.90	100.00	100.00

Hasil rotasi komponen utama menunjukkan bahwa pada kelompok serapan P rendah, komponen utama pertama nampaknya berkorelasi positif dengan P-Truog, P-Olsen, P-Bray 1, dan P-Mehlich 1 atau merupakan komponen P-tersedia, sedangkan komponen utama kedua berkorelasi negatif dengan Pi-NaHCO3 dan P-HCl 25% atau komponen Pi-NaHCO3 dan P-HCl. Komponen utama ketiga, keempat dan kelima masing-masing berkorelasi negatif dengan C organik, Pi-NaOH dan pH H2O (komponen C organik, Pi-NaOH dan pH H2O), sedangkan komponen utama keenam berkorelasi positif dengan P-H2O (komponen P-H2O) (Tabel Lampiran 3).

Pada kelompok serapan P tinggi, komponen utama pertama nampaknya berkorelasi positif dengan P-Truog dan P-Mehlich 1 atau merupakan komponen P-Truog dan P-Mehlich, sedangkan komponen utama kedua berkorelasi negatif dengan Pi-NaHCO3 dan P-HCl 25% atau komponen Pi-NaHCO3 dan P-HCl. Komponen utama ketiga berkorelasi positif dengan pH H2O, P-Olsen, dan P-Bray 1 (komponen P-Olsen dan P-Bray 1) (Tabel Lampiran 4).

Perbandingan Model Campuran Berdasarkan Data Asli dengan Model Tetap

Perbandingan statistik keterandalan model campuran berdasarkan data asli dengan model tetap pada kelompok serapan P rendah dapat dilihat pada Tabel 3. Hasil uji χ^2 *deviance* menunjukkan bahwa model campuran dengan mempertimbangkan 10 (model 1) dan 2 (model 2) peubah acak sifat-sifat tanah nyata lebih baik daripada model tetap. Hal ini juga ditunjukkan oleh nilai *Bayesian Information Criterion (BIC), Akaike Information Criterion (AIC), dan Akaike Information Criterion Correction (AICC)* lebih kecil. Adapun model campuran dengan mempertimbangkan 2 peubah acak Pi-NaOH dan P-Truog lebih baik daripada model campuran dengan mempertimbangkan 10 peubah acak sifat-sifat tanah. Hal ini terlihat dari nilai AIC dan AICC lebih kecil serta jumlah parameter lebih sedikit, walaupun nilai BIC relatif sama. Dengan demikian model terbaik pada kelompok serapan P rendah adalah model campuran pemupukan P dengan peubah acak Pi-NaOH dan P-Truog.

Pada kelompok serapan P tinggi, hasil uji χ^2 *deviance* menunjukkan bahwa model campuran dengan mempertimbangkan 7 peubah acak sifat-sifat tanah (model 1) tidak lebih baik daripada model tetap. Namun demikian nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil daripada model tetap. Adapun model campuran dengan mempertimbangkan peubah acak P-Mehlich (model 2) lebih baik daripada model tetap (χ^2 hitung = 11,2 > χ^2 tabel= 3,8 pada α=5 %). Hal ini ditunjukkan oleh nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil. Adapun model campuran dengan mempertimbangkan peubah acak P-Mehlich (model 2) lebih baik daripada model campuran dengan mempertimbangkan 7 peubah acak sifat-sifat tanah, yakni jumlah parameternya lebih sedikit, walaupun nilai *AIC, AICC*, dan *BIC* relatif sama (Tabel 4).

Tabel 3. Keterandalan model campuran berdasarkan data asli pada kelompok serapan P rendah.

Model	-2 Log Likelihood	AIC	AICC	BIC	Parameter model	$\chi 2$ deviance
Model tetap	184,9	190,9	191,2	198,0	2	-
Model campuran data asli (1)	163,0	175,0	176,2	163,0	12	21,9*
Model campuran data asli (2)	163,0	173,0	173,8	163,0	4	21,9**

* Nyata pada α=5% ** Nyata pada α=1%

Tabel 4. Keterandalan model campuran berdasarkan data asli pada kelompok serapan P tinggi.

Model	-2 Log Likelihood	AIC	AICC	BIC	Parameter model	$\chi 2$ deviance
Model tetap	134,5	140,5	141,2	145,6	2	-
Model campuran data asli (1)	123,3	131,3	132,5	123,3	9	$11,2^{tn}$
Model campuran data asli (2)	123,3	131,3	132,5	123,3	3	11,2**

Perbandingan Model Campuran Berdasarkan Komponen Utama dengan Model Tetap

Perbandingan statistik keterandalan model campuran berdasarkan komponen utama dengan model tetap pada kelompok serapan P rendah dapat dilihat pada Tabel Lampiran 5. Hasil uji χ^2 *deviance* menunjukkan bahwa model campuran dengan mempertimbangkan satu, dua, tiga, empat, lima, enam, tujuh, delapan, sembilan dan sepuluh komponen utama peubah acak sifat-sifat tanah nyata lebih baik daripada model tetap. Hal ini juga ditunjukkan oleh nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil. Adapun model campuran dengan mempertimbangkan tiga komponen utama pertama (PC1, PC2 dan PC3) merupakan model terbaik. Hal ini terlihat dari nilai AIC dan AICC lebih kecil daripada 1 dan 10 komponen utama serta jumlah parameter lebih sedikit daripada 10 komponen utama dan nilai BIC lebih kecil dari 1 komponen utama.

Pada kelompok serapan P tinggi, hasil uji χ^2 *deviance* menunjukkan bahwa model campuran dengan mempertimbangkan satu, dua, tiga, empat, lima, dan enam

komponen utama peubah acak sifat-sifat tanah nyata lebih baik daripada model tetap. Hal ini juga ditunjukkan oleh nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil. Adapun penggunaan tujuh komponen utama peubah acak sifat-sifat tanah tidak lebih baik daripada model tetap. Namun demikian nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil daripada model tetap. Model campuran dengan mempertimbangkan satu komponen utama pertama merupakan model terbaik dibandingkan model komponen utama lainnya. Komponen utama pertama merupakan satu-satunya komponen utama yang nyata pada model-model tersebut. Nilai *AIC* dan *AICC* lebih kecil daripada model lainnya, walaupun nilai *BIC* relatif sama (Tabel Lampiran 6).

Perbandingan Model Campuran Berdasarkan Data Asli dengan Model Campuran Berdasarkan Komponen Utama

Keterandalan model campuran berdasarkan data asli dengan model campuran berdasarkan komponen utama pada kelompok serapan P rendah dapat dilihat pada Tabel 5. Tabel 5 menunjukkan bahwa model campuran berdasarkan komponen utama lebih baik daripada model campuran berdasarkan data asli. Hal ini terlihat dari nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil.

Pada kelompok serapan P tinggi, model campuran berdasarkan komponen utama juga lebih baik daripada model campuran berdasarkan data asli dengan nilai *BIC, AIC,* dan *AICC* lebih kecil (Tabel 6). Hal ini mungkin disebabkan karena penggunaan komponen utama pada model campuran dapat mengatasi masalah kolinearitas peubah-peubah, sehingga ragam koefisiennya lebih kecil dan lebih tepat dalam pendugaan parameter peubah.

Tabel 5. Keterandalan model campuran berdasarkan data asli dan model campuran berdasarkan komponen utama pada kelompok serapan P rendah

Model	-2 Log Likelihood	AIC	AICC	BIC	Parameter model
Model campuran data asli	163,0	173,0	173,8	163,0	4
Model campuran komponen utama	159,4	169,4	170,2	159,4	4

Tabel 6. Keterandalan model campuran berdasarkan data asli dan model campuran berdasarkan komponen utama pada kelompok serapan P tinggi

Model	-2 Log Likelihood	AIC	AICC	BIC	Parameter model
Model campuran data asli	123,3	131,3	132,5	123,3	3
Model campuran komponen utama	121,9	129,9	131,1	121,9	3

KESIMPULAN

Data kasus serapan P terdiri dari dua kelompok sebaran (bimodus), yaitu kelompok serapan P rendah dan kelompok serapan P tinggi, masing-masing menyebar normal.

Pada kelompok serapan P rendah, peubah acak Pi-NaOH dan P-Truog berpengaruh nyata pada serapan P, sedangkan pada kelompok serapan P tinggi peubah acak P-Mehlich 1 berpengaruh nyata pada serapan P.

Pada kelompok serapan P rendah, menggunakan dua komponen utama, peubah acak sifat tanah (berasosiasi dengan PC1 dan PC3) adalah : (i) P-Truog, P-Olsen, P-Bray 1, dan P-Mehlich 1, (ii) C-organik. Pada kelompok serapan P tinggi, menggunakan komponen utama pertama (PC1), peubah acak sifat tanah (berasosiasi dengan PC1) adalah P-Truog dan P-Mehlich 1.

Pada kelompok serapan P rendah dan kelompok serapan P tinggi, model campuran berdasarkan komponen utama lebih terandalkan daripada model campuran berdasarkan data asli dan model tetap.

DAFTAR PUSTAKA

Chang, C. W., D. A. Laird, M. J. Mausbach, and C. R. Hurburgh. 2001. Near-Infrared Reflectance Spectroscopy – Principal Components Regression Analyses of Soil Properties. Soil Sci. Soc. Am. J. 65 : 480 – 490.

Cnaan A., N. M. Laird, and P. Slasor. 1997. Tutorial in Biostatistics : Using The General Linear Mixed Model to Analyse Unbalance Repeated Measures and Longitudinal Data. Statistics in Medicine 16: 2349 – 2380.

Dobson, A. J. 2002. An Introduction to Generalized Linear Models. Chapman Hall, London, UK.

Kachman, S. D. 2008. An Introduction to Generalized Linear Mixed Models. Department of Biometry. University of Nebraska, Lincoln.

Kastens, T. L., J. P. Schmidt, and K. C. Dhuyvetter. 2003. Yield Models Implied by Traditional Fertilizer Recommendations and a Framework for Including Nontraditional Information. Soil Sci. Soc. Am. J. 67 : 351 – 364.

McCullagh, P., and J. A. Nelder. 1983. Generalized Linear Models. Chapman Hall, London, UK.

Meyer, K., and M. Kirkpatrick. 2005. Restricted Maximum Likelihood Estimation of Genetic Principal Components and Smoothed Covariance Matrices. Genet. Sel. Evol. 37: 1 – 30.

Schabenberger, O. 2008. Introducing the GLIMMIX Procedure for Generalized Linear Mixed Models. SAS Inst., Cary. NC.

Shukla, M. K., R. Lal, and M. Ebinger. 2004. Principal Component Analysis for Predicting Corn Biomass and Grain Yields. Soil Sci. 169 : 215 – 224.

Sousa, S. I. V., F. G. Martins, M. C. M. Alvim-Ferraz, M. C. Pereira. 2006. Multiple Linear Regression and Artificial Neural Networks based on Principal Components to Predict Ozone Concentrations. Environmental Modelling & Software. http://www.sciencedirect.com.

Tempelman, R. J. 1998. Generalized Linear Mixed Model in Dairy Cattle Breeding. J. Dairy Sci. 81 : 1428 – 1444.

Weisberg, S. 1985. Applied Linear Regression. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Tabel Lampiran 1. Korelasi sifat-sifat tanah dan serapan P pada kelompok serapan P rendah

	pHH	Corg	PH2O	PNaCI	PNaOI	PCl	PTru	POls	PBr	PMeh	SerP
pHH	1.000	.488	.656**	-.605*	-.323	-.173	-.709**	-.808**	-.667**	-.712**	.389
Corg	.488	1.000	.681**	-.624**	-.526*	-.372	-.670**	-.664**	-.297	-.403	.611*
PH2O	.656**	.681**	1.000	-.790**	-.592*	-.400	-.911**	-.912**	-.475	-.694**	.644**
PNaCI	-.605*	-.624**	-.790**	1.000	.622*	.725**	.729**	.858**	.181	.425	-.571*
PNaOI	-.323	-.526*	-.592*	.622*	1.000	.421	.646**	.585*	.185	.354	-.681**
PCl	-.173	-.372	-.400	.725**	.421	1.000	.252	.424	-.480	-.200	-.133
PTru	-.709**	-.670**	-.911**	.729**	.646**	.252	1.000	.941**	.658**	.839**	-.727**
POls	-.808**	-.664**	-.912**	.858**	.585*	.424	.941**	1.000	.560*	.766**	-.623**
PBr	-.667**	-.297	-.475	.181	.185	-.480	.658**	.560*	1.000	.918**	-.428
PMeh	-.712**	-.403	-.694**	.425	.354	-.200	.839**	.766**	.918**	1.000	-.522*

*Nyata pada taraf nyata 5% **Nyata pada taraf nyata 1%

Tabel Lampiran 2. Korelasi sifat-sifat tanah dan serapan P pada kelompok serapan P tinggi

Sifat tanah	pHH	PNaCI	PCl	PTru	POls	PBr	PMeh	SerP
pHH	1.000	.821*	.957**	.883**	.964**	.983**	.939**	.954**
PNaCI	.821*	1.000	.926**	.695	.916**	.869**	.726*	.757*
PCl	.957**	.926**	1.000	.815*	.997**	.975**	.872**	.913**
PTru	.883**	.695	.815*	1.000	.796*	.877**	.980**	.959**
POls	.964**	.916**	.997**	.796*	1.000	.973**	.863**	.901**
PBr	.983**	.869**	.975**	.877**	.973**	1.000	.925**	.942**
PMeh	.939**	.726*	.872**	.980**	.863**	.925**	1.000	.976**

*Nyata pada taraf nyata 5% **Nyata pada taraf nyata 1%

Tabel Lampiran 3. Rotasi komponen utama kelompok serapan P rendah

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
pHH	-0.58	0.27	-0.19	0.07	**-0.74**	0.07	0.01	-0.01	0.00	0.00
C-org	-0.23	0.27	**-0.90**	0.23	-0.13	0.09	0.01	-0.01	-0.01	0.00
P-H2O	-0.55	0.46	-0.35	0.27	-0.13	**0.53**	0.01	-0.01	-0.01	0.00
P-NaCI	0.30	**-0.82**	0.27	-0.29	0.18	-0.10	-0.22	-0.02	0.00	-0.01
P-NaOI	0.18	-0.29	0.21	**-0.91**	0.05	-0.07	-0.01	0.01	0.01	0.00
P-Cl	-0.31	**-0.90**	0.16	-0.19	0.08	-0.07	0.15	0.03	0.00	0.02
P-Tru	**0.73**	-0.35	0.33	-0.35	0.12	-0.24	0.04	0.20	0.03	0.00
P-Ols	**0.64**	-0.55	0.29	-0.24	0.27	-0.20	-0.01	0.06	0.15	0.01
P-Br	**0.91**	0.26	0.13	-0.06	0.25	-0.01	-0.10	-0.02	-0.02	-0.11
P-Meh	**0.96**	-0.03	0.13	-0.14	0.14	-0.10	0.01	-0.03	0.00	0.08

Tabel Lampiran 4. Rotasi komponen utama kelompok serapan P tinggi

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
pHH	0.62	-0.52	**0.59**	0.06	0.02	0.01	-0.01
P-NaCI	0.35	**-0.91**	0.23	0.03	-0.01	0.00	0.00
P-Cl	0.49	**-0.71**	0.50	-0.09	0.00	0.00	0.00
P-Tru	**0.90**	-0.36	0.23	-0.01	-0.01	0.05	0.00
P-Ols	0.46	-0.70	**0.55**	-0.05	0.03	-0.02	0.01
P-Br	0.60	-0.59	**0.53**	0.00	-0.12	0.00	0.00
P-Meh	**0.84**	-0.38	0.38	-0.01	0.01	-0.08	0.00

Tabel Lampiran 5. Keterandalan model campuran berdasarkan komponen utama pada kelompok serapan P rendah.

Model	-2 Log Likelihood	AIC	AICC	BIC	Parameter model	$\chi 2$ deviance
Model tetap	184,9	190,9	191,2	198,0	2	-
Satu PC	165,7	173,7	174,2	165,7	3	19,2**
Dua PC	165,7	173,7	174,2	165,7	4	19,2**
Tiga PC	159,4	169,4	170,2	159,4	5	25,5**
Empat PC	159,4	169,4	170,2	159,4	6	25,5**
Lima PC	159,4	169,4	170,2	159,4	7	25,5**
Enam PC	159,4	169,4	170,2	159,4	8	25,5**
Tujuh PC	159,4	171,4	172,5	159,4	9	25,5**
Delapan PC	157,7	171,7	173,2	157,7	10	27,2**
Sembilan PC	157,7	171,7	173,2	157,7	11	27,2**
Sepuluh PC	154,5	170,5	172,5	154,5	12	30,4**

* Nyata pada α=5%
** Nyata pada α=1%

Tabel Lampiran 6. Keterandalan model campuran berdasarkan komponen utama pada kelompok serapan P tinggi.

Model	-2 Log Likelihood	AIC	AICC	BIC	Parameter model	$\chi 2$ deviance
Model tetap	134,5	140,5	141,2	145,6	2	-
Satu PC	121,9	129,9	131,1	121,9	3	12,6**
Dua PC	121,9	131,9	133,7	121,9	4	12,6**
Tiga PC	121,9	131,9	133,7	121,9	5	12,6**
Empat PC	121,9	131,9	133,7	121,9	6	12,6*
Lima PC	121,9	131,9	133,7	121,9	7	12,6*
Enam PC	121,9	131,9	133,7	121,9	8	12,6*
Tujuh PC	121,9	131,9	133,7	121,9	9	$12,6^{tn}$

* Nyata pada α=5%
** Nyata pada α=1%

Distribusi Poisson Tergeneralisasi Tak Terbatas dan Beberapa Sifat-Sifatnya
(Suatu pengembangan teori statistika matematika)

Mutijah
Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri (STAIN) Purwokerto
Jl. A. Yani, No. 40A, Purwokerto.

Abstrak

Distribusi Poisson dikembangkan menjadi Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD), mempunyai dua model distribusi yaitu model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Terbatas dan model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas. Untuk membuktikan bahwa kedua model distribusi tersebut merupakan suatu fungsi probabilitas, model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas lebih sulit dibandingkan model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Terbatas. Model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas tidak dapat dibuktikan secara langsung. Model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas dapat dibuktikan secara tidak langsung dengan menggunakan formula Lagrange dan formula Beda Euler.

Model Distribusi Poisson Tergeneralisasi (GPD) Tak Terbatas memiliki beberapa sifat yang ditentukan oleh parameter kedua yaitu parameter λ. Beberapa sifat tersebut antara lain : rataan, variansi dan fungsi pembangkit momen naik jika λ naik, jumlahan N_1+N_2 dari dua variabel GP N_1 dan N_2 yang independen dengan parameter masing-masing (θ_1,λ) dan (θ_2, λ) adalah variabel GP dengan parameter $(\theta_1+\theta_2, \lambda)$, model GPD adalah unimodal untuk semua θ dan λ kecuali pada θ = e, λ = 1, menaiknya nilai λ akan menurunkan nilai probabilitas ekor kiri dan nilai probabilitas ekor kanan.

Kata kunci : Model GPD Tak Terbatas, Sifat-sifat GPD Tak Terbatas.

1. Pendahuluan

A. Latar Belakang.

Untuk suatu variabel acak N fungsi massa model distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD) tak terbatas oleh Tuenter (2000) dituliskan sebagai berikut :

$$P_n(\theta,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta\,(\theta+n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}, & n = 0, 1, 2, ... \\ 0, & \text{untuk } n > m, \text{ jika } \lambda < 0. \\ 0, & \text{untuk n yang lain.} \end{cases}, \quad \text{..........................(A.1)}$$

Untuk membuktikan bahwa model GPD (A.1) merupakan fungsi probabilitas yaitu membuktikan bahwa :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta, \lambda) = 1$$

secara langsung sangat sulit.

Model GPD (A.1) mempunyai beberapa sifat-sifat penting seperti mean, variansi naik apabila λ naik, nilai fungsi pembangkit probabilitas (pgf) akan naik jika λ naik dan beberapa sifat-sifat yang lainnya.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimanakah membuktikan $P_n(\theta, \lambda)$ merupakan fungsi probabilitas?
2. Bagaimanakah menentukan sifat-sifat dan atau membuktikan teorema-teorema yang merupakan sifat dari model GPD tak terbatas ?

C. Tujuan Penelitian.

1. Untuk membuktikan bahwa $P_n(\theta, \lambda)$ merupakan fungsi probabilitas.
2. Untuk menentukan sifat-sifat dan atau membuktikan teorema-teorema yang merupakan sifat dari model GPD tak terbatas.

D. Manfaat Penelitian.

Dapat memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas wawasan mengenai distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD).

2. Pembahasan.

A. Fungsi model GPD Tak Terbatas dan Pembuktiannya.

Sebuah variabel random diskrit N dikatakan mempunyai model distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD) tak terbatas jika mempunyai massa peluang :

$$P_n(\theta, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta\,(\theta + n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta + n\lambda)}}{n!}, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{untuk } n > m, \text{ jika } \lambda < 0. \\ 0, & \text{untuk n yang lain.} \end{cases} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

dengan $\theta > 1$, $\max(-1, -\theta/m) < \lambda \leq 1$, m ($\geq 4$) bilangan bulat positif terbesar dan untuk $\theta + m\lambda > 0$ maka λ negatif. Simbol θ dan λ dikatakan parameter pertama dan parameter kedua.

Untuk membuktikan fungsi (2.1) merupakan fungsi probabilitas Consul dan Jain telah menunjukkan dengan menggunakan formula Lagrange sebagai berikut :

$$\phi(z) = \phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z))^n \, \phi'(z) \right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n, \quad \text{.....(2.2)}$$

dan diberikan $\phi(z) = e^{\theta z}$ dan $f(z) = e^{\lambda z}$ serta $u = ze^{-\lambda z}$.

sehingga diperoleh :

$\phi(0) = 1$, $\phi'(z) = \theta e^{\theta z}$, $\phi'(z) = \theta e^{\theta z}$, $(f(n))^n = e^{n\lambda z}$, $(f(n))^n . \phi'(z) = e^{n\lambda z}$. $\theta e^{\theta z} = \theta e^{(\theta + n\lambda)z}$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}} (f(z))^n . \phi'(z) \right] = \left[\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}} (\theta e^{(\theta + n\lambda)z} \right] = \theta(\theta + n\lambda)^{n-1} e^{(\theta + n\lambda)z}$$

$$\left[\frac{d^{n-1}}{d^{n-1}} (f(z))^n . \phi'(z) \right] \Bigg|_{z=0} = \theta(\theta + n\lambda)^{n-1}$$

Pernyataan (2.2) dapat disajikan sebagai berikut :

$$e^{\theta z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \theta(\theta + n\lambda)^{n-1} \left(\frac{ue^{\lambda z}}{e^{\lambda z}} \right)^n \ldots \; 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1} z^n e^{-(\theta - n\lambda)z}}{n!}$$

Sehingga $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1} e^{-(\theta + n\lambda)}}{n!}$. ■

Pembuktian yang berbeda dilakukan oleh Tuenter(2000) dengan menggunakan formula Beda Euler yang dimulai dengan membuktikan persamaan :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} e^{-(\theta + n\lambda)} = \frac{1}{1 - \lambda}, \text{ untuk } -\lambda_o < \lambda < 1 \quad \text{.....(2.3)}$$

dengan $\lambda_o = 0{,}2784645428\ldots$ adalah solusi dari $\lambda e^{\lambda} = e^{-1}$. Untuk kepentingan selanjutnya $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} e^{-(\theta + n\lambda)}$ pada persamaan (2.3) ditulis sebagai $S(\theta, \lambda)$.

Lemma 2.1

Untuk GPD dalam persamaan (2.1) dapat dibuktikan $S(\theta, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda}$ untuk $-\lambda_o < \lambda < 1$ dengan $\lambda_o = 0{,}2784645428\ldots$ adalah solusi dari $\lambda e^{\lambda} = e^{-1}$.

Bukti :

$$S(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\theta + n\lambda)^k}{k!} = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \, k! = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \quad \frac{1}{1-\lambda} \quad \blacksquare$$

Sekarang menunjukkan bahwa $|\lambda| < \lambda_o$. Bukti persamaan (2.3) bertumpu pada pemindahan order jumlahan dalam $S(\theta, \lambda)$ dan pemindahan itu diijinkan ketika jumlahan tersebut konvergen absolut. Nilai-nilai absolut yang diberikan dari jumlahan $S(\theta, \lambda)$ dengan mengusahakan untuk mereduksi $e^{-|\theta + n\lambda|}$.

Dengan menggunakan pendekatan formula Stirling's $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ dan aplikasi dari tes akar Cauchy diperoleh :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{\frac{|\theta + n\lambda|^n}{n!} e^{|\theta + n\lambda|}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup} \sqrt[n]{\frac{|\theta + n\lambda|^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} e^{|\theta + n\lambda|}} = \ldots = |\lambda| e^{1+|\lambda|} < 1$$

atau diinginkan $|\lambda| < \lambda_o$ sebagai kriteria untuk konvergen absolut.

Aplikasi lain dari tes akar Cauchy menunjukkan bahwa ruas kiri dari persamaan (2.3) konvergen untuk $|\lambda e^{-\lambda}| < e^{-1}$. Dari kondisi ini diperoleh λ_o sebagai berikut :

$|\lambda e^{-\lambda}| < e^{-1}$, $|\lambda| e^{|\lambda|} < e^{-1}$, $\lambda e^{\lambda} < e^{-1}$ ……...(2.4)

Dengan menggunakan software Matlab 5.3 dari persamaan nonlinear (2.4) diperoleh $\lambda_o = 0{,}2784645428\ldots$.

Selanjutnya model GPD pada (2.1) merupakan fungsi probabilitas dapat dibuktikan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^n}{n!} e^{-(\theta + n\lambda)} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\theta + n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\theta + n\lambda)} = \frac{1}{1-\lambda} - \lambda \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1. \ \blacksquare$$

B. Beberapa Sifat Model GPD Tak Terbatas.

a. Mean dan variansi distribusi Poisson tergeneralisasi.

1). Penentuan mean dan variansi dengan metode khusus.

Didefinisikan $S(k, \theta, \lambda)$ sebagai berikut :

$$S(k,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta+n\lambda)^{n+k-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!},\qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta(\theta+n\lambda)^{n+k-2}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta(\theta+n\lambda)^{n+k-2}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{(n-1)!}$$

$$=\theta S(k-1,\theta,\lambda)+\lambda S(k,\theta+\lambda,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)S(k-1,\theta+i\lambda,\lambda),\quad k=1,2,\ldots$$

Untuk k = 0 maka :

$$\theta S(0,\theta,\lambda)=\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\theta,\lambda)=1.$$

Untuk k = 1 maka :

$$S(1,\theta,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)S(0,\theta+i\lambda,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}.i=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}=1+\lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots=\frac{1}{1-\lambda}.$$

Untuk k = 2 maka :

$$S(2,\theta,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)S(1,\theta+i\lambda,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)\frac{1}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i}(\theta+i\lambda)$$

$$=\frac{1}{1-\lambda}\{\theta+\theta\lambda+\lambda^{2}+\theta+\theta\lambda^{2}+2\lambda^{3}+\theta\lambda^{3}+3\lambda^{4}+\theta\lambda^{4}+4\lambda^{5}+\ldots\}=\frac{\theta}{(1-\lambda)^{2}}+\frac{\lambda^{2}}{(1-\lambda)^{3}}.$$

Penentuan mean dan variansi menggunakan hasil-hasil di atas adalah sebagai berikut :

$$E(N)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\theta(\theta+n\lambda)^{n-1}e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\ldots=\theta S(1,\theta+\lambda,\lambda)=\frac{\theta}{1-\lambda}$$

$$E(N^{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}\theta(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\quad\ldots\quad=\theta\{S(1,\theta+\lambda,\lambda)+S(2,\theta+2\lambda,\lambda)\}$$

$$=\theta\left\{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^{2}}+\frac{\lambda^{2}}{(1-\lambda)^{3}}\right\}=\theta\left\{\frac{\theta}{(1-\lambda)^{2}}+(1+\lambda+2\lambda^{2}+4\lambda^{3}+7\lambda^{4}+11\lambda^{5}+16\lambda^{6}+\ldots\right\}=$$

$$\theta\left\{\frac{\theta}{(1-\lambda)^{2}}+\frac{1}{(1-\lambda)^{3}}\right\}=\frac{\theta^{2}}{(1-\lambda)^{2}}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^{3}}.$$

$$\mathrm{Var}(N)=E(N^{2})-[E(N)]^{2}=\frac{\theta^{2}}{(1-\lambda)^{2}}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^{3}}+\left(\frac{\theta}{1-\lambda}\right)^{2}=\frac{\theta}{(1-\lambda)^{3}}.$$

2). Penentuan mean dan variansi menggunakan model GPD tak terbatas.

Diberikan $\mu(\theta, \lambda)$ menotasikan mean dari model GPD tak terbatas maka :

$$\mu(\theta,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\theta(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\ldots=$$

$$=\theta+\theta\lambda+\frac{\theta\lambda^2}{\theta+2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}n\,P_n(\theta+2\lambda,\lambda)=\ldots=\ \theta\,(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4+\ldots)=\frac{\theta}{1-\lambda}.$$

Sekarang diberikan $\mu_2(\theta, \lambda)$ menotasikan momen kedua dari model GPD tak terbatas maka:

:

$$\mu_2(\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\,\theta\,(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}=\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\,(\theta+n\lambda)^{n-1}\,e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}\quad=\quad\ldots\quad=$$

$$\theta\left\{\frac{1}{1-\lambda}+(\theta+2\lambda)\frac{1}{1-\lambda}+[\lambda(\theta+3\lambda)]\frac{1}{1-\lambda}+[\lambda^2(\theta+4\lambda)]\frac{1}{1-\lambda}+[\lambda^3(\theta+5\lambda)]\frac{1}{1-\lambda}+\ldots\right\}=\ldots=$$

$$\theta\left\{\frac{1}{1-\lambda}\left(\theta.\frac{1}{1-\lambda}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\right)\right\}=\frac{\theta^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}.$$

Sehingga $\sigma^2=\mu_2(\theta,\lambda)-\left[\mu(\theta,\lambda)\right]^2=\frac{\theta^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}-\left(\frac{\theta}{1-\lambda}\right)^2\quad=\frac{\theta}{(1-\lambda)^3}$

3) Jumlahan variabel random distribusi Poisson tergeneralisasi.

Teorema 2.1

Apabila N_1 adalah variabel random berdistribusi Poisson tergeneralisasi dengan parameter (θ_1, λ) dan N_2 variabel random yang berdistribusi Poisson tergeneralisasi dengan parameter (θ_2, λ) yang masing-masing saling independen maka $N_1 + N_2$ berdistribusi Poisson tergeneralisasi dengan parameter $(\theta_1+\theta_2, \lambda)$.

Bukti :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+i\lambda)^{i-1}\,e^{-(\theta+i\lambda)}}{i!}=1,\ e^{-\theta}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+i\lambda)^{i-1}\,e^{-i\lambda}}{i!}=1,\ e^{\theta}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta\,(\theta+i\lambda)^{i-1}\,e^{-i\lambda}}{i!}$$

Secara umum diketahui bahwa $e^{\theta_1+\theta_2}=e^{\theta_1}.e^{\theta_2}$ dan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta_1+\theta_2)\,(\theta_1+\theta_2+n\lambda)^{n-1}\,e^{-n\lambda}}{n!}=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta_1(\theta_1+i\lambda)^{i-1}\,e^{-i\lambda}}{i!}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta_2(\theta_2+j\lambda)^{j-1}\,e^{-j\lambda}}{j!}\right]=\ldots$$

$$= \theta_1\, \theta_2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(\theta_1 + i\lambda)^{i-1}\, (\theta_2 + (n-i)\lambda)^{n-i-1}\, e^{-n\lambda}}{i!\,(n-i)!}$$

Selanjutnya menurut definisi bahwa :

$$P(N_1 + N_2 = n) = \sum_{j=0}^{n} P_j(\theta_1, \lambda)\, P_{n-j}(\theta_2, \lambda)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{\theta_1\, (\theta_1 + j\lambda)^{j-1}\, e^{-(\theta_1 + j\lambda)}}{j!} \cdot \frac{\theta_2\, (\theta_2 + (n-j)\lambda)^{n-j-1}\, e^{-(\theta_2 + (n-j)\lambda)}}{(n-j)!}$$

$$= e^{-(\theta_1+\theta_2)}\, \theta_1\, \theta_2 \sum_{j=0}^{n} \frac{(\theta_1 + j\lambda)^{j-1}\, (\theta_2 + (n-j)\lambda)^{n-j-1}\, e^{-n\lambda}}{j!\,(n-j)!}$$

$$= e^{-(\theta_1+\theta_2)}\, \frac{(\theta_1 + \theta_2)\, (\theta_1 + \theta_2 + n\lambda)^{n-1}}{n!}\, e^{-n\lambda}$$

$$= \frac{(\theta_1 + \theta_2)\, (\theta_1 + \theta_2 + n\lambda)^{n-1}\, e^{-(\theta_1 + \theta_2 + n\lambda)}}{n!} = P_n(\theta_1 + \theta_2, \lambda) \quad \blacksquare$$

4) Fungsi pembangkit probabilitas distribusi Poisson tergeneralisasi.

Fungsi pembangkit probabilitas (pgf) suatu variabel N dari distribusi Poisson tergeneralisasi dinotasikan dengan $G_N(u) = E(u^N)$. Pgf menggunakan formula Lagrange :

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[(g(t))^k \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right] \Bigg|_{t=0} \quad \text{.....(2.5)}$$

dan diberikan $g(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $f(t) = e^{\theta(t-1)}$ serta $u = \dfrac{t}{g(t)}$ .....(2.6)

Dari persamaan (2.6) diketahui $u = \dfrac{t}{g(t)}$ dan jelas bahwa $g(0) \neq 0$ maka oleh operasi pembagian deret pangkat, u mempunyai perwakilan deret pangkat, yaitu :

$u = \dfrac{t}{g(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dan $t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$ dengan t merupakan invers dari deret pangkat u.

Dari (2.6) diperoleh :

$$f(0) = e^{-\theta}.\ (g(t))^k = e^{k\lambda(t-1)},\ (g(t))^k \frac{\partial f(t)}{\partial t} = e^{k\lambda(t-1)}.\theta e^{\theta(t-1)} = \theta e^{(\theta + k\lambda)(t-1)}$$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[(g(t))^k \frac{\partial f(t)}{\partial t} \right] = \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[\theta\, e^{(\theta + k\lambda)(t-1)} \right] = \theta\, (\theta + k\lambda)^{k-1}\, e^{(\theta + k\lambda)(t-1)} = \theta\, (\theta + k\lambda)^{k-1}\, e^{-(\theta + k\lambda)}$$

Dari hasil-hasil perhitungan tersebut penyajian (2.5) menjadi :

$$e^{\theta(t-1)} = e^{-\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\,\theta\,(\theta + k\lambda)^{k-1}\, e^{-(\theta+k\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k\, P_k(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n\, P_n(\theta,\lambda) = E(u^N)$$

Dan karena pgf GPD adalah $G_N(u) = E(u^N)$ maka $G_N(u) = e^{\theta(t-1)}$ dengan $t = ue^{\lambda(t-1)}$.

5) Unimodal distribusi Poisson tergeneralisasi.

Diberikan distribusi probabilitas $\{P_n\}_0^{\infty}$ didefinisikan pada bilangan bulat nonnegatif dengan pgf $G_N(u)$. Dan diberikan

$$\frac{d}{du}\log G_N(u) = \frac{d}{du}\log e^{\theta(t-1)} = \frac{d}{du}(\theta(t-1)) = \frac{d}{du}\left\{\theta\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k u^k - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{du}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\theta\, b_k u^k - \theta\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\theta\, b_k u^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_k u^k, \quad r_k \geq 0.$$

Menurut Steutel dan Harn (1979) distribusi probabilitas $\{P_n\}_0^{\infty}$ adalah unimodal jika $(r_k)_0^{\infty}$ adalah tidak naik dan $\{P_n\}_0^{\infty}$ adalah tidak naik jika dan hanya jika $r_0 \leq 1$.

Teorema 2.2

Model GPD adalah unimodal untuk semua nilai-nilai dari θ dan λ.

Apabila $\theta e^{-\lambda} < 1$ maka modus pada n = 0 dan apabila $\theta e^{-\lambda} = 1$ maka modus pada n = 0 dan n = 1.

Apabila $\theta e^{-\lambda} > 1$ maka modus pada n = M dan $(\theta - e^{-\lambda})(e^{\lambda} - 2\lambda) < M < a$, dengan a adalah nilai terkecil dari M yang memenuhi pertidaksamaan :

$$\lambda^2 M^2 + M[2\lambda\theta - (\theta + 2\lambda)e^{\lambda}] + \theta^2 > 0 \quad \text{……..……...…….…..(2.7)}$$

Bukti :

(1). $G_N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n\, P_n(\theta,\lambda) = e^{\theta(t-1)}$ dengan $t = u\,e^{\lambda(t-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda}\,\frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,u^n = H(u)$.

$$R(u) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k u^k = \frac{d}{du}[\theta(t-1)] = \theta\frac{dt}{du} = \theta\frac{dH(u)}{du} = \theta\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{e^{-n\lambda}\,(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,u^{n-1}$$

$$= \theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n\lambda}\,(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}\,u^{n-1} = \theta\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda-k\lambda}\,\frac{[(k+1)\lambda]^k}{k!}\,u^k$$

Karena itu diperoleh :

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = \frac{\dfrac{e^{-(k+1)\lambda}\,[(k+1)\lambda]^k}{k!}}{\dfrac{e^{-k\lambda}\,(k\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{e^{-\lambda}\left(\dfrac{k\lambda+\lambda}{k\lambda}\right)k\lambda}{k} = \lambda\, e^{-\lambda}.e^{-1} = = \lambda\, e^{-\lambda+1} \le 1.$$

Jadi $\frac{r_k}{r_{k-1}} \le 1$ artinya bahwa $(r_k)_0^\infty$ adalah tidak naik sehingga menurut Steutel dan Harn maka $\{P_n(\theta,\lambda)\}_0^\infty$ adalah unimodal untuk semua nilai θ dan λ.

Misalkan $\frac{P_1(\theta,\lambda)}{P_0(\theta,\lambda)} = \theta e^{-\lambda} = r_0 \le 1$ maka $\{P_n(\theta,\lambda)\}_0^\infty$ adalah tidak naik . Jadi apabila $\theta e^{-\lambda} < 1$ maka modus n = 0 dan apabila $\theta e^{-\lambda} = 1$ maka modus pada n = 0 dan n = 1.

(3). Misalkan $\theta e^{-\lambda} > 1$ dan modus pada n = M.

Rasio dari dua probabilitas berturut-turut dari model GPD (2.1) adalah $\frac{P_{n+1}(\theta,\lambda)}{P_n(\theta,\lambda)}$

Jika M adalah modus maka :

$$\frac{P_{M+1}(\theta,\lambda)}{P_M(\theta,\lambda)} = \frac{(\theta+(M+1)\lambda)^M\, e^{-\lambda}}{(M+1)(\theta+M\lambda)^{M+1}} < 1 \quad \text{……..……......…(2.8)}$$

$$\text{dan} \quad \frac{P_M(\theta,\lambda)}{P_{M-1}(\theta,\lambda)} = \frac{(\theta+M\lambda)^{M-1}}{(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}}.\frac{e^{-\lambda}}{M} = \frac{(\theta+M\lambda)^{M-1}\, e^{-\lambda}}{M\,(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}} > 1 \quad \text{…….....……(2.9)}$$

Dari pertidaksamaan (2.8) diperoleh :

$$(M+1)\,e^{\lambda} > \frac{(\theta+(M+1)\lambda)^M}{(\theta+M\lambda)^{M-1}} > \frac{(\theta+M\lambda+\lambda)^M}{(\theta+M\lambda)^M(\theta+M\lambda)^{-1}} > (\theta+M\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{\theta+M\lambda}\right)^M$$

$$M > (\theta - e^{-\lambda})(e^{-\lambda} - 2\lambda)^{-1}$$

Dan dari pertidaksamaan (2.8) diperoleh :

$$\frac{(\theta+M\lambda)(\theta+M\lambda)^{M-2}\, e^{-\lambda}}{M(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}} > (\theta+M\lambda)$$

$$\frac{(\theta+M\lambda)\,e^{-\lambda}}{M} > (\theta+M\lambda).\frac{(\theta+(M-1)\lambda)^{M-2}}{(\theta+M\lambda)^{M-2}} > (\theta+M\lambda).\frac{(\theta+M\lambda-\lambda)^{M-2}}{(\theta+M\lambda)^{M-2}}$$

$$\lambda^2\, M^2 + M[2\lambda\theta - (\theta+2\lambda)\,e^{\lambda}] + \theta^2 > 0$$

Jadi terbukti memenuhi pertidaksamaan (2.2.4) dan menurut korolari bahwa jika $\lambda = 0$ batas-batas modus adalah $\theta - 1 < M < \theta$, jadi juga terbukti pertidaksamaan $(\theta - e^{-\lambda})(e^{\lambda} - 2\lambda) < M < a$.

Dari teorema di atas tampak bahwa model distribusi Poisson tergeneralisasi adalah unimodal untuk semua θ dan λ kecuali jika $\theta e^{-\lambda} = 1$ yaitu pada $\theta = e$, $\lambda = 1$.

6) Perilaku ekor (tail behaviour) dari GPD.

Lemma 2.2

Untuk θ dan λ yang ditetapkan dan $n \to \infty$ maka :

$$P(N = n) \approx \frac{\theta}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\theta + \frac{\theta}{\lambda}\right) n^{-3/2} (\lambda \exp(1 - \lambda))^n .$$

Bukti :

Untuk n besar, penggunaan pendekatan n! fungsi massa peluang di dalam (2.1) sebagai berikut:

$$P(N = n) \approx \frac{\theta(\theta + n\lambda)^{n-1} \exp(-\theta - n\lambda)}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} \exp\left(-n + \frac{\lambda_1}{12n}\right)}$$, dengan $\lambda_1 = \lambda_1(n)$ memenuhi $0 < \lambda_1 < 1$.

$$\vdots$$

$$\approx \left\{ \frac{\theta}{\lambda\sqrt{2\pi}} \cdot \left(1 + \frac{\theta/\lambda}{n}\right)^{n-1} \exp\left(-\theta - \frac{\lambda_1}{12n}\right) \right\} n^{-\frac{3}{2}} \exp(\lambda(1 - \lambda))^n$$

$$\vdots$$

$$\approx \frac{\theta}{\lambda\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\theta + \frac{\theta}{\lambda}\right) n^{-\frac{3}{2}} \exp(\lambda(1 - \lambda))^n . \quad \blacksquare$$

3. Simpulan Dan Saran.

A. Simpulan.

1). Fungsi probabilitas model GPD tak terbatas dapat dibuktikan dengan menggunakan formula Lagrange atau formula beda Euler dengan aplikasi tes akar Cauchy dan formula Stirling.

2).Model GPD tak terbatas $P_n(\theta,\lambda) = \frac{\theta(\theta+n\lambda)^{n-1} e^{-(\theta+n\lambda)}}{n!}$ memiliki beberapa sifat-sifat penting diantaranya :

a. Nilai mean dan variansi ini akan naik jika λ naik.

b. Apabila $N_1 \sim GPD(\theta_1, \lambda)$ dan $N_2 \sim GPD(\theta_2, \lambda)$ maka $N_1 + N_2 \sim GPD(\theta_1 + \theta_2, \lambda)$.

c. Nilai pgf model GPD tak terbatas $G_N(u)$ akan naik jika λ juga naik.

d. Model GPD tak terbatas adalah unimodal untuk semua nilai-nilai θ dan λ kecuali apabila $\theta e^{-\lambda} = 1$ yaitu pada θ = e, λ = 1.

e. Jika λ naik maka akan menurunkan nilai probabilitas ekor kiri dan nilai probabilitas ekor kanan dari model GPD tak terbatas.

B. Saran.

Berhubungan dengan masalah ini dapat dilakukan penelitian lebih lanjut tentang pembuktian distribusi Poisson tergeneralisasi (GPD) menggunakan fungsi analitik dan penentuan sifat-sifat GPD yang lain, diantaranya : fungsi pembangkit momen dengan menggunakan fungsi Lambert, kumulan, momen pusat GPD, jumlahan variabel random sebanyak k variabel random, estimasi maksimum likelihood untuk θ dan λ, serta dapat dilakukan penelitian lebih lanjut untuk aplikasi dari model GPD.

4. Daftar Pustaka

Abramowitz, M and Stegun, I.A, 1965, " *Handbook of mathematical functions* ", Dover publications, New York.

Ambagaspitiya, R.S and Balakrishnan, N.,1994, " *On the compound generalized poisson distribution* ", Astin Bulletin, vol. 24, No. 2.

Bain, L.J. and Engelhardt, M.,1992, " *Introduction to probability and mathematical statistics* ", Duxbury press, California.

Consul, P.C. and Jain, G.C.,1973," *A generalization of the poisson distribution* ",Technometrics 15,791-799.

Consul, P.C.,1989," *Generalized poisson distributions;properties and applications* ",Marcel Dekker,New York.

DeGroot, M.H.,1975," *Probability and statistics* ",Addison-Wesley publishing,New York.

Dudewicz, E.D.and Mishra, S.N.,1988," *Modern mathematical statistics* " (terjemahan oleh: R.K. Sembiring),ITB,Bandung.

Eric, W.W.,2003," *Tail Probability* ",www.yahoo.com,Mathworld.

Gould, H.W.,1978," *Euler's formula for nth differences of powers* ",The american mathematical montly 85,450-467.

Kapur, J.N. and Saxena, H.C.,1986," *Mathematical Statistics* ",S. Chand & company LTD,New Delhi.

Pitman, J,1993," *Probability* ",Springer-Verlag,New York.

Roussas, G.G.,1973," *A first course in mathematical statistics* ",Mei Ya publications,Taiwan.

Sudargo, 2002, " *Beberapa permasalahan poisson dan generalisasinya (tesis)*",Jurusan matematika UGM,Yogyakarta.

Taylor, A.E. and Mann, W.R.,1983," *Advanced calculus* ", John Wiley & Sons,New York.

Thomas, G.B. and Finney, R.L.,1988," *Calculus and analytics geometry (7th edition)* ",Addison-Wesley publishing,New York.

Tuenter, H.J.H.,2000," *On the generalized poisson distribution*",Statistica Neerlandica, Vol. 54,374-376.

Walpole, R.E. and Myers, R.H.,1988," *Modern mathematical statistics for engineers and scientists (4th edition)* ",(terjemahan oleh : R.K. Sembiring),ITB,Bandung.

_____,2002," *Cauchy's root test* ",www.yahoo.com,Mathwizard.

Regresi Rasio Prevalensi dengan Model Log-Binomial: Isu Ketakkonvergenan

Netti Herawati[1)]
Alfian Futuhul Hadi[2)]
Nusyirwan[1)]
Khoirin Nisa[1)]

[1)] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung*
Jl. Sumantri Brojonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
netti@unila.ac.id

[2)] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember*
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Email: afhadi@unej.ac.id

Abstrak

Regresi logistik memainkan peran sentral dalam pengamatan epidemiologi. Regresi logistik memiliki *odds ratio* yang memberikan informasi tentang risiko seseorang didapati sebagai penderita suatu penyakit. Pada kasus tertetu ratio prevalensi dapat didekati dari odds ratio, dan tidak memberikan perbedaan yang menyesatkan. Namun odds ratio tidak selalu diinginkan. Antara lain, karena pada pengamatan *common event* (pengamatan dengan nilai 1 yang banyak), rasio prevalensi tidak lagi dapat didekati secara langsung dari odds ratio, artimya odds ratio tidak lagi mencerminkan informasi yang diinginkan oleh epidemiologi. Untuk itu diperlukan pendekatan lain dalam memperoleh ratio prevalensi dari data binomial, antara lain dengan model log-binomial/regresi relative risk/rasio prevalensi. Regresi log-binomial, dalam terminologi Model Linier Umum adalah model dengan distribusi Y binomial yanag menggunakan *link-function* log, sedangkan regresi logistik, menggunakan fungsi link, logit. Pada regresi log-binomial selain masalah ketakkonvergenan, dimungkinkan terjadi pendugaan peluang diluar interval 0-1, karena model ini tidak melakukan restriksi 0<=P(Y=1)<=1, seperti pada model logistik. Akibatnya, pada saat memodelkan pengamatan dengan P(Y=1) ≅ 1 atau rasio prevalensi mendekati 1, mungkin terjadi masalah.
Penelitian ini ingin mengatasi masalah ketakkonvergenan pada log-binomial melalui metode copy (Copy Method) melalui suatu studi kasus penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSUD Dr. Soebandi Jember.
Tulisan ini membicarakan tenang isu masalah ketakkonvergenan pada log-binomial, dengan alternatif penyelesaian menggunakan metode copy (Copy Method). Studi kasus diberikan sebagai ilustrasi data penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSUD Dr. Soebandi Jember.

Kata Kunci: Regresi Rasio Prevalensi, Risiko Relatif, log-binomial, ketakkonvergenan.

PENDAHULUAN

Analisis regresi linier merupakan salah satu metode statistika yang digunakan untuk menyelidiki hubungan antara variabel tak bebas (dependent variable) atau variabel respon dengan variabel bebasnya (independent variable) atau variabel penjelas, selain itu regresi linier baik digunakan untuk data respon kontinu.

Dalam suatu penelitian terkadang varibel respon yang diamati hanya dibagi dalam dua kemungkinan kejadian. Variabel semacam ini lebih dikenal dengan sebutan variabel dikotomi. Variabel dikotomi yaitu variabel indikator yang terdiri atas data biner (0 atau 1). Jika data tersebut membentuk suatu kelompok maka dapat dimodelkan menurut distribusi Binomial.

Sejauh ini model regresi yang paling populer untuk data biner adalah regresi logostik biner. Regresi logistik memainkan peran sentral dalam pengamatan epidemiologi. Hal ini disebabkan oleh dua hal. Pertama, regresi logistik memiliki *odds ratio* yang memberikan informasi tentang risiko seseorang didapati sebagai penderita suatu penyakit. Untuk mendapatkan informasi tentang risiko seringkali faktor penjelas diukur dalam peubah kategorik yang menunjukkan perbedaan tingkat atau level faktor tersebut. Nilai *odds ratio* merupakan perbandingan peluang (risiko) seseorang dengan karakter (faktor penjelas pada level) tertentu didapati sebagai penderita penyakit tertentu terhadap orang lain dengan karakter (faktor penjelas level) yang lain.

Kedua, o*dds ratio* yang dimiliki regresi logistik dapat diidentifikasi secara langsung dari suatu studi *case-control* yang sangat lazim dilakukan dalam riset-riset epidimiologi. Rasio prevalensi kemudian dapat diduga melalui odds ratio. Pada pengamatan kejadian penyakit-penyakit yang jarang terjadi (*rare event*) nilai odds ratio akan mendekati nilai risiko relatif (*relative risk*). Selain itu, regresi logistik dapat pula digunakan untuk memodelkan kejadian penyakit-penyakit yang lazim terjadi (*common event*) dalam penelitian *cross-sectional* atau *longitudinal.* Dalam hal ini risiko relatif pada kasus ini tidak dapat secara langsung dihitung, nilainya pun tidak dapat begitu saja didekati dari *odds ratio*.

Risiko relatif memberikan informasi yang berguna tentang asosiasi atau keterkaitan. Alasan khusus bahwa risiko relatif lebih disukai dalam memberikan ringkasan tentang asosiasi pada data biner diperkirakan adalah kesulitan memberikan penjelasan yang tepat atas interpretasi dari *odds ratio*. Celakanya, meski beberapa peneliti —yang

mengetahui dengan jelas perbedaan antara *odds ratio* dan *relative risk*— akan menemui kesulitan untuk menjelaskan interptratsi yang tepat tentang *odds ratio*, mereka tetap mengkomunikasikannya kepada khalayak umum (Lumley *et al*. 2006)

Model log-binomial telah diusulkan sebagai pendekatan yang bermanfaat untuk menghitung rasio prevalensi. Prevalensi adalah banyaknya subyek yang mengalami kejadian tertentu atau menderita penyakit tertentu pada suatu waktu tertentu. Model log-binomial juga digunakan untuk menganalisa suatu hasil dikotomi. Tidak seperti regresi logistik, angka-angka pada model log binomial dibatasi pada ruang parameter dan MLE mungkin terjadi pada batas ruang parameter. Secara umum, model log-binomial menghasilkan suatu perkiraan dari rasio prevalensi yang takbias dengan selang kepercayaan untuk rasio prevalensi yang mungkin lebih kecil.

Perbedaan antara model logistik dengan model log-binomial menjadi hubungan antara variabel bebas dan dari hasil peluangnya. Pada regresi logistik digunakan fungsi logit sedangkan untuk model log–binomial, fungsi log yang digunakan. Secara umum, model log-binomial menghasilkan suatu perkiraan yang takbias dari rasio prevalensi.

Permasalahan

Penggunaan regresi log-binomial dalam penelitian epidemiologi untuk memperoleh dugaan bukannya tanpa masalah. Secara statistika, sebagaimana Model Linier Umum (*Generalized Linear Models*) pada umumnya, regresi logistik dan log-binomial juga menghadapi masalah ketakkonvergenan karena proses pendugaana parameter yang dilakukan secara iteratif. Ketakkonvergenan dapat pula terjadi akibat defisiensi derajat bebas error, pada regresi yang melibatkan beberapa varibel penjelas berkategori. Bila kekonvergenan tidak tercapai, maka nilai odds ratio maupun risiko relatif tidak dapat diperoleh, karena proses iterasi yang tidak pernah berhenti. Sementara itu, pada model log-binomial pendugaa peluang yang diturunkan dari model (log) mungkin tidak semuanya berada pada interval 0-1.

Demikian penting regresi logistik dan log-binomial untuk menghasilkan odds ratio dan resiko relatif dalam studi epidemiologi. Karena itulah tulisan ini akan membicarakan tentang (i) regresi Risiko Relatif (ratio prevalensi) dengan model log-binomial, (ii) mengatasi kasus ketidakkonvergenan melalui metode copy (*copy methods*) serta (iii) memperoleh nilai risiko relatif (rasio prevalensi) pada studi kasus data penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSUD Dr. Soebandi Jember.

MODEL REGRESI LOGISTIK

Logistik merupakan salah satu metode regresi yang digunakan untuk mencari hubungan antara peubah respon kategori dengan satu atau lebih peubah bebas yang kontinu.
Model regresi logistik dapat dinyatakan sebagai :

$$\pi(x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip})} \qquad (2.1)$$

dengan i = 1, 2, …, n dan p = banyak peubah bebas.
Bentuk transformasi logitnya adalah

$$g(Xi) = \ln\left(\frac{\pi(Xi)}{1-\pi(Xi)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\dfrac{\exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}{1 + \exp(\beta_0 + \cdots + \beta_p X_{ip})}}{1 - \dfrac{\exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\dfrac{\exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}}{\dfrac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})}{1}\right)$$

$$= \ln \exp(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip})$$

$$= \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p X_{ip} \qquad \textbf{(2.2)}$$

dengan $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ip}$ = peubah bebas ke 1, 2, …, p dengan nilai pengamatan ke-i; dan $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ = koefisien regresi untuk setiap peubah bebas.

MODEL LOG BINOMIAL

Model log-binomial telah diusulkan sebagai pendekatan yang bermanfaat untuk menghitung risiko relatif. Model log-binomial digunakan untuk menganalisa suatu hasil dikotomi. Perbedaan antara model logistik dengan model log-binomial menjadi hubungan antara variabel bebas dan dari hasil peluangnya. Pada regresi logistik, fungsi logit digunakan sedangkan untuk model log –binomial, fungsi log yang digunakan. Secara umum, model log-binomial menghasilkan suatu perkiraan yang takbias dari risiko relatif.

Selang kepercayaan untuk risiko relatif yang dihitung mungkin lebih kecil. Model log-binomial tidak konvergen untuk memberikan parameter estimate. Ketidakkonvergenan bisa dilihat dalam hunbungannya dengan program software yang mempunyai suatu ukuran ketidakkonvergenan yang tidak cukup. Masalah ini dapat diatasi dengan memberikan tambahan iterasi dalam proses pengepasan model.

Skov et al (1998) merekomendasikan model log-binomial sebagai ganti model logistik untuk studi *cross-sectional*. Misalkan Y (0/1) merupakan tidak/ya tentang peristiwa atau memperlihatkan tanda didalam subjek dengan covarian X = $(x_1,\ldots,x_k)$. Kemudian peluang tentang peristiwa dalam subjek adalah

$$p = P(Y = 1 \mid X) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k) \qquad (1.1)$$

Ketika peluang *p* adalah selalu diantara 0 dan 1, model akan sah hanya jika

$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k \le 0$$

Juga $p = P(Y = 0 \mid X) = 1 - p = 1 - \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k)$

Kemudian *likelihood* untuk model log-binomial

$$L(Y \mid \beta, X) = \prod_{y_i=1} \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}) \times \prod_{y_j=0} \left(1 - \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \cdots + \beta_K x_{Kj})\right) \quad (1.2)$$

dan fungsi *log-likelihoodnya* adalah

$$Log(Y \mid \beta, X) = \sum_{y_i=1} (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}) + \sum_{y_j=0} \log(1 - \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki})) \quad (1.3)$$

Untuk masing-masing subjek i, domainnya adalah

$$\Omega_i = \{(\beta_0, \ldots, \beta_K) : \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} \le 0\} \qquad (1.4)$$

Oleh karena itu ruang parameter untuk model log-binomial adalah $\Omega = \bigcap_{i=1}^{K} \Omega_i$

RASIO PREVALENSI

Mempelajari suatu hasil yang umum biasanya lebih tertarik pada penghitungan rasio prevalensi dari pada odds ratio. Odds ratio mungkin lebih disukai karena bisa digunakan untuk menghitung rasio nilai kejadian. Akan tetapi rasio prevalensi biasanya lebih mudah ditafsirkan dibanding odds ratio. Odds ratio bisa digunakan untuk memperkirakan rasio prevalensi, tetapi perkiraan tersebut baik hanya jika prevalensinya rendah. Lee (1994) dan Lee & Chia (1993) merekomendasikan penggunaan model resiko proporsional cox untuk menghitung rasio prevalensi. Skov *et all* (1998) merekomendasikan penggunaan model log-binomial, yang secara langsung memodelkan rasio prevalensi, dan menunjukkan bahwa metode ini lebih baik dibanding metode resiko proporsional cox (Lumley *et al*, 2006).

Model rasio prevalensi berasal dari model Regresi

$$\log P[Y=1|X] = \log\mu = \eta = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p \quad (1)$$

dimana e^{β_i} , adalah sebuah rasio prevalensi yang membandingkan X_i yang berbeda dari 1. Jika P[Y=1| X] lebih kecil, maka :

$$\log\ P\left[Y=1\middle|X\right] \approx \log \frac{P\left[Y=1\middle|X\right]}{1-P\left[Y=1\middle|X\right]} \equiv \log it\ P\left[Y=1\middle|X\right],$$

dan jika itu benar untuk semua nilai dari X, maka model rasio prevalensi mendekati model regresi logistik .

$$\log it\ P\left[Y=1\middle|X\right] = \log it\ \mu = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_p X_p$$

Jika P[Y=1|X] lebih besar daripada 10-15% untuk beberapa nilai pengamatan X (greenland) kemudian α dan β terlihat berbeda dengan |α| dan |β|.

Seperti Model Regresi Logistik, pada model regresi rasio prevalensi juga merupakan generalized linier model (GLM),(McCullagh & Nelder,1989), dengan hubungan log dan fungsi varians V(μ) = μ(1– μ). Tidak seperti model regresi logistik, model risiko relatif

memerlukan batasan untuk β yang dipastikan dengan mencoba sisa peluang dalam interval [0,1].

MLE dan semua estimator yang konsisten telah diusulkan, penyelesaian dari persamaan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta} w(\mu_i)(Y_i - \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i w(\mu_i)(Y_i - \mu_i) = 0$$

dengan pilihan fungsi weight w(.) yang berbeda, sedikitnya dalam situasi dimana solusi untuk persamaannya ada dalam ruang parameter.

Persamaan ini diperkirakan tidak bias untuk beberapa pilihan pada w(.), maka semua estimator akan konsisten., dan akan asimtotik normal sepanjang β adalah dalam bagian ruang parameter yang sedang dipertimbangkan (McCullagh & Nelder, 1989).

Seperti model regresi logistik, model regresi resiko relatif memerlukan batasan-batasan β untuk menjamin bahwa probabilitas yang cocok tetap berada pada interval [0,1] (Lumley *et al*, 2006).

ESTIMASI GLM PADA PROGRAM SAS

Pada *SAS* estimator log-binomial didapatkan hanya dengan memilih ristribusi binomial dan hubungan log. Untuk menghitung *standart error* yang valid untuk fungsi bobot yang lain menambah baris (SAS Institute Inc, 2004) yang memerlukan estimasi yang sesuai dengan data asli dengan satu observasi per individu ini memberikan standar error model *robust* tanpa mengubah estimasi penting resiko relatif. Pada SAS menggunakan proc genmod dengan distribusi log-binomial dan fungsi hubungan log. Tidak seperti model logistik, model log-binomial memberikan batasan-batasan pada ruang parameter, dan penghitungan MLE bisa terjadi pada batas ruang parameter, dalam hal ini prog genmod tidak akan konvergen penghitungan yang tepat. Metode dengan perluasan data menjadi sejumlah copy-copy data asli yang diatur dengan satu copy data asli dengan kasus kontrol yang dibalik untuk mendapatkan penghitungan yang tepat pada standart error rasio prevalensi. Metode SAS juga metode perkiraan yang menghasilkan penghitungan-penghitugan yang mendekati penghitungan MLE yang tepat dan parameternya yang benar.

Proc Genmod pada SAS memaksimalkan kemungkinan dengan menentukan titik atau nilai dimana turunannya sama dengan nol, tidak mampu menemukan suatu

penghitungan dalam situasi yang demikian karena prosedur iterasinya tidak konvergen. Masalah yang biasanya muncul dengan satu variabel independen, untuk setiap observasi yang melibatkan kombinasi-kombinasi tertentu dari tingkat variabel independen.

Metode Copy

Suatu metode baru *(copy method)* yang meliputi modifikasi data sehingga MLE dalam data yang sudah dimodifikasi mendekati MLE dari data aslinya. MLE pada pengaturan data yang sudah dimodifikasi selalu berada dalam ruang parameter, sehingga MLE ini bisa ditemukan dengan menggunakan *proc genmod*. Lebih spesifik, kita ajukan bahwa pengaturan data yang baru diciptakan yang berisi *copy-copy* C-1 dari data asli dan 1 *copy* data asli dengan nilai-nilai Y yang saling menggantikan. Misalnya, dapat menggunakan C=1000 dan memiliki 999 copy data asli dan 1 data asli dengan semua nilai Y saling menggantikan. Untuk mempertimbangkan ukuran sampel yang terus meningkat, kemudian mengalikan standart error yang sudah dihitung.

Dengan memasukkan data yang sudah dikembangkan tersebut, berharap bisa memperoleh suatu perhitungan MLE baru yang mendekati penghitungan yang sebenarnya tetapi tidak berada pada batas. Tujuannya adalah untuk memilih sejumlah *copy* sehingga penghitungan baru tersebut juga dekat dengan batas sehingga *software* tidak bisa menghitungnya. Pada SAS belum mengalami masalah ini, tetapi kadang-kadang *proc genmod* tidak konvergen ketika jumlah *copy*nya terlalu kecil.

Metode tersebut meliputi perluasan data yang diatur agar bisa menjadi jumlah yang sangat besar dari copy-copy data asli yang diatur dengan satu copy data asli dari kasus kontrol yang dapat dibalik. Standart error yang dihitung dari rasio prevalensi pada data yang diperluas ini kemudian diatur untuk mendapatkan perhitungan yang tepat pada standart error rasio prevalensi (Deddens, J.A. Petersen, M. R. & Lei, X. 2006).

METODOLOGI

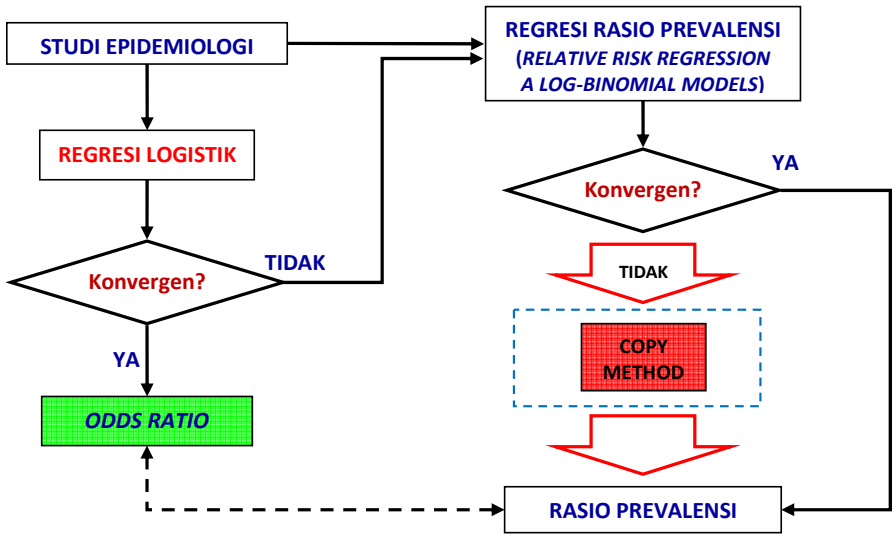
Sebagaimana kerangka logis riset (gambar 1), tahapan penyelesaian masalah ketakkonvergenan pada regresi logistik adalah:

1. Memeriksa kejadian takkonvergen pada model logistik dan log-binomial.
2. Mengatasi ketakkonvergenan, melalui penggunaan model log-binomial dengan algoritma copy (*COPY method*) (Deddens, J.A. Petersen, M. R. & Lei, X. 2006)

3. Mendapatkan nilai dugaan rasio prevalensi dari model log-binomial.

Studi kasus epidemiologi yang dugunakan dalam penelitian ini adalah data tentang penyakit demam berdarah dengue (DBD) di Rumah Sakit Umum Daerah (RSUD) Dr. Soebandi Jember tahun 2006. Sedangkan variabel yang diteliti adalah umur, jenis kelamin, waktu tahan hidup (hari), status (mati atau sembuh), kondisi pasien (stadium) dan trombosit . Peubah-peubah yang digunakan untuk membuat model regresi risiko relatif adalah sebagai berikut :

1. Peubah respon (Y) adalah kejadian seseorang dengan kasus demam berdarah *dengue* (DBD). Dengan 0 mengindikasikan sembuh dan 1 mengindikasikan meninggal.
2. Peubah penjelas (X) antara lain :
   a. Jenis kelamin (SEX), yaitu dibagi menjadi 2 kategori antara lain:
      - Wanita , dengan indeks 0; dan
      - Laki-laki, dengan indeks 1.
   b. Usia (AGE), yaitu dibagi menjadi 2 kategori :
      - ≤ 15 tahun, dengan indeks 0; dan
      - > 15 tahun dengan indeks 1



Gambar 1. Kerangka Logik Riset

   c. Hari (DAY), dalam hal ini hari yang dimaksud adalah waktu seseorang dengan kasus DBD dapat bertahan hidup.
   d. Status, yaitu dibagi menjadi 2 kategori antara lain :

- Sembuh, dengan indeks 0; dan
- Meninggal, dengan indeks 1.

e. Stadium, yaitu kondisi seseorang dengan kasus DBD (stadium 1, stadium 2, stadium 3, dan stadium 4).
   - Trombosit, yaitu dibagi menjadi 2 kategori yaitu (1) $\leq 100.000/\mu l$, dengan indeks 0; dan (2) $> 100.000/\mu l$, dengan indeks 1.

HASIL DAN DISKUSI

Ketakkonvergenan Model Logistik dan Log-Binomial

Dari model yang digunakan pada data studi kasus, ditemui ketakkonvergenan pada model logistis. Kita dapat menggunakan model Log-binomial sebagai alternatif ketika model logistik tidak konvergen. Namun model log-binomial juga sangat mungkin menalami hal yang sama.

Keuntungan memnggunakan model log-binomial adalah dapat diperolehnya rasio prevalensi secara langsung dari model. Sedangka pada model logistik akan menghasilkan odds ratio, yang mana tidak selamanya odds ratio ini dapat mendekati nilai rasia prevalensi yang diinginkan oleh studi epidemiologi.

Pemodelan log-binomial dapat dilakukan menggunakan SAS melalui PROC GENMOD dengan distribusi binomial dan fungsi hubung log. Model log binomial memberikan batasan-batasan pada ruang parameter, dan penghitungan MLE bisa terjadi pada ruang parameter. Metode proc genmod yang memaksimalkan kemungkinan dengan menentukan titik atau nilai dimana turunannya sama dengan nol, tidak mampu menemukan suatu penghitungan, hal ini disebabkan karena proses iterasi yang tidak konvergen (lihat gambar 2).

```
PROC GENMOD did not converge on the original data set.
          Continuing with COPY method ...

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Algorithm converged.
PROC GENMOD CONVERGED FOR THE COPY METHOD.
```

Gambar 2. Ketakkonvergenan pada model log-binomial

Mengatasi Ketakonvergenan Model Log-Binomial
dengan Metode Copy

Pada kasus dimana terjadi ketakkonvergenan seperti pada kasus ini, dapat dilakukan pendekatan metode copy melalui macro-sas *%pr_copylr.*. Metode tersebut meliputi perluasan data yang diatur agar menjadi jumlah yang sangat besar dari copy-copy data asli yang diatur dari satu copy data asli dengan semua nilai Y yang saling menggantikan. . Dalam penelitian ini data yang digunakan adalah data demam berdarah, sebanyak 136, dengan copy = 100.

Standar error yang dihitung dari rasio prevalensi pada data yang diperluas ini kemudian diatur untuk mendapatkan perhitungan yang tepat pada standar error rasio prevalensi.

Model rasio prevalensi yang diperoleh dari data demam berdarah (DBD) dengan model log binomial, dengan model Log binomial sebagai berikut :

$$P(Y=1|X)=\exp(\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_kX_{ki})$$

Dengan menggunakan data demam berdarah (DBD) yaitu data penelitian yang akan dilihat apakah variabel penjelas akan memperbesar atau memperkecil peluang terjadinya Y(variabel respon), didapat modelsebagai berikut :

$$P(Y=1|X)=\exp\begin{pmatrix}-0.2473+0.2380X_{11}+0.2375X_{12}+0.2364X_{13}+0.0002X_3\\+01423X_{41}-0.1421X_5X_6-0.1423X_5X_7-0.1421X_5X_7\end{pmatrix}$$

dimana $X_5 = X_{41}$ dan $X_6 = X_{11}$, $X_7 = X_{12}$, $X_8 = X_{13}$

X_5 X_6 adalah kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium 1,

X_5 X_7 adalah kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium 2,

X_5 X_8 adalah kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium 3,

Dari model yang diperoleh dapat diketahui juga bahwa apabila parameter estimate β yang diperoleh dihitung rasio prevalensi (e^{β}) yaitu seperti pada tabel.... :

Dari Tabel 1. dapat diketahui bahwa nilai rasio prevalensi (e^{β}) > 1, yaitu pada parameter estimate (β) yang bernilai positif. Dengan variabel penjelas stadium 1, stadium 2, stadium 3, hari (*day*), dan jenis kelamin perempuan, yang mempunyai nilai rasio prevalensi 1.268709, 1.268075, 1.266681, 1.000200, dan 1.152920. Hal ini dapat diartikan bahwa pada variabel penjelas yang mempunyai nilai rasio prevalensi (e^{β}) > 1, mempunyai peluang sembuh yang lebih besar, yang dipengaruhi

oleh variabel penjelas stadium 1, stadium 2, stadium 3, hari (*day*), dan jenis kelamin perempuan.

Untuk nilai rasio prevalensi (e^{β}) < 1, yaitu pada parameter estimate (β) yang bernilai negatif. Dengan vaiabel penjelas kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium1, dengan stadium 2, dan dengan stadium 3, yang mempunyai nilai rasio prevalensi 0.867534, 0.867361, dan 0.867534. Hal ini dapat diartikan bahwa pada variabel penjelas yang mempunyai nilai rasio prevalensi (e^{β}) < 1, mempunyai peluang sembuh yang kecil, yang dipengaruhi oleh variabel penjelas kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium1, dengan stadium 2, dan dengan stadium 3.

Untuk nilai rasio prevalensi (e^{β}) = 1, yaitu pada parameter estimate (β) yang bernilai 0.0000. Variabel penjelas Stadium 4, Jenis kelamin laki-laki, kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium 4, dan kombinasi jenis kelamin laki-laki dengan stadium 1, 2, 3, 4, mempunyai nilai rasio prevalensi , karena dijadikan kategori acuan. Sedangkan pada variabel penjelas Usia (age) dan Trombosit nilai rasio prevalensi (e^{β}) yang sama dengan 1 dapat diartikan variabel tersebut kurang berpengaruh, karena perbedaan nilai trombosit dan usia tidak memberikan perbedaan peluang sembu/sehat.

Tabel 2. Hasil analisis parameter estimate model log-binomial dengan metode copy

Variabel Penjelas	Parameter estimate (β)	Rasio Prevalensi (e^{β})	Adjusted P_Value
Stadium 1	0.2380	1.268709$^{**)}$	0.00100
Sradium 2	0.2375	1.268075$^{**)}$	0.00100
Stadium 3	0.2364	1.266681$^{**)}$	0.00108
Stadium 4	0.0000	1.000000	-
Usia (*age*)	0.0000	1.000000$^{ns)}$	0.91729
Hari (*day*)	0.0002	1.000200$^{ns)}$	0.92128
JKP	0.1423	1.152920$^{ns)}$	0.10283
JKL	0.0000	1.000000	-
Trombosit	0.0000	1.000000$^{ns)}$	0.78552
JKP*Stadium1	-0.1421	0.867534$^{ns)}$	0.10955
JKP*Stadium 2	-0.1423	0.867361$^{ns)}$	0.10890

JKP*Stadium 3	-0.1421	0.867534 ns)	0.11155
JKP*Stadium 4	0.0000	1.000000 ns)	-
JKL*Stadium1,2,3,4	0.0000	1.000000 ns)	-

Dengan melihat nilai adj p-valuenya pada Tabel 2, dapat diinterpretasikan bahwa variabel penjelas lamanya pasien dirawat (hari), umur, jenis kelaminnya, jumlah trombositnya, dan interaksi antara jenis kelamin dengan tingkat stadiumnya tidak berpengaruh nyata terhadap status kesembuhan seorang pasien.

Sedangkan pada variabel penjelas stadium 1,2, dan 3 mempunyai nilai adjusted p-value yang lebih kecil dari taraf nyata 0.05 (adj_p-value < 0.05). Hal ini berarti bahwa variabel penjelas stadium yang dilihat dari tingkatan kritisnya seorang pasien yaitu stadium 1,2, dan 3, mempunyai pengaruh yang nyata terhadap model atau dengan kata lain status kesembuhan pasien yang terkena demam berdarah dipengaruhi oleh stadium 1,2, dan 3.

Estimasi Rasio Prevalensi

Hasil nilai rasio prevalensi yang diperoleh dengan metode copy dapat dilihat pada Tabel 2. Interpretasi hasil rasio prevalensi pada Tabel 2, dapat diketahui bahwa nilai rasio prevalensi pada variabel penjelas stadium yaitu pada stadium 1,2, dan 3 mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) > 1, sedangkan stadium 4 mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) = 1, hal ini berarti stadium 4 dijadikan sebagai acuan pembading bagi stadium 1,2, dan 3. Pasien dengan stadium 1, 2, dan 3 mempunyai peluang untuk sembuh sekitar 1.26 kali lipat lebih besar daripada stadium 4. Lebih tepatnya, pasien dengan stadium 1 berpeluang sembuh 1.26869 kali lebih besar daripada pasien dengan stadium 4, pasien dengan stadium 2 berpeluang sembuh 1.26807 kali lebih besar daripada pasien dengan stadium 4, sedangkan pasien dengan stadium 3 berpeluang sembuh 1.26667 kali lebih besar daripada pasien dengan stadium 4.

Pada variabel penjelas usia (*age*) mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) > 1, hal ini berarti semakin tinggi umurnya maka mempunyai peluang untuk sembuh lebih mudah. Pada variabel penjelas hari (day) mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) > 1, yang berarti semakin lama pasien dirawat maka peluang untuk sembuh juga semakin

besar. Pada variabel penjelas jenis kelamin perempuan mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) > 1, sedangkan jenis kelamin laki-laki mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) = 1 sebagai acuan pembanding, hal ini berarti pasien yang mempunyai jenis kelamin perempuan mempunyai peluang untuk sembuh 1.15 kali lipat lebih besar daripada pasien yang mempunyai jenis kelamin laki-laki.

Pada variabel penjelas trombosit mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) < 1, yang berarti jumlah trombosit pada pasien mempunyai peluang yang kurang berpengaruh pada kesembuhan. Pada variabel penjelas kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium1, dengan stadium 2, dan dengan stadium 3 mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) < 1, hal ini berarti bahwa variabel-variabel penjelas tersebut mempunyai peluang untuk sembuh 0.867 kali lipat lebih kecil dibandingkan dengan variabel penjelas kombinasi antara jenis kelamin perempuan dengan stadium 4, dan kombinasi antara jenis kelamin laki-laki dengan stadium 1,2,3,4 yang mempunyai nilai rasio prevalensi (RP) = 1.

PENUTUP

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, beberapa kesimpulan yang dapat diambil antara lain :

1. Metode Copy sebagai solusi yang dapat digunakan ketika data yang dimodelkan dengan log-binomial gagal menuju konvergen.
2. Kasus kesembuhan demam berdarah (DBD) pada tulisan ini menunjukkan bahwa yang paling berpengaruh adalah stadium pasien saat mendapatkan penanganan medis. Dengan memperhatikan angka prevalen rationya dapat dikatakan bahwa pasien dengan stadium 1, 2, dan 3 mempunyai peluang untuk sembuh sekitar 1.26 kali lipat lebih besar daripada pasien yang dtangani saat telah mencapai stadium 4 (amat parah). Atau dengan kata lain kegagalan penangan DBD akan naik dengan terlambatnya penanganan.
3. Pada studi epidemiologi, yaitu pada studi kasus demam berdarah (DBD) yang dgunakan pada penelitian ini, dilihat dari nilai rasio prevalensinya maupun nilai adjusted p-valuenya variabel penjelas stadium merupakan variabel penjelas yang mempunyai pengaruh peluang untuk sembuh paling besar.

UCAPAN TERIMA KASIH

1. ProgramHibah Kompetisi A-2 Jurusan Matematika FMIPA Unversitas Lampung
2. Seluruh pihak yang telah membantu pengumpulan data.

Pengujian Autokorelasi terhadap Sisaan Model Spatial Logistik

Utami Dyah Syafitri[1], Bagus Sartono[1], Salamatuttanzil[2]

Abstrak

Pemodelan dengan basis ruang (spatial) perlu memerhatikan pengaruh antar ruang tersebut. Pemodelan klasik yang mengasumsikan bahwa antar ruang saling bebas menjadi kurang relevan. Pemodelan regresi logistik spatial memasukkan pengaruh spatial ke dalam model regresi logistik dengan harapan bahwa sisaan yang dihasilkan dari model tersebut sudah saling bebas. Tujuan dari penelitian ini adalah melakukan pengujian autokorelasi spatial terhadap sisaan dari model regresi logistik spatial. Uji autokorelasi yang digunakan adalah indeks moran dan indeks geary.

Distribusi desa pada wilayah Kabupaten Bogor dan Kota Bogor berdasarkan status kemiskinannya mempunyai autokorelasi yang positif. Sehingga dalam pemodelan untuk memprediksi apakah desa tersebut miskin atau tidak berdasarkan potensi desanya perlu memperhatikan pengaruh spatial tersebut. Model logistik spatial dengan pendekatan matriks *contiguity* telah mampu mengakomodir pengaruh spatial tersebut. Hal ini ditunjukkan dengan tidak adanya autokorelasi pada sisaan model regresi logistik spatial tersebut.

Kata kunci : regresi logistik spatial, autokorelasi spatial, indeks moran, indeks geary

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pemodelan dengan basis ruang (spatial) perlu memerhatikan pengaruh antar ruang tersebut. Pemodelan klasik yang mengasumsikan bahwa antar ruang saling bebas menjadi kurang relevan. Pemodelan regresi logistik spatial memasukkan pengaruh spatial ke dalam model regresi logistik dengan harapan bahwa sisaan yang dihasilkan dari model tersebut sudah saling bebas.

Thaib (2008) melakukan penelitian mengenai model regresi logistik spatial dengan pendekatan matriks *contiguity*. Studi kasus yang diambil adalah pendugaan tingkat kemiskinan desa di Kabupaten dan Kota Bogor.

Dalam penelitian tersebut belum dilakukan pengujian apakah sisaan yang dihasilkan dari model regresi logistik tersebut sudah saling bebas (tidak ada autokorelasi spatial). Indeks yang biasa digunakan dalam melihat ada atau tidak autokorelasi spatial adalah indeks moran dan indeks geary. Indeks moran merupakan indikator global sedangkan geary indeks merupakan indikator lokal.

Berdasarkan hal tersebut maka dalam penelitian ini akan dilakukan pengujian autokorelasi spatial terhadap sisaan dari model regresi spatial logistik yang dilakukan oleh Thaib (2008). Studi kasus yang digunakan adalah pendugaan status kemiskinan desa di Kabupaten dan Kodya Bogor.

Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah melakukan pengujian autokorelasi spatial terhadap sisaan model spatial logistik.

TINJAUAN PUSTAKA

Autokorelasi Spasial

Hukum I Geografi berbunyi, *'everything is related to everything else, but near things are more related than distant things'* (Lee & Wong, 2001). Maksud lainnya adalah segala sesuatu berhubungan satu sama lain, dan sesuatu yang berada lebih dekat mempunyai hubungan yang lebih erat dibandingkan dengan yang berada lebih jauh. Secara umum, data geografis tidak akan saling bebas.

Autokorelasi spasial adalah suatu ukuran kemiripan dari objek di dalam suatu ruang, baik jarak, waktu, ataupun wilayah. Dengan kata lain autokorelasi spasial adalah korelasi antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan ruang. Adanya autokorelasi spasial mengindikasikan bahwa nilai atribut pada daerah tertentu terkait oleh nilai atribut tersebut pada daerah lain yang letaknya berdekatan (bertetanggaan).

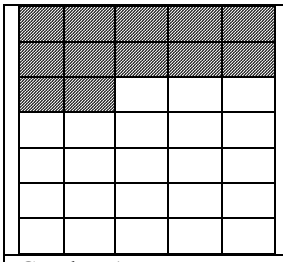
Lembo (2006) menyebutkan jika ada pola yang sistematik dalam sebaran spasial suatu atribut, maka dapat dikatakan bahwa ada autokorelasi spasial dalam atribut tersebut. Jika dalam suatu daerah yang saling berdekatan mempunyai nilai

[1] Diseminarkan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Univeristas Negeri Yogyakarta, Jumat 28 November 2008,

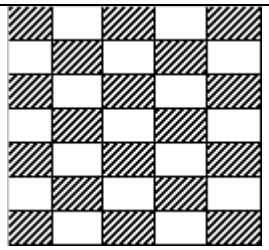
[2] Staf Pengajar Departemen Statistika FMIPAIPB

[3] Mahasiswa Departemen Statistika FMIPA IPB

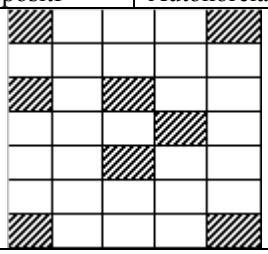
yang sangat mirip, menunjukkan autokorelasi spasial positif. Jika nilai di daerah yang berdekatan tidak mirip, menunjukkan autokorelasi spasial negatif. Nilai yang acak menunjukkan tidak adanya autokorelasi spasial. Secara visual dapat dilihat pada Gambar 1a s.d Gambar 1c. Konsep dasar dalam analisis autokorelasi spasial untuk data area adalah matriks pembobot spasial.



Gambar 1a.
Autokorelasi positf



Gambar 1b.
Autokorelasi negatif



Gambar 1c. Tidak ada Autokorelasi

Matriks *Contiguity*

Matriks *contiguity* adalah matriks yang menggambarkan hubungan antar daerah, nilai 1 diberikan jika daerah-*i* berdekatan dengan daerah-*j*, sedangkan nilai 0 diberikan jika daerah-*i* tidak berdekatan dengan daerah-*j*. Lee dan Wong (2001) menyebut matriks ini dengan *binary matrix*, dan juga disebut *connectivity matrix*, yang dinotasikan dengan ***C***, dan c_{ij} merupakan nilai dalam matriks baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Matriks C mempunyai beberapa karakteristik. Pertama, elemen diagonal matriks C bernilai 0, karena diasumsikan bahwa suatu daerah tidak berdekatan dengan dirinya sendiri. Kedua, matriks C merupakan matriks simetrik, matriks segitiga atas merupakan cermin dari matriks segitiga bawah. Ketiga, jumlah nilai pada baris ke-*i* merupakan jumlah tetangga yang dimiliki oleh daerah ke-*i*. Notasi penjumlahan baris:

$$c_{i.} = \sum c_{ij}$$

Dimana:

$c_{i.}$ = total nilai baris ke-*i*

c_{ij} = nilai pada baris ke-i kolom ke-*j*

Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial pada dasarnya merupakan martiks *contiguity* yang distandardisasi. Pada matriks contiguity, nilai 1 menunjukkan daerah yang bertetanggaan satu sama lain. Untuk melihat seberapa besar pengaruh masing-masing tetangga terhadap suatu daerah dapat dihitung dari rasio antara nilai pada daerah tertentu dengan tota nilai daerah tetangganya. Hasilnya merupakan nilai pembobotan (w_{ij}) untuk setiap kebertetanggaan. Sesuai dengan persamaan :

$$w_{ij} = c_{ij} / c_{i.}$$

Matriks pembobot spasial dapat dikatakan juga sebagai matriks yang menggambarkan kekuatan interaksi antar lokasi.

Indeks Moran (Moran's *I*)

Salah satu statistik umum yang digunakan dalam autokorelasi spasial adalah statistik Moran's I. Indeks moran (Moran's I) adalah ukuran dari korelasi (hubungan) antara pengamatan yang saling berdekatan. Statistik ini membandingkan nilai pengamatan di suatu daerah dengan nilai pengamatan di daerah lainnya. Menurut Lee dan Wong (2001) Moran's I dapat diukur dengan menggunakan persamaan :

$$I = \frac{n\sum_i\sum_j w_{i,j}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{(\sum_i\sum_j w_{i,j})\sum_i(x_i - \bar{x})^2}$$

Dimana:

n = Banyaknya pengamatan

$\bar{x}$ = Nilai rata-rata dari { x_i } dari n lokasi

x_j = Nilai pada lokasi ke-*i*

x_i = Nilai pada lokasi ke-*j*

w_{ij} = Elemen matriks pembobot spasial

Nilai I sama dengan koefisien korelasi yaitu diantara -1 sampai 1. Nilai yang tinggi mengartikan bahwa korelasinya tinggi, sedangkan nilai 0 mengartikan tidak adanya autokorelasi. Akan tetapi untuk mengatakan ada atau tidak adanya autokorelasi perlu dibandingkan nilai statistik I dengan nilai harapannya. Nilai harapan dari I adalah:

$$E(I) = \frac{-1}{(n-1)}$$

Menurut Lee dan Wong (2001) statistik uji yang digunakan diturunkan dari sebaran normal baku, yaitu :

$$Z(I) = \frac{I - E(I)}{\sigma_{(I)}}$$

Dimana:
I = Indeks moran
Z(I) = Nilai statistik uji indeks Moran
E(I) = Nilai harapan dari indeks Moran
$\sigma_{(I)}$ = Simpangan baku dari indeks Moran

$$\sigma^2(I) = \frac{n^2 S_1 - nS_2 + 3(w)^2}{(w)^2(n^2 - 1)} \qquad w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}$$

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + c_{ji})^2}{2} \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n}(c_{i.} + c_{.i})^2$$

Keterangan:
c_{ij} = Elemen matriks contiguity
ci. = Jumlah baris ke-i matriks contiguity
$c_{.i}$ = Jumlah kolom ke-i matriks contiguity

Koefisien Geary (Geary's *C*)

Serupa dengan indeks Moran, merupakan metode pengukuran autokorelasi spasial. Koefisien Geary didefinisikan sebagai :

$$C = \frac{(n-1)\sum_i\sum_j w_{i,j}(x_i - x_j)^2}{2(\sum_i\sum_j w_{i,j})\sum_i(x_i - \bar{x})^2}$$

Dimana:
n = Banyaknya pengamatan
$\bar{x}$ = Nilai rata-rata dari { x_i } dari n lokasi
x_j = Nilai pada lokasi ke-*i*
x_i = Nilai pada lokasi ke-*j*
w_{ij} = Elemen matriks pembobot spasial

Koefisien Geary mempunyai nilai diantara 0 dan 2. Jika tidak ada hubungan spasial, maka akan mempunyai nilai 1. Nilai kurang dari 1, mengindikasikan adanya autokorelasi negatif. Jika lebih dari 1, mengindikasikan adanya autokorelasi positif. Untuk mengatakan ada atau tidak adanya autokorelasi perlu dibandingkan nilai statistik C dengan nilai harapannya. Menurut Lee dan Wong (2001) nilai harapan dari C adalah E(C)=1, dan statistika uji yang digunakan adalah:

$$Z(C) = \frac{I - E(C)}{\sigma_{(C)}}$$

Dimana:
C = Indeks koefisian Geary
Z(C) = Nilai statistik uji koefisien Geary
E(C) = Nilai harapan dari koefisien Geary
$\sigma_{(C)}$ = Simpangan baku dari koefisien Geary

$$\sigma^2(C) = \frac{(2S_1 + S_2)(n-1) - 4(w)^2}{(w)^2 2(n+1)}$$

$$w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}$$

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + c_{ji})^2}{2}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}(c_{i.} + c_{.i})^2$$

dimana:
n = Banyaknya pengamatan
$\bar{x}$ = Nilai rata-rata dari { x_i } dari n lokasi
x_j = Nilai pada lokasi ke-*i*
x_i = Nilai pada lokasi ke-*j*
w_{ij} = Elemen matriks pembobot spasial

Pengujian Hipotesis

Uji hipotesis untuk mengatakan ada atau tidaknya autokorelasi spasial merupakan pengujian dua arah. Bentuk hipotesis awal (H_0) pengujiannya adalah:

H_0 : I = 0 (untuk indeks Moran)
atau
H_0 : C = 1 (untuk koefisien Geary)

Kriteria pengambilan keputusannya adalah jika nilai $p < \alpha$ maka tolak H0 (ada atuokorelasi). Sebaliknya jika nilai $p > \alpha$ maka terima H0 (tidak ada autokorelasi).

Tidak terdapat autokorelasi spasial artinya:
1. Keacakan spasial.
2. Nilai yang diamati dalam suatu lokasi tertentu tidak bergantung pada lokasi yang berdekatan.

BAHAN DAN METODE

Bahan

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data PODES 2006 yang meliputi 494 desa dari Kabupaten dan Kota Bogor. Penelitian ini juga menggunakan hasil penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Thaib (2008), yaitu matriks *contiguity* dari 494 desa, dan hasil regresi logistik spasial untuk menduga status kemiskinan desa di

Kabupaten dan Kota Bogor. Peubah-peubah yang digunakan dalam regresi tersebut adalah persentase keluarga penerima kartu sehat, persentase luas sawah desa, keberadaan Puskesmas di desa, jumlah sekolah, dan Xspasial.

Metode

Langkah-langkah yang dilakukan adalah:

1. Mencari sisaan dari hasil regresi logistik spasial. Sebagai vektor x.
2. Mencari nilai statistik I (indeks Moran) dan melakukan pengujian hipotesis.
3. Mencari nilai statistik C (koefisien Geary) dan melakukan pengujian hipotesis.
4. Membandingkan hasil dari kedua uji tersebut
5. Pengolahan data dilakukan dengan software SAS ver 9.1, dan *Microsoft Excel* 2003.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Thaib (2008) menyatakan bahwa model regresi logistik spatial dengan pendekatan matriks kontiguity (kebertetanggaan) sedikit lebih bagus dalam memprediksi status kemiskinan desa di Kabupaten dan Kota Bogor dibandingkan dengan regresi logistik klasik. Hal ini terlihat dari nilai statistik c dan *correct clasification rate* (CCR) untuk untuk regresi logistik spatial lebih tinggi dibandingkan dengan regresi logistik klasik (Tabel 1).

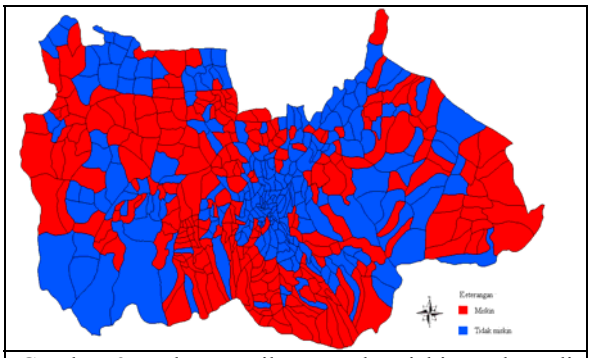
Tabel 1. Nilai perbandingan keterbaikan model regresi logistik klasik dengan spasial.

	Regresi logistik	
	Klasik	Spasial
Statistik c	0.733	0.76
-2 log likelihood	597.201	571.693
CCR	68.6%	69.8%
AIC	607.201	583.693

Pendekatan yang dilakukan oleh Thaib (2008) sejalan apabila ditinjau dari sisi autokorelasi spatial. Status kemiskinan antar desa mempunyai korelasi spaial yang positif. Baik dengan pendekatan indeks moran maupun indeks geary (Tabel 2). Artinya bahwa terdapat pengelompokkan berdasarkan status kemiskinan desa tersebut. Desa yang termasuk dalam kategori desa miskin karena tetangga desa sekitarnya juga terkategori miskin. Begitu pula sebaliknya desa yang terkategori tidak miskin dikelilingi oleh desa tetangga sekitarnya yang tidak miskin (Gambar 2). Status kemiskinan desa disini ditentukan dengan kriteria apabila presentase keluarga miskin di desa tersebut lebih dari 29% maka desa tersebut dikategorikan desa miskin (Thaib 2008).

Tabel 2. Hasil Perhitungan Indeks Moran dan Indeks Geary untuk status kemiskinan desa

Indeks	statistik	Std. error	z	Nilai p
Moran	0.2258	0.0259	8.79	< 0.000
Geary	0.1667	0.0732	-11.37	< 0.000



Gambar 2. Pola tematik status kemiskinan desa di Kabupaten dan Kota Bogor

Berdasarkan informasi tersebut maka dilakukan pendugaan status kemiskinan desa dengan regresi logistik spatial. Penelitian yang dilakukan Thaib (2008) menyebutkan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi status kemiskinan desa antara lain presentase keluarga penerima kartu sehat presentase luas sawah desa, keberadaan puskesmas di desa, jumlah sekolah, serta pengaruh kebertetanggan antar desa (merupakan proporsi jumlah tetangga antar desa).

Selanjutnya pada penelitian ini akan dilakukan pengujian autokorelasi spatial dengan indeks moran dan indeks geary pada sisaan hasil model regresi logistik spatial yang dilakukan Thaib (2008). Pengujian autokorelasi spatial pada sisaan menunjukkan bahwa sisaan sudah saling bebas (Tabel 3).

Tabel 3. Hasil Perhitungan Indeks Moran dan Indeks Geary untuk sisaan model regresi logistik spatial.

Indeks	statistik	Std. Error	z	Nilai p
Moran	0.0195	0.0259	0.8300	0.2033
Geary	0.9882	0.0732	-0.1600	0.5636

KESIMPULAN

Pemodelan status kemiskinan desa di Kabupaten dan Kota Bogor dengan pendekatan regresi logistik spatial dengan pendekatan matriks kontiguity telah mampu mengakomofir keragaman spatial antar desa. Hal ini ditunjukkan dari sisaan hasil pendekatan model regresi logistik spatial tersebut telah saling bebas (tidak ada autkorelasi spatial).

DAFTAR PUSTAKA

Lembo A J. 2006. *Spatial Autocorrelation*. Cornell University.
http://www.css.cornell.edu/courses/620/lecture9.ppt
[25 oktober 2008]

Lee J, Wong DWS. 2001. *Statistical Analysis ArcView GIS*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Susianto, Arif. 2005. Autokorelasi Spasial Tingkat Konsumsi BBM Propinsi Jawa Tengah. **Skipsi**.

Thaib, Zulhelmi. 2008. Pemodelan Regresi Logistik Spasial dengan Pendekatan Matriks Contiguity. **Skripsi**.

Penerapan Analisis Survival untuk Menaksir Waktu Bertahan Hidup bagi Penderita Penyakit Jantung

Oleh :
Yani Hendrajaya (me_yen2@yahoo.co.id),
Adi Setiawan dan Hanna A. Parhusip
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jl. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711

Abstract

Applying survival analysis in survival data from coroner heart (*acute miocard infark*) patients is discussed in this short paper. The goal of this research is to determine the treatment that gives a longer survival time. The treatments are the ring treatment, the bypass treatment and the medicine treatment. Data was collected from medical record patients who regularly going to control and check their healthy and conditions to a heart specialist doctor. The sample consists of 90 patients; 30 patients used ring treatment, 30 patients used bypass treatment, and 30 patients used medicine treatment.

Survival analysis by using parametric and non parametric estimation are used to estimate the survival time for coroner heart patients using three treatments. The result of this research shows that by using both estimations there is a difference survival time among ring treatment, bypass treatment and medicine treatment. A better medical treatment that gives longer survival time for coroner heart patients is the ring treatment.

Key words : survival analysis, parametric estimation, non parametric estimation, survival time.

1. Pendahuluan

Saat ini, kemungkinan atau peluang seseorang terkena penyakit semakin besar karena banyak jenis penyakit berbahaya yang disebabkan pola hidup masyarakat yang kurang sehat. Salah satu jenis penyakit yang berbahaya dan mematikan tersebut adalah penyakit jantung. Walaupun penyakit jantung adalah jenis penyakit yang sulit atau tidak mungkin disembuhkan, paling tidak pengidap penyakit jantung akan berusaha meminimalkan resiko kematian dengan melakukan tindakan atau usaha pengobatan tertentu. Untuk pengobatan penyakit jantung, ada 3 macam teknik yang dapat dilakukan, yaitu teknik pengobatan dengan menggunakan ring, teknik pengobatan dengan by pass, dan teknik pengobatan yang menggunakan obat.

Tabel 1. Data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung

No	Waktu Bertahan Hidup (bulan)	Status	Kelompok
1	6	0	ring
2	7	0	ring
3	7	0	ring
4	8	0	ring
5	11	0	ring
6	17	0	ring
7	20	0	ring
8	21	0	ring
9	21	0	ring
10	25	0	ring
11	26	0	ring
12	26	0	ring
13	38	0	ring
14	51	0	ring
15	52	0	ring
16	56	0	ring
17	57	0	ring
18	61	1	ring
19	62	0	ring
20	62	0	ring
21	66	0	ring
22	71	1	ring
23	71	0	ring
24	75	0	ring
25	83	0	ring
26	106	0	ring
27	123	0	ring
28	128	0	ring
29	156	0	ring
30	183	0	ring
31	6	0	By pass
32	6	0	By pass
33	7	0	By pass
34	12	0	By pass
35	12	0	By pass
36	16	0	By pass
37	17	0	By pass
38	17	0	By pass
39	21	0	By pass
40	26	0	By pass
41	32	0	By pass
42	33	0	By pass
43	42	0	By pass
44	42	0	By pass
45	56	0	By pass

No	Waktu Bertahan Hidup (bulan)	Status	Kelompok
46	56	0	By pass
47	60	1	By pass
48	65	0	By pass
49	78	0	By pass
50	87	0	By pass
51	87	0	By pass
52	93	0	By pass
53	102	0	By pass
54	116	0	By pass
55	116	1	By pass
56	146	1	By pass
57	161	0	By pass
58	173	1	By pass
59	178	1	By pass
60	182	1	By pass
61	6	0	Obat
62	8	0	Obat
63	8	0	Obat
64	11	0	Obat
65	12	0	Obat
66	12	0	Obat
67	16	0	Obat
68	30	0	Obat
69	33	0	Obat
70	33	0	Obat
71	35	0	Obat
72	38	0	Obat
73	47	1	Obat
74	48	0	Obat
75	62	1	Obat
76	62	0	Obat
77	88	0	Obat
78	88	0	Obat
79	92	1	Obat
80	97	0	Obat
81	98	1	Obat
82	101	1	Obat
83	102	1	Obat
84	116	0	Obat
85	132	1	Obat
86	137	1	Obat
87	141	1	Obat
88	142	1	Obat
89	151	1	Obat
90	178	1	Obat

Dengan menganalisis data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung koroner yang melakukan pemeriksaan secara teratur ke salah seorang dokter spesialis jantung di Solo, akan ditentukan teknik pengobatan yang lebih baik bagi penderita penyakit jantung. Analisis ini akan dilakukan dengan analisis *survival* estimasi

parametrik dan non parametrik, serta menggunakan program S-PLUS 2000. Data waktu bertahan hidup pasien penderita penyakit jantung disajikan pada Tabel 1.

2. Dasar Teori

Analisis *survival* adalah salah satu cabang statistika yang mempelajari teknik analisis data *survival*. Data *survival* adalah data waktu bertahan sampai munculnya kejadian tertentu. Data *survival* dikumpulkan dalam suatu periode waktu yang terbatas, dan sebagai konsekuensinya bisa saja data yang diperoleh tidak mencakup total waktu bertahan seseorang. Hal inilah yang kemudian dalam analisis *survival* disebut dengan data tersensor.

2.1 Estimasi Parametrik

Misalkan Y adalah waktu bertahan hidup sampai munculnya kejadian tertentu. Fungsi *survival*, $S(y)$, mendefinisikan probabilitas dari suatu individu untuk bertahan setelah waktu yang ditetapkan, namakan y, $S(y) = P(Y > y)$. Grafik fungsi *survival* adalah grafik fungsi yang tidak naik. Nilai fungsi $S(0) = 1$ dan $S(\infty) = 0$, artinya dapat dipastikan bahwa semua orang yang diamati pasti akan mengalami kejadian tertentu.

Fungsi *survival* dapat pula diperoleh dengan cara mengintegralkan fungsi kepadatan probabilitas (*probability density function*) dari Y yaitu $f(y)$,

$$S(y) = P(Y > y) = \int_{y}^{\infty} f(y)\, dy .$$

Fungsi *hazard*, $h(y)$, mendefinisikan laju kegagalan dari suatu individu untuk mampu bertahan setelah melewati waktu yang ditetapkan yaitu y (Klein dan Moeschberger,1997).

$$h(y) = \frac{f(y)}{S(y)} = -\frac{d}{dy}[\ln S(y)] .$$

Sedangkan fungsi *hazard* kumulatif (*cumulative hazard function*) didefinisikan oleh :

$$H(y) = \int_{0}^{y} h(u)\, du = -\int_{0}^{y} \frac{d}{du}[\ln S(u)]du = -\ln S(y) \quad .$$

2.1.1 Distribusi Weibull

Suatu variabel acak *Y* dikatakan berdistribusi Weibull dengan parameter β dan θ jika memiliki fungsi kerapatan probabilitas sebagai berikut :

$$f(y;\beta,\theta) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} y^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\beta}\right].$$

Fungsi *survival* dan fungsi *hazard* untuk distribusi Weibull, yaitu :

$$S(y) = \exp\left[\left(-\frac{y}{\theta}\right)^{\beta}\right] \quad ; \quad h(y) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\beta-1} = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} y^{\beta-1}.$$

Notasi yang menunjukkan bahwa *Y* berdistribusi Weibull adalah : $Y \sim \text{WEI}(\beta,\theta)$.

Jika $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah suatu sampel acak dari distribusi $f(y;\beta,\theta)$, maka untuk mencari nilai dari parameter β dan θ dapat digunakan sistem persamaan :

$$\text{E}(Y) = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad , \qquad \text{E}(Y^2) = \overline{Y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \ .$$

Nilai rata-rata dari $Y \sim \text{WEI}(\beta,\theta)$ adalah : $\text{E}(Y) = \theta\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$. Sedangkan nilai rata – rata dari Y^2 adalah $\text{E}(Y^2) = \theta^2\,\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)$.

Parameter β dan θ dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \theta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \qquad ,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \theta^2\,\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)$$

2.1.2 Uji Kecocokan Distribusi Probabilitas

Uji probabilitas digunakan untuk menguji kecocokan dari distribusi probabilitas pada data waktu bertahan hidup penderita kanker payudara. Uji kecocokan distribusi ini menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov*, atau yang lebih dikenal dengan *Goodness-Of-Fit Test*. Jika fungsi distribusi *F*(*y*) akan diduga dengan $F_0(y)$, maka akan ditetapkan hipotesis nol dan pengujian yang sesuai, yaitu :

$H_0 : F(y) = F_0(y)$, untuk semua nilai *y*.

$H_1 : F(y) \neq F_0(y)$, untuk paling sedikit satu nilai *y*.

Statistik uji *Kolmogorov-Smirnov* (D_n) untuk pengujian dua sisi diberikan sebagai berikut :

$$D_n = Maks_{\,1\le i\le r}\left\{Maks\left[\left|F(y_i)-\frac{i}{n}\right|,\left|F(y_i)-\frac{i-1}{n}\right|\right]\right\} \quad ,$$

untuk i = 1, 2,…, r + 1, dengan r adalah banyaknya nilai y yang berbeda dan $F(y_i)$ adalah fungsi distribusi yang diduga. Kriteria penolakan hipotesis nol (H_0) adalah sebagai berikut :

1. Hipotesis nol (H_0) diterima jika nilai-$p \ge$ taraf signifikansi (*level of significance*) α yang dipilih,
2. Sebaliknya jika nilai-$p < \alpha$ maka hipotesis nol (H_0) akan ditolak, yang artinya distribusi probabilitas yang diduga tidak sama dengan distribusi tertentu.

2.2 Estimasi Non Parametrik

Misalkan suatu peristiwa terjadi pada waktu D dan $t_1 < t_2 < \ldots < t_D$, pada saat t_i terdapat d_i peristiwa, dan Y_i adalah banyaknya individu yang memiliki resiko setelah waktu t_i. Setelah mengubah notasi, maka untuk menaksir peluang suatu individu bertahan pada waktu t_i adalah :

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_i \le t} \frac{Y_i - d_i}{Y_i} \qquad \ldots (3)$$

yang selanjutnya dikenal sebagai estimasi Kaplan-Meier. Nilai variansi untuk $\hat{S}(t)$ dirumuskan oleh :

$$\hat{V}\left[\hat{S}(t)\right] = \hat{S}(t)^2 \sum_{t_i \le t} \frac{d_i}{Y_i\left(Y_i - d_i\right)}$$

dengan standar error diberikan oleh $\left[\hat{V}\left[\hat{S}(t)\right]\right]^{1/2}$. Selang kepercayaan $(1-\alpha)\text{x}100\%$ untuk $\hat{S}(t)$ pada titik t_0,

$$\hat{S}(t_0) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left[\hat{V}\left[\hat{S}(t_0)\right]\right]^{1/2} \le \hat{S}(t_0) \le \hat{S}(t_0) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\left[\hat{V}\left[\hat{S}(t_0)\right]\right]^{1/2} \quad .$$

2. Metodologi Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan menentukan teknik pengobatan yang lebih baik bagi penderita penyakit jantung adalah :

Estimasi Parametrik

1. Mengestimasi nilai dari parameter β dan θ dengan menyelesaikan persamaan (2) dan menguji kecocokan distribusi probabilitas menggunakan nilai-*p* untuk statistika *Kolmogorov-Smirnov* yang diperoleh dari hasil keluaran perintah *ks.gof* pada SPLUS,
2. Memodelkan data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung dengan menggunakan perintah *censorReg*,
3. Menguji ada tidaknya perbedaan lama waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung dengan tiga teknik pengobatan. Pengujian ini menggunakan nilai-*p* untuk statistika *Likelihood Ratio* yang diperoleh dari hasil keluaran perintah *anova*,
4. Memperkirakan lama waktu bertahan hidup dan peluang kegagalan bertahan hidup dengan perintah *predict*.

Estimasi Non Parametrik

1. Memodelkan data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung dengan menggunakan perintah *survfit*,
2. Membuat grafik perbandingan antara tiga teknik pengobatan dengan perintah *plot*.

3. Analisis dan Pembahasan

Estimasi Parametrik

Uji kecocokan distribusi probabilitas dilakukan dengan metode *trial and error*. Beberapa nilai parameter β dan θ disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Estimasi Parameter β dan θ

Nilai β yang dipilih	θ
0,5	59,25
1	118,5
2,5	133,5567

Hipotesis yang disusun untuk melakukan uji ini adalah :

H_0 : Data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung berdistribusi Weibull untuk parameter yang ditetapkan

H_1 : Data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung tidak berdistribusi Weibull untuk parameter yang ditetapkan

Jika dipilih nilai β = 0,5 dan θ = 59,25 maka dari hasil uji *Kolmogorov-Smirnov* diperoleh nilai-*p* sebesar 0. Dengan mengambil taraf signifikansi α = 0,05, maka nilai-*p* < α yang artinya hipotesis nol (H_0) ditolak. Ini berarti pemilihan nilai β = 0,5 dan θ = 59,25 belum tepat. Untuk itu perlu dilakukan uji *Kolmogorov-Smirnov* lagi dengan mengambil nilai yang berbeda untuk masing-masing parameter β dan parameter θ. Dari hasil uji *Kolmogorov-Smirnov* untuk nilai β = 2,5 dan nilai θ = 133,5567, diperoleh nilai-*p* sebesar 0,8961. Karena nilai-*p* > α = 0,05 maka hipotesis nol (H_0) diterima. Jadi data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung berdistribusi Weibull dengan nilai parameter β = 2,5 dan nilai parameter θ = 133,5567.

Dari Tabel 3. terlihat bahwa peluang kegagalan bertahan hidup pasien penderita penyakit jantung yang melakukan pengobatan hanya dengan menggunakan obat lebih tinggi bila dibandingkan dengan penderita penyakit jantung yang melakukan pengobatan dengan menggunakan ring ataupun by pass. Pada kelompok pasien penderita penyakit jantung yang diobati dengan menggunakan ring, peluang kegagalan penderita penyakit jantung untuk mampu bertahan hidup selama 100 bulan (± 8 tahun) sebesar 8 % atau dengan kata lain peluang keberhasilan pasien penderita penyakit jantung yang diobati dengan menggunakan ring adalah 92% untuk bertahan hidup selama 8 tahun.

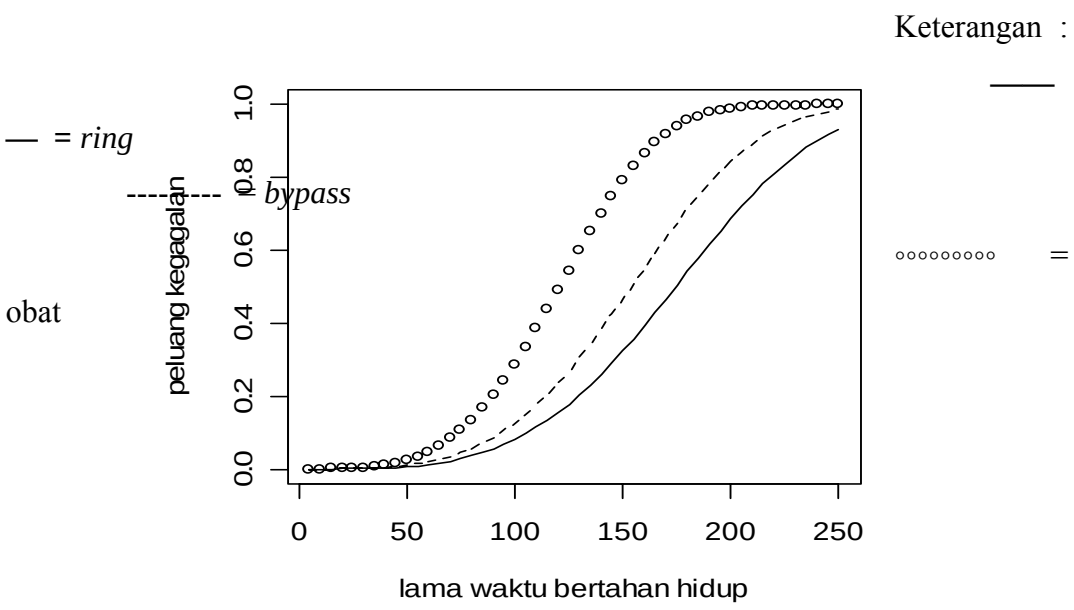
Tabel 3. Peluang kegagalan bertahan hidup pasien penderita penyakit jantung

Lama waktu bertahan hidup (dalam bulan)	Peluang kegagalan bertahan hidup		
	ring	by pass	Obat
50	0,0061	0,0098	0,0242
100	0,0808	0,1265	0,2873
150	0,3237	0,4663	0,7926
200	0,6874	0,8454	0,9907

Pada Tabel 4, jika diberikan peluang kegagalan bertahan hidup sebesar 0,1 atau dengan kata lain peluang keberhasilan hidup sebesar 90%, maka kelompok penderita yang diobati dengan ring dapat bertahan hidup selama 106 bulan (± 9 tahun), kelompok penderita yang diobati dengan by pass dapat bertahan hidup selama 93 bulan (± 8 tahun), dan kelompok penderita yang minum obat dapat bertahan hidup selama 73 bulan (± 6 tahun).

Tabel 4. Lama waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung

Peluang kegagalan bertahan hidup	Lama waktu bertahan hidup (dalam bulan)		
	ring	by pass	Obat
0,1	106,0835	93,6169	73,4612
0,3	146,3868	129,1839	101,3706
0,5	174,4626	153,9603	120,8126
0,7	201,8486	178,1280	139,7770
0,9	239,5465	211,3958	165,8822



Gambar 1. Perbandingan peluang kegagalan bertahan hidup antara kelompok *ring*, *bypass* dan obat

Untuk mengetahui ada tidaknya perbedaan lama waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung yang diobati dengan tiga teknik pengobatan, maka akan dilakukan uji *Likelihood-Ratio*. Hipotesis yang disusun untuk melakukan uji ini adalah :

H_0 : lama waktu bertahan hidup penderita kanker payudara dengan dua teknik pengobatan adalah sama.

H_1 : terdapat perbedaan lama waktu bertahan hidup penderita kanker payudara dengan tiga teknik pengobatan.

Hipotesis nol (H_0) ditolak jika nilai-*p* < α untuk tingkat signifikansi α yang dipilih. Pada kasus ini penulis mengambil nilai α = 0,1. Dengan perintah *anova* pada S-PLUS diperoleh nilai-*p* sebesar 0,0546, yang berarti nilai-*p* < α = 0,1 sehingga H_0 ditolak. Jadi terdapat perbedaan lama waktu bertahan hidup dengan tiga teknik pengobatan tersebut sehingga lama waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung tergantung pada teknik pengobatan yang diterima oleh penderita.

Estimasi Non Parametrik

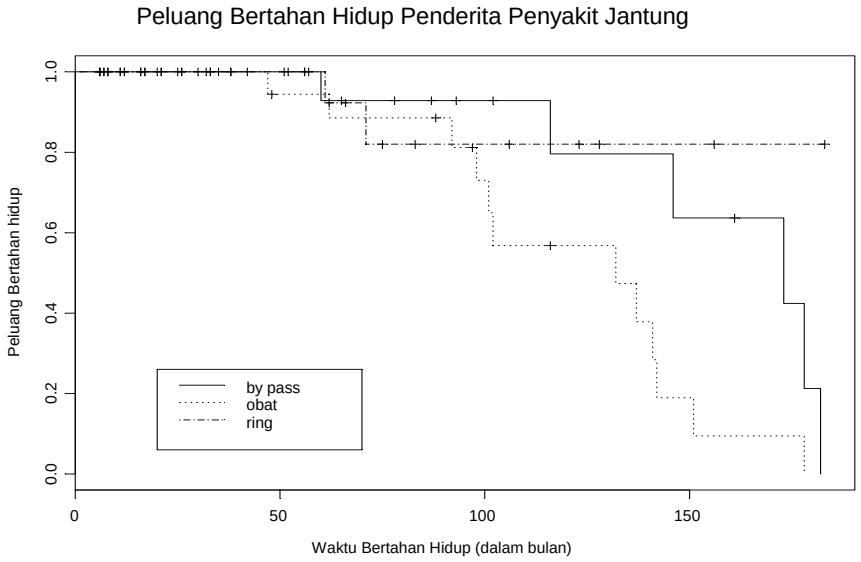
Hasil olahan data waktu bertahan hidup penderita penyakit jantung dengan estimasi non parametrik disajikan pada Tabel 5. Pada kelompok pengobatan ring, terdapat 2 penderita penyakit jantung yang telah meninggal dunia. Pada kelompok pengobatan by pass, terdapat 6 penderita penyakit jantung yang telah meninggal dunia. Sedangkan pada kelompok pengobatan dengan menggunakan obat, penderita penyakit jantung yang telah meninggal dunia sebanyak 12 penderita.

Jika hasil olahan data waktu bertahan hidup penderita kanker payudara dengan estimasi non parametrik dinyatakan dalam bentuk grafik, maka akan muncul gambar grafik seperti tersaji pada Gambar 2. Bentuk grafik pada Gambar 2. menyerupai anak tangga (*stepwise*), sehingga nilai fungsi *survival* $\hat{S}(y)$ akan sama untuk suatu interval waktu. Agar lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 5. Hasil olahan dengan perintah survfit untuk data yang tidak tersensor

No	Ring		by pass		Obat	
	Waktu bertahan hidup	Peluang bertahan hidup	Waktu bertahan hidup	Peluang bertahan hidup	Waktu bertahan hidup	Peluang bertahan hidup
1	61	0,923	60	0,929	47	0,944
2	71	0,821	116	0,796	62	0,885
3			146	0,637	92	0,812
4			173	0,424	98	0,731
5			178	0,212	101	0,649
6			182	0,000	102	0,568
7					132	0,474
8					137	0,379
9					141	0,284
10					142	0,189
11					151	0,095
12					178	0,000

Gambar 2. Grafik Perbandingan Peluang Bertahan Hidup



Tabel 6. Nilai $\hat{S}(y)$ untuk beberapa interval waktu

No	Ring		By Pass		Obat	
	Interval waktu bertahan hidup	Peluang bertahan hidup	Interval waktu bertahan hidup	Peluang bertahan hidup	Interval waktu bertahan hidup	Peluang bertahan hidup
1	$0 \le y < 61$	1	$0 \le y < 60$	1	$0 \le y < 47$	1
2	$61 \le y < 71$	0,923	$60 \le y < 116$	0,929	$47 \le y < 62$	0,944
3	$71 \le y < 183$	0,821	$116 \le y < 146$	0,796	$62 \le y < 92$	0,885
4			$146 \le y < 173$	0,637	$92 \le y < 98$	0,812
5			$173 \le y < 178$	0,424	$98 \le y < 101$	0,731
6			$178 \le y < 182$	0,212	$101 \le y < 102$	0,649
7			$182 \le y < \infty$	0,000	$102 \le y < 132$	0,568
8					$132 \le y < 137$	0,474
9					$137 \le y < 141$	0,379
10					$141 \le y < 142$	0,284
11					$142 \le y < 151$	0,189
12					$151 \le y < 178$	0,095
13					$178 \le y < \infty$	0,000

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh dapat diambil beberapa kesimpulan, yang pertama adalah bahwa analisis *survival* dapat digunakan untuk menentukan teknik pengobatan yang lebih baik bagi pasien penderita penyakit jantung. Kesimpulan yang kedua adalah lama waktu bertahan hidup yang mampu dicapai pasien penderita penyakit jantung berhubungan dengan teknik pengobatan yang diterima oleh pasien penderita penyakit jantung, dan kesimpulan yang ketiga adalah bahwa teknik pengobatan yang memberikan waktu bertahan hidup lebih lama bagi pasien penderita penyakit jantung adalah teknik pengobatan dengan menggunakan ring.

DAFTAR PUSTAKA

Dobson,J.A., 2002, *An Introduction to Generalized Linear Models*, Chapman&Hall, USA.

Harinaldi, 2005, *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*, Erlangga, Jakarta.

Klein,J.P and Moeschberger,M.L., 1997, *Survival Analysis : Techniques for Censored and Truncated Data*, Springer-Verlag New York Inc, New York.

Venables,W.N and Ripley,B.D., 1994, *Modern Applied Statistics with S-PLUS*, Springer-Verlag New York Inc, New York.

PENDEKATAN ANALISIS MULTILEVEL RESPON BINER DALAM MENENTUKAN FAKTOR-FAKTOR YANG MEMENGARUHI IMUNISASI LENGKAP

Bertho Tantular[*], I Gede Nyoman Mindra Jaya[*]

[*]*Mahasiswa Pascasarjana Institut Pertanian Bogor*

[*]*Jurusan Statistika FMIPA Universitas Padjadjaran*
Jl. Raya Bandung-Sumedang KM 21 Gedung D14 Sumedang
email : berthovens@yahoo.co.id
jay_komang@yahoo.com

ABSTRAK

Dalam suatu penelitian survei, terutama yang ukuran populasinya besar, data yang digunakan biasanya merupakan data berjenjang (*hierarchy*) atau data yang sifatnya tersarang (*nested*). Salah satu analisis yang bisa digunakan untuk data tersebut adalah Analisis Data Multilevel. Apabila resopn data tersebut biner maka model multilevel yang digunakan model multilevel logistik. Salah satu metode pendugaan untuk model multilevel logistik adalah *penalized quasi likelihood*. Permasalahan kelengkapan imunisasi anak selain dipengaruhi oleh faktor-faktor pada tingkat keluarga juga dipengaruhi oleh faktor-faktor pada tingkat yang lebih tinggi. Pendekatan analisis multilevel dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Kata-kata kunci: *model intersep-acak, komponen ragam, penalized quasi likelihood.*

1. Pendahuluan

Selain antibiotika, imunisasi adalah penemuan terbesar dalam dunia kedokteran. Berkat antibiotika dan imunisasi, ratusan ribu jiwa terselamatkan dari menderita infeksi yang dapat mengakibatkan kecacatan ataupun kematian. Tapi yang lebih istimewa dari imunisasi dibandingkan dengan antibiotika adalah imunisasi mencegah terjadinya infeksi pada seseorang yang masih sehat sedangkan antibiotika mengobati ketika seseorang telah menderita infeksi.

Imunisasi adalah suatu proses untuk membuat sistem pertahanan tubuh kebal terhadap invasi mikroorganisme (bakteri dan virus) yang dapat menyebabkan infeksi sebelum mikroorganisme tersebut memiliki kesempatan untuk menyerang tubuh kita. Dengan imunisasi, tubuh kita akan terlindung dari infeksi begitu pula orang lain karena tidak tertular dari kita. Oleh karena itu imunisasi harus dilakukan oleh semua orang (pengecualian pada kelompok orang dengan keadaan-keadaan tertentu) agar pada akhirnya nanti infeksi dapat musnah dari muka bumi.

Hingga saat ini terdapat 10 jenis vaksinasi yang dapat mencegah terjadinya infeksi pada anak, yaitu; polio, campak, gondongan, rubella (campak Jerman), difteria, tetanus, batuk rejan (Pertusis), meningitis, cacar air, dan hepatitis B. Sedangkan terdapat 3 jenis vaksinasi yang dapat diberikan pada kelompok anak-anak ataupun dewasa dengan risiko tinggi menderita infeksi, yaitu; hepatitis A, flu (Influenza), pneumonia. Meskipun ada banyak sekali jenis vaksin untuk imunisasi, namun di Indonesia ada lima jenis imunisasi yang wajib diberikan pada bayi yaitu: BCG (untuk mencegah penyakit TBC), HBV (untuk mencegah penyakit Hepatitis B), DPT (untuk mencegah penyakit Difteri, Pertusis atau batuk rejan dan Tetanus), Polio dan Campak.

Saat ini banyak orangtua yang enggan melakukan imunisasi untuk anak mereka karena ada dugaan bahwa mereka menerima berbagai informasi yang keliru yang beredar di masyarakat mengenai efek samping vaksinasi. Informasi-informasi tersebut menyebabkan penurunan drastis jumlah bayi-bayi yang mendapatkan imunisasi dan secara langsung menyebabkan jumlah penderita infeksi kembali meningkat. Selain itu ada dugaan lain bahwa saat ini beberapa penyakit sangat jarang timbul sehingga para orang tua kadang mempertanyakan apakah vaksinasi masih diperlukan. Anggapan yang keliru ini hanya salah satu dari kesalahpahaman mengenai imunisasi.

Dalam situs www.infeksi.com seseorang tanpa Imunisasi, sekitar 3 dari 100 kelahiran anak akan meninggal karena penyakit campak. 2 dari 100 kelahiran anak akan meninggal karena batuk rejan. 1 dari 100 kelahiran anak akan meninggal karena penyakit tetanus. Dan dari setiap 200.000 anak, 1 akan menderita penyakit polio. Imunisasi yang dilakukan dengan memberikan vaksin tertentu akan melindungi anak terhadap penyakit-penyakit tertentu.

Saat ini fasilitas pelayanan untuk vaksinasi ini telah tersedia di masyarakat, yaitu Pos Pelayanan Terpadu (Posyandu), Puskesmas, Rumah Sakit Bersalin, BKIA, Rumah Sakit Pemerintah dan di Praktek Dokter/Bidan atau Rumah Sakit. Meskipun demikian tidak semua bayi telah dibawa untuk mendapatkan imunisasi yang lengkap karena vaksin di fasilitas pelayanan terkadang tidak tersedia atau harganya tidak terjangkau.

Berdasarkan uraian diatas ingin diketahui faktor apa saja yang memengaruhi seorang bayi mendapatkan imunisasi lengkap. Faktor-faktor ini terbagi kedalam dua tingkat yaitu pada tingkat pertama faktor dalam keluarga bayi, dalam hal ini tentu ibu dan ayahnya, dan pada tingkat kedua faktor adalah lingkungan, yaitu fasilitas kesehatan di desa atau kecamatan.

Untuk menyelesaikan persoalan diatas dapat digunakan Model Multilevel. Peubah-peubah pada level 1 adalah peubah-peubah yang ada dengan keluarga sedangkan pada level 2 adalah peubah-peubah yang ada dalam lingkungan sosialnya. Persoalannya adalah pada permasalahan diatas responnya biner yaitu bayi mendapatkan imunisasi lengkap atau tidak, sehingga model multilevelnya menjadi model multilevel logistik. (Leeuw and Meijer, 2008)

2. Model Multilevel

Model Linier Campuran (*Mixed effect models* atau *Generalized Linear Mixed Models, GLMM*) digunakan pada saat komponen tetap dan komponen acak digunakan secara bersama-sama dalam suatu model linier. Yang termasuk ke dalam model linier campuran adalah model-model data hasil pengukuran berulang (*repeated measures*), model data *longitudinal* dan Model Linier Multilevel (MLM). Model linier multilevel mulai diperhatikan setelah dikembangkan oleh Goldstein (1995), akan tetapi model ini jarang dipergunakan karena melibatkan perhitungan yang cukup rumit. Pendugaan parameter untuk model multilevel harus dilakukan melalui metode iterasi yang dalam perhitungannya harus menggunakan komputer yang memadai.

Model Linier Multilevel merupakan sebuah model yang digunakan pada data berjenjang (*hierarchy*). Data berjenjang seringkali ditemukan pada penelitian survey dimana unit-unit analisisnya berasal dari kelompok-kelompok (*cluster*), atau data yang diambil melalui penarikan contoh bertahap (*cluster sampling*). Misalnya dalam pengambilan sampel menggunakan metode sampling satu tahap (*Single Stage Cluster Sampling*) unit-unit analisis yang berasal dari kelompok (*Cluster*) diperhitungkan keberadaanya dalam analisis, sehingga dalam hal ini model yang cocok adalah model dua level. Unit-unit sampling yang ada dalam kelompok disebut unit level 1 dan kelompok-kelompok (*Cluster*) disebut unit level 2. Banyaknya unit-unit analisis dalam kelompok bisa sama atau berbeda untuk setiap kelompok.

Model dua level sederhana (dengan satu peubah penjelas) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i} X_{ij} + e_{ij}\,; \quad i = 1,2, \ldots,k\,; \quad j = 1, 2, \ldots, n_k \qquad (1)$$

Dalam hal ini k adalah banyak unit level 2 (atau banyak kelompok/*Cluster*) dan n_k adalah banyak unit pengamatan level 1 pada kelompok ke-k. Model (1) memperlihatkan

bahwa koefisien β_{0i} dan β_{1i} merupakan suatu komponen acak. Atau dapat dipandang sebagai suatu peubah acak (Goldstein, 1995) sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\beta_{0i} = \beta_0 + u_{0i}, \quad \beta_{1i} = \beta_1 + u_{1i} \tag{2}$$

Pada persamaan (2) β_0 dan β_1 merupakan komponen tetap yang tidak diketahui nilainya (parameter) dan u_{oi} dan u_{1i} adalah komponen acak. Sehingga apabila persamaan (2) disubstitusikan ke dalam persamaan (1) akan menjadi:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_{ij} + \left(u_{0i} + u_{1i} X_{ij} + e_{ij}\right); \; i = 1,2, \ldots,k \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n_k \tag{3}$$

Dengan : $E\left(u_{0j}\right) = E\left(u_{0j}\right) = 0$,

$$\text{var}(u_{0j}) = \sigma^2_{u0}, \quad \text{var}(u_{1j}) = \sigma^2_{u1},$$

$$Cov(u_{0j}, u_{1j}) = \sigma_{u01}, \text{ untuk semua } j = 1,2, \ldots, k$$

Persamaan (2.3) dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu bagian tetap (*fixed part*) yaitu yang berkaitan dengan parameter, dan bagian acak (*random part*) yaitu $\left(u_{0i} + u_{1i} X_{ij} + e_{ij}\right)$. Dengan demikian banyak parameter yang harus diduga adalah $2k+1$.

3. Model Multilevel untuk Data Biner

Suatu Model multilevel dengan respon dari data tersebut biner atau hanya terdiri dari dua kategori maka pendugaannya menggunakan metode kemungkinan maksimum biasa tidak bisa dilakukan karena akan menghasilkan penduga yang bias.

Dalam model regresi apabila responnya biner maka biasanya digunakan model regresi logistik yang dalam pendugaan parameternya harus menggunakan fungsi penghubung (*link function*). Hal yang sama juga untuk model multilevel apabila responnya biner maka untuk pendugaan parameternya juga harus menggunakan suatu fungsi penghubung. Apabila responnya berdistribusi binomial dengan parameter proporsi (π_{ij}) maka fungsi penghubung yang digunakan adalah *logit* ($\log\{\pi/(1- \pi)\}$) sehingga modelnya disebut dengan model logistik. (Hox, 2002)

Secara umum rumusan matematis untuk model *random-intercept* dua level adalah sebagai berikut

$$y_{ijk} = \boldsymbol{\beta}^t \mathbf{x}_{ij} + u_j + \varepsilon_{ij} \tag{4}$$

Dengan u_j berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam σ^2_2, dan u_j adalah galat untuk level-2 yang *independent* terhadap ε_{ij}. Untuk model dengan fungsi penghubung *logit* model (4) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\mathbf{Logit}(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \tag{5}$$

Dengan **X** adalah matriks peubah bebas *fixed* dari level pertama, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor koefisien regresi dan **u** adalah vektor galat untuk level 2.

Model (5) dapat ditulis juga sebagai

$$\text{Logit}(\pi_{ij}) = \mathbf{x}_j\boldsymbol{\beta} + u_j \qquad (6)$$
$$y_{ij} \sim \text{Bernouli}(\pi_{ij})$$

Dengan xj adalah vector peubah bebas, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor koefisien regresi dan u_j adalah vektor galat untuk level 2. dalam hal ini u_j berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam σ^2_2. (Hesketh, 2003)

Secara umum dari Model (4) dapat ditentukan bahwa galat total untuk model tersebut adalah $\xi_{ij} = \varepsilon_{ij} + u_j$. Sehingga secara umum ragam untuk ξ_{ij} dengan fungsi penghubung *logit* adalah:

$$\text{var}(\xi_{ij}) = \sigma_2^2 + \frac{\pi^2}{3} \qquad (7)$$

Dan korelasi *intaclass* untuk galat total adalah

$$\rho \equiv Cor(\xi_{ij,}\xi_{i'j}) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \pi^2/3} \qquad (8)$$

Untuk menduga parameter-parameter yang terlibat dalam model multilevel untuk respon biner bisa digunakan *Marginal Quasi-Likelihood* (MQL) yang diusulkan oleh Goldstein (1995). Menurut Goldstein (1995) pendugaan koefisien dengan menggunakan MQL akan menyebabkan *underestimate* terutama untuk sampel kecil. Begitu pula menurut Rodriguez dan Goldman (2001) pendugaan yang diturunkan menggunakan MQL untuk respon biner akan menyebabkan bias pada saat kuantitas klasternya cukup besar. Selain menggunakan MQL parameter-parameter tersebut juga bisa diduga dengan menggunakan Penalized Quasi-Likelihood (PQL) yang diusulkan oleh Goldstein dan Rashbash (2001).

4. Pendugaan Parameter Multilevel untuk Respon Biner

Dalam model multilevel linier (Model 4) vektor **y** berdistribusi normal yang merupakan kombinasi linier dari koefisien acak. Model multilevel non linier atau lebih khusus lagi model dengan respon biner adalah model regresi yang tidak bisa dijelaskan sebagai kombinasi linier dari koefisiennya sehingga dengan demikian vektor **y** tidak lagi berdistribusi normal. Secara umum fungsi kepekatan peluang dari **y** dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(y) = \int\int f(y, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) d\beta_1 d\beta_2 \ldots d\beta_k \qquad (10)$$

untuk β_i berdistribusi kontinu. Secara umum persamaan diatas tidak bisa diselesaikan kecuali melalui prosedur iterasi. Untuk menyelesaikan persamaan fungsi kemungkinan

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(y_i) \qquad (11)$$

harus menggunakan teknik integrasi numerik. Dalam model multilevel prosedur yang digunakan adalah prosedur Gaussian Quadrature untuk menghitung integral secara numerik. Metode Kemungkinan Maksimum memerlukan nilai awal yang baik untuk parameter-parameternya.

Parameter untuk model non linier diduga dengan menggunakan Kuadrat Terkecil Biasa yang kemudian dijadikan sebagai nilai awal. Selanjutnya prosedur mencocokkan model yang digunakan adalah *Maximum Aposterior* untuk parameter yang tidak diketahui sehingga dapat dibentuk fungsi kepekatan peluang untuk parameter sebagai berikut

$$f(\beta \mid y) = \frac{f(\beta) f(y \mid \beta)}{f(y)} \qquad (12)$$

sehingga fungsi kemungkinannya adalah

$$\ln f(\beta \mid y) = \ln f(\beta) + \ln f(y \mid \beta) - \ln f(y) \qquad (13)$$

Dengan nilai awal tadi (sebut saja β_{0i} untuk i = 1, 2, …, k) fungsi kemungkinan persamaan (10) dapat diturunkan dan disamakan dengan nol

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_{0i}} \ln f(\hat{\beta}_{0i} \mid y) = 0 \quad \text{untuk } i = 0, 1, \ldots, k \qquad (14)$$

sehingga bisa diperoleh penduga β_i. penduga β_i ini digunakan kembali untuk memperoleh penduga β_i yang baru. Proses diulang sehingga didapatkan hasil yang konvergen. (Goldstein, 1995)

4.1 Penalized Quasi-Likelihood

Rodriguez dan Goldman (2001) dalam tulisannya menyatakan bahwa pendekatan prosedur penaksiran termotivasi dengan mempertimbangkan model multilevel logit yang dianggap linier. Persamaan (2) dapat diubah menjadi

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ dengan } \boldsymbol{\pi} = f(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}) \qquad (15)$$

dengan **Y** adalah vektor respon, *f* adalah transformasi invers *logit* (atau anti *logit*), dan **ε** adalah galat heteroskedastik dengan rata-rata 0 dan ragam adalah matriks diagonal dengan elemen $\pi(1-\pi)$.

Penalized Quasi-Likelihood (PQL) order pertama untuk π menggunakan pendekatan order pertama deret Taylor dari $f(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})$ dengan $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$ dan $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, dan $\boldsymbol{\beta}_0$ adalah penduga dari efek tetap dan $\mathbf{u}_0$ adalah prediktor dari efek acak yang didefinisikan sebagai rata-rata dari $f(\mathbf{u}|\mathbf{y})$ yang diduga pada nilai parameter yang ditentukan. Untuk sebuah nilai $\mathbf{u}_0$ tertentu penyelesaiannya dengan model linier multilevel yang dapat diduga dengan menggunakan algoritma standar (Goldstein, 1995), yang diarahkan untuk memperbaiki penduga $\boldsymbol{\beta}$, yang kemudian digunakan sebagai nilai awal yang baru. Prosedurnya diiterasi hingga didapat nilai yang konvergen.

4. Metode Perbandingan Model

Misalkan saja ada dua model sebut saja M1 dan M2. Ada dua kemungkinan hubungan antara dua model ini: pertama M1 merupakan model yang diturunkan dari M2 dengan cara menghilangkan suatu parameter atau bisa dikatakan M1 tersarang dalam M2, kedua M1 merupakan model yang sama sekali berbeda dengan M2 (M1 tidak tersarang dalam M2).

Untuk membandingkan kedua model pada kemungkinan pertama digunakan suatu ukuran perbedaan *Deviance* yaitu

$$diff = D_1 - D_2 \tag{2.14}$$

diff mengikuti sebaran Khi-Kuadrat dengan derajat kebebasan $k = p_1 - p_2$. p_i adalah banyak parameter pada model ke-*i*. Apabila pengujian nyata maka artinya M2 lebih cocok dibandingkan dengan M1.

Apabila kedua model tidak tersarang maka ukuran kecocokan model yang digunakan adalah *Akaike's Information Criterion* (AIC) yaitu

$$AIC = d + 2q \tag{2.15}$$

dengan *d* adalah Deviance dan *q* adalah banyak parameter. Selain itu dapat juga digunakan ukuran dari Scwartz yang disebut *Bayesian Information Criterion* (BIC) dengan rumusan sebagai berikut

$$BIC = d + q\ log(n)$$

dengan *n* adalah banyaknya sampel. (Hox, 2002)

5. Aplikasi

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder hasil survei dari *Indonesia Family Life Survey* gelombang 3 pada tahun 2000 atau disebut sebagai IFLS-3 yang dilakukan oleh RAND Labor and Population yang bekerja sama dengan Center for Population and Policy Studies (CPPS) Universitas Gadjah Mada. Survei IFLS3 ini dibiayai oleh National Institute on Aging (NIA), dan the National Institute for Child Health and Human Development (NICHD).

Dari survei terhadap keluarga (*Household Survey*) sebanyak 10.435 keluarga telah diwawancara yang diambil dari 13 propinsi yaitu DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Timur, Kalimantan Selatan, Sulawesi Selatan, Sumatera Selatan, Nusa Tenggara Barat, Jawa Tengah, Yogyakarta, Bali, Sumatera Utara, Sumatera Barat dan Lampung. Survei juga dilakukan terhadap lingkungan sosial beserta fasilitasnya (*Community-Facility Survey*) yaitu sebanyak 312 lingkungan sosial beserta fasilitasnya. Dalam survei ini tentu saja lingkungan sosial yang dipilih adalah lingkungan sosial yang bersesuaian dengan keluarga yang diwawancara. (Strauss, et. al., 2004)

Untuk menjawab tujuan penelitian maka dilakukan beberapa tahapan persiapan sebagai berikut: Dari data survei keluarga sebagai respon dipilih peubah Imunisasi Lengkap (5 jenis imunisasi) atau tidak lengkap, sebagai peubah penjelas dipilih Umur ibu (X_{1j}), Tingkat pendidikan ibu (X_{2j}), Tingkat pendidikan ayah (X_{3j}), Ibu bekerja atau tidak bekerja (X_{4j}). Dari data survei lingkungan sosial (kecamatan) dipilih peubah Fasilitas imunisasi Posyandu lengkap atau tidak (Z_{1j}) dan Fasilitas imunisasi Puskesmas lengkap atau tidak (Z_{2j}). Dalam permasalahan ini struktur datanya merupakan data hirarki, data keluarga terkelompok didalam kecamatan-kecamatan.

Data seluruhnya berjumlah 11686 anak, tetapi dari 11686 anak yang telah diwawancara (atau melalui ibunya) dan hanya ada 10403 yang tinggal bersama dengan orang tua kandungnya. Sebanyak 9852 bersesuaian dengan data lingkungan sosial beserta fasilitasnya. dari data tersebut ada sebanyak 275 data mengenai pendidikan ayahnya hilang (tidak ada) sehingga sebanyak 9577 data lengkap. Berikut adalah definisi dari peubah-peubah yang terlibat

Tabel 1

Definisi Peubah

Peubah	Nilai	Kategori
Imunisasi (Y)	0 1	Tidak Lengkap Lengkap
Umur Anak (X_1)	0 - 14	
Umur Ibu (X_2)	15 - 68	
Pendidikan Ibu/Ayah (X_3 & X_4)	0 1	Pendidikan Dasar Pendidikan Menengah-Tinggi
Ibu Bekerja (X_5)	0 1	Tidak Bekerja Bekerja
Fasilitas Posyandu (Z_1)	0 1	Tidak Lengkap Lengkap
Fasilitas Puskesmas (Z_2)	0 1	Tidak Lengkap Lengkap

Dari data tersebut pertama kali dibuat model regresi logistik biasa. Untuk model ini perbedaan antar kecamatan yang mungkin terjadi diabaikan. Dalam model ini peubah Z_1 dan Z_2 tidak dilibatkan. Model yang kedua adalah model intersep-acak. Pada model ini komponen acak kecamatan dimasukkan ke dalam intersep tetapi peubah Z_1 dan Z_2 tidak dilibatkan. Model yang ketiga adalah model intersep-acak dengan peubah Z_1 dan Z_2 tidak dilibatkan ke dalam model.

Dari ketiga model tersebut dihitung koefisien-koefisien regresinya, dan dihitung pula nilai *Deviance* untuk dibandingkan dengan model lainnya. Model yang mempunyai nilai deviance paling kecil adalah model yang terbaik. Tetapi untuk mengetahui apakah ada perbedaan antara model yang satu dengan yang lain digunakan pengujian perbedaan *deviance*. Untuk perhitungan dan analisis digunakan *Software* R 2.8.0.

Dalam analisis yang dilakukan untuk model 1, metode pendugaan yang digunakan adalah metode kuadrat terkecil dibobot atau *Weighted Least Square* (WLS). Prosedur iterasi yang digunakan adalah metode Fisher Scoring. Untuk model 2 dan model 3 metode yang digunakan dalam pendugaan parameternya adalah metode *Penalized Quasi Likelihood* (PQL).

Hasil yang diperoleh dari analisis untuk ketiga model tersebut dapat dilihat pada Tabel 2 dibawah ini.

Tabel 2
Hasil Analisis Data Imunisasi untuk Tiga Model

	Model 1		Model 2		Model 3	
Efek	**Penduga**	**Galat Baku**	**Penduga**	**Galat Baku**	**Penduga**	**Galat Baku**
Efek Level-1:						
(Intersep)	0.492136*	0.145126	0.576907*	0.164026	0.672657*	0.226501
Umur Anak	-0.133470*	0.012292	-0.125830*	0.013006	-0.125280*	0.013002
Umur Ibu	-0.028040*	0.004994	-0.031094*	0.005358	-0.031267*	0.005359
Pendidikan Ibu	-1.896651*	0.096672	-2.079422*	0.103373	-2.084098*	0.103425
Pendidikan Ayah	0.867268*	0.091966	0.965243*	0.098198	0.964509*	0.098160
Ibu bekerja/tidak	0.342432*	0.064513	0.388252*	0.070163	0.385427*	0.070112
Efek Level-2:						
Posyandu					-0.263190*	0.159342
Puskesmas					0.230393*	0.117422
Komponen ragam:						
(intersep)			0.70863		0.66537	
Deviance	8719.1		6654		6642.8	

Tanda * berarti koefisien nyata pada taraf $\alpha = 5\%$

Dari Tabel 2 terlihat bahwa nilai *deviance* untuk model 2 lebih kecil dibandingkan dengan model 1 artinya model 2 dapat dikatakan lebih baik dibandingkan dengan model 1. perbedaan *deviance* untuk kedua model ini sebesar 2065,1, dengan derajat kebebasan sebesar satu (1) diperoleh nilai-p = .000 yang artinya terdapat perbedaan yang sangat nyata. Bila model 2 dibandingkan dengan model 3 terlihat bahwa *deviance* model 3 lebih kecil dibandingkan dengan *deviance* model 2. Perbedaan *deviance* antara kedua model ini sebesar 11.2, dengan derajat kebebasan sebesar dua (2) diperoleh nilai-p = 0.0037 yang juga sangat nyata pada taraf $\alpha = 5\%$.

Bila model 3 diperhatikan maka terlihat bahwa pada penduga koefisien pada level 1 semuanya nyata pada taraf $\alpha = 5\%$. Tetapi untuk penduga koefisien pada level 2 peubah puskesmas nyata sedangkan peubah posyandu tidak nyata pada taraf $\alpha = 5\%$. Dari hasil ini dapat diperlihatkan bahwa lengkap tidaknya imunisasi anak dipengaruhi oleh faktor-faktor dalam keluarga yaitu umur anak, umur ibu, tingkat pendidikan ibu, tingkat pendidikan ayah dan ibu bekerja atau tidak. Selain itu imunisasi lengkap juga dipengaruhi oleh faktor yang ada di lingkungan yaitu tersedianya fasilitas imunisasi di puskesmas.

Pada Tabel 2 juga terlihat bahwa nilai komponen ragam untuk level 2 pada model 3 lebih kecil dibandingkan dengan komponen ragam pada model 2, hal ini mengindikasikan bahwa adanya peubah level 2 yang diikutsertakan dalam model memperkecil keragaman antar kecamatan. Selain itu kita dapat menjelaskan keragaman yang dapat dijelaskan oleh setiap level dengan rumusan sebagai berikut:

Keragaman yang dapat dijelaskan = 1 – (Ragam dengan prediktor/Ragam tanpa Prediktor)

Untuk permasalahan dalam penelitian ini nilai keragaman yang dapat dijelaskan adalah sebesar 1 – (0.66537/0.70863) = 0.0612 atau sebesar 6.12%.

6. Penutup

Dalam penelitian ini hanya dijelaskan mengenai model intersep-acak. Untuk permasalahan yang ada terkadang diperlukan suatu model multilevel yang lebih tinggi misalnya model koefisien acak atau model dengan interaksi (*Cross-interactive model*). Metode pendugaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah PQL. Akan lebih baik apabila ada perbandingan metode pendugaan untuk permasalahan yang ada.

7. Daftar Pustaka

Bliese (2006) *Multilevel Models in R (2.2)*, R Development Core Team.

Goldstein (1999) *Multilevel Statistical Models 2nd Ed.,* E-Book of Arnold, London.

Hesketh, S.,R. (2003), *Multilevel modeling of ordered and unordered categorical Responses,* Institute of Child Health, London.

Hox, J.J. (2002) *Multilevel Analysis*; *Techniques and Applications*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, London.

Leeuw, Meijer (2008) *Handbook of Multilevel Analysis*, Springer, New York.

Rodriguez, G., Goldman, N. (2001), Improved estimation procedures for multilevel models with binary response: a case-study, *Journal Royal Statist.Soc A,* **164**, Part 2 pp 339-355

Strauss, J., K. Beegle, B. Sikoki, A. Dwiyanto, Y. Herawati and F. Witoelar. (2004) *The Third Wave of Indonesia Family Life Survey: Overview and Field Report Volume I.* Rand Labor and Population

West, Welch, Galecki (2007) *Linear Mixed Models: A Practical Guide Using Statistical Software.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York.

Optimasi Bobot Portofolio dan Estimasi *VaR* *

(*Portfolio Weighted Optimization and VaR Estimation*)

Sukono[1], Subanar[2] & Dedi Rosadi[3]

[1] Jurusan Matematika FMIPA UNPAD Bandung, e-mail : fsukono@yahoo.com

[2] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : subanar@yahoo.com

[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : dedirosadi@ugm.ac.id

ABSTRAK

Penilaian harga saham, pemilihan kombinasi optimum, dan pengukuran risiko suatu portofolio investasi merupakan salah satu persoalan penting bagi investor. Dalam paper ini model indeks tunggal digunakan untuk penilaian harga saham, dan formulasi model optimasi dikembangkan dengan menggunakan teknik *Lagrangean Multiplier* untuk menentukan proporsi asset yang akan diinvestasikan. Sedangkan tingkat risiko yang dihadapi diestimasi menggunakan *Value at Risk*. Model-model ini digunakan untuk menganalisis data harga saham bank Lippo dan bank Bumi Putera.

Kata Kunci : Indeks tunggal, portofolio investasi, *Lagrangean Multiplier, Value at Risk.*

ABSTRACT

Stock price valuation, combination optimum selection, and risk measurement of the portfolio investment are the importance problems for investor. In this paper, the single index model used for stock price valuation, and the formulation of optimization model developed by using Lagrangean Multiplier for determine the proportion of asset that will be invested. While the risk level that faced will be estimated by using Value at Risk. This models are using to anilizing the stock price data of Lippo Bank and Bumi Putera Bank.

Keywords : *Single index, portfolio investment, Lagrangean Multiplier, Value at Risk.*

1. PENDAHULUAN

Dalam menghadapi kesempatan investasi berisiko, pilihan investasi tidak dapat hanya mengandalkan pada tingkat keuntungan yang diharapkan. Investor harus bersedia menaggung risiko yang tinggi apabila mengharapkan untuk memperoleh tingkat keuntungan yang tinggi (Bodi *et al*., 1999). Oleh karena itu, analisis penilaian harga saham, pemilihan kombinasi saham dalam portofolio yang optimum, dan pengukuran

* Dipublikasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 28 November 2008.

risiko dalam investasi di pasar modal adalah sangat diperlukan. Di sinilah model matematika mempunyai peranan yang sangat penting untuk melakukan analisis pembentukan portofolio tersebut.

Model matematika, khususnya model indeks tunggal berusaha memudahkan analisis investasi. Hal ini karena dalam model indeks tunggal diasumsikan bahwa korelasi *return* antara saham terjadi disebabkan adanya respon saham tersebut terhadap perubahan pada Indeks Harga Saham Gabungan (*general market index*). Pada saat pasar membaik (ditunjukkan oleh indeks pasar), harga saham-saham individual juga meningkat, demikian sebaliknya (Gruber *et al.*, 1991). Model indeks tunggal ini digunakan untuk penilaian saham dalam suatu investasi.

Menurut Kevin *et al.* (1997) dalam kondisi investasi yang berisiko, strategi yang dapat dilakukan untuk mengurangi besarnya risiko investasi adalah dengan membentuk portofolio. Untuk membentuk portofolio yang optimum salah satunya dapat dilakukan dengan bantuan optimasi menggunakan teknik *Lagrangean Multiplier*. Sedangkan untuk mengukur besarnya risiko dapat digunakan dengan mengestimasi *Value at Risk* (*VaR*). Perlu diketahui, bahwa *VaR* telah digunakan secara luas dan menjadi standar umum dalam penghitungan resiko pada investasi finansial.

Dalam paper ini bertujuan untuk melakukan analisis penilaian harga saham dengan model indeks tunggal, menentukan bobot kombinasi portofolio dengan teknik *Lagrangean Multiplier*, dan mengestimasi besarnya risiko dengan menggunakan ukuran *VaR* dalam portofolio yang yang dibentuk.

2. METODE PENELITIAN

Sejalan dengan tahapan analisis penilaian harga saham, optimasi bobot portofolio, dan estimasi besarnya risiko investasi, dengan demikian pertama yang dilakukan adalah menghitung *return* saham dan *return* pasar seperti berikut ini.

2.1 Menghitung *Return* Saham dan *Return* Pasar

Untuk menentukan ekspektasi *return* dan variansi saham diperlukan data *return* saham dan *return* pasar tiap periode penelitian. Menurut Gruber *et al.* (1991) *return* saham untuk tiap periode dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$R_{it} = \ln\left(\frac{P_{it+1}}{P_{it}}\right) \qquad (2.1)$$

di mana R_{it} adalah *return* saham i pada periode t, dan P_{it} adalah harga saham i pada periode t. Sedangkan indeks pasar diwakili oleh Indeks Harga saham Gabungan (IHSG). Dengan cara yang sama *return* pasar dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$R_{mt} = \ln\left(\frac{IHSG_{t+1}}{IHSG_t}\right) \qquad (2.2)$$

di mana R_{mt} adalah *return* pasar pada periode t, dan $IHSG_t$ adalah *IHSG* pada periode t. Data *return* ini selanjutnya akan dipergunakan untuk pembentukan model indeks tunggal berikut ini.

2.2 Membentuk Model Indeks Tunggal

Berdasarkan Gruber *et al.* (1991) ciri utama dari model indeks tunggal adalah bahwa model ini diterima jika dan hanya jika asumsi yang melandasinya dipenuhi. Model indeks tunggal mempunyai beberapa karakteristik sebagai berikut:

(1) Persamaan dasar $R_i = a_i + \beta_i R_m$ dan $a_i = \alpha_i + e_i$, sehingga model indeks tunggal berbentuk:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i, \text{ dengan } i = 1,2,...,k \qquad (2.3)$$

di mana k banyaknya saham yang dianalisis.

(2) Berdasarkan pembentukan persamaan, rata-rata e_i adalan nol, atau

$$E(e_i) = 0$$

(3) Berdasarkan asumsi:

a. Indeks tidak berhubungan (tidak berkorelasi) dengan *unique return.*

$$E[e_i(R_m - \overline{R}_m)] = 0$$

b. Saham berkorelasi hanya karena memberikan respon terhadap pasar.

$$E[e_i.e_j] = 0, \text{ untuk } i \neq j$$

(4) Berdasarkan definisi

a. Variansi e_i adalah $E[e_i^2] = \sigma_{ei}^2$

b. Variansi R_m adalah $E[(R_m - \overline{R}_m)^2] = \sigma_m^2$

Di mana a_i adalah *unique return* saham i, α_i adalah ekspektasi *unique return*, β_i adalah ukuran sensitivitas saham i terhadap pasar, dan e_i adalah *residual error* dari

unique return. Data *return* tersebut di atas digunakan untuk mengestimasi α_i dan β_i berikut ini.

2.3 Mengestimasi α_i dan β_i

Dalam penilaian saham, risiko pasar yang layak dipertimbangkan adalah risiko sistematis. Oleh karena itu, investor perlu mengestimasi besarnya beta sebagai ukuran risiko pasar. Untuk menaksir beta dapat dilakukan dengan metode *least square*. Dari persamaan (2.3) dapat diperoleh jumlah kuadrat terkecil *residual error*:

$$\varepsilon_i = \sum_{t=1}^{n} e_{it}^2 = \sum_{t=1}^{n} (R_i - \alpha_i - \beta_i R_{mt})^2 \qquad (2.4)$$

Menurunkan (2.4) terhadap parameter α_i dan β_i serta menyamakan dengan nol diperoleh sistem persamaan:

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha_i} = 0 \text{ dan } \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \beta_i} = 0 \qquad (2.5)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (2.5) untuk parameter β_i akan didapat:

$$\hat{\beta}_i = \frac{n\sum_{t=1}^{n} R_{mt}R_{it} - \sum_{t=1}^{n} R_{mt}\sum_{t=1}^{n} R_{it}}{n\sum_{t=1}^{n} R_{mt}^2 - (\sum_{t=1}^{n} R_{mt})^2} \qquad (2.6)$$

Sedangkan untuk parameter α_i dapat dihitung dengan menggunakan persamaan:

$$\hat{\alpha}_i = \overline{R}_i - \hat{\beta}_i \overline{R}_m \qquad (2.7)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan ekspektasi *return* dan variansi saham sebagai berikut.

2.4 Mengestimasi Ekspektasi *Return* dan Variansi Saham

Berdasarkan karakteristik model indeks tunggal, ekspektasi *return* saham individual adalah:

$$\begin{aligned} E[R_i] &= E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i] \\ &= E[\alpha_i] + E[\beta_i R_m] + E[e_i] \\ \overline{R}_i &= \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Persamaan (2.8) menunjukkan bahwa ekspektasi *return* saham individual terdiri dari *unique return* (tidak terpengaruh pasar) dan tingkat keuntungan yang berhubungan dengan pasar (*market related return*).

Variansi *return* saham individual dengan menggunakan indeks tunggal dapat dihitung melalui persamaan:

$$E[(R_i - \overline{R}_i)^2] = \beta_i^2 E[(R_m - \overline{R}_m)^2] + 2\beta_i E[e_i(R_m - \overline{R}_m)] + E[e_i^2] \quad (2.9)$$

Karena karakteristik (3.a), (4.a) dan (4.b), maka persamaan (2.9) menjadi:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2 \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) terlihat bahwa variansi *return* saham individual terdiri dari dua bagian, yaitu *unique risk* (σ_{ei}^2) dan risiko yang berhubungan dengan pasar $(\beta_i^2 \sigma_m^2)$. Selanjutnya juga diestimasi kovariansi dan korelasi antar saham.

2.5 Mengestimasi Kovariansi dan Korelasi Antar Saham

Untuk menentukan besarnya kovariansi antar saham dengan model indeks tunggal dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Cov(R_i, R_j) &= E[(R_i - \overline{R}_i)(R_j - \overline{R}_j)] \\ &= \beta_i \beta_j E[(R_m - \overline{R}_m)] + \beta_j E[e_i(R_m + \overline{R}_m)] \\ &\quad + \beta_i E[e_j(R_m - \overline{R}_m)] + E[e_i.e_j] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Berdasarkan karakteristik (3.a) dan (3.b), persamaan (2.11) ditulis sebagai:

$$Cov(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \quad (2.12)$$

Dari persamaan (2.12) tampak bahwa kovariansi antar saham hanya dipengaruhi oleh *market risk* (ini sesuai dengan asumsi). Inilah yang dikenal dengan ***model indeks tunggal*** . Selanjutnya, berdasarkan persamaan (2.12), koefisien korelasi antar saham, ρ, dapat dinyatakan dengan:

$$Cov(R_i, R_j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

Atau, didapat

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_m^2}{\sigma_i \sigma_j} \quad (2.13)$$

Setelah masing-masing secara individual dinilai dan dipilih, selanjutnya menentukan model ekspektasi dan variansi *return* portofolio berikut ini.

2.6 Membentuk Model Ekspektasi *Return* dan Variansi Portofolio

Misalkan w_i menyatakan proporsi (bobot) asset yang diinvestasikan pada saham i dalam pembentukan portofolio, dengan demikian *return* portofolio adalah:

Berdasarkan persamaan (2.14) ekspektasi *return* portofolio diperoleh sebagai berikut:

$$E[R_p] = E[\sum_{i=1}^{k} w_i R_i] = E[\sum_{i=1}^{k} w_i(\alpha_i + \beta_i R_m)]$$

atau diperoleh

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{k} w_i \alpha_i + \overline{R}_m \sum_{i=1}^{k} w_i \beta_i = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_m \qquad (2.15)$$

dengan $\alpha_p = \sum_{i=1}^{k} w_i \alpha_i$ dan $\beta_p = \sum_{i=1}^{k} w_i \beta_i$.

Sedangkan variansi *return* portofolio dapat ditentukan dengan cara seperti di bawah ini.

$$\sigma_p^2 = E[(R_p - \overline{R}_p)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} w_i w_j Cov(R_i, R_j); i \neq j$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{k} w_i^2 \sigma_{ei}^2 \qquad (2.16)$$

Untuk mendapatkan proporsi asset yang tepat, dilakukan optimasi portofolio sebagai berikut ini.

2.7 Melakukan Optimasi Bobot Kombinasi Portofolio

Misalkan seorang investor memiliki faktor keengganan (*risk aversion*) θ, ini dapat diestimasi dengan cara perbandingan dua portofolio. Jika seorang investor dengan *risk aversion* θ, dengan dua portofolio yang mempunyai *average rate of return* $\overline{R}_p$ dan $\tilde{\overline{R}}_p$, serta dengan variansi σ_p^2 dan $\tilde{\sigma}_p^2$, perbandingan antara dua portofolio tersebut adalah dengan menyamaan:

$$\overline{R}_p - \theta\sigma_p^2 = \tilde{\overline{R}}_p^2 - \theta\tilde{\sigma}_p^2 \qquad (2.17)$$

Menyelesaikan persamaan (2.17) untuk θ akan diperoleh:

$$\hat{\theta} = \frac{\overline{R}_p - \tilde{\overline{R}}_p}{\sigma_p^2 - \tilde{\sigma}_p^2} \tag{2.18}$$

Optimasi bertujuan memaksimumkan $\overline{R}_p - \theta\sigma_p^2$, sehingga masalah optimasi portofolio dapat dirumuskan sebagai berikut:

Fungsi tujuan:

$$f(w_1, w_2, ..., w_k) = (\sum_{i=1}^{k} w_i \alpha_i + \overline{R}_m \sum_{i=1}^{k} w_i \beta_i) - \theta(\beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{k} w_i^2 \sigma_{ei}^2) \tag{2.19}$$

Fungsi kendala:

$$g(w_1, w_2, ..., w_k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} w_i = 0 \tag{2.20}$$

Dari persamaan (2.19) dan (2.20) selanjutnya fungsi *Lagrangean* dibentuk sebagai penjumlahan fungsi tujuan dan fungsi kendala, dengan faktor *multiplier Lagrange* λ sebagai berikut:

$$L(w_1, w_2, ..., w_k; \lambda) = f(w_1, w_2, ..., w_k) + \lambda g(w_1, w_2, ..., w_k) \tag{2.21}$$

Menurunkan secara parsial terhadap $w_1, w_2, ..., w_k$ dan λ, serta menyamakan dengan nol akan diperoleh persamaan-persamaan:

$$\partial L / \partial w_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha_1 + (\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2)\beta_1 + 2w_1\sigma_{e1}^2 \tag{2.22}$$

$$\partial L / \partial w_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha_2 + (\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2)\beta_2 + 2w_2\sigma_{e2}^2 \tag{2.23}$$

Dan seterusnya hingga:

$$\partial L / \partial w_k = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha_k + (\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2)\beta_k + 2w_k\sigma_{ek}^2 \tag{2.24}$$

$$\partial L / \partial \lambda = 0 \Rightarrow 1 - \sum_{i=1}^{k} w_i = 0 \tag{2.25}$$

Menyelesaikan sistem persamaan tersebut, akan diperoleh $w_1, w_2, ..., w_k$. Penyamaan persamaan (2.24) dengan persamaan (2.22) dan menyelesaikannya akan diperoleh:

$$w_k = \frac{(\alpha_k - \alpha_1) + (\beta_k - \beta_1)(\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2) + 2w_1\sigma_{e1}^2}{2e_{e1}^2} \tag{2.26}$$

Dan sterusnya hingga penyamaan persamaan (2.23) dengan persamaan (2.22) dan menyelesaikannya diperoleh:

$$w_2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1)(\overline{R}_m - \theta\sigma_m^2) + 2w_1\sigma_{e1}^2}{2e_{e1}^2} \tag{2.27}$$

dan

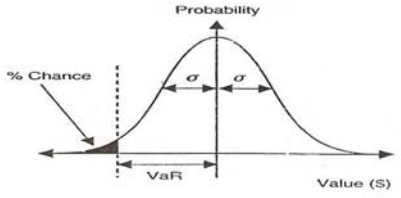
$$w_1 = 1 - \sum_{i=2}^{k} w_i \tag{2.28}$$

Nilai-nilai proporsi $w_1, w_2, ..., w_k$ ini adalah menunjukkan komposisi alokasi asset (dana) yang akan diinvestasikan pada masing-masing saham dalam pembentukan portofolio, agar *rate of return on portfolio investment* maksimum (Tadelin *et al.*, 2001). Akhirnya, estimasi *VaR* akan dilakukan berikut ini.

2.8 Mengestimasi *VaR*

Estimasi *VaR* secara parametrik adalah mengasumsikan bahwa *return* saham berdistribusi normal, dan *VaR* diestimasi dengan menggunakan parameter-parameter *mean* dan deviasi standar (Rupert,2004:348). Perlu diketahui bahwa *quantile* ke-α dari distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ adalah $\mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma$, oleh karena itu etimasi *VaR* (α) adalah:

$$VaR(\alpha) = -S \times \{\mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma\} \tag{2.29}$$



Gambar 3.1 Hubungan antara *VaR* dengan Deviasi Standar

Di mana S adalah besarnya asset yang diinvestasikan. Estimasi *VaR* dengan metode ini sangat dipengaruhi oleh deviasi standar.

3. ANALISIS KASUS

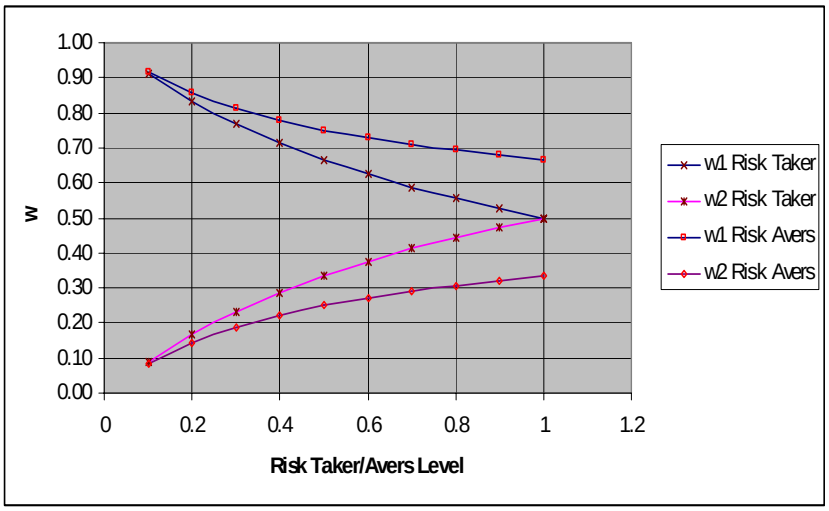
Data yang dianalisis adalah harga saham harian Bank Lippo dan Bumi Putera serta Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) kinerja 129 hari kerja terakhir tahun 2007. Kemudian data ini masing-masing ditentukan besarnya nilai *log return* dengan menggunakan persamaan (2.1) dan (2.2). Berdasarkan statistik deskriptif, masing-masing data *log return* tersebut memiliki nilai *mean* dan variansi seperti diberikan dalam Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 3.1 *Mean* dan Variansi Data *Log Retrurn*

Data *Log Return*	*Mean*	Variansi
Log Return Lippo	0,000718	0,00010588
Log Return Bumi Putera	0,001261	0,01575025
Log Return IHSG	0,017440	0,05112120

Regresi antara log return saham Lippo dan IHSG mengsilkan persamaan LIPPO = 0.000664 + 0.00310 IHSG, Sedangkan regresi antara log return saham Bumi Puteri menghasilkan persamaan BUMPU = 0.0019 + 0.0378 IHSG. Residual kuadrat dari regresi LIPPO adalah $\sigma_{eL}^2 = 0{,}0001063$ dan residual kuadrat dari regresi Bumi Puteri adalah $\sigma_{eB}^2 = 0{,}0158000$. Seringkali untuk menentukan bobot portofolio investasi ditentukan berdasarkan perbandingan nilai data log return saham terakhir, yang mana nilai data log return saham Lippo terakhir adalah 0,0057907 dan nilai data log return saham Bumi Putera terakhir adalah 0,028029; dengan demikian bobot portofolio untul saham Lippo adalah 0,17 dan bobot portofolio untuk saham Bumi Putera adalah 0,83. Menggunakan nilai-nilai bobot ini variansi portofolio dihitung dengan menggunakan rumus (2.16), hasilnya adalah $\sigma_p^2 = 0.104$. Dengan asumsi *mean log return* portofolio adalah nol, dan dengan tingkat signifikasi 5%, serta dengan investasi awal adalah satu satuan, *Value at Risk* yang dihitung dengan menggunakan persamaan (2.19) didapat $VaR(5\%) = 0{,}172$.

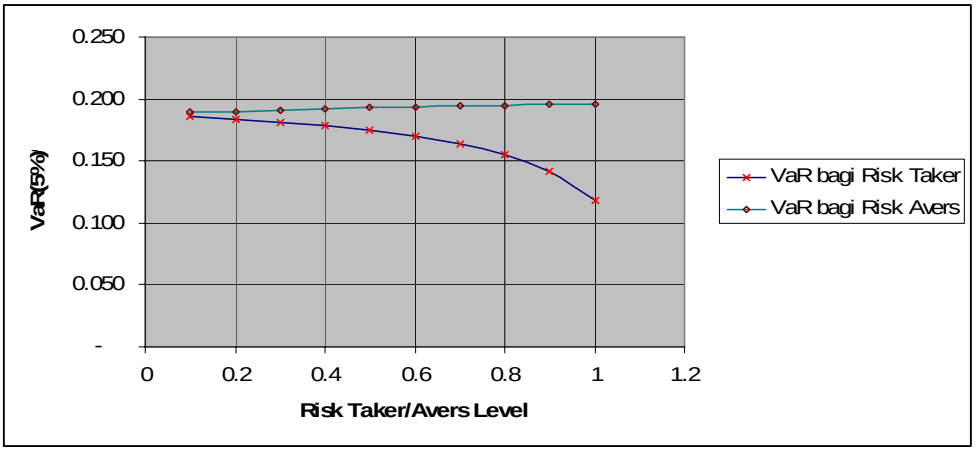
Akan berbeda hasilnya jika digunakan pendekatan optimasi Lagrangean Multiplier. Apabila pada persamaan (2.18) didekati dengan beberapa tingkatan penantang risiko (*risk taker*) : $0 < a \leq 1$ dan beberapa tingkatan penghindar risiko (*risk avers*) : $-1 \leq a < 0$; maka bobot portofolio bagi investor *risk taker* dan bagi investor *risk avers* dapat ditunjukkan dalam Gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.1 Grafik bobot portofolio bagi investor *risk taker* dan *risk avers*

Tampak bahwa bagi investor yang memiliki tingkat *risk taker* satu cenderung membagi dua alokasi modalnya dengan bobot yang sama, yaitu 0,5 untuk saham Lippo dan 0,5 untuk saham Bumi Putera. Sedangkan bagi investor yang memiliki tingkat *risk avers* satu akan membagi dua alokasi modalnya dengan bobot 0,67 untuk saham Lippo dan 0,33 untuk saham Bumi Putera.

Dengan asumsi yang sama, yakni *mean log return* portofolio adalah nol, dan dengan tingkat signifikasi 5%, serta dengan investasi awal adalah satu satuan, *Value at Risk* yang dihitung dengan menggunakan persamaan (2.19) bagi investor dengan beberapa tingkatan *risk taker* maupun *risk avers* seperti Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Value at Risk untuk beberapa tingkatan *risk taker/avers*

Tampak bahwa baik bagi investor dengan tingkatan *risk taker* maupun *risk avers* rendah 0,1 *Value at Risk* hampir sama, yakni 0,186 bagi investor *risk taker* dan 0,189 bagi

investor *risk avers*. Tetapi, untuk tingkatan *risk taker*/*avers* yang semakin besar, *Value at Risk* bagi investor *risk taker* menurun cepat, sedangkan bagi investor *risk avers* meningkat perlahan. Tampak bahwa pada tingkatan *risk taker/avers* 1, *Value at Risk* bagi investor *risk taker* hanya 0,118 dan bagi investor *risk avers* 0,196. Jelaslah bahwa di sini bagi investor yang sangat berhati-hati tidak selalu menghasilkan *Value at Risk* yang rendah atau sebaliknya.

4. SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan di atas akhirnya dapat diambil kesimpulan dan saran-saran bagi peneliti lain yang berminat meneliti lebih lanjut penelitian ini.

4.1 Simpulan

Hasil optimasi bobot portofolio bagi investor *risk taker* dengan tingkat *risk taker/avers* tinggi cenderaung membagi dua sama besar alokasi dananya pada investasi saham-saham dalam portofolionya. Sedangkan bagi investor dengan tingkatan *risk taker/avers* semakin tinggi tetap menjaga secara proporsional yang berbeda bobot alokasi dananya pada investasi saham-saham dalam portofolionya. *Value at Risk* yang dihasilkan oleh investor dengan tingkatan *risk taker/avers* yang semakin tinggi justeru semakin menurun. Sedangkan *Value at Risk* yang dihasilkan oleh investor *risk avers* semakin meningkat seiring dengan semakin tingginya tingkatan *risk taker/avers*.

4.2 Saran

Untuk estimasi *VaR* dalam paper ini *return* saham diasumsikan berdistribusi normal. Sedangkan untuk penelitian lain masih dapat dikembangkan bagi data *return* saham yang tidak berdistribusi normal, dan juga dengan menggunakan pendekatan *time series*.

DAFTAR PUSTAKA

Alexader, C. (Editor). (1999). *Risk Management and Analysis*. Volume 1 : Measuring and Modelling Financial Risk. New York : John Wiley & Sons Inc.

Dowd, K. (2002). *An Introduction to Market Risk Measurement*. United State American : John Wiley & Sons Inc.

Bodie *et al.* (1999). *Investment*. Fourth Edition. Singapore : Irwin / McGraw-Hill.

Gruber *et al.* (1991). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Singapore : John Wiley & Sons, Inc.

Jorion, P. (2004). Bank Trading Risk and Systemic Risk. Third draft : December 2004.

Ruppert, David. 2004. *Statistics and Finanace an Introduction*. New York: Springer.

Sukono. (2002). Model Matematika Pembentukan Portofolio Investasi Optimum Dengan Menggunakan Indeks Tunggal. *Jurnal Matematika Integratif*. Vol. 1, No. 1, April 2002.

Tadelilin, E. (2001). *Analisis Investasi*. Yogyakarta : BPFE.

Estimasi VaR Dengan Pendekatan *Extreme Value* *

(*Estimation of VaR by Extreme Value Approach*)

Sukono[1], Subanar[2] & Dedi Rosadi[3]

[1] Jurusan Matematika FMIPA UNPAD Bandung, e-mail : fsukono@yahoo.com

[2] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : subanar@yahoo.com

[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM Yogyakarta, e-mail : dedirosadi@ugm.ac.id

ABSTRAK

Setiap bentuk investasi memiliki risiko yang besar kecilnya tergantung pada banyak faktor, misalnya tingkat kepercayaan (α) dan juga waktu (T). Risiko pada setiap instrumen investasi tersebut dapat diukur dan dikelola sehingga para investor terhindar dari risiko kerugian yang besar. *Value at Risk* adalah salah satu alat untuk mengukur risiko investasi yang sangat populer. Dalam paper ini akan dikaji model pengukuran risiko *Value at Risk* dengan pendekatan model *extreme value*. Selanjutnya metode pendekatan ini akan dipergunakan untuk menganalisis data harga saham yang diperdagangkan di pasar modal Indonesia.

Kata Kinci : Investasi, pengukuran risiko, *Value at Risk*, model *Extreme Value*

ABSTRACT

Every type of the investment has risk that large and small was depend on some factors, for examples the confidence level (α) and so the time (T). The risk on every instrument of the investment mentioned can measured and managed until investors spared from loss risk that large. Value at Risk is one of the tools for measuring the risk of investment that very popular. In this paper will study the measurement model of risk, it is Value at Risk by using extreme value model approach. Furthermore, this approach of method will used to analyzing the data of stock price that sell at the financial market in Indonesia.

Keywords: *Investment, risk measurement, Value at Risk, Extreme Value*

1. PENDAHULUAN

Semua jenis investasi selalu memiliki risiko. Semakin tinggi hasil yang diharapkan dari investasi tersebut, semakin tinggi juga tingkat risikonya. Para investor sangat penting memahami risiko tersebut sebelum melakukan investasi terhadap sebuah instrumen investasi. Dengan mengetahui risiko yang akan dihadapi, investor dapat melakukan tindakan pencegahan agar risiko tersebut tidak akan dihadapi investor atau setidaknya

* Dipublikasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 28 November 2008.

dapat mengantisipasi risiko. Salah satu elemen dari risiko yang sangat penting dalam pengelolaan risiko adalah ukuran risiko (Alexander, 1999; Dowd, 2002).

Sebagai bagian dari penelitian untuk kejelasan dalam investasi, muncul konsep *Value at Risk*. Ukuran ini digunakan untuk menggambarkan berapa banyak uang yang dikeluarkan sebuah perusahaan atau bank pada risiko tersebut pada suatu waktu tertentu dalam suatu periode Asumsi yang penting dalam membicarakan risiko adalah bahwa setiap investor mengambil sikap menghindari atau tidak menyukai risiko, atau dengan kata lain bahwa investor lebih menyukai memperoleh *rate of return* yang lebih tinggi dengan variansi yang kecil. Semakin besar arah penyimpangan dan semakin besar kemungkinan penyimpangan itu terjadi, semakin tinggi risiko yang akan dihadapi (Agus Sartono, 1990 : 45).

Untuk memecahkan masalah ini mulai ada metode-metode yang digunakan untuk mengestimasi risiko. Dari metode-metode yang digunakan akan dianalisis tingkat risiko yang dihasilkan dan faktor-faktor yang dapat mempengaruhi nilai risiko. Dari hasil estimasi risiko tersebut dapat dihitung nilai risiko terkecil, sehingga menghindari para investor dari kerugian yang besar. Hal ini akan mempermudah investor untuk melihat peluang untung atau ruginya investasi pada instrumen investasi

2. MODEL MATEMATIKA

2.1 Teori *Extreme Value*

Pengembalian (*return*) aset dihitung pada interval waktu tetap, misalnya setiap hari, (r_t). Misalkan ada himpunan n pengembalian, $\{r_1,...,r_n\}$. Pengembalian minimum dari himpunan adalah $r_{(1)}$, yaitu nilai statistik urut paling kecil, dan nilai maksimum adalah $r_{(n)}$, atau $r_{(1)} = \min_{1\le j\le n}\{r_j\}$ dan $r_{(n)} = \max_{1\le j\le n}\{r_j\}$. Di sini difokuskan pada nilai minimum $r_{(1)}$, karena nilai minimum ini sangat relevan dengan perhitungan VaR (Tsay, 2005; Ruppert, 2004).

Asumsikan pengembalian r_t barisan saling bebas dengan fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dan rentang pengembalian r_t adalah $[l,u]$. Untuk log *return*, $l=-\infty$ dan $u=\infty$, fungsi distrbusi kumulatif $r_{(1)}$ dinyatakan sebagai $F_{n,1}(x)$, yaitu:

$$F_{n,1}(x) = \Pr[r_{(1)} \le x] = 1 - \Pr[r_{(1)} > x]$$

$$= 1 - \Pr(r_1 > x, r_2 > x ... r_n > x)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} \Pr(r_j > x)$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} [1 - \Pr(r_j \le x)]$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{n} [1 - F(x)] \text{ (dengan distribusi umum)}$$

$$= 1 - [1 - F(x)]^n \qquad (2.1)$$

dalam praktek, fungsi distribusi kumulatif $F(x)$ dari $r_{(1)}$, tidak diketahui sebab itu $F_{n,1}(x)$ *generated* menjadi $F_{n,1}(x) \to 0$ jika $x \le 1$ dan $F_{n,1}(x) \to 1$ jika $x > 1$ karena n menuju tak hingga. Teori *extreme value* memiliki dua parameter $\{\beta_n\}$ dan $\{\alpha_n\}$, di mana $\alpha_n > 0$, distribusi $r_{(l^*)} \equiv (r_{(1)} - \beta_{(n)}) / \alpha_n$ konvergen pada distribusi *nongenerated* dengan n menuju tak hingga. Barisan $\{\beta_n\}$ faktor lokasi dan $\{\alpha_n\}$ faktor skala. Berdasarkan pada asumsi, distribusi batas dinormalkan minimum $r_{(1^*)}$ adalah

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}] & \text{jika } k \neq 0 \\ 1 - \exp[-\exp(x)] & \text{jika } k = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

untuk $x < -1/k$ jika $k < 0$ dan $x > -1/k$ jika $k > 0$ di mana tanda * menyatakan minimum. Kasus $k = 0$ diambil sebagai batas jika $k \to 0$. Parameter k menyatakan *shape parameter* yang mempengaruhi perilaku *tail* distribusi batas. Parameter $\alpha = -1/k$ disebut *tail index* distribusi (Tsay, 2005; Hota, Lucas & Palaro, 1999).

Distribusi batas dalam persamaan (2.2) adalah distribusi *general extreme value* (GEV) oleh Jenkinson (1955) untuk minimum. Tiga tipe distribusi batas oleh Gneenko (1943):

- Tipe I: $k = 0$, famili Gumbel. CDF adalah

$$F_*(x) = 1 - \exp[-\exp(x)], \ -\infty < x < \infty \qquad (2.3)$$

- Tipe II: $k < 0$, famili Frechet. CDF adalah

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}] & \text{jika } x < -\dfrac{1}{k} \\ 1 & \text{jika lainnya} \end{cases} \quad (2.4)$$

- Tipe III : $k > 0$, famili Weibull. CDF adalah

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}] & \text{jika } x > -\dfrac{1}{k} \\ 0 & \text{jika lainnya} \end{cases} \quad (2.5)$$

Fungsi densitas probabilitas (pdf) dari distribusi batas umum persamaan (2.2) dapat dengan mudah diperoleh dengan persamaan diferensial, hasilnya adalah:

$$f_*(x) = \begin{cases} (1+kx)^{\frac{1}{k}-1} \exp[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}] & \text{jika } k \neq 0 \\ \exp[x - \exp(x)] & \text{jika } k = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

di mana $-\infty < x < \infty$ untuk $k = 0$, $x < -1/k$ untuk $k < 0$, dan $x > -1/k$ untuk $k > 0$.

2.2 Metode Estimasi

Terdapat banyak metode untuk estimasi parameter model *extreme value*, dalam paper ini hanya akan dibahas dua metode saja, yaitu Metode Maksimum Likelihood dan Metode Regresi.

2.2.1 Metoda Maksimum Likelihood

Asumsikan bahwa sub-periode minimum $\{r_{n,i}\}$ terdistribusi *extreme value* sehingga pdf dari $x_i = (r_{n,i} - \beta_n)/\alpha_n$ diberikan persamaan (2.6), dapat ditetapkan pdf dari $\{r_{n,i}\}$ oleh transformasi seperti berikut:

$$f(r_{n,i}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_n}\left(1 + \dfrac{k_n(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k}-1} \exp\left[-\left(1 + \dfrac{k_n(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right] & \text{jika } k_n \neq 0 \\ \dfrac{1}{\alpha_n}\exp\left[\dfrac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} - \exp\left(\dfrac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n}\right)\right] & \text{jika } k_n = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

perlu dimengerti bahwa $1 + k_n(r_{n,i} - \beta_n)/\alpha_n > 0$ jika $k_n \neq 0$. Indeks n pada parameter k dimaksudkan bahwa estimasinya bergantung pilihan dari n. Sesuai asumsi bebas, fungsi likelihood dari sub-periode minimum adalah:

$$L(r_{n,1},...,r_{n,g} \mid k_n, \alpha_n, \beta_n) = \prod_{i=1}^{g} f(r_{n,i}) \quad (2.8)$$

Prosedur estimasi nonlinier dapat digunakan untuk menetapkan estimasi maksimum likelihood dari $k_n, \beta_n,$ dan α_n. Estimasi ini tidak bias, secara asimtotis

normal, dan variansi minimum di bawah asumsi layak (Tsay, 2005; Hota, Lucas & Palaro, 1999).

2.2.2 Metoda Regresi

Mengasumsikan bahwa $\{r_{n,i}\}_{i=1}^{g}$ merupakan sampel acak terdistribusi *general extreme value* (GEV) dalam persamaan (2.6) dan menggunakan sifat statistik urut. Statistik urut dari sub-periode minimum $\{r_{n,i}\}_{i=1}^{g}$ sebagai:

$$r_{n(1)} \le r_{n(2)} \le ... \le r_{n(g)} \tag{2.9}$$

Dengan menggunakan sifat statistik urut, diperoleh:

$$E\{F_*[r_{n(i)}]\} = \frac{i}{g+1},\ i = 1,..., g \tag{2.10}$$

Agar lebih sederhana, dipisahkan menjadi dua kasus yang bergantung pada nilai k. *Pertama*, untuk $k \neq 0$. Dari persamaan (2.6), didapatkan:

$$F_*[r_{n(i)}] = 1 - \exp\left[-\left(1 + k_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \tag{2.11}$$

Gunakan persamaan (2.10) dan (2.11) dan estimasi ekspektasi dengan nilai penelitian, diperoleh:

$$\frac{i}{g+1} = 1 - \exp\left[-\left(1 + k_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \tag{2.12}$$

Sehingga,

$$\exp\left[-\left(1 + k_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right] = 1 - \frac{i}{g+1} = \frac{g+1-i}{g+1},\ i = 1,..., g \tag{2.13}$$

Dengan menggunakan logaritma natural untuk yang kedua kalinya persamaan utamanya:

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right)\right] = \frac{1}{k_n}\ln\left(1 + k_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}\right),\ \ i = 1,\ldots, g \tag{2.14}$$

Asumsikan deret $\{e_t\}$ tidak berkorelasi, dan tetapkan regresi:

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right)\right] = \frac{1}{k_n}\ln\left(1 + k_n \frac{r_{n(i)} - \beta_n}{\alpha_n}\right) + e_t\ i = 1,\ldots, g \tag{2.15}$$

Estimasi kuadrat terkecil dari $k_n, \beta_n,$ dan α_n dapat dilakukan dengan meminimumkan jumlah kuadrat e_i.

Kedua, untuk $k_n = 0$, regresinya menjadi :

$$\ln\left[-\ln\left(\frac{g+1-i}{g+1}\right)\right] = \frac{1}{\alpha_n} r_{n(i)} - \frac{\beta_n}{\alpha_n} + e_i,\ i = 1,\ldots,g \qquad (2.16)$$

Estimasi kuadrat terkecil konsisten tetapi kurang efisien dibandingkan estimasi likelihood (Tsay, 2005; Hota, Lucas & Palaro, 1999).

2.3 Pendekatan *Extreme Value* pada VaR

Bagian ini dapat dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama berhubungan dengan estimasi parameter, dan bagian kedua perhitungan VaR dengan menggunakan hubungan antara probabilitas suku bunga gabungan dengan perbedaan interval waktu.

BAGIAN I

Asumsikan ada T observasi pengembalian aset yang tersedia pada periode sampel. Periode sampel dapat dipartisi menjadi g kelompok yang tidak *overlapping* sub-periode sepanjang n sehingga $T = ng$. Jika $T = ng + m$ dengan $1 \le m < n$. Kemudian dapat dihapus observasi m yang pertama dari sampel. Teori *extreme value* yang dibahas sebelumnya memungkinkan kita untuk menentukan penaksiran lokasi, skala, dan parameter, β_n, α_n, k_n untuk sub-periode minimum $\{r_{n,i}\}$. Lakukan estimasi metode maksimum likelihood pada CDF pada persamaan (2.6) dengan $x = (r - \beta_n)/\alpha_n$, didapat kuantil probabilitas yang diberikan pada distribusi *extreme value*.

Anggap p^* adalah peluang kecil menunjukkan kerugian yang mungkin terjadi dan r_n^* adalah kuantil ke- p^* dari sub-periode minimum di bawah batas distribusi *extreme value*. Kemudian terdapat rumus:

$$p^* = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(1 + \dfrac{k_n(r_n^* - \beta_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right] & \text{jika } k_n \neq 0 \\ 1 - \exp\left[-\exp\left(\dfrac{r_n^* - \beta_n}{\alpha_n}\right)\right] & \text{jika } k_n = 0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

di mana $1 + k_n(r_n^* - \beta_n)/\alpha_n > 0$ untuk $k \neq 0$, sehingga persamaan ini ditulis menjadi (Tsay, 2005):

$$\ln(1-p^*) = \begin{cases} -\left(1+\dfrac{k_n(r_n^*-\beta_n)}{\alpha_n}\right) & \text{jika } k_n \neq 0 \\ -\exp\left(\dfrac{r_n^*-\beta_n}{\alpha_n}\right) & \text{jika } k_n = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

dan dapatkan kuantil:

$$r_n^* = \begin{cases} \beta_n - \dfrac{\alpha_n}{k_n}\{1-[-\ln(1-p^*)]^{k_n}\} & \text{jika } k_n \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1-p^*)] & \text{jika } k_n = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

BAGIAN II

Untuk probabilitas p^* lebih kecil, kuantil r_n^* dari persamaan (2.19) sebagai dasar perhitungan VaR pada teori *extreme value* sub-periode minimum. Langkah selanjutnya menuliskan hubungan antara sub-periode minimum dan urutan pengembalian r_t. Karena sebagian besar pengembalian aset tidak berhubungan secara berurutan, sehingga dapat dinyatakan :

$$p^* = P(r_{n,i} \le r_n^*) = 1-[1-P(r_t \le r_n^*)]^n \quad (2.20)$$

atau ekivalen dengan :

$$1-p^* = \left[1-P(r_t \le r_n^*)\right]^n \quad (2.21)$$

Hubungan antara probabilitas ini memungkinkan mendapatkan VaR untuk pengembalian aset yang sesungguhnya. Lebih tepatnya, untuk kemungkinan menetapkan probabilitas bawah kecil p, kuantil $ke-p$ dari r_t adalah r_n^* jika probabilitas p^* dipilih berdasarkan persamaan (2.21) di mana $p = P(r_t \le r_n^*)$. Sehingga, untuk probabilitas bawah kecil p, VaR saham sepajang posisi dalam aset pokok log pengembalian r_t adalah (Tsay, 2005):

$$VaR = \begin{cases} \beta_n - \dfrac{\alpha_n}{k_n}\{1-[-n\ln(1-p)]^{k_n} & \text{jika } k_n \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-n\ln(1-p)] & \text{jika } k_n = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Langkah-langkah perhitungan VaR dengan teori *extreme value* adalah :

(i) Pilih panjang sub-periode n dan tentukan sub-periode minimum $\{r_{n,i}\}$, $i = 1,...,g$, di mana $g = [T/n]$.

(ii) Tentukan β_n, α_n, dan k_n dengan metode maksimum likelihood.

(iii) Pilihkah model *extreme value* yang cocok berdasarkan uji kecocokan.

(iv) Jika model sudah bagus, gunakan persamaan (2.22) untuk menghitung VaR

3. ANALISIS KASUS

Data yang digunakan dalam paper ini harga penutupan saham PT. BATA dan PT. ASTRA INTERNASIONAL (ASII), masing-masing sebanyak 460 data trasaksi harian. Kemudian untuk keperluan perhitungan lebih lanjut, data saham tersebut ditransformasi menjadi data log pengembalian saham dengan persamaan $R_i = \ln(P_i / P_{i-1})$, sehingga diperoleh data log pengembalian saham berukuran 459.

3.1 Estimasi VaR Aset Tunggal

Akan ditentukan *VaR* selama satu hari ke depan dengan tingkat konfidensi sebesar 95%, jika seorang investor ingin menanamkan sahamnya sebesar Rp 20.000.000 pada salah satu perusahaan yaitu BATA dan ASII.

Tahapan dalam menaksir *VaR* dengan distribusi *extreme value* dengan tingkat konfidensi 95% pada saham aset tunggal adalah sebagai berikut:

(i) Dari 459 data log pengembalian tersebut ditentukan panjang periode $n = 21$, sehingga diperoleh subperiod $g = 459 / 21 = 21$.

(ii) Untuk mencari nilai α_n, β_n digunakan metode estimasi *maximum likelihood* dengan menggunakan software MINITAB 14

- Untuk saham BATA

```
Parameter Estimates
                        Standard     95.0% Normal CI
Parameter   Estimate      Error      Lower      Upper
Location   0.0113085  0.0022711  0.0068573  0.0157598
Scale      0.0459157  0.0009961  0.0440042  0.0479101
```

Uji distribusi *extreme value*

```
Goodness-of-Fit
                                Anderson-Darling
Distribution                          (adj)
Smallest Extreme Value              96.002
```

Berdasarkan nilai Anderson-Darling sebesar 96.002, data log pengembalian BATA cukup memadai sebagai terdistribusi *extreme value.* Berarti untuk BATA nilai estimator α_n (*scale*) = 0,0459157 dan β_n (*location*) = 0,0113085.

- Untuk saham ASII

```
Parameter Estimates

                          Standard     95.0% Normal CI
Parameter   Estimate      Error      Lower      Upper
Location   0.0070981  0.0006741  0.0057770  0.0084193
Scale      0.0135789  0.0003974  0.0128218  0.0143806
```

Uji distribusi *extreme value*

```
        Goodness-of-Fit

                                  Anderson-Darling
        Distribution                       (adj)
        Smallest Extreme Value           32.354
```

Dengan nilai Anderson-Darling sebesar 32.354, data log pengembalian ASII cukup memadai sebagai terdistribusi *extreme value.* Berarti untuk ASII nilai estimator α_n (*scale*) = 0,0135789 dan β_n (*location*) = 0,0070981.

(iii) Nilai k_n diperoleh dari rumus $k_n = \frac{1}{a}$, di mana a adalah *tail index* yang diestimasi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Dengan menggunakan bantuan software MINITAB 14 akan dibuat plot garis lurus dari titik-titik $\left\{\ln\left(-R_{(k)}\right), \ln(k/n)\right\}_{k=1}^{b}$, dari 459 data log pengembalian kedua perusahaan tersebut. Nilai b bervariasi yaitu 5% dan 10% dari 459 data log pengembalian.
- Setiap plot garis lurus dari berbagai nilai m akan menghasilkan model regresi linier dengan kemiringan garis (*slope*) yang bervariasi.
- Model regresi linier yang dipilih adalah model yang menghasilkan koefisien determinasi yang paling besar.
- Minus kemiringan garis (*slope*) dari model regresi linier yang dipilih merupakan hasil penaksiran *tail index* a yang akan digunakan.

Pada pengolahan 459 data log pengembalian BATA dan ASII, *b* yang digunakan adalah 5% dan 10% dari 459 data log pengembalian. Untuk kedua pengembalian BATA dan ASII koefisien determinasi yang paling besar masing-masing yaitu 95.4 % dan 99 %. Keduanya dihasilkan oleh *b* = 5% x 459 data log return. Persamaan regresi linier masing-masing adalah :

$$\ln(k/n)_{BATA} = -7.59 - 0.982\ln(-R_k)_{BATA}$$
$$\ln(k/n)_{ASII} = -13.5 - 2.49\ln(-R_k)_{ASII}$$

Minus *slope* dua persamaan di atas yaitu : 0.982 dan 2.49 merupakan *tail index* (a) sehingga nilai $k_{(n)}$ untuk kedua saham masing-masing -1.01832994 dan -0.4016064 yang akan digunakan pada tahap selanjutnya.

(iv) Tahap selanjutnya adalah memasukkan nilai-nilai parameter $\alpha_{(n)}, \beta_{(n)}, \text{dan } k_{(n)}$ ke dalam persamaan (2.22) sehingga diperoleh estimator VaR untuk masing-masing saham BATA dan ASII sebagai berikut

$$VaR_{BATA} = 0.00113085 - \frac{0.0459157}{1.01832994}\{1-[-21\times\ln(1-0.05)]^{1.01832994}\}$$
$$= Rp.297.075,25$$

$$VaR_{ASII} = 0.0070981 - \frac{0.0135789}{-0.4016064}\{1-[-21\times\ln(1-0.05)]^{-0.4016064}\}$$
$$= Rp.162.451,92$$

3.2 Estimas VaR Portofolio

Pertama, menentukan pengembalian portofolio (R_{Port}) adalah merupakan penjumlahan log pengembalian BATA dengan log pengembalian ASII dengan rumus $R_{i(Port)} = wR_{i(BATA)} + (1-w)R_{i(ASII)}$ di mana w bobot alokasi dana. Dalam paper ini $w = 0,4$ ditentukan dengan coba-coba (*trial and error*) yang menghasil variansi terkecil pada R_{Port}.

Selanjutnya, dengan menerapkan tahapan estimasi VaR untuk aset tunggal pada data pengembalian portofolio diperoleh nilai estimator α_n (*scale*) = 0,039431 dan nilai β_n (*location*) = 0,010547. Persamaan regresi linier untuk pengembalian portofolio adalah :

$$\ln(k/n)_{Port} = -8.52 - 1.25\ln(-R_k)_{Port}$$

Minus slope persamaan di atas yaitu 1.25 merupakan *tail index* (a) sehingga nilai $k_{(n)}$ adalah 0.8 yang akan digunakan untuk estimasi VaR. Dengan memasukkan nilai-nilai parameter $\alpha_{(n)}, \beta_{(n)}, \text{dan } k_{(n)}$ ke dalam persamaan (3.10) diperoleh estimator VaR sebagai berikut :

$$VaR_{Port} = 0.010547 - \frac{0.039431}{0.8}\{1-[-21\times \ln(1-0.05)]^{0.8}\}$$
$$= Rp.271.324,13$$

4. SIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan di atas akhirnya dapat diambil simpulan dan saran bagi peneliti lain yang berminat untuk meneliti lebih lanjut sebagai berikut.

4.1 Simpulan

Data log pengembalian saham BATA dan log pengembalian saham ASII masing-masing cukup memadai sebagai terdistribusi *extreme value*. Demikian pula data pengembalian portofolio juga cukup memadai sebagai terdistribusi *extreme value*. Dengan tingkat konfidensi 95% dan dengan asumsi investasi awal sebesar Rp 20.000.000,00 masing-masing diperoleh $VaR_{BATA} = Rp297.075,25$; $VaR_{ASII} = Rp162.451,92$ dan $VaR_{Port} = Rp271.324,13$. Sehingga dengan portofolio investasi dapat menurunkan tingkat risiko yang dihadapi.

4.2 Saran

Estimasi *VaR* dalam paper ini diasumsikan data log pengembalian saham terdistribusi *extreme value*, dan estimasi bobot portofolio dilakukan dengan *trial and error*. Untuk penelitian lebih lanjut data log pengembalian saham dapat diestimasi dengan distribusi yang lain, dan estimasi bobot portofolio dapat dilakukan dengan metode optimisasi.

DAFTAR PUSTAKA

Alexander, C. (Editor). (1999). *Risk Management and Analysis*. Volume 1 : Measuring and Modelling Financial Risk. New York : John Wiley & Sons Inc.

Dowd, K. (2002). *An Introduction to Market Risk Measurement*. United State American : John Wiley & Sons Inc.

Hota, L.K., Lucas, E.C. & Palaro, H.P. (1999). Estimation of VaR Using Copula and Extreme Value Theory. *Paper on Line*. Download 6 Oktober 2008.

Ruppert, D. (2004). *Statistics and Finanace an Introduction*. New York: Springer.

Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series. Second Edition*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Activities in Sunspot Group NOAA 9393

Bachtiar Anwar[1)] and Bambang Setiahadi[2)]
[1)]*Division of Applied Geomagnetism and Space Electromagnetism, National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN), Jl. Dr. Djundjunan 133, Bandung 40173*
E-mail: bachtiara@yahoo.com
[2)]*Watukosek Aeronautics and Space Observing Site, National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN), Gempol PO Box 4, Pasuruan, East-Java*
E-mail: bsetiap@sby.centrin.net.id

ABSTRACT

Watukosek Aeronautics and Space Observing Site (WKSO, LAPAN), observed sunspot in daily basis since 1987 using a sketch method. Sunspot group NOAA 9393 (or WKSO 0123) have been observed in March to early of April 2001. The region showed a rapid development during its appearance on the solar disk. The magnetic field of this active region evolved from a simple to a complex configuration (sunspot group type F) within a short period (days). WKSO recognized the sunspot group remains as type F (very active) as long as 8 days. Based on GOES data the active region released as much as 56 flares of type C (small), M (moderate) and X (large) to amount of 28, 24 and 3, respectively, during its appearance from 24 March to 4 April 2001. It is found that prior to X-class flare, there was an increase of activity in C and M-class flare. A rapid emergence of the active region may cause instability in magnetic configuration, and therefore released the magnetic energy in the form of solar flares.

Keywords*: Sunspot group, active region, solar flares, solar activity*

1. Introduction

Sunspot group resembles an intersection of a magnetic flux tube with the photosphere. It appears darker than surrounding photosphere as the temperature of sunspot lower compared to its surrounding. Based on observations and theoretical studies it is found that the magnetic field of sunspot group is the source of explosion energy at the Sun, namely flare.

Study on morphological evolution of sunspot group and its relation to the flare occurrences can be applied to practical use such as forecasting when a flare will occur as well as to understand its impact to the Earth's space environment. National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN) is developing a space early warning system for solar-originated disturbances (Setiahadi, 2006; Setiahadi *et.al*, 2006; Anwar, 2004; Anwar, 2007a). It is expected that this work will contribute to a better understanding on the evolution of sunspot group and its relation to flare occurrences, particularly X-class

flare, to support space early warning system at LAPAN (Setiahadi, 2007; Anwar, 2007b; Anwar, 2008).

Section 2 describes observation data used in this study. Data analysis is given in section 3 while section 4 provides the results and discussions.

2. Observation Data

In order to study the evolution of sunspot group NOAA 9393, we have utilized the sunspot data from Watukosek Aeronautics and Space Observing Site (WKSO) and flare data from Geostationary Operational Environmental Satellite (GOES).

2.1. Sunspot data

WKSO observes the Sun in optical wavelength using a refractor telescope of 30 cm in diameter. The image of the Sun is projected to a focal plane where the observer recognizes the appearance of sunspots. The sunspots are drawn manually and then are processed to determine their locations, sunspot types as well as their number within each sunspot group. WKSO sunspot type follows Zürich sunspot classification. A newly birth of sunspot is classify as type A. As the sunspot develops in number and area it evolves to type B, C, D, E and F (very active). After it reaches its maximum in area, the sunspot group gradually decays and finally forms a simple configuration as type J or H.

The results data reduction and analysis are recorded into ASCII format file. Querying a particular data directly from text files is not efficient. Therefore, we have developed a database system for WKSO sunspot data based on web technologies such as Apache web server, MySQL server, HTML and PHP (Anwar, 2004; Anwar 2008; Greenspan and Bulger, 2001). We created a Perl (Practical Extraction and Report Language) scripts to read the ASCII data and convert into SQL commands to insert the data into MySQL database (Medinets, 1998).

Sunspot group WKSO 0123 was recorded in WKSO observations from 24 March to 3 April 2001. The sunspot group evolved from a simple form in the beginning of observation and developed into type F on 27 March 2001 and remains the same type up to 3 April 2001. The change of sunspot type resembles the activity of the sunspot group. In the following days, the active region was getting closer to the solar limb and therefore can not be sketched.

2.2. Flare events data

Space Environment Center (SEC), National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA) catalogues flare events based on observations of GOES that orbits the Earth. The catalogue are available as ASCII file containing information on the date of observation, start time, end time as well maximum time of flare. The location of flare and its corresponding active region are also listed. The x-ray classification and x-ray intensity are available along with optical class when there is ground-based observation for the event. The flare events files are read by PHP scripts and recorded into MySQL database. By this way, we can easily query a particular data based on a category and a keyword.

3. Data analysis

As we utilize the sunspot data from WKSO that catalogues the sunspot group number in different way from NOAA does, a comparison is done for the coordinate of sunspot group in WKSO data and flare location in NOAA data to find their relationship. It is obvious that WKSO active region 0123 observed on 27 March 2001 at WKSO coordinate (Longitude, Latitude) is (22°,17°) corresponds to NOAA sunspot group 9393. Based on this fact, a query is performed to extract flares of type C, M and X as follows:

```
select * from flare where x_class='c' and noaa_number='9393'
```

to find C-class flare that occurred in NOAA active region 9393. To find flares of type M and X then change criteria x_flare='m' and x_flare='x', respectively. To count the number of flares of type C each day, for example, the following SQL command is used:

```
select obs_date, count(obs_date) from flare where x_class='c' and
noaa_number='9393' group by (obs_date)
```

We compared the sunspot group type and number of sunspots within sunspot group to number of flares of type C, M and X to find their relationship.

4. Results and discussions

In this section we describe the results of data analysis. Table 1 shows the active region of WKSO 0123 or NOAA 9393 during its appearance on the solar disk as sunspot type F. There was a significant change in the number of spots within the sunspot group from 27 March to 3 April 2001. This change indicates that sunspot group evolved very quickly from day to day.

Table 1. WKSO Sunspot group 0123 was classified as type F in 27 March to 3 April 2001.

JD	ObsDate	GroupNo	NumberOfSpot	type	CMDLon	Lat	Observer
2451995.5	2001-03-27	0123	73	F	22	17	AS
2451996.5	2001-03-28	0123	40	F	14.5	19	MR
2451997.5	2001-03-29	0123	65	F	-4	17	DR
2451998.5	2001-03-30	0123	78	F	-17.5	16.5	AS
2452000.5	2001-04-01	0123	120	F	-43.6	15.9	BS
2452001.5	2001-04-02	0123	49	F	-56	16.5	AS
2452002.5	2001-04-03	0123	17	F	-68.5	18.5	MR

It should be noted that the number of sunspots may contain an error as the observers have different skill in doing sketch. A significant error occurs when the sunspot group located close to the solar limb as a projection effect reduces significantly the area of sunspots and therefore the observer counts lesser sunspots. This may occurred on data taken on 2nd of April where the number of sunspots decreased from 120 in the previous day (1 March) to 49 on 2 March when the sunspot group located at -56° (West) from the central meridian (CMDLon). In the following day, the number of sunspots recorded to 17 when the sunspot located at -68.5^{o} (West).

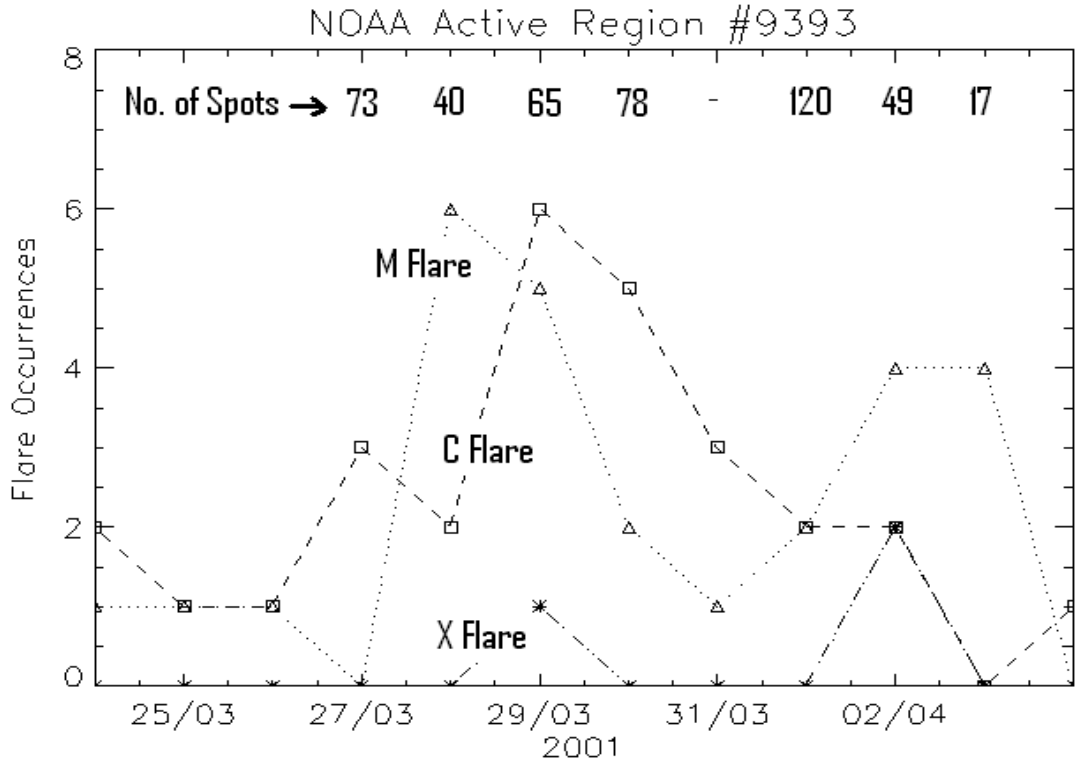


Figure 1. Comparison of flare occurrences of type C (square, dash line), M (triangle, dotted line), and X (star, dash-dot) at NOAA active region #9393.

Figure 1 shows a comparison of the number of flares occurred in NOAA active region 9393 starting from 24 March up to 4 April 2001. It is obvious that flares occurrence of type C and M is more frequent than X-class flare. It can be understood as the magnetic energy released during C or M class is smaller than that of X-class flare. The active region requires longer time to develop its magnetic energy to be large enough to be released as an X-class flare compared to the case of C or M class flare. The magnetic energy build-up can be achieved by increasing the number of spots within sunspot group and / or sunspot area caused by emerging of the existing flux tube as well as new flux tubes from beneath the photosphere. It can also be achieved by increasing the degree of twists of the magnetic flux tube of the active region caused by sunspot proper motions.

Based on WKSO observations, the active region developed to sunspot of type F since 27 March and remained the same type until 3 April 2001 (Table 1). This indicates the sunspot group NOAA 9393 is categorized as a 'very active' for at least 8 days. This

supported by the fact that there were 21 M-class and three X-class flares during the period of time. After an X-class flare, the activity (in this case the occurrence of C and M class flares) tends to decrease (Figure 2).

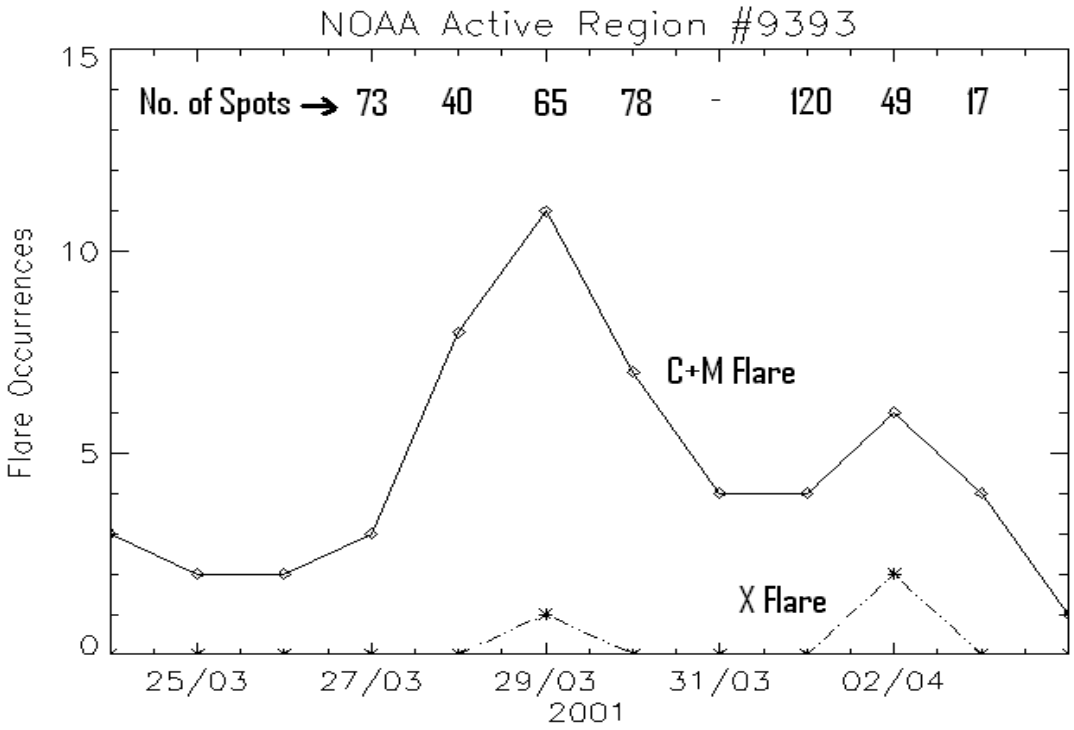


Figure 2. The flare occurrences of type C and M compared to X-class flare.

There was an increasing activity (C or M flare occurrences more frequent) prior to X-class flare as shown in Figure 2. An X-class flare occurred on 29 March at 09:57 UT and two X-class flares occurred on 2 April 2001 at 10:04 UT and 21:32 UT, respectively.

There was an increase of activity from 26 to 29 March before X-class flare that occurred on 29 March at 09:57 UT. There were six M-class flares and two C-class flares in 28 March, while in the previous day (27 March) there was no M-class flare and c-class flare are only three two events. By counting C and M-class flare together, the increase of activity prior to X-class flare is even obvious (Figure 2). Two X-class flare that occurred on 2 April 2001 were also preceded by the increase of M-class flares.

Table 2. Partial list of flares in active region NOAA 9393 during 29-30 March 2001.

obs_date	start_time	end_time	max_time	position	imp_optic	bright_optic	x_class	x_intensity	x_flux	station_name	noaa_number
2001-03-29	0508	0519	0514				C	55	3.1E-03	GOES	9393
2001-03-29	0957	1032	1015	N20W19	S	F	X	17	2.2E-01	GOES	9393
2001-03-29	1129	1139	1135	N15W12	S	F	M	21	1.1E-02	GOES	9393
2001-03-29	1235	1244	1239	N16W13	S	F	C	76	3.7E-03	GOES	9393
2001-03-29	1409	1422	1418				M	16	9.4E-03	GOES	9393
2001-03-29	1452	1505	1458				M	15	9.3E-03	GOES	9393
2001-03-29	1520	1533	1525	N14W15	S	F	M	12	8.7E-03	GOES	9393
2001-03-29	1733	1742	1737	N16W15	S	F	C	54	2.2E-03	GOES	9393
2001-03-29	1812	1820	1817	N15W17	S	F	C	41	1.9E-03	GOES	9393
2001-03-29	1826	1849	1841	N14W17	S	F	C	71	7.5E-03	GOES	9393
2001-03-29	2010	2023	2017	N14W19	S	F	C	69	4.2E-03	GOES	9393
2001-03-30	0107	0113	0110	N13W22	S	F	C	79	2.6E-03	GOES	9393
2001-03-30	0220	0233	0228	N14W22	S	F	C	75	5.2E-03	GOES	9393
2001-03-30	0346	0353	0350	N17W16	S	F	C	44	1.7E-03	GOES	9393
2001-03-30	0511	0520	0515				M	22	1.1E-02	GOES	9393
2001-03-30	0916	0936	0928	N17W20	S	F	M	10	1.0E-02	GOES	9393
2001-03-30	1504	1517	1510	N16W24	S	F	C	47	3.2E-03	GOES	9393
2001-03-30	1819	1853	1840	N17W26	S	F	C	47	8.9E-03	GOES	9393

It is also obvious that a large number of spots in sunspot group are not strongly related to the flare occurrences (number of flares) directly. Rather, a large number of spots can be though the active region is gaining its magnetic energy and therefore it may contribute in increasing a possibility to release a large flare (such as X-ray class).

We can conclude that the occurrences of C-class flares indicate the active region is developing its magnetic energy, while the increase of M-class flares might be an indication that the region has already had magnetic energy to be released as a moderate-

class flare. Importantly, it can also be though as a 'precursor' of X-class flare to be occurred in hours or days to come.

5. Concluding Remarks

We have studied the evolution of active region NOAA 9393 (or WKSO 0123) during its appearance on the solar disk. The region produced as much as 56 flare of type C, M and X, meaning that the active region can be called as a "flare-productive active region". It is found that prior to an X-class flare, there was an increase of activity or the occurrences of flare type C and M. By understanding the pattern of the increase of activity prior to an X-class flare, it might be used as a precursor for the occurrence of X-class flare, as a part of space early warning at LAPAN. This work will be explored further in the future.

Acknowledgements

We would like to thank to all observers at WKSO for continuous supports in observations. Flare events data were provided by Space Environment Center (SEC), NOAA, Boulder, Colorado, USA. This work uses the computing facility at Division of Applied Geomagnetism and Space Electromagnetism, National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN).

References

Anwar, B 2008 Development of Database System for Space Early Warning, Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi, Universitas Lampung, 17-18 November 2008.

Anwar, B. 2007a, Development of Database System for Searching Flares Associated with Coronal Mass Ejections, Prosiding Seminar Nasional Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia, 8 Desember 2007, Bandung.

Anwar, B. 2007b, Development of Database System for Studying the Sun-Earth System, Proceedings Science for Sustainable Humanosphere, International Collaborative Programs in Indonesia, LAPAN, July 25, 2007, Bandung.

Anwar, B. 2004, Development of Database System at Watukosek Solar Observatory, Proceedings of The International Conference on Statistics and Mathematics and its

Applications in Development of Science and Technology, Jurusan Matematika, FMIPA, UNISBA, Bandung October 4-6, 2004.

Choi, W, Kent A., Lea C., Prasad, G., Prasad G., Blank J and Cazzell S. 2000, Beginning PHP4, Wrox Press Ltd.

Greenspan, J. and Bulger, B, 2001, MySQL/PHP Database Applications, IDG Books India (P) Ltd.

Medinets, D. 1998, Perl 5 By Example, QUE Corporation.

Setiahadi, B, 2007 The Usage of Macroscopic Magnetohydrodynamics on Space-Weather and Space-Warnings at LAPAN Watuiosek 2007, Proceedings Science for Sustainable Humanosphere, International Collaborative Programs in Indonesia, LAPAN, July 25, 2007, Bandung.

Setiahadi, B. 2006, Development of Three-Dimensional Fully Radiative and Diffusive MHD Computer Code for Solar Activity and Planet-Proximity Space-Alert Usages, Proceedings of The First International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-1), MSMSSEA, June 19-21, 2006, Bandung.

Setiahadi, B., Sakurai, T., Miyazaki, H. And Hiei, E. 2006, Research on Magnetohydrodynamic Transport Phenomena in Solar-Terrestrial Space at LAPAN Watukosek 2006, Prosiding Seminar Nasional Sains Antariksa III, LAPAN, 15-16 November 2006, Bandung.

Penyelesaian *Asymmetric Travelling Salesman Problem* dengan Algoritma Hungarian dan Algoritma *Cheapest Insertion Heuristic*

Caturiyati[1]
[1]Staf Pengajar Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
E-mail: wcaturiyati@yahoo.com

ABSTRAK: Masalah *Asymmetric Travelling Salesman Problem* (ATSP) merupakan masalah mengoptimumkan rute perjalanan seorang pedagang yang membentuk sebuah sirkuit, dimana semua kota hanya disinggahi sekali saja, dan jalur pulang dan jalur pergi diantara dua kota belum tentu sama. Masalah ATSP dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma Hungarian, dimana masalah ATSP dipandang sebagai masalah Penugasan (*Assignment Problem*) dengan *n* pekerja diisi oleh satu orang pekerja saja, dan *n* pekerjaan diasumsikan sebagai *n* kota tujuan. ATSP juga dapat diselesaikan dengan Algoritma *Cheapest Insertion Heuristic* (CIH) dengan penelusuran siklus perjalanan dimulai dengan menghubungkan kota pertama dan kota terakhir, yang selanjutnya kota-kota persinggahan di insersi (disisipkan) dengan mencari rute terpendeknya.
Kata kunci: ATSP, masalah penugasan, Hungarian, CIH.

1. Pendahuluan

Travelling Salesman Problem (TSP) merupakan aplikasi Teori Graf dan menjadi bagian dari Riset Operasi. TSP dianggap sebagai kasus khusus dari masalah transportasi, dengan *supply* (persediaan), b_i, dan *demand* (permintaan), a_j, nya adalah satu untuk setiap *i* dan setiap *j*. TSP juga dapat dianggap sebagai kasus khusus dari masalah penugasan dengan *n* pekerja hanya akan diisi oleh satu pekerja saja dan *n* pekerjaan diasumsikan sebagai *n* kota tujuan, dan hasil optimum masalah penugasannya harus membentuk sirkuit, dalam arti pekerja ini harus mengunjungi *n*-1 kota dan kembali lagi ke kota asal.

TSP terdiri dari *Symmetric* TSP (STSP) dan *Asymmetric* TSP (ATSP). STSP adalah TSP dimana jalur pergi dan jalur pulang antara dua kota selalu sama. Sedangkan ATSP adalah TSP dimana jalur pergi dan jalur pulang tidak selalu sama. Yang selalu menjadi kendala pada STSP maupun ATSP adalah bagaimana mencapai solusi optimum yang langsung menghasilkan sirkuit?

Di dalam perkembangannya telah banyak algoritma dikembangkan untuk membantu menyelesaikan STSP maupun ATSP, terutama algoritma yang dikembangkan menjadi software komputer. Dorigo and Gambardella (1997) membahas *Ant Colony System* sebagai salah satu algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan TSP. Freisleben and Merz (1996), membahas TSP dengan Algoritma Genetik. Sierksma

(1994) membahas TSP dengan sirkuit Hamilton. Kusrini dan Istiyanto (2007) membahas algoritma *Cheapest Insertion Heuristic* untuk STSP. Dalam makalah ini akan dibahas penyelesaian ATSP dengan Algoritma Hungarian dan Algoritma *Cheapest Isertion*, yang dapat membantu penyampaian materi perkuliahan riset operasi, namun juga dapat dikembangkan menjadi software komputer.

2. ATSP Sebagai Masalah Penugasan

Masalah penugasan merupakan bentuk khusus masalah transportasi. Seperti masalah transportasi, masalah penugasan adalah suatu masalah optimasi meminimumkan, walaupun tidak menutup kemungkinan adanya masalah optimasi memaksimumkan. Kekhususan masalah penugasan adalah antara *origin* (sumber) dengan *destinasi* (tujuan) hanya akan dipenuhi oleh satu variabel basis saja yang nilainya satu, karena *supply* dan *demand* pada masalah penugasan bernilai 1 untuk setiap *origin* dan untuk setiap *destinasi*. Tabel berikut merupakan tabel transportasi untuk masalah penugasan:

	D_1	D_2	…	D_n	b_i
O_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
O_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	1
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
O_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}	1
a_j	1	1	…	1	

Keterangan tabel:

O_i : pelamar kerja ke-i, D_j : lowongan kerja ke-j, c_{ij} : gaji O_i bila diterima di D_j.

Model masalah penugasan pola minimum setimbang:

Mencari $x_{ij} \geq 0$ yang meminimalkan $f = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, dengan kendala: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i = 1, \forall i$

dan $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_j = 1, \forall j$, dan x_{ij} bernilai 0 atau 1.

Sedangkan pada ATSP diasumsikan: 1) terdapat sejumlah n lokasi, 2) tersedia jalur dari satu lokasi ke $n - 1$ lokasi lainnya, 3) tersedia ongkos c_{ij} dari lokasi ke-i ke lokasi ke-j pada jalur $i \rightarrow j$, 4) c_{ij} tidak selalu sama dengan c_{ji}, 5) seseorang harus berangkat dari suatu lokasi dan mengunjungi $n - 1$ lokasi lainya (masing-masing sekali) dan akhirnya kembali ke lokasi semula (sirkuit), 6) tujuan ATSP adalah menentukan sirkuit perjalanan yang meminimalkan ongkos total.

ATSP dapat dipandang sebagai masalah penugasan sebagai berikut: 1) Lokasi yang dikunjungi diberi label 1, 2, 3, …, *n*, 2) Pada ATSP *n* pekerja diisi 1 orang, sedangkan *n* pekerjaan merupakan *n* lokasi tujuan.

Sehingga tabel ATSP nya

	1	2	…	*n*	b_i
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	1
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}	1
a_j	1	1	…	1	

3. Penyelesaian ATSP dengan Algoritma Hungarian

1. Diusahakan supaya dalam setiap baris dan kolom ada *cost* nolnya; dengan cara mengurangi setiap baris (kolom) dengan $\min\{c_{ij}\}$ dalam setiap baris (kolom).
2. Diuji apakah ada *n* kotak dengan *cost* nol yang mewakili tiap-tiap baris dan kolom? Jika ada, berarti tabel sudah optimal (karena merupakan kombinasi nol yang paling murah) dan itulah penyelesaian optimal soal asli. Bila belum ada, diadakan lagi pengurangan *cost* (langkah 1).
   a. Pengujian dapat dilakukan dengan penutupan baris dan kolom yang memuat *cost* nol, sehingga banyaknya baris penutup sama dengan banyaknya baris atau kolom, jika demikian maka masalah sudah optimal.
   b. Jika belum, maka pada *cost* yang tidak tertutup garis, lakukan pengurangan dengan *cost* termurah yang tidak tertutup tadi (*r*), pada *cost* yang merupakan titik potong garis penutup baris dan kolom ditambahkan dengan *cost* termurah tadi. Lakukan uji optimum lagi.

Pengurangan baris dengan suatu cost, tidak mengubah solusi optimal sebab untuk p_1 konstan:

(i) $$f = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_j c_{1j}x_{1j} + \sum_j c_{2j}x_{2j} + \ldots + \sum_j c_{nj}x_{nj}\,.$$

(ii) $$\bar{f} = \sum_j (c_{1j} - p_1)x_{1j} + \sum_j c_{2j}x_{2j} + \ldots + \sum_j c_{nj}x_{nj}$$

$$= \sum_j c_{1j}x_{1j} + \sum_j c_{2j}x_{2j} + \ldots + \sum_j c_{nj}x_{nj} - p_1 \underbrace{\sum_j x_{1j}}_{1} = f - p_1.$$

Dengan kata lain, meminimalkan $f \Leftrightarrow$ meminimalkan $\bar{f}$.

Secara umum, jika baris ke i_0 dikurangi p_i, maka:

$$\bar{f} = \sum_j \sum_i (c_{ij} - p_{i_0})x_{ij} = \sum_j c_{1j}x_{1j} + \ldots + \sum_j (c_{i_0 j} - p_{i_0})x_{i_0 j} + \ldots + \sum_j c_{nj}x_{nj}$$

$$= \sum_j \sum_i c_{ij}x_{ij} - p_{i_0} \underbrace{\sum_j x_{i_0 j}}_{1} = f - p_{i_0}.$$

Sehingga setiap solusi yang mungkin untuk ATSP juga merupakan solusi masalah penugasan yang bersangkutan. Namun demikian masalah penugasan yang bersangkutan mungkin mempunyai solusi yang tidak membentuk sirkuit, yaitu yang tidak membentuk *fisibel* untuk solusi ATSP. Oleh karenanya ATSP diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

1. Ubahlah ATSP menjadi masalah penugasan seperti pada tabel di atas, dengan c_{ii} = bilangan bulat positif yang nilainya besar, sebut M.

2. Selesaikan masalah penugasan tersebut dengan algoritma Hungarian.

3. Jika solusi masalah penugasan tersebut membentuk sirkuit, maka solusi ini merupakan solusi optimal ATSP.

4. Jika solusi masalah penugasan tersebut belum membentuk sirkuit, misalnya diperoleh hasil optimal

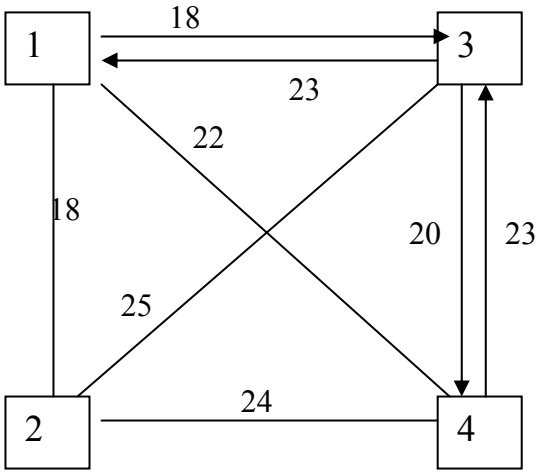
$1 \rightarrow 3$ $\quad$ $1 \leftrightarrow 3$

$3 \rightarrow 1$ $\quad$ $2 \leftrightarrow 4$

$2 \rightarrow 4$ $\quad$ $4 \rightarrow 2$

maka dilakukan sebagai berikut: pada tabel awal c_{13} atau c_{31} atau c_{24} atau c_{42} diganti dengan M, kemudian diselesaikan lagi dengan algoritma *Hungarian*, cara ini disebut "*Branch and Bound method*" atau B n B.

4. Contoh 1 : Diberikan diagram berikut ini :



Masalah pada diagram adalah masalah ATSP, dengan 4 kota tujuan. Pemodelan masalah ATSP tersebut adalah meminimalkan

$$f(x_{ij}) = 18x_{12} + 18x_{21} + 18x_{13} + 23x_{31} + 22x_{14} + 22x_{41} + 25x_{23} + 25x_{32} +$$
$$24x_{24} + 24x_{42} + 20x_{34} + 23x_{43}$$

Terhadap kendala

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$
$$x_{ij} \geq 0, \forall i = 1,2,3,4, \forall j = 1,2,3,4 .$$

Tabel ATSP tersebut adalah

	1	2	3	4	b_i
1	…	18	18	22	1
2	18	…	25	24	1
3	23	25	…	20	1
4	22	24	23	…	1
a_j	1	1	1	1	4

$c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44}$ diisi dengan M. Sehingga tabel *cost* ATSP nya adalah

M	18	18	22	-18
18	M	25	24	-18
23	25	M	20	-20
22	24	23	M	-22

Pada iterasi pertama ini, baris I, II, III, IV berturut-turut dikurangi dengan 18, 18, 20, 22. Diperoleh tabel berikut

M-18	0	0	4
0	M-18	7	6
3	5	M-20	0
0	2	1	M-22

Pada tabel cost, terlihat untuk setiap baris dan setiap kolomnya, sudah terdapat nol yang mewakili, sehingga dilakukan uji optimum dengan penutupan garis. Diperoleh banyaknya garis penutup ada $3 < n$ (banyaknya baris), tabel belum optimum. Pada *cost* tak tertutup garis, $r = 1$. Sehingga diperoleh tabel berikut:

M-17	0	0	5
0	M-19	6	6
3	4	M-21	0
0	1	0	M-22

Pada tabel terlihat uji optimum dengan penutupan garis, menghasilkan banyaknya garis penutup sebanyak $4 = n$, sehingga tabel optimum. Dengan pemilihan *cost* nol pada tabel berikut:

M-17	0√	0	5
0√	M-19	6	6
3	4	M-21	0√
0	1	0√	M-22

Pemilihan cost nol pada tabel optimum, sama maknanya dengan memilih variabel basis yang akan mewakili masalah ATSP nya, dengan urutan pemilihan $x_{34} - x_{21} - x_{43} - x_{12}$, seperti terlihat pada tabel ATSP berikut

	1	2	3	4	b_i
1	M	18 1	18	22	1
2	18 1	M	25	24	1
3	23	25	M	20 1	1
4	22	24	23 1	M	1
a_j	1	1	1	1	4

Namun hasil optimum tersebut belum membentuk sirkuit. Yaitu 1 – 2 – 1 dan 3 – 4 – 3. Sehingga perlu dilakukan B n B pada c_{12} atau c_{21} atau c_{34} atau c_{43}.

Pada makalah ini akan dilakukan B n B pada c_{12}. Sehingga tabel *cost* awal ATSP nya menjadi

M	M	18	22	-18
18	M	25	24	-18
23	25	M	20	-20
22	24	23	M	-22

Karena kolom II belum memuat *cost* nol, maka kolom II dikurangi dengan $\min\{c_{i2}\}$ $\forall i = 1,2,3,4$.

M-18	M-18	0	4
0	M-18	7	6
3	5	M-20	0
0	2	1	M-22

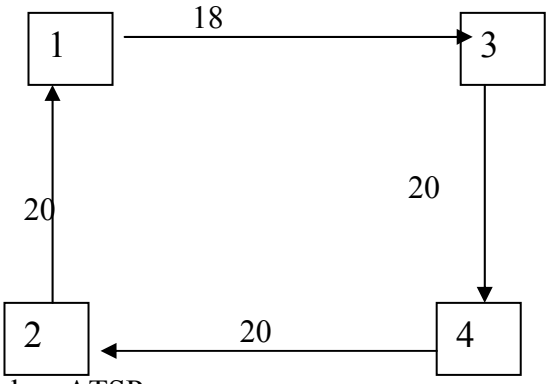
-2

M-18	M-20	0	4
0	M-20	7	6
3	3	M-20	0
0	0	1	M-22

Dengan uji optimum penutupan garis, diperoleh tabel *cost* sudah optimum. Pemilihan *cost* nol nya adalah

M-18	M-20	0√	4
0√	M-20	7	6
3	3	M-20	0√
0	0√	1	M-22

Menghasilkan variabel basis terpilih $x_{34} - x_{13} - x_{21} - x_{42}$. Sirkuit yang terbentuk adalah



Tabel lengkap ATSP nya

	1	2	3	4	b_i
1	M	18	18 1	22	1
2	18 1	M	25	24	1
3	23	25	M	20 1	1
4	22	24 1	23	M	1
a_j	1	1	1	1	4

dengan $f_{\min} = 18 + 20 + 24 + 18 = 80$.

5. Penyelesaian ATSP dengan Algoritma Cheapest Insertion Heuristic (CIH)

1. Penelusuran dimulai dari sebuah kota pertama yang dihubungkan dengan sebuah kota terakhir.
2. Dibuat sebuah hubungan *subtour* antara 2 kota tersebut. Yaitu suatu perjalanan dari kota pertama dan berakhir di kota pertama, misal (1,3) → (3,2) → (2,1).
3. Ganti salah satu arah hubungan (*arc*) antara dua kota dengan kombinasi dua *arc*, yaitu *arc*(*i*,*j*) dengan *arc*(*i*,*k*) dan *arc*(*k*,*j*), dengan *k* diambil dari kota yang belum masuk *subtour* dan dengan tambahan jarak terkecil, yang diperoleh dari perhitungan *cost* dengan rumus $d_k = c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$.
4. Ulangi langkah 3 sampai seluruh kota masuk dalam *subtour*.

6. Contoh 2: Diberikan diagram ATSP pada Contoh 1. ATSP tersebut akan diselesaikan dengan Algoritma CIH sebagai berikut:

Tabel jarak antar kota pada Contoh 1 adalah

Kota Asal	Kota Tujuan	Jarak
1	2	18
1	3	18
1	4	22
2	3	25
2	4	24
3	1	23
3	4	20
4	3	23

Untuk mencari jarak terpendek yang melalui 4 kota tersebut diambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. Ambil perjalanan dari kota 1 ke kota 4.
2. Buat *subtour* (1,4) → (4,1).
3. Buat tabel yang menyimpan kota yang bisa di insersi (disisipkan) dalam *subtour* beserta tambahan jaraknya, seperti pada tabel berikut

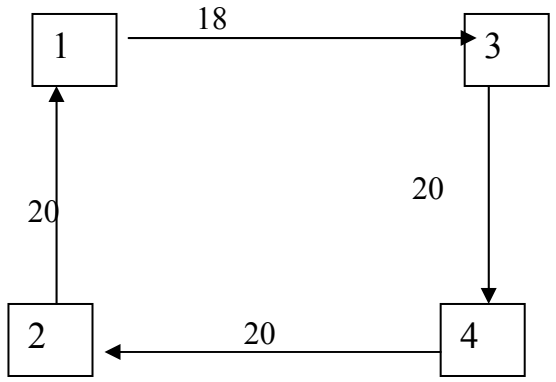
***Arc* yang akan diganti**	***Arc* yang akan ditambahkan**	**Tambahan jarak**
(1,4)	(1,2) – (2,4)	$c_{12} + c_{24} - c_{14} = 20$
(1,4)	(1,3) – (3,4)	$c_{13} + c_{34} - c_{14} = 16$
(4,1)	(4,2) – (2,1)	$c_{42} + c_{21} - c_{41} = 20$
(4,1)	(4,3) – (3,1)	$c_{43} + c_{31} - c_{41} = 24$

   Pada tabel terlihat, tambahan jarak terkecil diperoleh apabila: *Arc*(1,4) diganti dengan *arc* (1,3) dan *arc*(3,4). Maka diperoleh *subtour* baru yaitu (1,3) → (3,4) → (4,1).
4. Buat tabel yang menyimpan kota yang bisa di insersi (disisipkan) dalam *subtour* beserta tambahan jaraknya, seperti pada tabel berikut

Arc yang akan diganti	*Arc* yang akan ditambahkan	Tambahan jarak
(1,3)	(1,2) – (2,3)	$c_{12} + c_{23} - c_{13} = 25$
(3,4)	(3,2) – (2,4)	$c_{32} + c_{24} - c_{34} = 29$
(4,1)	(4,2) – (2,1)	$c_{42} + c_{21} - c_{41} = 20$

Pada tabel terlihat, tambahan jarak terkecil diperoleh apabila: Arc(4,1) diganti dengan arc (4,2) dan arc(2,1). Maka diperoleh *subtour* baru yaitu (1,3) → (3,4) → (4,2) → (2,1).

Karena semua kota sudah termasuk dalam *subtour* terakhir maka diperoleh sirkuit ATSP dengan jarak tempuhnya $c_{13} + c_{34} + c_{42} + c_{21} = 80$. Dengan sirkuitnya adalah



7. Kesimpulan

Algoritma Hungarian dan Algoritma CIH dapat digunakan untuk menyelesaikan ATSP. Penyelesaian ATSP dengan kedua algoritma apabila dikerjakan secara manual dengan jumlah kota kurang dari 10 masih mungkin untuk dilakukan, dan masing-masing algoritma mempunyai kelebihan serta kekurangan. Algoritma Hungarian memperlihatkan perhitungan yang lebih sederhana, karena menggunakan matriks *cost*, dan kesalahan perhitungan dapat diminimalkan.

Daftar Pustaka

Dorigo, M and Gambardella, L.M., 1997, *Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Travelling Salesman Problem*, Accepted for publication in the IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 1, No.1, 1997. In press. ftp://iridia.ulb.ac.be/pub/mdorigo/journals/IJ.16-TEC97.A4.pdf diakses pada tanggal 10 Nopember 2008

Freisleben, B and Merz, P., 1996, *New Genetic Local Search Operators for the Travelling Salesman Problem*. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.113.9500 diakses pada tanggal 10 Nopember 2008

Kusrini dan Istiyanto, J.E., 2007, *Penyelesaian Travelling Salesman Problem dengan Algoritma Cheapest Insertion Heuristic dan Basis Data*, JURNAL INFORMATIKA, Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Kristen Petra, Vol. 8, No. 2, Nopember 2007, 109-114. http://puslit2.petra.ac.id/ejournal/index.php/inf/article/shop/16775/16755 diakses pada tanggal 10 Nopember 2008

Sierksma, G., 1994, *Hamiltonicity and the 3-Opt Procedure for the Travelling Salesman Problem*, Jurnal Applicationes Mathematicae, 22.3 (1994), pp. 351 – 358. http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/zm/zm22/zm2235.pdf diakses pada tanggal 10 Nopember 2008

Studi Model Variasi Harian Komponen H Berdasarkan Pola Hari Tenang

Habirun
Pusat Pemanfaatan Sains Antariksa, LAPAN
Bidang Aplikasi Geomagnet dan Magnet Antariksa
Jl. Dr. Junjunan No. 133 Bandung 40173

Abstrak

Studi model karakteristik variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang akibat pengaruh berbagai aktivitas gangguan. Terutama aktivitas gangguan jangka panjang akibat dari gaya gravitasi luar, terutama seperti dari matahari dan bulan, dapat menggerakan atmosfer bumi, tetapi sumber energi terbesar bagi penggerak udara adalah radiasi matahari. Sehubungan sejumlah besar energi dilepaskan oleh matahari dalam bentuk radiasi gelombang elektromagnetik ke seluruh antariksa. Radiasi yang dilepaskan tersebut menjalar melalui ruang antar planet dan sebagian kecil sampai ke bumi, memasuki atmosfer atas dan seterusnya hingga permukaan tanah dan laut. Dengan ungkapan di atas maka variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang dalam selang waktu jangka pendek berfluktuasi dan berosilasi. Osilasi variasi harian komponen H pola hari tenang tersebut akibat dampak pengaruh gelombang pasut diurnal dan gelombang pasut semi diurnal. Berdasarkan fluktuasi dan osilasi variasi harian komponen H tersebut maka dapat digunakan sebagai dasar studi penentuan model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang, menggunakan metode time series analisis dan Harmonik analsis. Hasil studi model variasi harian komponen H pola hari tenang dari kedua metode menunjukan bahwa akurasi model menggunakan metode time series analisis sekitar 95 %, dengan galat terkecil sebesar 1.628 nT dan terbesar sekitar 2.216 nT. Sedangkan menggunakan metode analisis Harmonik sekitar 80 % dengan galat terkecil sebesar 4.828 nT dan terbesar sekitar 8.179 nT.

Kata kunci : Studi model, variasi harian komponen H, hari tenang, osilasi, Harmonik, time series.

1. PENDAHULUAN

Dengan karekteristik variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang menggunakan model yang dibangun berdasarkan dua metode yakni analisis Harmonik dan metode time sries analisis. Identifikasi model dilakukan berdasarkan data variasi harian komponen H pola hari tenang stasiun pengamata geomagnet Biak melalui pola data pengamatan. Sedangkan model yang dibangun menggunakan metode analisis Harmonik dikaitkan dengan dampak gelombang pasut atmosfer akibat variasi harian komponen H berperiode 12 jam, 24 jam dan periode harmoniknya. Kemudian data yang

sama variasi harian komponen H pola hari tenang sesuai pola data pengamatan dibangun kembali menggunakan metode time series analisis. Hasil studi yang dikemukakan dalam uraian ini hanya ditunjukan pola dinamika variasi harian komponen geomagnet pola hari tenang dari data pengamatan. Terutama variasi harian komponen H pada saat membentuk pola-pola yang dapat diidentifikasi dengan kedua metode di atas. Sedangkan variasi harian komponen H geomagnet yang tidak mempunyai pola tertentu khususnya pada kondisi variasi harian komponen H geomagnet dipengaruhi dampak gangguan badai geomagnet modelnya tidak diidentifikasi. Hasil analisis model variasi harian komponen H pada uraian ini dikemukakan studi model variasi harian komponen H geomagnet berdasarkan pola variasi hari tenang. Pola variasi harian komponen H geomagnet yang diidentifikasi modelnya terbatas pada variasi harian komponen H yang mempunyai pola tetap.

Hasil-hasil analisi model yang diungkapkan dalam uraian ini terbatas pada penggunaan metode analisis Harmonik dengan dikaitkan dampak gelombang pasut atmosfer dan time series analisis berdasarkan pola data pengamatan. Data yang digunakan untuk identifikasi model variasi harian komponen H berdasarkan pola variasi harian komponen H pola hari tenang. Sedangkan pendekatan model menggunakan metode time series analisis berdasarkan pola data pengamatan terhadap urutan waktu.

2. HASIL STUDI MODEL VARIASI HARIAN KOMPONEN H GEOMAGNET

Hasil analisis identifikasi model variasi harian komponen H geomagnet menggunakan kedua metode di atas dapat diuraikan pada bagian ini. Dengan dimulai dari hasil identifikasi model variasi harian komponen H pola hari tenang yang berosilasi menggunakan analisis Harmonik berdasarkan dampak radiasi matahari. Kemudian dilanjutkan dengan model variasi harian komponen H pola hari tenang dari pengamatan penggunaan metode time series analisis.

2.1.Studi Model Variasi Harian Komponen H Menggunakan Analisis Harmonik

Sehubungan variasi harian komponen H sangat kompleks dan berfluktuasi maka analisis model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang digunakan analisis Harmonik dengan tidak memperhatikan pola-pola kondisi yang ekstrim. Berarti yang diperhatikan dan dianalisis adalah kondisi-kondisi yang berperiodik, sedangkan

pola-pola yang ekstrim dalam analisis ini dianggap sebagai gangguan. Oleh karena itu akurasi model akan tergantung dari kestabilan pola hari tenang data pengamatan yang diperoleh. Metode analisis Harmonik variasi harian komponen H pola hari tenang yang digunakan adalah

$$Y_t = A_o + \sum_{n=1}^{l} A_n Cos(\tfrac{n\omega t}{T_p} - P_n) + \varepsilon_t$$

.... (2.1)

$$Y_t = A_o + \sum_{n=1}^{l} a_n Cos(\tfrac{n\omega t}{T_p}) + \sum_{n=1}^{l} b_n Sin(\tfrac{n\omega t}{T_p}) + \varepsilon_t$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

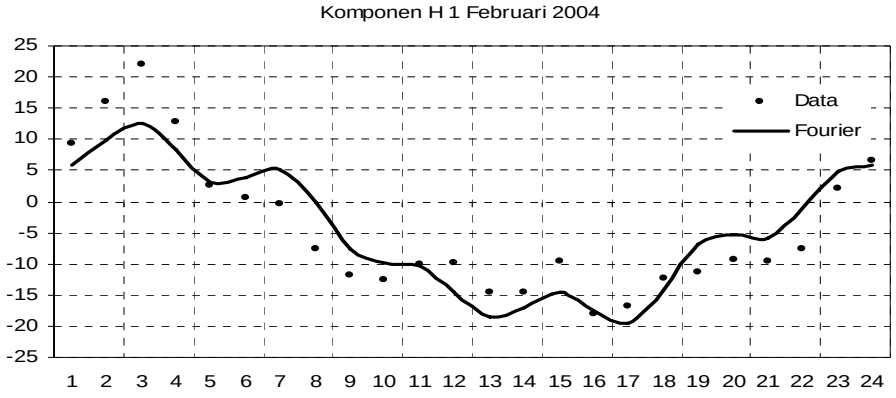
$$P_n = \arctan\left(-\tfrac{b_n}{a_n}\right) \quad , \text{a} > 0$$

Hasil studi identifikasi model variasi harian komponen H pola hari tenang dengan menggunakan analisis Harmonik persamaan (2.1) dinyatakan pada gambar 2.1, merupakan perbandingan antara data pengamatan terhadap model yang dinyatakan data 1 Februari 2004. Sedangkan perbandingan antara data pengamatan terhadap model variasi harian komponen geomagnet selama bulan Februari 2004 dapat dilihat pada gambar 2.2. Pada gambar 2.2 terlihat suatu fluktuasi data variasi harian komponen H geomagnet yang sangat kompleks pada pertengahan bulan Februari 2004 akibat adanya peristiwa badai magnet. Dengan data solar wind yang membesar naik dan variasi komponen H yang menurun akibat tekanan angin matahari (solar wind) yang sangat kuat (lihat gambar 2.3) sehingga model variasi harian komponen H terutama menggunakan metode analisis Harmonik (lihat gambar 2.2) tidak dapat mengikuti fluktuasi variasi harian komponen H pada saat badai magnet Meloni at al (2005).

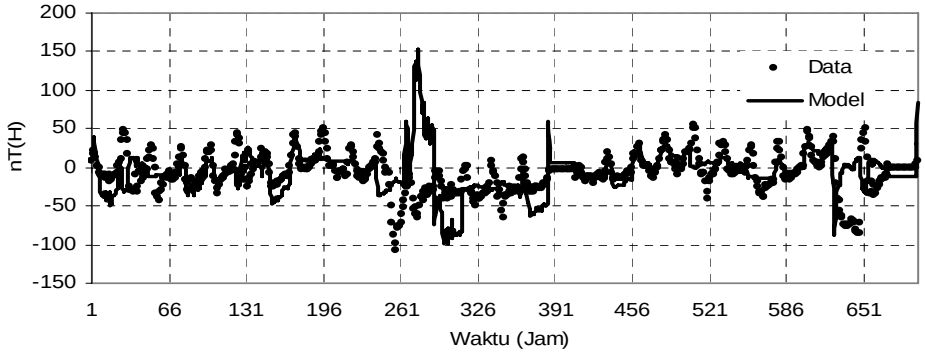
Fluktuasi variasi harian komponen H geomagnet pertengahan bulan Februari 2004 pada gambar 2.2 menunjukan dampak badai magnet. Akibat meningkatnya kecepatan solar wind yang bertiup menuju kepermukaan bumi yang dinyatakan angin matahari. Peningkatan kecepatan solar wind tersebut menyebabkan penurunan variasi harian komponen H pada saat terjadinya badai magnet. Oleh karena itu identifikasi model variasi harian komponen H menggunakan analisis Harmonik, tetapi model ini pada saat terjadi badai magnet menyebabkan akurasinya penurunan. Jadi penggunaan model variasi harian komponen H geomagnet melalui analisis Harmonik dapat

digunakan pada saat tidak terjadi badai magnet. Kalau terjadi badai magnet model variasi harian komponen H geomagnet pada saat ini masih proses dalam kajian.

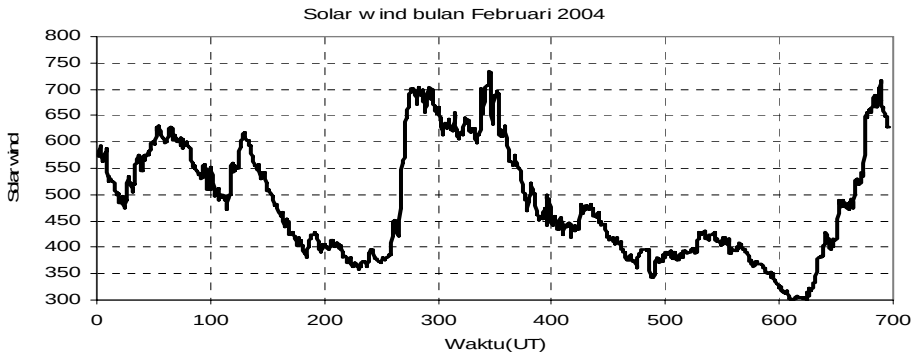
Selanjutnya, data variasi harian komponen H pola hari tenang yang dinyatakan pada gambar 2.1 dan gambar 2.2 di atas kemudian dianalisis kembali dengan menggunakan metode time series analisis dan hasilnya dapat dilihat pada gambar 2.4 dan gambar 2.5. Sebelum dilanjutkan analisis studi model variasi harian komponen H pola hari tenang terlebih dahulu diungkapkan metode time series analisis yang diuraikan pada bagian 2.2. Dengan syarat-syarat penggnaan metode time series analisis dapat dilahat pada makalah (Habirun, 2007)



Gambar 2.1: Perbandingan antara model variasi harian komponen H pola hari tenang terhadap data pengamatan dari stasiun pengamat geomagnet Biak 1 Februari 2004 menggunakan analisis Harmonik



Gambar 2.2: Perbandingan antara model variasi harian komponen H pola hari tenang terhadap data pengamatan dari stasiun pengamat geomagnet Biak bulan Februari 2004 menggunakan analisis Harmonik



Gambar 2.3: Data variasi harian kecepatan solar wind (angin matahari) pada bulan Februari 2004

2.2. Studi Model Variasi Harian Komponen H Menggunakan Analisis Time Series

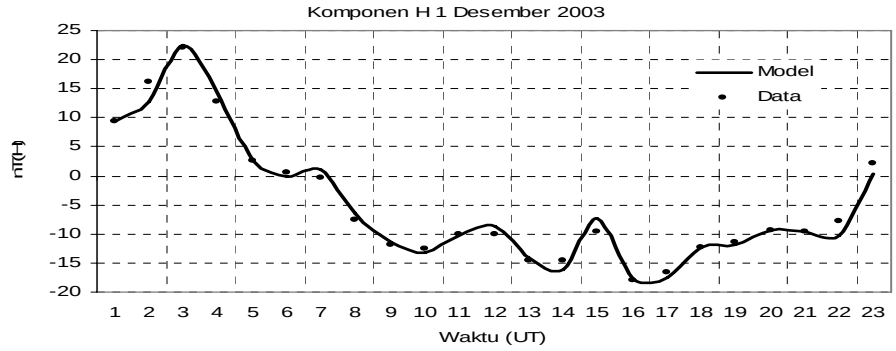
Prediksi menggunakan model-model time series analisis pada variasi harian komponen geomagnet umumnya tidak mengikuti kondisi gelombang pasut atmosfer, yang dianalisis melalui model analisis Harmonik maupun model hubungan sebab akibat atau hubungan qausal. Tetapi model time series analisis mengikuti perilaku data pengamatan variasi harian geomagnet cukup dinamis apabila dibandingkan terhadap model analisis Harmonik yang dibicarakan sebelumnya. Metode Analisis Time Series dapat dinyatakan secara umum dijabaran sebagai berikut;

$$X(t) = \phi_1 X(t-1) + \phi_2 X(t-2) + \theta_1 U(t-1) + \theta_2 U(t-2) + U(t) \quad , t = 1, 2, 3, \ldots \quad (2.2)$$

dengan ϕ dan θ konstanta-konstanta model serta U(t) galat model pada waktu ke-t. Perhitungan konstanta-konstanta model persamaan (2.2) menggunakan matriks korelasi dari metode analisis time series (Habirun, 2007).

Untuk lebih jelasnya penggunaan metode pada persamaan (2.2) digunakan data variasi harian komponen H pola hari tenang dari stasiun pengamat geomagnet Biak 1Desember 2004 dan hasilnya dapat dilihat pada gambar 2.4. Hasil analisis model yang dinyatakan pada gambar 2.4 menunjukan akurasi model variasi harian komponen H pola hari tenang sangat memuaskan dan karakteristik data variasi harian berdasarkan data variasi harian komponen H pola hari tenang dari stasiun pengamat geomagnet Biak. Kajian hasil studi yang dinyatakan pada gambar 2.2 masih diperlukan suatu analisis yang lebih akurat dalam fluktuasi penurunan sekitar 110 nT tersebut. Dan kajian itu

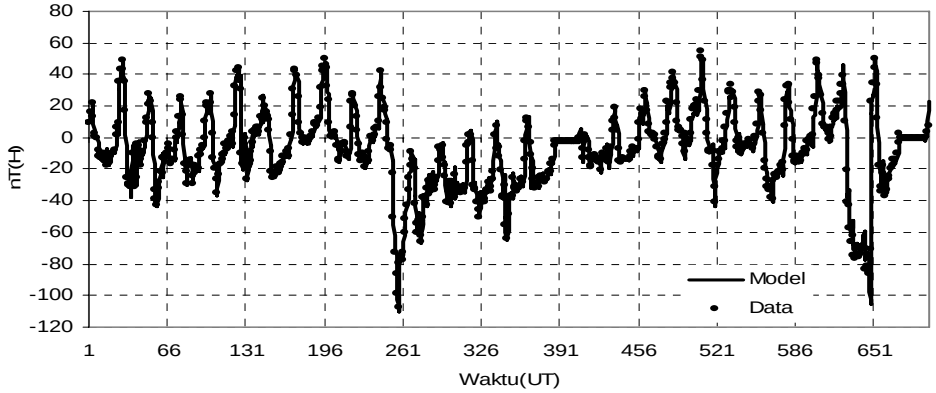
rupanya mengarah pada model-model time series, yang digunakan untuk studi model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang yang lebih stabil, mengingat model time series analisis bila digunakan untuk memprediksi variasi harian komponen H pada umumnya tidak stabil. Karena dipengaruhi pergerakan acak berjalan (*random walk*) maka dari itu diperlukan suatu bobot yang menstabilkan model sehingga dapat mengikuti karakteristik variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang dari data pengamatan. Pembobotan model tersebut dilakukan melalui variasi data pengamatan terhadap rata-rata, sehingga bila terjadi fluktuasi maka fluktuasi tersebut dapat dieliminasi oleh bobot yang terbentuk. Dengan demikian model yang dinamis tersebut dapat digunakan untuk memprediksi variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang pada setiap kondisi.



Gambar 2.4: Perbandingan antara model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang terhadap data pengamatan 1 Desember 2003 dari stasiun pengamat geomagnet Biak dengan menggunakan metode Analisis Time Series.

Berkaitan dengan uraian di atas maka pada uraian ini dikemukakan hasil studi model variasi harian komponen H pola hari tenang menggunakan analisis time series dan hasilnya dapat dilihat pada gambar 2.4. Hasil studi model pada gambar 2.4 berdasarkan data yang sama terhadap hasil studi yang dinyatakan pada gambar 2.2. Dari kedua hasil studi model tersebut menunjukan bahwa model variasi harian komponen H pola hari tenang yang lebih akurat adalah menggunakan metode time series analisis. Karena studi madel menggunakan metode time series analisis berdasarkan karakteristik variasi harian komponen H pola hari tenang melalui perilaku penyebaran data pengamatan variasi harian komponen H pola hari tenang. Sedangkan studi model menggunakan analisis Harmonik melalui karakteristik variasi harian

komponen H pola hari tenang hanya berdasarkan akibat dampak gelombang pasut diurnal berperiode 24 jam dan gelombang pasut semi diurnal berperiode 12 jam. Dengan tidak memperhitungkan fluktuasi ekstrim variasi harian komponen H pola hari tenang dari data tengamatan. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa akurasi model menggunakan metode analisis Harmonik lebih rendah dibandingkan terhadap akurasi model menggunakan metode time series analisis.



Gambar 2.5: Perbandingan antara model variasi harian komponen geomagnet pola hari tenang terhadap data pengamatan dari stasiun pengamata geomagnet Biak bulan Februari 2004

Perlu diketahui bahwa studi model variasi harian komponen H pola hari tenang yang diuraikan di atas bertujuan untuk digunakan memprediksi variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang atau memprediksi variasi harian komponen H geomagnet. Karena data dampak variasi harian komponen H ini cukup banyak yang memerlukan, terutama berkaitan dengan bidang eksplorasi geofisika dan survey geologi serta dapat melengkapi akurasi model-model dari penelitian ionosfer dan atmosfer. Karena dampak fluktuasi variasi harian komponen H geomagnet ini menunjukan suatu indikasi pengaruh gangguan yang berasal dari eksternal maupun internal mempengaruhi medan magnet bumi maka dampak gangguan tersebut sehingga peneliti yang terkait sangat diperlukan. Seperti peneliti-peneliti yang bergerak dibidang komunikasi, navigasi dan penggunaan GPS (Global Possioning System) untuk penentuan posisi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

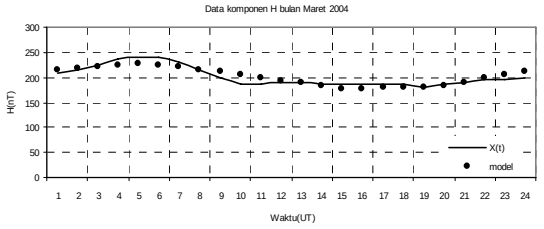
Dari ungkapan pada pasal 2 di atas maka dalam bagian ini, semua hasil-hasil studi model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang menggunakan kedua metode masing-masing dilakukan evaluasi. Hasil evaluasi akurasi model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang melalui rata-rata dan galat model dari kedua metode dapat dilihat pada tabel 3.1. Dengan berdasarkan data variasi harian komponen H pola hari tenang dari stasiun pengamat geomagnet Biak mulai bulan Maret 2004 sampai dengan bulan September 2004.

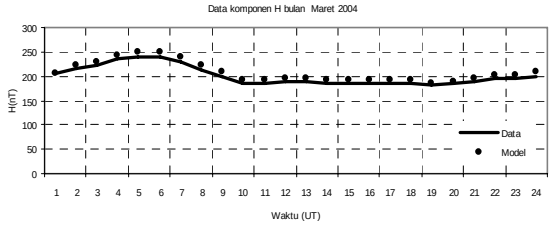
Tabel 3.1: EVALUASI AKURASI MODEL VARIASI HARIAN KOMPONEN H GEOMAGNET TAHUN 2004 MELALUI HASIL ANALISIS RATA-RATA DAN GALAT DARI STUDI MODEL KEDUA METODE

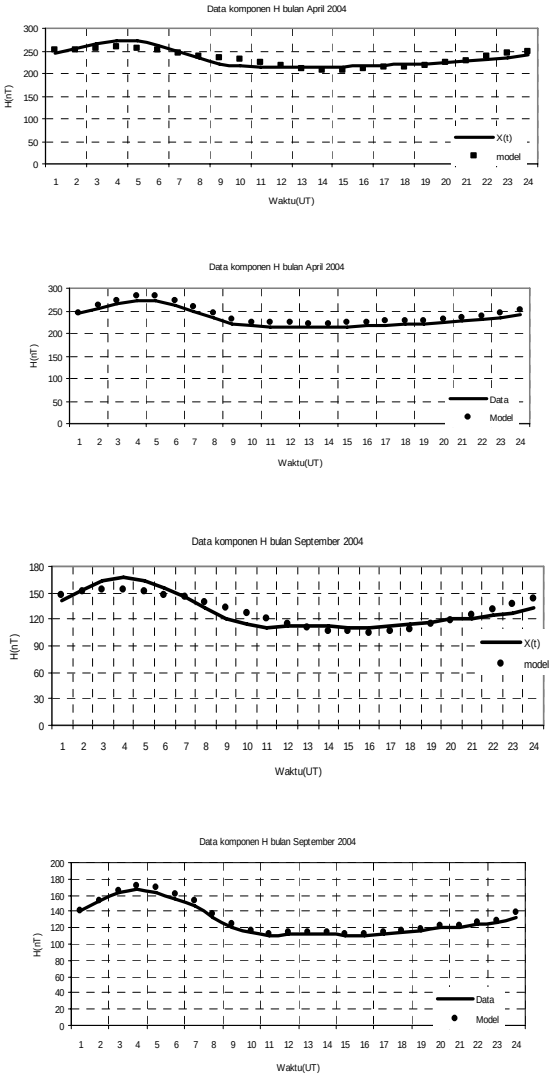
No	Model / Bulan	Analisis Harmonik		Rata-rata Data	Analisis Time Series	
		Rata-rata	Galat		Rata-rata	Galat
1	2	3	4	5	6	7
1	Maret	201.244	6.315	201.250	207.913	2.216
2	April	231.741	8.164	323.793	241.397	2.184
3	Mei	240.701	4.828	240.708	249.341	2.054
4	Juni	225.659	6.727	225.667	234.163	2.114
5	Juli	209.785	6.388	209.792	217.263	1.925
6	Agustus	127.910	6.780	127.917	129.945	1.628
7	September	129.034	8.179	129.042	131.680	1.761

Dengan hasil evaluasi akurasi model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang pada tabel 3.1 di atas menunjukan bahwa akurasi model menggunakan metode time series analisis lebih akurat dari pada akurasi model menggunakan metode analisis Harmonik, lihat perbandingan galat model pada kolom 4 dan kolom 7. Berarti fluktuasi model time series analisis mengikuti dan mendekati variasi harian komponen H geomagnet dari data pengamatan. Sedangkan model variasi harian komponen H menggunakan metode analisis Harmonik tidak begitu mendekati variasi harian komponen H dari data pengamatan (lihat gambar 2.5). Dengan galat model variasi harian komponen H pola hari tenang menggunakan metode analisis Harmonik yang terkecil sebesar 4.828 nT dan terbesar sekitar 8.179 nT. Sedangkan galat model variasi harian komponen H pola hari tenang menggunakan metode time series analisis yang diperoleh adalah terkecil sebesar 1.628 nT dan terbesar sekitar 2.216 nT.

Melalui hasil analisis identifikasi model variasi harian komponen H geomagnet pola hari tenang menggunakan metode analisis Harmonik secara umum dapat digunakan untuk memprediksi variasi harian komponen H pola hari tenang dengan akurasi sekitar 80 %. Sedangkan identifikasi model variasi harian komponen H pola hari tenang menggunakan metode time series analisis dan akurasinya sekitar 95 %. Dari kedua hasil identifikasi model tersebut secara umum masing-masing metode mempunyai keunggulan dan kelemahan sehingga model prediksi tidak dapat dipergunakan sepenuhnya untuk memprediksi. Terutama identifikasi model menggunakan analisis Harmonik dapat digunakan untuk memprediksi pada kondisi variasi harian komponen H stabil dan mempunyai pola yang tetap. Sedangkan identifikasi model menggunakan time series analisis dapat digunakan memprediksi pola-pola yang sangat dinamis dan akurasinya tergantung pada pola data sebelumnya sehingga bila data polanya berubah maka tidak akan mengikuti pola yang berubah itu.







Gambar 2.5: Perbandingan antara model variasi harian komponen H pola hari tenang menggunakan metode analisis Harmonik (panel kiri) dan menggunakan metode time series analisis (panel kanan)

4. KESIMPULAN

Sehubungan penggunaan kedua metode yang diuraikan pada makalah ini, sehingga diperoleh akurasi model variasi harian komponen H pola hari tenang menggunakan metode analisis Harmonik dengan galat model yang terkecil sebesar 4.828 nT dan terbesar sekitar 8.179 nT. Selain itu model variasi harian komponen H pola hari tenang dapat pula digunakan untuk memprediksi variasi harian komponen H pola hari tenang. Dengan akurasi memprediksi sekitar 80 %, hasil prediksi mendekati barisan penyebaran data pengamatan. Kelemahan penggunaan metode ini pada saat

variasi harian komponen H pola hari tenang dipengaruhi badai magnet akurasi model menurun, demikian pula dipengaruhi gangguan acak berjalan. Sedangkan penggunaan metode time series analisis, diperoleh akurasi model variasi harian komponen H pola hari tenang yang dinyatakan galat model yang terkecil sebesar 1.628 nT dan terbesar sekitar 2.216 nT. Demikian pula digunakan untuk memprediksi variasi harian komponen H pola hari tenang, dengan akurasi memprediksi sekitar 95 % hasil prediksi mendekati penyebaran data pengamatan. Kelemahan metode time series analisis yang digunakan pada data variasi harian komponen H pola hari tenang, model variasi hari komponen H pola hari tenang mengikuti proses random walk (acak berjalan) tidak dapat dilakukan

DAFTAR PUSTAKA

Habirun, Titiek Setiawati, Yaya Karyanto., (2007). "Pengembangan Model Prediksi Indeks K Geomagnet". *Journal of Aerospace Sciences*, Vol. 4 No. 2 Juni, Hal. 74 – 90 LAPAN Jakarta.

Meloni A., De Michelis P., and Tozzi R., (2005). "Geomagnetic storms, dependence on solar and interplanetary phenomena": *a review*, *Men.*, S.A., Lt., Vol. 76.882 @ Salt 2005.

Habirun, Rachyany, S., dan Santoso A., 2004. *Prediksi MOF dan LOF quasi real time pada sirkit komunikasi Manado-Sumedang.* Proceedings The International Conference on Statistics and Mathematics and Its Applications in the Development of Science and Technology, Edisi Khusus Volume 4 No.2 69-74 Bandung Indonesia.

PEMODELAN PEREMBESAN AIR DALAM TANAH

Muhammad Hamzah, S.[1,3], Djoko, S.[1], Wahyudi, W.P.[1], Budi, S.[2]

1. Department Geophysics Engineering ITB
2. Department Mining Engineering ITB
3. Physics Department, Hasanuddin University
Jl. Ganesha 10, Bandung 40132, Indonesia.
3) e-mail : hamzah@fmipa.unhas.ac.id

Abstrak

Pergerakan air dalam tanah merupakan bagian dari siklus hidrologi. Pergerakan air dalam tanah, pada umumnya air bergerak dengan aliran relatif lambat atau dalam kondisi laminer dapat dianalisa dengan menggunakan hukum Darcy. Bila hukum Darcy dan persamaan kontinuitas digabungkan diperoleh persamaan differensial Laplace sebagai persamaan umum perembesan air ke dalam tanah. Berdasarkan persamaan differensial Laplace telah dilakukan pemodelan dua dimensi distribusi tegangan dan distribusi kecepatan perembesan air ke dalam tanah secara analitik menggunakan metoda pemisahan variabel. Hasil pemodelan distribusi tegangan dan distribusi kecepatan perembesan menunjukkan bahwa nilai distribusi tegangan dan distribusi kecepatan mengalami penurunan jika semakin jauh dari sumber perembesan.

1. Pendahuluan

Semua macam tanah terdiri dari butir-butir dengan ruangan-ruangan yang disebut pori (*voids*) antara butir-butir tersebut. Pori-pori ini selalu berhubungan satu dengan yang lain sehingga air dapat mengalir melalui ruangan pori tersebut. Proses ini disebut rembesan (*seepage*) dan kemampuan tanah untuk dapat dirembes air disebut daya rembesan (*permeability*). Sebenarnya bukan hamya tanah yang mempunyai daya rembesan tetapi banyak bahan bangunan lain seperti beton dan batu juga mengandung pori-pori sehingga dapat dirembes oleh air. Soal rembesan air dalam tanah cukup penting dalam bidang geoteknik, misalnya pada soal pembuatan tanggul atau bendungan untuk menahan air, juga penggalian pondasi dimuka air tanah.

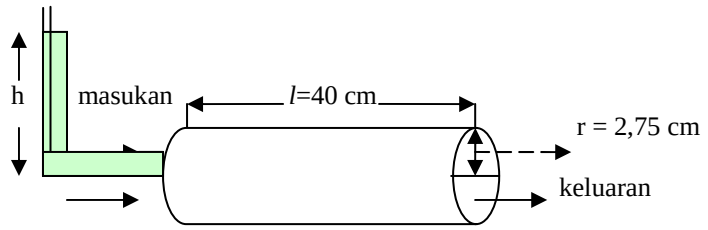
Pergerakan air dalam tanah merupakan bagian dari siklus hidrologi. Pergerakan air dalam tanah, pada umumnya air bergerak dengan aliran relatif lambat atau dalam kondisi laminer dapat dianalisa dengan menggunakan hukum Darcy. Dalam makalah ini, hukum Darcy digunakan pada kondisi jenuh untuk dua dimensi sebagai dasar pengembangan persamaan dasar aliran air tanah.

Ada dua tujuan utama yang menjadi fokus perhatian dalam pemodelan perembesan air ke dalam tanah. Pertama, pemodelan dilakukan untuk mengetahui bagaimana distribusi tegangan air dalam tanah akibat perembesan itu. Kedua, pemodelan dilakukan untuk mengetahui bagaimana distribusi laju perembesan dalam tanah berdasarkan model tinjauan yang akan diselasaikan. Dengan mengetahu distribusi kecepatan perembesan dalam tanah maka dapat diperhitungkan banyaknya air yang akan merembes dan kemana arah perembesan air itu.

Manfaat dari pemodelan perembesan air dalam tanah adalah untuk mengetahui banyaknya air dan arah air yang akan merembes serta tegangan air dalam tanah akibat perembesan itu sehingga pengguna air dapat memperoleh gambaran bagaimana melakukan konsevasi sumber daya air dalam tanah agar tetap terpelihara. Jadi kita tidak hanya terus-menerus menguras air dari dalam tanah tetapi penting sekali ada usaha bagaimana cara mengisi kembali pori-pori tanah yang kosong untuk diisi kembali pada musim penghujan.

2. Metoda Penelitian

Secara umum tanah dapat didefinisikan sebagai suatu tubuh alam di permukaan bumi yang terjadi akibat bekerjanya gaya-gaya alami terhadapa bahan alami (Wesley, 1977). Rembesan air dalam tanah hampir selalu berjalan secara linier, yaitu jalan atau garis yang ditempuh merupakan garis dengan bentuk yang teratur (*smooth curva*). Dalam hal ini kecepatan perembesan adalah menurut suatu hukum yang disebut hukum Darcy (Darcy’s law). Prinsip hukum ini dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Rembesan air dalam tanah akibat gradien hidrolis

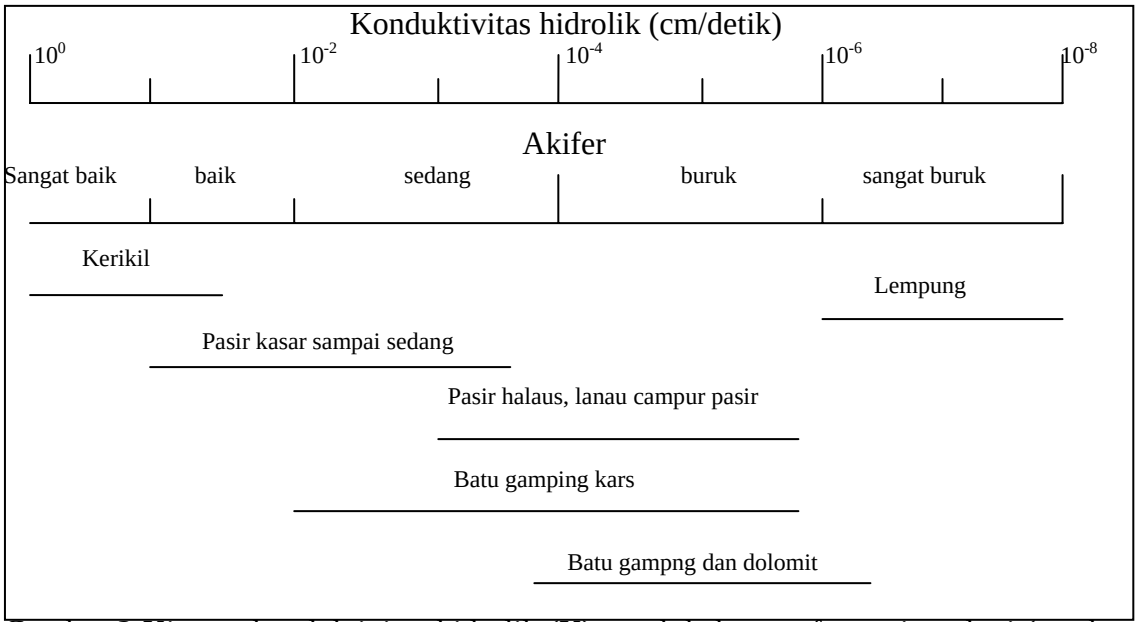
Pada gambar ini diperlihatkan rembesan air pada suatu contoh tanah akibat adanya perbedaan tegangan air pada kedua ujung tersebut. Ketinggian air pada pipa ini disebut hidrolis head (h). Air akan mengalir dari kiri ke kanan jika terdapat hidrolis head. Darcy dalam eksperimennya menemukan hubungan proporsional antara kecepatan perembesan (v) dengan gradien hidrolis head (i =dh/dl) yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v = Ki \qquad (1)$$

Dimana,

v = kecepatan perembesan
i = gradien hidrolik
K = konstanta konduktivitas hidrolik

Besarnya harga K dari suatu jenis tanah tergantung antara lain oleh ukuran diameter butir dan pori. Bila diameter butirnya sangat halus, walupun porositasnya sangat tinggi, seperti misalnya lempung maka harga K sangat rendah. Di sini yang perlu diperhatikan adalah ukuran butir, bukan porositasnya. Gambar 2 yang memperlihatkan kisaran harga K yang lebih lebar untuk beberapa formasi geologis (Spitz dan Moreno, 1996).



Gambar 2 Kisaran konduktivitas hidrolik (K) untuk beberapa formasi geologi (sumber: dimodifikasi dari Spitz dan Moreno, 1996)

Rumus atau persamaan yang merupakan dasar untuk pemecahan soal-soal rembesan dapat ditentukan dengan menghitung banyaknya air yang masuk dan keluar dari suatu segmen dalam tanah. Air yang masuk dan keluar dari segmen disebut persamaan kontinuitas (*continuity equation*). Persamaan kontinuitas dapat dilihat pada persamaan 2.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Dengan memasukkan persaman kecepatan dari hukum Darcy ke dalam persamaan kontinuitas maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

Persamaan ini dikenal dengan nama persamaan Laplace (*Laplace equation*). Persamaan Laplace ini tidak hanya berlaku untuk perembesan air dalam tanah, tetapi juga untuk aliran listrik pada bahan konduktot dan perpindahan panas secara konduksi dalam medium.

Ketinggian tekanan pada suatu titik dapat dinyatakan sebagai hidrolis head (*h*). Nilai *h* tergantung dari *x* dan *y*, yaitu $h = f(x,y)$. Kecepatan aliran pada jurusan horisontal dan vertikal dapat dihitung dari fungsi *h* dengan memakai rumus Darcy. Pemecahan soal-soal rembesan dapat dipermudah dengan memakai suatu fungsi *U* yang dinamakan "*velocity potential*". Defenisi *U* adalah $U = -Kh + d$, dimana *K* adalah koefisien rembesan dan *d* adalah konstanta.

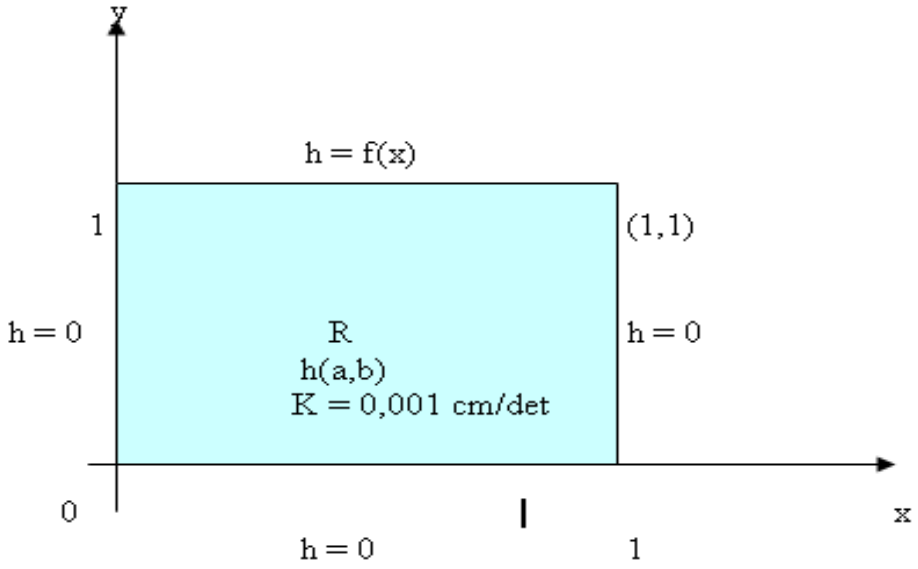
Pada setiap garis equipotensial nilai *h* dan *U* adalah konstan. Hubungan antara garis equipotensial dengan garis aliran dapat ditentukan dengan menghitung kemiringan kedua macam garis ini. Pada garis equipotensial nilai *U* adalah konstan sehingga turunan parsial *U* terhadap *x* dan *y* sama dengan nol. Dengan demikian, apabila gradien garis aliran dikalikan dengan gradien garis equipotensial maka akan didapatkan sama dengan negatif satu (-1) (Wesley, 1977). Ini berarti bahwa garis *equipotensial* tegak lurus terhadap garis aliran. Pada tanah yang homogen atau seragam hal ini selalu benar, sehingga rembesan air didalam tanah dapat digambarkan sebagai deretan garis *equipotensial* dan deretan garis aliran yang saling berpotong-potongan secara tegak

lurus. Gambar semacam ini disebut jaring aliran (*flow net*). Rumus atau persamaan yang merupakan dasar untuk pemecahan soal-soal rembesan dapat ditentukan dengan menghitung banyaknya air yang masuk dan keluar dari suatu segmen dalam tanah.

Persamaan differensial Laplace 2D mempunyai banyak solusi yang masing-masing bergantung pada nilai batas yang ada. Secara analitis, solusi persamaan Laplace 2D tidak dapat diturunkan secara umum melainkan hanya secara khusus saja. Hal ini disebabkan karena pengaruh nilai batas (kondisi batas) yang ada dan bentuk dari domain persamaan Laplace 2D tersebut berlaku. Dalam makalah ini, ditentukan kondisi syarat batas dalam medium yang ditinjau sehingg dapat diselesaikan secara analitik menggunakan metoda pemisahan variabel.

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Salah satu solusi analitik dari persamaan differensial Laplace adalah menggunakan metoda pemisahan variabel (MPV). Misalkan untuk menyelesaiakan persoalan Dirichlet persamaan differensial Laplace hidrolis head h, penerapan syarat batas tipe Dirichlet h(a,0), h(0,b), h(1,b) sama dengan nol dan h(a,1) sama dengan f(a) maka diperoleh solusi analitik MPV (Kreyzig, 1980). Penerapan syarat Dirichlet dalam bidang R dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Bidang tinjauan yang dirembes air dan syarat batas

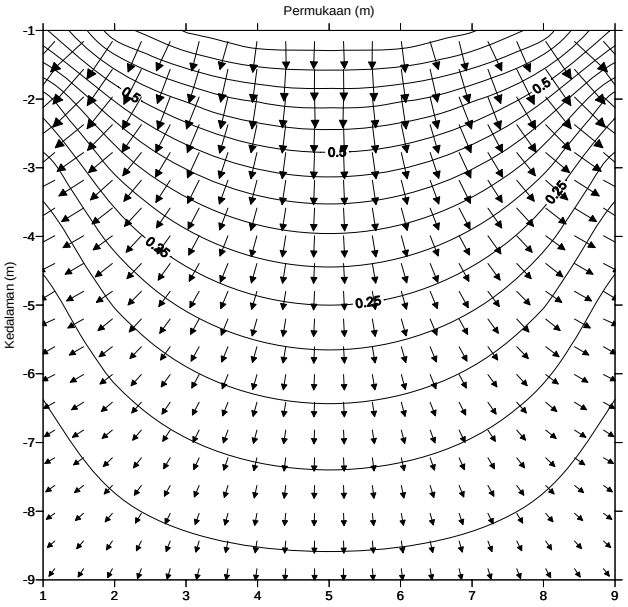
Solusi persamaan Laplace menggunakan metoda pemisahan variabel dengan menerapkan syarat batas seperti pada Gambar 3 diperoleh persamaan (4) sebagai berikut.

$$h(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin n\pi a \sinh n\pi b}{\sinh n\pi} \int_0^1 \sin n\pi a f(a) da \qquad (4)$$

Di mana n = 1, 2, 3, .., adalah bilangan bulat dan konstanta π = 3,14159. Turunan persamaan (4) terhadap suku a dan b adalah,

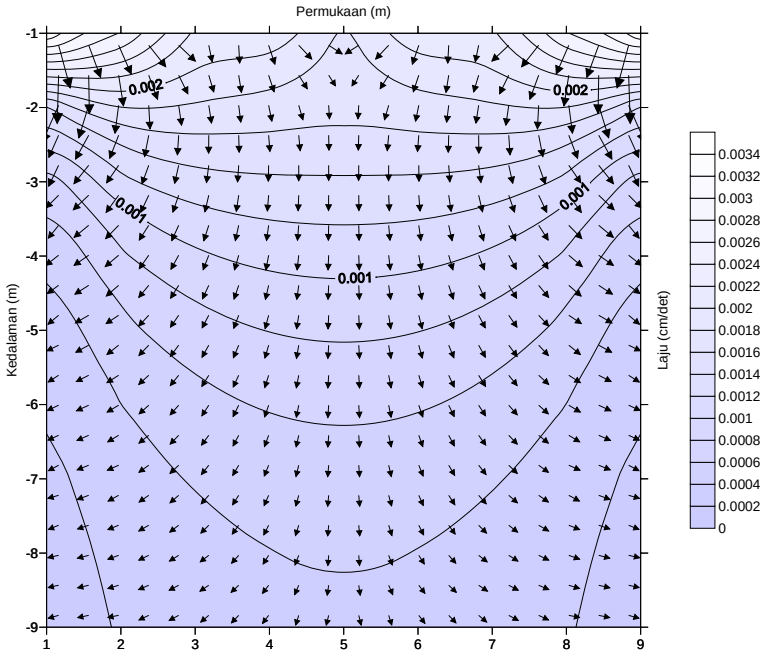
$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n\pi a \sinh n\pi b}{\sinh n\pi} \left[1-\cos(n\pi)\right] \\ \frac{\partial h}{\partial b} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin n\pi a \cosh n\pi b}{\sinh n\pi} \left[1-\cos(n\pi)\right] \end{aligned} \qquad (5)$$

Hasil perhitungan menggunakan persamaan (4) dapat diperoleh distribusi tegangan dalam bidang tinjauan pada Gambar 3. Distribusi tegangan air dalam tanah bidang tinjauan R dapat dilihat pada Gambar 4. Tegangan air pada Gambar 4 menunjukkan bahwa semakin jauh dari dari sumber maka tegangan air akan semakin kecil. Penurunan tegangan tersebut karena penurunan hidrolis head terhadap jarak yang dilalui. Bila dikaitkan dengan fakta yang ada dilapangan dapat dipahami bahwa penurunan tegangan air yang masuk ke dalam tanah disebabkan oleh pergesekan dan tumbukan antara air dengan butiran-butiran tanah yang dilalui. Sedangkan tanda garis panah menunjukkan arah perembesan air yang tegak lurus dengan kontur tegangan.



Gambar 4 Distribusi Tegangan dalam tanah

Untuk memperoleh distribusi kecepatan maka digunakan persamaan (5). Persamaan (5) dihitung untuk mendapatkan gradien hidrolis head. Bila diketahui nilai konduktivitas hidrolik (K = 0,001 cm/det) dan hasil perhitungan gradien hidrolis head
di subsitusikan ke dalam persamaan hukum Darcy pada persamaan (1) maka diperoleh distribusi kecepatan dalam medium. Distribusi kecepatan air dalam tanah berdasarkan bidang tinjauan R dapat dilihat pada Gambar 5. Distribusi kecepatan perembesan air pada Gambar 5 menunjukkan bahwa kecepatan perembesan air maksimum di dekat sumber dan menurun secara gradual bila semakin jauh dari sumber. Penurunan kecepatan tersebut karena penurunan gradien hidrolis head terhadap jarak yang dilalui. Selain itu, dapat ditunjukkan dalam Gambar 5 bahwa kecepatan perembesan air dalam tanah sangat lambat dibandingkan dengan laju curah hujan pada musim penghujan sehingga pada musim hujan hanya sebagian kecil air yang merembes ke dalam tanah dan sebagian besar menjadi limpasan permukaan.



Gambar 5. Distribusi kecepatan perembesan air ke dalam tanah (K = 0,001 cm/det)

4. Simpulan

1. Pada kasus-kasus yang sederhana pemodelan perembesan air ke dalam tanah dapat dimodelkan dengan menyelesaikan persamaan Laplace secara analitik menggunakan metoda pemisahan variabel.
2. Hasil pemodelan distribusi tegangan dan distribusi kecepatan perembesan air ke dalam tanah menunjukkan bahwa tegangan air dan kecepatan perembesan air akan semakin kecil jika semakin jauh dari sumber perembesan.
3. Kecepatan perembesan air dalam tanah sangat lambat dibandingkan dengan laju curah hujan pada musim penghujan sehingga pada musim hujan hanya sebagian kecil air yang merembes ke dalam tanah dan sebagian besar menjadi limpasan permukaan.

5. Daftar Pustaka

Kreyzig, E., 1980: *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons,pp. 667-668

Spitz, K. dan Moreno, J. 1996: *A Practical guide to Groundwater and solute transport Modeling*, Jhon Wiley & Sons, Inc, New York, hlm. 461

Wesley, D.L., 1977: *Mekanika Tanah*. Badan Penerbit Pekerjaan Umum, Jakarta

EKSISTENSI DAN KESTABILAN SOLUSI GELOMBANG JALAN MODEL KUASILINER DISSIPATIF DUA KANAL

SUMARDI
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada
mas_mardi@yahoo.com

SOEPARNA DARMAWIJAYA
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada

LINA ARYATI
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada
lina@ugm.ac.id

Abstract

Pada paper ini akan dibahas solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal. Kecepatan gelombang ditentukan dengan syarat Rankine-Hugoniot. Solusi gelombang jalan heteroklinik dapat disajikan secara eksplisit dalam fungsi parameter. Dari penelitian diperoleh solusi gelombang jalan yang berupa gelombang kejut atau penyelesaian bernilai banyak (*multivalued solution*) yang mempunyai titik singular. Selanjutnya kestabilan solusi gelombang jalan dianalisa dengan metode energi.
Keyword: solusi gelombang jalan, kestabilan, sistem hiperbolik tak linier

1. PENDAHULUAN

Banyak persamaan-persamaan penting yang muncul dalam masalah fisika, kimia, biologi dan ekonomi diperoleh dari hukum konservasi. Hukum konservasi merupakan hukum kesetimbangan dalam suatu proses alam. Sebagai contoh dalam biologi bahwa laju perubahan suatu populasi dalam suatu daerah akan setimbang dengan laju kelahiran dikurangi laju kematian ditambah laju migrasi yang masuk daerah dikurangi laju migrasi yang keluar dari suatu daerah. Secara matematika hukum konservasi diterjemahkan dalam persamaan diferensial yang melibatkan variabel waktu sebagai variabel bebas. Karena juga melibatkan dimensi ruang, sehingga diperoleh model berupa persamaan diferensial parsial baik yang linear maupun nonlinear. Pada tulisan ini hanya dibahas model variabel ruang dimensi satu.

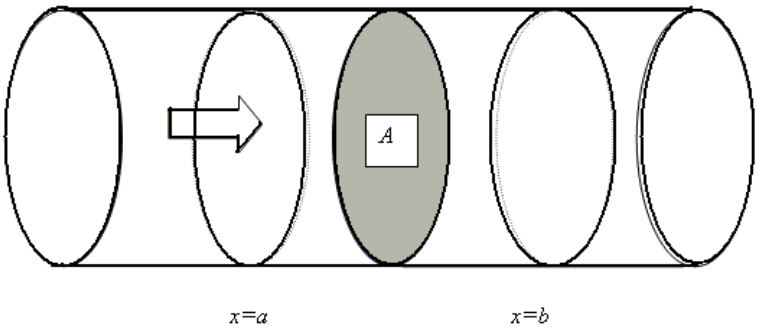
Misalkan suatu besaran $u(x,t)$ yang bergantung variabel ruang $x \in R$ dan waktu $t > 0$. Besaran u suatu kosentrasi atau kepadatan yang diukur per satuan volume yang dikenakan pada besaran massa, populasi, energi atau besaran lainnya. Kemudian besaran tersebut mengalir dalam suatu tabung (lihat gambar 1) dan homogen pada setiap

penampang tabung yang luasnya A, sehingga diasumsikan hanya bergantung varibel x saja. Pandang potongan tabung yang dibatasi di sebelah kiri $x = a$ dan di sebelah kanan $x = b$ dan dinotasikan interval $I = [a,b]$. Total besaran u di dalam interval I pada saat t adalah

$$\int_a^b u(x,t)Adx \tag{1}$$

Diasumsikan besaran $u(x,t)$ bergerak ke kanan searah perubahan variable x. Didefinisikan flux besaran u pada posisi x pada waktu *t* sebagai fungsi skalar $\phi(x,t)$, yaitu besaran *u* yang mengalir di *x* pada saat *t* per satuan luas per satuan waktu. Jika besaran mengalir ke kanan maka ϕ bernilai positif dan sebaliknya apabila mengalir ke kiri, maka ϕ bernilai negatif. Selanjutnya pada saat *t* laju besaran yang mengalir pada interval *I* adalah laju yang masuk pada interval *I* di $x = a$ dikurangi laju yang keluar dari interval *I* di $x = b$, yaitu

$$A\phi(a,t) - A\phi(b,t) \tag{2}$$



Gambar 1. Model hukum konservasi

Diasumsikan pula tidak ada besaran yang hilang dan berkembang pada interval *I* dan jika besarannya adalah populasi suatu spesies, maka tidak ada kelahiran dan kematian pada interval tersebut. Kalau besaran tersebut senyawa kimia maka tidak terjadi reaksi kimia pada interval tersebut. Dengan menggunakan hukum kesetimbangan besaran *u* pada interval *I* akan memenuhi rumus berikut:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = A\phi(a,t) - A\phi(b,t) \tag{3}$$

Persamaan (3) disebut hukum konservasi dalam bentuk integral. Diasumsikan fungsi u dan ϕ merupakan fungsi kontinu diferensiabel, maka dengan menggunakan Teorema pada Kalkulus diperoleh

$$\int_a^b \phi_x(x,t)dx = A\phi(a,t) - A\phi(b,t) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \int_a^b u_t(x,t)dx \tag{5}$$

Dengan sifat kekontinuan maka hukum konservasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_t + \phi_x = 0 \tag{6}$$

Di dalam realitas flux dapat bergantung linear dengan jumlah besaran $u(x,t)$ yang dapat dituliskan hubungan sebagai berikut:

$$\phi = cu \tag{7}$$

dengan c suatu konstan, sehingga persamaan (6) menjadi

$$u_t + cu_x = 0 \tag{8}$$

Persamaan (8) disebut persamaan advection atau persamaan transport. Dalam kenyataan suatu besaran bergerak dari kosentrasi yang lebih tinggi ke kosentrasi yang lebih rendah yang sebanding dengan gradien kosentrasi tersebut terhadap variabel x atau dapat ditulis

$$\phi = -Du_x \tag{9}$$

dengan D suatu koefisien diffusi dan dikenal dengan hukum Fick. Persamaan konservasi (6) dapat ditulis menjadi persamaan diferensial parsial berikut:

$$u_t - Du_{xx} = 0 \tag{10}$$

yang dikenal dengan persamaan difusi atau persamaan panas. Kalau flux ϕ bergantung dengan kuadrat variabel u katakanlah sebagai berikut:

$$\phi = \tfrac{1}{2}u^2 \tag{11}$$

dan selanjutnya persamaan konservasi (6) menjadi sebagai berikut:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{12}$$

yang disebut dengan persamaan Burger. Kemudian apabila flux ϕ dirumuskan

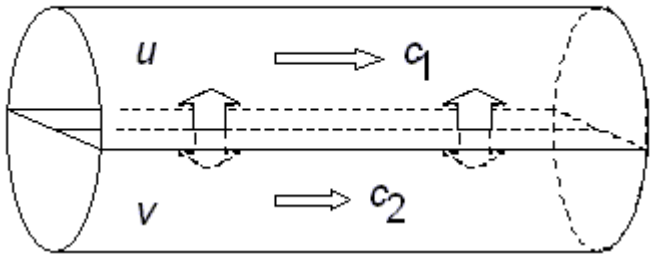
$$\phi = \tfrac{1}{2}u^2 + u_{xx} \tag{13}$$

maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (14)$$

yang dikenal dengan persamaan Korteweg de Vries (KdV).

Pada pembicaraan sebelumnya hanya memiliki satu jenis besaran *u* yang mengalir melewati potongan tabung yang dipandang sebagai ruang dimensi satu. Sekarang misalkan besaran tersebut ada dua jenis besaran yaitu *u* dan *v*. Namun besaran *u* dapat berubah menjadi besaran *v* begitu pula besaran *v* bisa berubah menjadi *u* dan jumlah dua besaran tersebut masih tetap pada saat *t* dan interval *I*. Perubahan besaran dapat dijelaskan sebagai akibat proses reaksi kimia. Di samping itu perubahan besaran juga dapat dijelaskan sebagai perubahan posisi seperti pada gambar (2).



Gambar 2. Model dua kanal dengan interaksi

Flux untuk masing-masing besaran $u(x,t)$ dan $v(x,t)$ adalah $\phi_1(x,t)$ dan $\phi_2(x,t)$. Kemudian besarnya interaksi ditentukan oleh besaran tersebut yaitu $f(u,v)$, dengan menggunakan sifat kekontinuan fungsi besaran dan fungsi flux, diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_t + (\phi_1)_x &= f(u,v) \\ v_t + (\phi_2)_x &= -f(u,v). \end{aligned} \qquad (15)$$

Apabila diberikan fungsi flux sebanding dengan jumlah besaran *u* dan *v* yaitu

$$\begin{aligned} \phi_1(x,t) &= c_1(x)u(x,t) \\ \phi_1(x,t) &= c_2(x)v(x,t) \end{aligned} \qquad (16)$$

dengan $c_1(x)$ dan $c_2(x)$ suatu fungsi konstan sepotong-sepotong, kemudian besarnya interaksi adalah linear yaitu $f(u,v) = \alpha(v-u)$, sehingga diperoleh model dissipatif dua kanal linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, v(x,t) - \alpha\, u(x,t) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + c_2(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, u(x,t) - \alpha\, v(x,t) \end{aligned}. \qquad (17)$$

Sumardi (2005) telah mencari solusi numerik linier dissipatif dua kanal persamaan (17) untuk kasus $c_1(x) = -c_2(x) = c$ dengan metode beda hingga, kemudian Sumardi (2006) mencari solusi eksaknya dengan menggunakan metode Fourier. Sumardi (2007) telah melakukan perhitungan numerik untuk khasus $c_1(x)$ dan $c_2(x)$ konstan sepotong-sepotong dengan menggunakan metode Immersed Interface. Sumardi(2008) juga mencari solusi gelombang jalan, penyelesaian khusus dan solusi eksaks masalah nilai awal persamaan (17) dengan $c_1(x)$ dan $c_2(x)$ konstan.

Selanjutnya diberikan fungsi flux sebanding dengan kuadrat jumlah besaran *u* dan *v* yaitu

$$\phi_1(x,t) = \tfrac{1}{2}u(x,t)^2$$
$$\phi_2(x,t) = \tfrac{1}{2}v(x,t)^2 \qquad (18)$$

dan besarnya interaksi adalah linear $f(u,v) = \alpha(v-u)$ diperoleh model dissipatif dua kanal tak linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, v(x,t) - \alpha\, u(x,t) \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \alpha\, u(x,t) - \alpha\, v(x,t) \end{aligned} \quad . \qquad (19)$$

Dua model di atas juga diturunkan oleh van Beckum (2003) dan kemudian dicari solusi gelombang jalannya untuk persamaan (19). Model di atas ketakliniearannya masih teratur sehingga disebut juga model kuasilinear dissipatif dua kanal. Pada paper ini akan dibahas eksistensi dan kestabilan solusi gelombang jalan yang memberikan hasil yang lebih baik dari pada paper yang ditulis van Beckum(2003).

2. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan metode literatur yang berupa buku-buku dan jurnal-jurnal yang terkait dengan model nonlinier. Tahap pertama adalah mempelajari metode untuk mencari eksistensi solusi gelombang jalan model model sistem nonlinier dan membuktikan kestabilan solusi gelombang jalan yang diperoleh. Setelah diperoleh pemahaman baru diterapkan ke model nonlinier dissipatif dua kanal. Dockery dan Lui (1994) telah meneliti eksistensi dan kestabilan model genetik suatu populasi. Mascia

dan Natalini (1996) juga meneliti eksistensi dan kestabilan gelombang jalan untuk sistem hiperbolik dengan relaksasi. Kemudian Brazhnik dan Tyson (2000) mencari solusi gelombang jalan untuk persamaan Fisher. Liu (2003) menggunakan metode energi untuk membuktikan kestabilan gelombang jalan pada persamaan hiperbolik, Li dan Liu(2005) menggunakan metode energi untuk membuktikan kestabilan solusi gelombang jalan pada model arus lalulintas.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Solusi gelombang jalan adalah solusi yang tidak berubah bentuknya oleh perubahan waktu dan bergerak dengan kecepatan konstan**.** Untuk mencari solusi gelombang jalan dengan kecepatan konstan s persamaan (19) diberikan

$$u(x,t) = U(z), \quad v(x,t) = V(z), \; z = \alpha(x - st) \tag{20}$$

dan mempunyai syarat batas pada $x = \pm\infty$ sebagai berikut:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix} \in R^2, \text{ dengan } u_{-} \neq u_{+}. \tag{21}$$

Model kuasilinear dissipatif dua kanal (19) tereduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa:

$$\begin{aligned} (-s+U)\frac{dU}{dz} &= V - U \\ (-s+V)\frac{dV}{dz} &= U - V \end{aligned} \tag{22}$$

dengan syarat batas:

$$\lim_{z \to \pm\infty} \begin{pmatrix} U(z) \\ V(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix} \in R^2. \tag{23}$$

Kedua persamaan (22) dijumlahkan dan kemudian diintegralkan diperoleh

$$(-s+U)^2 + (-s+V)^2 = A^2. \tag{24}$$

Kemudian substitusi persamaan (24) ke persamaan (22) yang pertama diperoleh persamaan diferensial biasa dalam bentuk:

$$(-s+U)\frac{dU}{dz} = \pm\sqrt{A^2 - (-s+U)^2} - (-s+U) \tag{25}$$

atau

$$z = \int \frac{-s+U}{\pm\sqrt{A^2-(-s+U)^2}-(-s+U)} dU \,. \tag{26}$$

Selanjutnya untuk mencari anti derivatif ruas kanan dari persamaan (26), substitusi $-s+U = A\cos\theta$, sehingga diperoleh

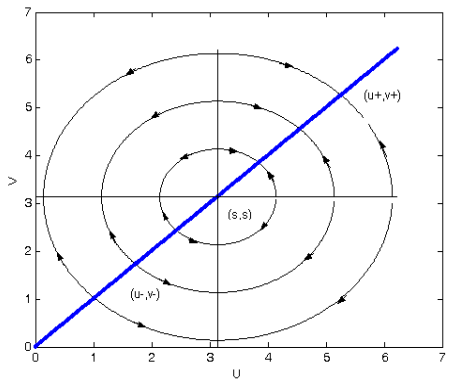
$$\begin{aligned} z &= A\int \frac{-\cos\theta\sin\theta}{\pm\sin\theta-\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{\pm A}{2}\sqrt{2}\arctan h\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\tan(\theta/2)\pm 1\right)\right) - A\frac{\tan(\theta/2)\pm 1}{\tan^2(\theta/2)+1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Jika persamaan (25) disubsitusi $-s+U = A\cos\theta$, maka diperoleh $V = s + A\sin\theta$.

Jadi diperoleh solusi gelombang jalan dalam bentuk fungsi parameter θ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U &= s + A\cos\theta \\ V &= s + A\sin\theta \\ z &= \frac{\pm A}{2}\sqrt{2}\arctan h\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\tan(\theta/2)\pm 1\right)\right) - A\frac{\tan(\theta/2)\pm 1}{\tan^2(\theta/2)+1} \end{aligned} \,. \tag{28}$$

Selanjutnya akan dianalisa solusi gelombang jalan persamaan (19) melalui dinamik persamaan (22). Adapun bidang fase sistem dinamik (22) dengan kecepatan gelombang s seperti pada gambar 3.



Gambar 3. Bidang phase solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal.

Dari bidang phase di atas diperoleh tak berhingga titik tetap pada garis $U = V$, hal ini merepresentasikan penyelesaian konstan atau solusi homoklinik dari persamaan (19). Dari gambar 3. juga diperoleh

$$z \to \infty \;\Rightarrow\; u_+ = v_+ \tag{29}$$

$$z \to -\infty \;\Rightarrow\; u_- = v_- \tag{30}$$

yang juga dapat diperoleh dari persamaan (22) dan (23).

Selanjutnya agar diperoleh solusi gelombang jalan yang heteroklinik diberikan

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big(u(x,t), v(x,t)\big) = \big(u_{\pm}, v_{\pm}\big) \in R^2 \text{ dan } \big(u_{-}, v_{-}\big) \neq \big(u_{+}, v_{+}\big) \in R^2 .$$

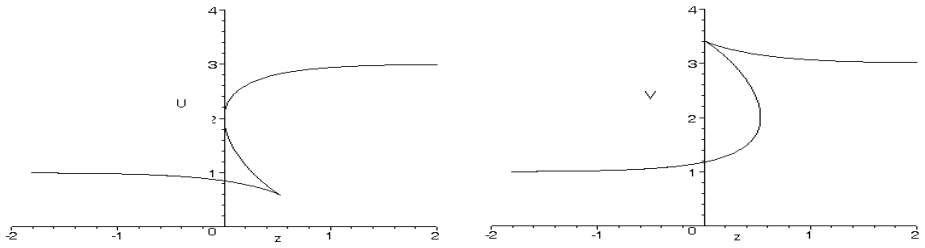
Kecepatan gelombang *s* harus memenuhi syarat Rankine-Hugoniot:

$$s = \frac{F(U_{+}) - F(U_{-})}{U_{+} - U_{-}} = \frac{u_{+} + u_{-}}{2} = \frac{v_{+} + v_{-}}{2} . \tag{31}$$

Selanjutnya dari persamaan (31) dan (24) konstanta *A* diperoleh:

$$A^2 = 2\left(\frac{u_{-} - u_{+}}{2}\right)^2 . \tag{32}$$

Dari gambar 3. ketika $U = s$ atau $V = s$ maka *z* berganti arah hal ini merepresentasikan terjadinya solusi bernilai banyak. Garis $U = s$ dan $V = s$ merupakan daerah singular yang maksudnya di titik tersebut *U* dan *V* tidak terdeferensial terhadap variabel *z*. Adapun grafik solusi gelombang jalan untuk orbit heteroklinik di atas garis $U = V$ sebagai berikut:



Gambar 4. Solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal

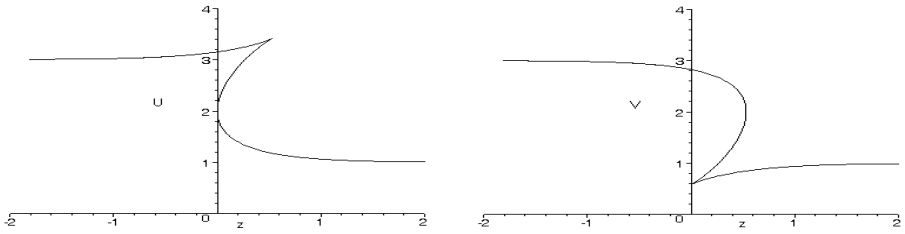
Pada Gambar 4. terlihat bahwa $u_{-} < u_{+}$ dan $v_{-} < v_{+}$, sedangkan untuk memperoleh hasil $u_{-} > u_{+}$ dan $v_{-} > v_{+}$ dengan cara memodifikasi persamaan (20) menjadi

$$u(x,t) = U(z), \quad v(x,t) = V(z), \; z = -\alpha(x - st)$$

sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa menjadi

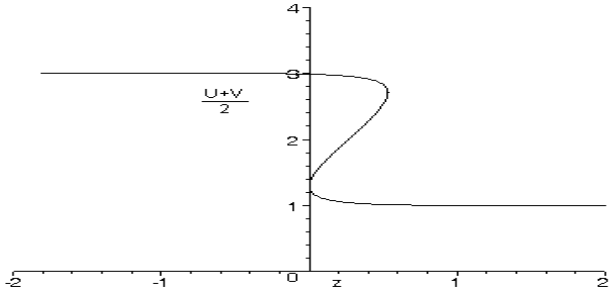
$$\begin{aligned} (s-U)\frac{dU}{dz} &= V - U \\ (s-V)\frac{dV}{dz} &= U - V \end{aligned} . \tag{33}$$

Dengan menganalisis persamaan (33) seperti pada persamaan (22) diperoleh solusi gelombang jalan untuk orbit heteroklinik di bawah garis $U = V$ sebagai berikut:



Gambar 5. Solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal dengan $u_- > u_+$ dan $v_- > v_+$

Kemudian hasil ini lebih menarik dibandingkan yang diperoleh van Beckum (2003) yang tidak memberikan hasil *U* dan *V* secara terpisah, tetapi hanya rerata dari *U* dan *V*. Grafik rerata dari *U* dan *V* pada gambar 6. di bawah sama dengan yang diperoleh van Beckum.



Gambar 6. Solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal untuk rerata *U* dan *V*.

Untuk menentukan kestabilan gelombang jalan di paper ini dengan cara memberikan gangguan yang cukup kecil dari solusi gelombang jalan yang sudah diperoleh. Selanjutnya gangguan tersebut dianalisa dalam waktu tak hingga apakah hilang atau tidak, kalau hilang berarti solusi gelombang jalan tersebut stabil. Untuk menganalisa gangguan dmendekati waktu tak hinga di sini digunakan metode energi.

Diberikan nilai awal persamaan (19) pada saat *t* sebagai jumlahan solusi gelombang jalan dan besarnya gangguan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(z,t) = U(z) + P(z,t) \\ v(x,t) &= v(z,t) = V(z) + Q(z,t), \quad z = x - st \end{aligned} \tag{34}$$

disini fungsi $P(z,t)$ dan $Q(z,t)$ mempunyai support yang kompak, artinya $P(z,t) = Q(z,t) = 0,\ z \notin I$ dengan I adalah interval terbatas. Solusi persamaan (19) dilihat dengan cara bergerak sesuai dengan kecepatan gelombang jalan, maka persamaan (19) dilakukan transformasi $t = t,\ z = x - st$, sehingga sistem kuasilinier (19) menjadi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - s\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + u(z,t)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = \alpha v(z,t) - \alpha u(z,t) \\
&\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - s\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + v(z,t)\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = \alpha u(z,t) - \alpha v(z,t)
\end{aligned} \tag{35}$$

Persamaan (34) disubstitusi ke persamaan (35) diperoleh:

$$\begin{aligned}
&U_t + P_t - sU_z - sP_z + (U+P)(U_z + P_z) = \alpha(V + Q - (U+P)) \\
&V_t + Q_t - sV_z - sQ_z + (V+P)(V_z + Q_z) = \alpha(U + P - (V+Q))
\end{aligned}, \tag{36}$$

dengan menggunakan sifat solusi gelombang jalan *U* dan *V*:

$$\begin{aligned}
&P_t - sP_z + (U+P)P_z + UP_z = \alpha(Q-P) \\
&Q_t - sQ_z + (V+Q)Q_z + VQ_z = \alpha(P-Q)
\end{aligned} \tag{37}$$

atau

$$\begin{aligned}
&P_t = sP_z - (UP)_z - PP_z + \alpha(Q-P) \\
&Q_t = sQ_z - (VQ)_z - QQ_z + \alpha(P-Q)
\end{aligned}. \tag{38}$$

Sekarang andaikan $P(z,t) = Q(z,t)$ kemudian disubstitusi ke (37) diperoleh

$$\begin{aligned}
&P_t - sP_z + UP_z + P(U_z + P_z) = 0 \\
&P_t - sP_z + VP_z + P(V_z + P_z) = 0
\end{aligned}. \tag{39}$$

Persamaan pertama (39) dikurangi persamaan kedua (39) diperoleh:

$$\begin{aligned}
&(U-V)P_z + (U-V)_z P = 0 \\
&\Leftrightarrow \left((U-V)P\right)_z = 0 \\
&\Leftrightarrow (U-V)P = K
\end{aligned}.$$

Jika diberikan $z \notin I$ berarti $P = 0$ dan karena U dan V solusi gelombang heteroklinik yang berarti $U \neq V$, maka $K = 0$. Dengan demikian $P(z,t) = 0, \forall z \in R$ yang kontradiksi P sebagai gangguan, jadi $P \neq Q$.

Selanjutnya untuk mencari hilangnya gangguan pada waktu tak berhingga didefinisikan energi yang merupakan fungsi *t* sebagai berikut:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(z,t)^2 + Q(z,t)^2 \, dz \,. \tag{40}$$

Kemudian $E(t)$ diturunkan terhadap variabel *t* dan menggunakan persamaan (38) diperoleh

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= 2\int_{-\infty}^{\infty} PP_t + QQ_t dz \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} P(sP_z - (UP)_z - PP_z + \alpha(Q-P)) + Q(sQ_z - (VQ)_z - QQ_z + \alpha(P-Q))dz \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} (2\alpha PQ - \alpha P^2 - \alpha Q^2) + sP_z + sQ_z - P^2P_z - Q^2Q_z - P(UP)_z - Q(VQ)_z dz \\
&= -2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} (P-Q)^2 dz + \int_{-\infty}^{\infty} sP_z + sQ_z - P^2P_z - Q^2Q_z dz - \int_{-\infty}^{\infty} P(UP)_z + Q(VQ)_z dz
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Suku kedua dari persamaan (41) terakhir dengan menggunakan sifat fungsi $P(z,t)$ dan $Q(z,t)$ mempunyai support yang kompak, maka diperoleh nilai integralnya nol. Karena $\alpha > 0$ dan $U \neq V$, $\forall z \in \Re$, sehingga akan diperoleh nilai integral negatif dan tidak pernah mencapai nol, sehingga persamaan (41) menjadi

$$E'(t) < -\int_{-\infty}^{\infty} P(UP)_z + Q(VQ)_z dz . \tag{42}$$

Kemudian dengan integral bagaian, maka diperoleh

$$E'(t) < \int_{-\infty}^{\infty} UPP_z + VQQ_z dz . \tag{43}$$

Dengan memanfaatkan bahwa $s - A \leq U, V \leq s + A$, sehingga diperoleh

$$E'(t) < (s+A)\int_{-\infty}^{\infty} PP_z + QQ_z dz . \tag{44}$$

Karena sifat fungsi $P(z,t)$ dan $Q(z,t)$ mempunyai support yang kompak, maka diperoleh

$$E'(t) < 0 \tag{45}$$

yang berarti $E(t)$ monoton turun dengan batas bawah nol, maka diperoleh

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0 \tag{46}$$

sehingga

$$\lim_{t \to \infty} (P(t), Q(t)) = (0,0) . \tag{47}$$

Terbukti bahwa solusi gelombang jalan (28) stabil.

4. KESIMPULAN

Dengan memanfaatkan teori sistem dinamik, maka dapat ditunjukkan eksistensi solusi gelombang jalan model kuasilinear dissipatif dua kanal. Di samping itu terlihat bahwa solusi gelombang jalan homoklinik berupa fungsi konstan. Sedangkan solusi gelombang heteroklinik berupa fungsi bernilai banyak (*multivalued solution*) yang berupa fungsi parameter. Kemudian untuk menentukan kecepatan gelombang digunakan syarat Rankine-Hugoniot. Kestabilan solusi gelombang jalan yang diperoleh dibuktikan dengan metode energi.

Ucapan Terima kasih

Dalam menulis paper ini kami ingin mengucapkan terima kasih dengan dr. Frits van Beckum, ketika memberikan masalah di atas ketika berkunjung di Jurusan matematika UGM. Kami juga mengucapkan terima kasih kepada Beliau atas komunikasi yang indah dan menarik dalam penulisan paper ini.

DAFTAR PUSTAKA

van Beckum F.P.H., Travelling wave solution of a coastal zone non-Fourier dissipation model, *Proceedings of the Symposium on Coastal Zone Management*, 2003.

Brazhnik P.K., Tyson J.J., *On traveling wave solutions of Fisher's Equation in Two Dimensions*, SIAM J. Appl. Math, Vol 60, 2000

Dockery J.D., Lui R., *Existence and Stability of traveling wave solutions for a population genetic model via singular perturbations*, SIAM J. Appl. Math., Vol 54 , 1994

Li T., Liu H., *Stability of a Traffic Flow Model with Noncovex Relaxation*, Comm. Math. Sci. Vol. 3 No. 2, 2005

Liu H., *Asymptotic of relaxation shock profiles for hyperbolic conservation laws*, Journal of Differential Equation 192, 2003

Mascia C., Natalini R. *L^1 Nonlinear Stability of Traveling waves for a hyperbolic System with Relaxation*, J. of Diff. Eq. 132, 1996.

Sumardi, Soeparna D. Lina Aryati, Convergence of finite difference approximation for two channel dissipation model, *Proceedings International Conference on Applied Mathematic (ICAMO5)*, 2005

Sumardi, Soeparna D. Lina Aryati, *Fourier Method for two channel dissipation model*, paper disajikan pada Workshop Geophysical Fluid Dynamics and Scalar Transport in the Tropics, IMS, NUS, Singapore,13 Nov - 08 Dec 2006

Sumardi, Soeparna D. Lina Aryati, The immersed interface method for two channels dissipation model with discontinue constants velocity, *Proceeding of SEAMS-GMU Conference*, 2007.

Sumardi, Soeparna D, Lina Aryati, *The Exact solution for Two Channel Dissipation Model*, IMS preprint, 2008, http://www.ims.nus.edu.sg/publications-pp08.htm

MINIMAL EDGE DARI GRAF 2-CONNECTED DENGAN CIRCUMFERENCE TERTENTU

(On Edge Minimal 2-Connected Graphs with Prescribed Circumference)

Tri Atmojo Kusmayadi
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta 57126
e-mail : trikusma@uns.ac.id

Abstrak

Misal G adalah graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference c ≥.4. Dalam makalah ini ditentukan banyaknya minimum edge dari graf 2-connected G dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference c ≥.4.

Kata kunci : *circumference, graf 2-connected*

Abstract

Let G be a 2-connected graph on n vertices and m edges having circumference c ≥.4. In this paper, we give the minimum number of edges of a 2-connected graph G on n vertices and m edges having circumference c ≥.4

Key words *: circumference, 2- connected graph*

PENDAHULUAN

Hampir tiga abad lamanya teori graf telah berkembang dengan pesat. Terutama dalam tiga puluh tahun terakhir, banyak buku-buku ataupun artikel-ertikel penelitian tentang teori graf yang telah dipublikasikan. Alasan utama pertumbuhan yang cepat ini adalah disebabkan teori graf dapat diterapkan ke berbagai disiplin ilmu seperti dalam sains, teknik, komputer, bisnis moderen dan masih banyak lagi. Pembicaraan lengkap tentang terapan teori graf dapat diacu dalam artikel yang ditulis oleh Caccetta (1989) serta Caccetta dan Vijayan (1987). Sasaran dalam artikel ini adalah mempelajari aspek teoritis dari teori graf.

Banyak penulis yang menyelidiki sifat-sifat graf terhadap parameter teoritik graf tertentu. Terutama menentukan batas-batas dari graf dengan parameter yang diberikan. Masalah ini pertama kali diselidiki oleh Nordhaus dan Gaddum (1956) dengan paremeter bilangan kromatik.

Dalam artikel ini dibicarakan masalah yang sama dengan hasil Nordhaus dan Gaddum tetapi dengan parameter circumference.

NOTASI DAN TERMINOLOGI

Sebagian notasi dan terminologi yang digunakan dalam artikel ini mengacu pada Bondy dan Murty (1976). Sehingga suatu graf G (V, E) terdiri dari suatu himpunan tidak kosong vertex-vertex V dan himpunan E (disjoint dari V) terdiri atas edge dari G. Banyaknya vertex dan edge dari graf G masing-masing dinotasikan dengan $\nu(G)$ dan $\varepsilon(G)$, masing-masing ditulis ν dan ε. Suatu graf G disebut **connected** jika ada path di antara sebarang dua vertex dari G, selain itu G dikatakan **disconnected**. Suatu maximal connected subgraph dari G disebut suatu **component** dari G. Oleh karena itu suatu connected graph hanya mempunyai satu component. Sebuah **vertex cut set** (atau **vertex cut**) dari suatu connected graph G adalah suatu proper subset V(G) yang mana kalau diambil menghasilkan suatu disconnected atau trivial graph. **Vertex-connectivity** (atau **connectivity**) dari suatu graf G, dinyatakan oleh $\kappa(G)$, adalah banyaknya vertex terkecil dari G yang mana kalau diambil dari menghasilkan suatu disconnected graph atau a trivial graph; didefinisikan $\kappa(G) = 0$ jika G disconnected atau trivial graph. Untuk suatu bilangan bulat positif k, graf G dikatakan k-connected jika $\kappa(G) \geq k$. Komplemen dari graf G, ditulis $\overline{G}$, adalah graf dengan himpunan vertex yang sama dengan G serta dua vertex adjacent dalam $\overline{G}$ jika dan hanya jika vertex-vertex itu tidak adjacent dalam G. **Circumference** c(G) dari suatu graf G adalah panjang dari cycle terpanjang dalam G. P_n dan C_n masing-masing menyatakan path dan cycle dengan orde n.

PERMASALAHAN

Masalah yang dibahas dalam artikel ini adalah menentukan berapakah banyaknya minimum edge dari suatu graf 2-connected G dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $c \geq .4$?

HASIL-HASIL AWAL

Sebelum sampai pada hasil utama, di bawah ini diberikan beberapa hasil awal yang diberikan oleh Woodall (1976) dan Kusmayadi (1995). Misal $\mathcal{G}$(n, m) adalah kelas graf dengan n vertex dan m edge.

Teorema 1 (Woodall, 1976) :

Misal $G \in \mathcal{G}(n, m)$ dengan $m \geq n$ dan $c(G) = t$. Maka

$$m \leq w(n, t),$$

dimana $w(n,t) = \frac{(n-1)t}{2} - \frac{r(t-r-1)}{2}$, dan $r = (n-1) - (t-1)\left\lfloor \frac{n-1}{t-1} \right\rfloor$. □

Teorema 2 (Kusmayadi, 1995)

Misal G adalah graf 2-connected berorde n dengan $c(G) = t$, $c(\overline{G}) = n - 1$, $5 \leq t \leq n - 1$, dan $\overline{G}$ terhubung. Maka $\varepsilon(G) \geq n + t - 4$. □

Teorema 3 (Kusmayadi, 1995)

Misal $G \in \mathcal{G}(n, m)$ adalah graf terhubung dengan $c(G) = t$, $c(\overline{G}) = n - 1$ dan $\kappa(G) = 1$. Maka untuk $n \geq 6$, berlaku $m \geq 2n - 5$. □

Dari hasil-hasil awal di atas, maka sekarang sudah siap untuk membuktikan hasil-hasil utama di bawah ini.

HASIL-HASIL UTAMA

Berikut ini diberikan hasil-hasil utama. Yang pertama adalah mencari batas bawah dari banyaknya edge dalam suatu graf jika diketahui circumference dari graf genap.

Sedangkan hasil utama yang kedua adalah hampir sama dengan yang pertama, khususnya untuk circumference ganjil.

Teorema 4 :

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $2\ell \geq 6$. Maka

$$m \geq n + \frac{n-2\ell}{\ell-1} \qquad (1)$$

Bukti :

Misal C = {1, 2, ..., 2ℓ } adalah cycle dalam G dengan panjang 2ℓ**.** Pandang graf H = G – V(C). Misal H_1, H_2, ..., H_t adalah komponen-komponen dari G – V(C). Dari semua edge minimal graph, pilih G sebagai graf yang mempunyai maksimum t. Sekarang karena G 2-connected, maka harus ada sekurang-kurangnya dua edge yang mengawankan tiap H_i dan V(C). Akibatnya, $m \geq n + t$.

Sehingga tidak ada yang perlu dibuktikan jika $t \geq \frac{n-2\ell}{\ell-1}$. Misal bahwa $t < \frac{n-2\ell}{\ell-1}$. Maka H memuat suatu komponen, sebut H_1, yang mempunyai sekurang-kurangnya ℓ vertex. Karena G 2-connected dan c(G) = 2ℓ, maka H_1 tidak mungkin menjadi suatu path.

Misal P = i, x_1, x_2, ..., x_k, j adalah (i, j)-path terpanjang yang semua vertex internal nya dalam H_1 dan i, j $\in$ V(C). Karena G edge-minimal, maka $i \neq j$ dan tidak ada x_p, $2 \leq p \leq k-1$, dikawankan ke sebarang vertex dari C. Tentu saja $k \leq \ell - 1$. Sehingga H_1 memuat suatu vertex, katakan u_1, tidak dalam P, yang dikawankan ke suatu x_q , $1 \leq q \leq k$. Misal Q = x_q, u_1, u_2, ..., u_r, y adalah (x_q, y)-path yang vertex internal nya dalam H – V(P) dan y $\in$ V(P) $\cup$ V(C). Pemilihan dari P menjamin bahwa $r \leq k$. Sekarang pandang graf G′ yang dibentuk dari G dengan menghapus semua edge di antara {u_1, u_2, ..., u_r} dan V(P) $\cup$ V(C) serta dengan menambahkan edge u_1i dan u_rj dan mungkin beberapa edge dari

vertex-vertex $H_1 \backslash V(Q)$ yang sebelumnya dikawankan ke Q. Jelas $c(G) = 2\ell$, $\varepsilon(G') \leq \varepsilon(G)$ dan
$G' - V(C)$ mempunyai sekurang-kurangnya t + 1 komponen, yang mana kontradiksi dengan pemilihan dari G. Terbukti. □

Catatan 1 : Bukti di atas dapat digunakan untuk membuktikan bahwa ada edge-minimal graph G dengan n vertex dan $m \geq n + \frac{n-2\ell}{\ell-1}$ edge yang mempunyai circumference 2ℓ dan suatu cycle C dengan panjang 2ℓ sedemikian sehingga tiap komponen dari G – V(C) adalah suatu path.

Catatan 2 : Graf G* yang terdiri dari $\left\lceil \frac{n-2\ell}{\ell-1} \right\rceil + 2$ disjoin (a, b)-path yang masing-masing mempunyai panjang ℓ kecuali mungkin satu yang mempunyai panjang kurang dari ℓ adalah suatu edge minimal graph dengan n vertex yang mempunyai circumference 2ℓ.

Teorema 5 :
Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $2\ell + 1 \geq 5$. Maka

$$m \geq n + \frac{n-2\ell-1}{\ell-1} \qquad (2)$$

Bukti :
Misal C = {1, 2, ..., $2\ell + 1$ } adalah cycle dalam G dengan panjang $2\ell + 1$. Pandang graf H = G – V(C). Misal H_1, H_2, ..., H_t adalah komponen-komponen dari G – V(C). Dari semua edge minimal graph, pilih G sebagai graf yang mempunyai maksimum t. Sekarang karena G 2-connected, maka harus ada sekurang-kurangnya dua edge yang

mengawankan tiap H_i dan V(C). Akibatnya, $m \geq n + t$.

Sehingga tidak ada yang perlu dibuktikan jika $t \geq \frac{n-2\ell-1}{\ell-1}$. Misal bahwa $t < \frac{n-2\ell-1}{\ell-1}$. Maka H memuat suatu komponen, sebut H_1, yang mempunyai sekurang-kurangnya ℓ vertex. Karena G 2-connected dan $c(G) = 2\ell + 1$, maka H_1 tidak mungkin menjadi suatu path.

Misal $P = i, x_1, x_2, ..., x_k, j$ adalah (i, j)-path terpanjang yang semua vertex internal nya dalam H_1 dan $i, j \in V(C)$. Karena G edge-minimal, maka $i \neq j$ dan tidak ada x_p, $2 \leq p \leq k - 1$, dikawankan ke sebarang vertex dari C. Tentu saja $k \leq \ell - 1$. Sehingga H_1 memuat suatu vertex, katakan u_1, tidak dalam P, yang dikawankan ke suatu x_q , $1 \leq q \leq k$. Misal $Q = x_q, u_1, u_2, ..., u_r, y$ adalah (x_q, y)-path yang vertex internal nya dalam $H - V(P)$ dan $y \in V(P) \cup V(C)$. Pemilihan dari P menjamin bahwa $r \leq k$. Sekarang pandang graf G′ yang dibentuk dari G dengan menghapus semua edge di antara $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ dan $V(P) \cup V(C)$ serta dengan menambahkan edge u_1i dan u_rj dan mungkin beberapa edge dari vertex-vertex $H_1 \backslash V(Q)$ yang sebelumnya dikawankan ke Q. Jelas $c(G) = 2\ell$, $\varepsilon(G') \leq \varepsilon(G)$ dan
G′ - V(C) mempunyai sekurang-kurangnya t + 1 komponen, yang mana kontradiksi dengan pemilihan dari G. Terbukti. □

Catatan 3 : Bukti di atas dapat digunakan untuk membuktikan bahwa ada edge-minimal graph G dengan n vertex dan $m \geq n + \frac{n-2\ell-1}{\ell-1}$ edge yang mempunyai circumference $2\ell + 1$ dan suatu cycle C dengan panjang $2\ell + 1$ sedemikian sehingga tiap komponen dari G – V(C) adalah suatu path.

Dari Teorema 4 dan teorema 5 diperoleh Teorema 6 seperti di bawah ini.

Teorema 6 :

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $c \geq 4$. Maka

$$m \geq n + \left\lceil \frac{n-c}{\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 1} \right\rceil \qquad (3)$$

Bukti :

Dari (1) dalam Teorema 4 dan (2) dalam Teorema 5 diperoleh (3). Terbukti. □

KESIMPULAN

Misal G adalah suatu graf 2-connected dengan n vertex dan m edge yang mempunyai circumference $c \geq 4$, maka batas bawah banyaknya edge dalam G tergantung pada banyaknya vertex dan circumference dari G, tepatnya seperti ditunjukkan dalam (3) pada Teorema 6.

SARAN

Bagi peneliti yang tertarik dengan permasalahan ini dapat melanjutkan hasil yang diperoleh pada Teorema 6, tetapi dengan mengkarakterisasi graf ekstremalnya yang berkaitan pada batas-batas kritisnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976). *Graph Theory with Applications*. London : The MacMillan Press.

Caccetta, L. (1989). Graph theory in network design and analysis, in Kulli, V.R. (ed.). *Recent Studies in Graph Theory, pp26-63.* India : Vishwa International Publications.

Caccetta, L., and Vijayan, K. (1987). *Applications of graph theory.* ARS Combinatoria, 23 (B) pp21-77.

Kusmayadi, T.A. (1995). *Investigation of Parameters concerning Graphs and Their Complements*. Master's Thesis. School of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, Australia.

Nordhaus, E.A. and Gaddum, J.W. (1956). On complementary graphs. *American Mathematical Monthly*, 63 pp175-177.

Woodall, D.R. (1976). Maximal circuits of graphs I. *Acta Mathematica. Academiae Scientiarum Hungaricae*, 28 pp77-80.

MODEL SIS DENGAN PERTUMBUHAN LOGISTIK

Eti Dwi Wiraningsih[1], Widodo[2], Lina Aryati[2], Syamsuddin Toaha[3]

[1]Universitas Negeri Jakarta
[2]Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
[3]Universitas Hassanudin Makassar

ABSTRAK

Dalam paper ini akan dibahas model interaksi satu spesies yang dipengaruhi oleh penyakit, dimana spesies tidak mengalami kekebalan setelah terinfeksi, sehingga kelas rentan berpindah ke kelas terinfeksi ketika terjadi penginfeksian dan akan kembali ke kelas rentan setelah penyembuhan (SIS). Lebih khusus model ini dibatasi dengan asumsi penyakit mengurangi reproduksi dan penyakit berelasi dengan kematian. Jika tidak ada penyakit, maka model merupakan persamaan logistik biasa, dengan pertumbuhan terbatas.

Selanjutnya akan akan dianalisa kestabilan dan perilaku asimtotis di sekitar titik ekuilibriumnya.

***Kata kunci** : Model SIS, Model pertumbuhan logistik*

I. Latar Belakang

Patogen seperti virus, bakteri dan protozoa memberikan pengaruh terhadap dinamika populasi induk (Anderson dan May, 1978, 1986; May dan Anderson, 1978; Hethcote dan Lewin, 1989; Begon dan Bowers, 1995; Grenfell dan Dobson, 1995). Sebagai contoh, infeksi penyakit dapat merubah ukuran atau densitas dari populasi induk.

Infeksi penyakit disebut tipe SIS jika spesies tidak mengalami kekebalan setelah terinfeksi, sehingga kelas rentan berpindah ke kelas terinfeksi ketika terjadi penginfeksian dan akan kembali ke kelas rentan setelah penyembuhan. Jika spesies mengalami kekebalan sementara setelah sembuh, maka penyakit dikatakan bertipe SIRS. Model SIR adalah kasus khusus dari model SIRS dimana kekebalan bersifat permanen, sehingga spesies yang telah sembuh tidak akan pernah kehilangan kekebalannya. Disini akan dibahas modifikasi SIS pada populasi induk dengan penyakit berhubungan dengan kematian dan penyakit mengurangi reproduksi.

Selengkapnya bahasan dalam makalah ini meliputi formulasi baru dan analisis model untuk penyakit tipe SIS dalam satu populasi induk dengan pertumbuhan logistik

dengan kedua jenis tipe insiden, yaitu insiden *frequency-dependent* dan insiden *mass-action*. Untuk model dengan insiden *frequency-dependent*, dua kuantitas threshold menentukan tiga kemungkinan perilaku asimtotik dari solusinya. Kemungkinan yang pertama adalah bahwa penyakit pergi dari populasi induk dan ukuran populasi mendekati kapasitas batas. Kemungkinan kedua adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik dan ukuran populasi mendekati suatu titik ekuilibrium baru di bawah kapasitas batas. Kemungkinan ketiga adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik, tetapi kematian yang disebabkan oleh infeksi lebih kuat daripada angka pertumbuhan populasi maksimum, sehingga ukuran populasi induk menuju nol (kepunahan). Ketiga kemungkinan ini beralasan secara intuitif, tetapi tidak terjadi dalam suatu populasi induk dengan insiden mass-action.

II. Rumuan Masalah, Tujuan dan Manfaat Penelitian

Berdasarkan latar belakang diatas, permasalahan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana membentuk model SIS dengan pertumbuhan logistik.
2. Bagaimana menentukan titik-titik ekuilibrium dari model SIS dengan pertumbuhan logistik.
3. Bagaimana perilaku asimtotis model SIS dengan pertumbuhan logistik.

Sesuai dengan rumusan masalah, tujuan dari penelitian adalah:

1. Membentuk model SIS dengan pertumbuhan logistik.
2. Menentukan titik-titik ekuilibriumnya.
3. Menganalisa perilaku asimtotis di sekitar titik ekuilibriumnya.

Penelitian ini merupakan kajian dalam matematika terapan khususnya bidang pemodelan matematika, sehingga adanya penelitian ini diharapkan dapat memberikan sumbangan bagi penelitian-penelitian selanjutnya di bidang terkait.

III. Dasar Teori

Kestabilan Dinamik

Teorema 3.1.(Willems, 1970).

Titik ekuilibrium *x=0* dari sistem linier $\dot{x} = f(x) = Ax$ adalah stabil jika semua nilai eigen dari matrik *A* mempunyai bagian real tak positif dan stabil asimtotik jika semua nilai eigen dari matrik *A* mempunyai bagian real negatif. Titik ekuilibrium tersebut tidak stabil jika paling tidak satu nilai eigen mempunyai bagian real positif. Dan tidak stabil secara lengkap jika semua nilai eigen dari matrik A mempunyai bagian real positif.

Mari kita pikirkan suatu sistem dua dimensi tak linier

$$\dot{x} = f_1(x, y) \qquad (3.1)$$
$$\dot{y} = f_2(x, y),$$

yang mana f_1 dan f_2 memenuhi syarat Lipschitz lokal dalam kedua *x* dan *y*.

Teorema 3.2 Poincare – Bendinxson, (lihat Coddington dan Levinson (1955), Burton (1985) dan Glendening (1994)).

Diberikan $\phi(t)$ solusi dari sistem (3.1) yang terbatas untuk *t≥0*. Salah satu dipenuhi

(i) ϕ periodik

(ii) ϕ konvergen ke solusi periodik, atau

(iii) ada barisan $\{t_n\} \to \infty$ sedemikian hingga $\phi(t_n) \to (x_0, y_0)$ dan $f_1(x_e, y_e) = f_2(x_e, y_e) = 0$, i.e., (x_e, y_e) adalah titik ekuilibrium dari sistem (3.1).

Teorema 3.3 Kriteria Bendixson, (lihat Wiggin (1990)).

Diberikan f_1 dan f_2 mempunyai turunan parsial pertama yang kontinyu dalam dmain yang terhubung sederhana G dan andaikan bahwa $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ tidak berubah tanda dalam G dan tidak menghilangkan identitas dalam subhimpunan terbuka G. Maka tidak ada lintasan tertutup dalam G.

Teorema 3.4 Bendixson – Dulac, (lihat Wiggins (1990) dan Glendening (1994)). Andaikan ada suatu fungsi smooth B(x,y) sedemikian hingga

$$\frac{\partial(B(x,y)f_1(x,y))}{\partial x}+\frac{\partial(B(x,y)f_2(x,y)}{\partial y}$$

tidak merubah tanda atau menghilangkan identitas dalam subhimpunan terbuka yang terhubung sederhana dalam domain G. Maka tidak ada lintasan tertutup di seluruh G.

3.2. Model Logistik

Model Logistik, kadangkala disebut model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik. Model ini kontinyu terhadap waktu yang dinyatakan oleh persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x}{K}\right).$$

Konstanta *r*, diasumsikan positif, disebut rata-rata pertumbuhan intrinsik, karena proporsi rata-rata pertumbuhan untuk *x* kecil akan mendekati *r*. Konstanta positif *K* dimaksudkan sebagai kapasitas batas lingkungan yaitu ketahanan populasi maksimum. Populasi pada tingkat *K* kadang juga disebut tingkat kejenuhan, karena untuk populasi besar lebih banyak kematian daripada kelahiran. Solusi model logistik dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ adalah

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}.$$

Model Logistik mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu x = 0 dan *x* = *K*. Titik ekuilibrium pertama tidak stabil sedangkan titik ekuilibrium kedua stabil asimtotik global.

IV. Insiden *frequency-dependent* dan insiden *mass-action*

Insiden penyakit didefinisikan sebagai jumlah individu terinfeksi baru dari individu rentan yang disebabkan adanya kontak dengan individu terinfeksi. Seringkali disebut juga sebagai insiden horizontal untuk membedakannya dari insiden vertikal, yaitu jumlah kelahiran baru yang mendapatkan infeksi dari induknya. Pandang $X(t)$ sebagai jumlah individu rentan dalam waktu *t*, $Y(t)$ jumlah individu terinfeksi pada

waktu *t* dan $N(t)$ ukuran populasi induk pada waktu *t*. Bentuk insiden dalam persamaan untuk dY/dt sering dituliskan sebagai $\lambda X = crpX$, dimana efisiensi penginfeksian λ adalah perkalian dari rata-rata kontak *c*, probabilitas kontak dengan penginfeksi *r*, dan probabilitas bahwa rata-rata kontak dengan penginfeksi cukup untuk mentranmisikan infeksi ρ. Biasanya probabilitas pentransmisian ρ diasumsikan konstan. Probabilitas *r* adalah bagian kelompok terinfeksi secara lokal, yang sering diasumsikan sama dengan bagian terinfeksi Y/N dalam seluruh populasi. Sehingga titik insidensi dapat dinyatakan dengan $cpXY/N$ dengan rata-rata kontak *c* khusus.

Asumsi umum adalah bahwa rata-rata kontak lokal *c* proporsional terhadap densitas lokal yang sama dengan densitas global N/A, dimana *A* adalah area tetap yang digunakan oleh populasi tersebut. Dengan konstanta *k* yang proporsional, insiden diatas menjadi $kpXY/A = \eta XY$. Bentuk insiden ini sering disebut sebagai insiden *mass-action* yang telah digunakan secara luas dalam pemodelan epidemik (Anderson dan May,1991).

Dilain pihak jika β menyatakan jumlah rata-rata cukup kontak (kontak cukup untuk transmisi) dari binatang rentan persatuan waktu. Karena Y/N adalah proporsi binatang terinfeksi persatuan waktu dari satu binatang rentan maka $\beta Y/N$ adalah jumlah rata-rata cukup kontak dari satu binatang rentan dengan binatang terinfeksi. Jumlah kasus baru persatuan waktu $(\beta Y/N)X$ adalah jumlah rata-rata cukup kontak dari semua binatang rentan dengan binatang terinfeksi persatuan waktu. Hethcote menyebut bentuk $\beta XY/N$ insiden standar**.** Karena insiden ini bergantung pada frekuensi penginfeksian Y/N, Begon et al menyebut bentuk $\beta XY/N$ sebagai *insiden frequency-dependent***.**

Kedua hukum tersebut sering digunakan dalam model infeksi penyakit. Dalam kasus insiden *mass-action*, parameter η tidak mempunyai interpretasi epidemiologis, tetapi jika dibandingkan dengan rumus insiden *frequency-dependent* menunjukkan bahwa $\beta = \eta N$ yang secara implicit memberikan asumsi bahwa rata-rata kontak β merupakan fungsi linear naik dari ukuran populasi. Tetapi kebergantungan linier ini tidak didukung oleh data, karena transmisi antara dua binatang ditentukan terutama oleh interaksi lokal diantara binatang yang biasanya bebas atau hanya bergantung lemah

pada ukuran populasi. Dari berbagai kajian ditemukan juga bahwa insiden (standar) *frequency-dependent* lebih realistik daripada insiden *mass-action*.

V. Model SIS dengan pertumbuhan logistik.

Model SIS satu populasi induk dengan pertumbuhan terbatas dirumuskan dengan

$$\begin{aligned} dN/dt &= \left[a - \frac{\chi rN}{K}\right]\left[X + (1-f)Y\right] - \left[b + \frac{(1-\chi)rN}{K}\right]N - \alpha_0 Y \\ &= r(1-N/K)N - (\alpha_0 + af)Y + f\chi rYN/K, \\ dX/dt &= \left[a - \frac{\chi rN}{K}\right]\left[X + (1-f)Y\right] - \left[b + \frac{(1-\chi)rN}{K}\right]X - g(X,Y,N) + \gamma Y, \qquad (5.1) \\ dY/dt &= g(X,Y,N) - \left[\gamma + b + \alpha_0 + \frac{(1-\chi)rN}{K}\right]Y, \end{aligned}$$

Dimana a adalah angka kelahiran per kapita individu rentan pada ukuran populasi yang sangat rendah dan f adalah penurunan angka kelahiran yang disebabkan adanya penginfeksian, sehingga $a(1-f)$ adalah angka kelahiran per kapita untuk individu terinfeksi pada ukuran populasi yang sangat rendah. Disini b adalah angka kematian alami per kapita pada ukuran populasi yang sangat rendah, $r = a - b$ adalah angka pertumbuhan per kapita net positif, χ adalah konstanta kombinasi konveks dengan $0 \le \chi \le 1$, K adalah kapasitas batas lingkungan, γ adalah angka kesembuhan per kapita, dan α_0 adalah angka kematian berhubungan dengan penginfeksian per kapita. Insiden $g(X,Y,N)$ adalah insiden frequency-dependent $\beta XY/N$ atau insiden mass-action βXY. Model SIS ini dan model SIRS yang analog dengan insiden *frequency-dependent* (standard) dan transmisi vertical, tetapi tanpa pengaruh infeksi mengurangi reproduksi, telah dipelajari oleh Gao dan Hethcote (1992).

Tanpa kehadiran penyakit persamaan dN/dt adalah persamaan diferensial logistic untuk pertumbuhan terbatas, sehingga solusi-solusinya dengan $N(0) > 0$ mendekati kapasitas batas K. Untuk $0 < \chi < 1$, angka kelahiran per kapita $a - \chi rN/K$ menurun dan angka kematian per kapita $b + (1-\chi)rN/K$ meningkat

sebagaimana naiknya ukuran populasi *N*; hal ini konsisten dengan sumber-sumber terbatas bersesuaian dengan kebergantungan densitas. Angka kelahiran bebas densitas ketika $\chi = 0$ dan angka kematian bebas densitas ketika $\chi = 1$. Angka kelahiran tidak mudah dianalisa untuk ukuran populasi *N* yang sangat besar, sehingga dipikirkan invarian positif subset dari kuadran pertama dengan $N < aK/\chi r$. Karena $N' < 0$ untuk $N > K$, semua lintasan solusi dalam subset diatas mendekati, masuk, atau menetap dalam subset tersebut dengan $N \le K$. Dari sini dianalisa lintasan solusi dengan $N = X + Y \le K$.

Model (5.1) dapat direduksi dengan menggunakan $I = Y/N$ dan $X/N = 1 - I$ menjadi system berikut

$$dN/dt = \left[r(1 - N/K) - (af + \alpha_0)I + f\chi rIN/K\right]N,$$
$$dI/dt = g^*(I,N) - \left[\gamma + a + \alpha_0 - (af + \alpha_0)I - \chi r(1 - fI)N/K\right]I. \qquad (5.2)$$

Disini insiden $g^*(I,N) = g(X,Y,N)/N$ adalah insiden *frequency-dependent* $\beta I(1-I)$ atau insiden *mass-action* $\beta I(1-I)N$. Model ini terletak dalam $D = \{(N,I) : 0 \le N \le K,\ 0 \le I \le 1\}$. Perilaku asimtotik diringkas dalam table 1 dengan definisi kuantitas threshold dan buktinya diberikan dalam bagian berikut.

5.1 Model SIS Logistik dengan insiden *frequency-dependent*

Dengan insiden *frequency-dependent* model (5.2) menjadi

$$dN/dt = \left[r(1 - N/K) - (af + \alpha_0)I + f\chi rIN/K\right]N.$$
$$dI/dt = \left[\beta(1-I) - (\gamma + a + \alpha_0) + (af + a_0)I + \chi r(1 - fI)N/K\right]I. \qquad (5.3)$$

Perilaku dari sistem ini dikontrol oleh tiga kuantitas threshold:

$$R_2 = \beta/(\gamma + a + \alpha_0 - \chi r),$$
$$R_1 = \beta/(\gamma + a + \alpha_0),$$

$$\phi = \frac{r}{(af + \alpha_0)[1-(\gamma + b + \alpha_0)\beta]}. \tag{5.4}$$

Catat bahwa $R_2 \geq R_1$. Sistem ini selalu mempunyai titik-titik equilibrium $E_1 = (0,0)$ dan $E_2 = (K,0)$. Jika $R_1 > 1$, maka titik equilibrium $E_3 = (0, I_3)$ berada dalam *D*, dimana

$$I_3 = \frac{\beta - (\gamma + a + \alpha_0)}{\beta - (af + \alpha_0)}. \tag{5.5}$$

Suatu titik equilibrium dalam interior *D* harus memenuhi persamaan-persamaan

$$\begin{aligned} r(1-N/K) - (af + \alpha_0)I + f\chi rIN/K = 0, \\ \beta(1-I) - (\gamma + a + \alpha_0) + (af + \alpha_0)I + \chi r(1 - fI)N/K = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Tabel 1. Perilaku asimtotik dari model SIS logistic.

Insiden frequency-dependent	$g = \beta XY/N \Rightarrow g^* = \beta(1-I)I$
Kasus 1: $1 \geq R_2 \geq R_1$	$N(0) > 0 \Rightarrow (N,I) \to E_2 = (K,0)$
Kasus 2: $R_2 > 1 \geq R_1$	$N(0) > 0,\ I(0) > 0 \Rightarrow (N,I) \to E_4 = (N_4, I_4)$
Kasus 3: $R_1 > 1$ & $\phi < 1$	$I(0) > 0 \Rightarrow (N,I) \to E_3 = (0, I_3)$
Kasus 4: $R_1 > 1$ & $\phi > 1$	$N(0) > 0,\ I(0) > 0 \Rightarrow (N,I) \to E_4 = (N_4, I_4)$

Insiden mass-action	$g = \beta XY \Rightarrow g^* = \beta(1-I)IN$
Kasus 1: $R_3 \leq 1$	$N(0) > 0 \Rightarrow (N,I) \to E_2 = (K,0)$
Kasus 2: $R_3 > 1$	$N(0) > 0,\ I(0) > 0 \Rightarrow (N,I) \to E_3 = (N_3, I_3)$

Menjumlah persamaan-persamaan ini menghasilkan persamaan linier

$$\beta(1-I) - (\gamma + b + \alpha_0) - r(1-\chi)N/K = 0. \tag{5.7}$$

Penyelesaikan (5.7) untuk rN/K dan substitusi ke dalam persamaan pertama dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_4(I) = f\chi\beta I^2 - cI + (\gamma + a + \alpha_0 - \chi r) = 0$, dimana $c = \beta(1+f\chi) - (1-\chi)(af+\alpha_0) - f\chi(\gamma + b + \chi_0)$. Karena $Q_4(1)$ selalu lebih kecil dari 0 dan $Q_4(0) > 0$ jika dan hanya jika $R_2 > 1$, ada solusi positif tunggal I_4 dalam interval $(0,1)$ jika dan hanya jika $R_2 > 1$. Penyelesaian (5.7) untuk *I* dan substitusi ke dalam persamaan kedua dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_5(N) = 0$ dengan $Q_5(0) = r - (af+\alpha_0)\left[1 - (\gamma + b + \alpha_0)/\beta\right]$, yang positif jika dan hanya jika $\phi > 0$. Juga $Q_5(K) = -\left[f(a - r\chi) + \alpha_0\right](1 - 1/R_2)$, yang negatif jika dan hanya jika $R_2 > 1$, sehingga ada solusi N_4 dalam interval $(0, K)$ jika $\phi > 1$ dan $R_2 > 1$. Dari sini kita punya titik equilibrium $E_4 = (N_4, I_4)$ dalam interior *D* jika $R_2 > 1$ dan $\phi > 1$.

Titik equilibrium $E_1 = (0,0)$ selalu repulsif dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I* jika dan hanya jika $R_1 \le 1$. Titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ selalu atraktif dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I* jika dan hanya jika $R_1 \le 1$. Pada sisi $I = 0$ dari *D* dengan $N(0) > 0$, $N(t) \to K$ jika $t \to \infty$. Ketika titik equilibrium I_3 berada dalam *D*, ini selalu atraktif dalam arah *I* dan atraktif dalam arah *N* jika $\phi < 1$.

Ada kemungkinan empat kasus. Dalam kasus 1 dengan $1 \ge R_2 \ge R_1$, hanya titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)$ yang merupakan titik saddle dan titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ adalah titik ekuilibrium yang atraktif. Dengan teori Poincare-Bendixson (Strogatz, 1994), semua solusi dalam *D* dengan $N(0) > 0$ mendekati titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ jika $t \to \infty$.

Perhatikan kasus 2 dengan $R_2 > 1 \ge R_1$. Secara epidemik, periode penginfeksian rata-rata $1/\gamma$ seharusnya lebih kecil daripada rata-rata panjang waktu populasi yang rendah $1/a$, sehingga $\gamma > a > r = a - b$. Asumsi bahwa $\gamma > r$ dan $R_2 > 1$ berakibat bahwa $\beta > \gamma + a + \alpha_0 - \chi r > af + \alpha_0$. Sekarang $1 \ge R_1$ berakibat bahwa

$$1 > \frac{r\beta}{(af+\alpha_0)\left[\gamma + a + \alpha_0 - (\gamma + b + \alpha_0)\right]} = \frac{\beta}{af + \alpha_0} > 1.$$

Dari sini titik-titik ekuilibrium dalam D adalah titik sadel $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ dan titik interior equilibrium $E_4 = (N_4, I_4)$. Dengan menggunakan kriteria Dulac dengan pengali $1/(IN)$ dalam system (5.3), kita dapatkan bahwa D tidak mempunyai solusi periodic (Strogatz,1994). Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam D dengan $I(0) > 0$ dan $N(0) > 0$ mendekati ekuilibrium interior $E_4 = (I_4, N_4)$. Penjelasan secara intuisi dari kasus 2 adalah bahwa penyakit jarang meninggalkan endemic karena $R_2 > 1 \geq R_1$, tetapi angka pertumbuhan per kapita alami *r* mendominasi angka kematian perkapita yang dibangkitkan oleh adanya penginfeksian diberikan oleh $af + \alpha_0$ karena $\phi > 1$, sehingga ukuran populasi menuju *steady state* N_4 yang lebih kecil daripada kapasitas batas *K*.

Dalam kasus 3 dengan $R_1 > 1$ dan $\phi < 1$, titik-titik equilibrium dalam D adalah node tak stabil $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ (repulsive dalam arah *I*) dan node atraktif $E_3 = (0, I_3)$. Disini $R_1 > 1$ berakibat bahwa $\beta > af + \alpha_0$, sehingga criteria Dulac diatas masih dapat digunakan. Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam D dengan $I(0) > 0$ mendekati titik equilibrium $E_3 = (0, I_3)$. Penjelasan intuisi dari kasus 3 adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik (i.e. $\liminf_{t\to\infty} I(t) > 0$) karena $R_2 > 1$ dan angka kematian yang bisebabkan oleh infeksi per kapita yang diberikan oleh $af + \alpha_0$ secara kuat mempengaruhi angka pertumbuhan alami per kapita *r* karena $\phi < 1$, sehingga populasi mengalami kepunahan.

Dalam kasus 4 dengan $R_1 > 1$ dan $\phi > 1$, titik-titik equilibrium dalam D adalah node tak stabil $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ (repulsif dalam arah *I*), titik sadel $E_3 = (0, I_3)$ (repulsif dalam arah *N*), dan titik equilibrium $E_4 = (N_4, I_4)$. Dengan criteria Dulac diatas dan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam D dengan $N(0) > 0$ dan $I(0) > 0$ mendekati titik equilibrium interior $E_4 = (N_4, I_4)$. Penjelasan intuisi dari kasus 4 adalah bahwa penyakit meninggalkan endemik karena $R_2 > 1$ dan angka kematian per kapita yang disebabkan adanya infeksi diberikan oleh $af + \alpha_0$ didominasi oleh angka pertumbuhan alami per kapita r karena $\phi > 1$, sehingga ukuran populasi menuju *steady state* N_4 yang lebih kecil daripada kapasitas batas *K*.

Catat bahwa I_3 adalah serupa dengan I_e dalam model SIS dengan pertumbuhan exponensial, sehingga $r-(af+\alpha_0)I_3=\rho$, dimana

$$\rho = r-(af+\alpha_0)I_e = \frac{r\beta-(af+\alpha_0)[\beta-(\gamma+b+\alpha_0)]}{\beta-(af+\alpha_0)} .$$

Dari sini untuk model SIS dengan insiden *frequency-dependent*, dan salah satu pertumbuhan exponensial atau pertumbuhan logistik, tanda dari ρ menentukan apakah populasi menjadi punah ($(\rho<0 \Leftrightarrow \phi<1)$ atau bertahan hidup $(\rho>0 \Leftrightarrow \phi>1)$.

5.2. Model SIS dengan insiden *mass-action*

Untuk insiden mass-action sistem (5.2) menjadi

$$\begin{aligned} dN/dt &= [r(1-N/K)-(af+\alpha_0)I+f\chi rIN/K]N , \\ dI/dt &= [\beta(1-I)N-(\gamma+a+\alpha_0)+(af+\alpha_0)I+\chi r(1-fI)N/K]I \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Perilaku dari system ini dinyatakan oleh threshold quantity

$$R_3 = \beta K/(\gamma+a+\alpha_0-\chi r) .$$

Sistem tersebut selalu mempunyai titik-titik equilibrium $E_1=(0,0)$ dan $E_2=(K,0)$. Suatu titik equilibrium dalam interior *D* harus memenuhi persamaan-persamaan serupa pada (5.6) dan (5.7), tetapi dengan $\beta(1-I)$ digantikan oleh $\beta(1-I)N$. Penyelesaian analog dengan (5.7) untuk N/K dan substitusi ke dalam persamaan pertama dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_6(1)=0$ dengan $Q_6(1)<0$ dan $Q_6(0)>0$ jika dan hanya jika $R_3>1$. Dari sini ada solusi positif I_3 dalam interval $(0,1)$ jika dan hanya jika $R_3>1$. Penyelesaian analog dengan (5.7) untuk I dan substitusi modifikasi persamaan kedua dalam (5.6) menghasilkan persamaan kuadrat $Q_7(N)=0$ dengan $Q_7(0)<0$ dan $Q_7(K)<0$ jika $R_3>1$, sehingga terdapat suatu solusi N_3 dalam interval

$(0,K)$ jika $R_3 > 1$. Untuk alasan ini kita punya titik ekuilibrium $E_3 = (N_3, I_3)$ dalam interior D jika $R_3 > 1$.

Titik ekuilibrium $E_1 = (0,0)$ adalah titik sadel yang repulsive dalam arah *N* dan atraktif dalam arah *I*. Titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ selalu atraktif dalam arah *N* dan atraktif dalam arah I jika $R_3 < 1$. Pada sisi $I = 0$ dari D dengan $N(0) > 0$, $N(t) \to K$ untuk $t \to \infty$. Menggunakan persamaan simultan untuk titik ekuilibrium $E_3 = (N_3, I_3)$, matriks Jacobian pada E_3 adalah

$$J = \begin{bmatrix} -\left[r - (af + \alpha_0) I_3\right] & -r\left(1 - \frac{N_3}{K}\right)\frac{N_3}{I_3} \\ \frac{\left[(\gamma + a + \alpha_0) + (af + \alpha_0) I_3\right]}{N_3} & -\left[\beta N_3 - (\gamma + a + \alpha_0) + \frac{\chi r N_3}{K}\right] \end{bmatrix}.$$

Menggunakan $Q_6(0) > 0$ jika $R_3 > 1$ dan $Q_6(r/(af + \alpha_0)) < 0$, kita lihat bahwa $I_3 < r/(af + \alpha_0)$ dan entri Jacobian $j_{11} < 0$. Menggunakan $Q_7(K) < 0$ jika $R_3 > 1$ dan $Q_7\left((\gamma + a + \alpha_0)/(\beta + \chi r / K)\right) > 0$, kita lihat bahwa $N_3 > (\gamma + a + \alpha_0)/(\beta + \chi r / K)$ dan $j_{22} < 0$. Dari sini matriks Jacobian mempunyai tanda negatif dan determinan positif, sehingga titik ekuilibrium $E_3 = (N_3, I_3)$ selalu stabil asimtotik lokal jika $R_3 > 1$.

Disini ada dua kasus. Dalam kasus 1 dengan $R_3 < 1$, titik ekuilibrium di D yang sadel $E_1 = (0,0)$ dan titik ekuilibrium atraktif $E_2 = (K,0)$. Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam D dengan $N(0) > 0$ mendekati titik ekuilibrium $E_2 = (K,0)$ untuk $t \to \infty$. Dalam kasus 2 dengan $R_3 > 1$, titik-titik ekuilibrium di D adalah titik sadel $E_1 = (0,0)$, titik sadel $E_2 = (K,0)$ (repulsif dalam arah *I*), dan titik ekuilibrium atraktif interior local $E_3 = (N_3, I_3)$. Menggunakan criteria Dulac dengan pengali $C = 1/\left[IN(1-I)\right]$ dalam system (7.8), kita menemukan bahwa daerah D tidak mempunyai solusi periodik. Dengan teori Poincare-Bendixson, semua solusi dalam D dengan $I(0) > 0$ dan $N(0) > 0$ mendekati titik ekuilibrium interior $E_3 = (I_3, N_3)$.

VI. Kesimpulan dan Saran

Tujuan dari makalah ini adalah untuk menambah pengetahuan bahwa perbedaan bentuk insiden penyakit dalam model infeksi penyakit seringkali mengakibatkan perbedaan threshold dan perilaku asimtotik yang signifikan. Untuk model dengan infeksi penyakit dalam satu populasi induk tanpa regulasi diri, tetapi dengan infeksi mengurangi reproduksi, infeksi berelasi dengan kematian, dan insiden frequency-dependent, terdapat jumlah reproduksi yang menentukan perilaku asimtotik. Untuk model analog dengan insiden mass-action, perilaku asimtotik ditentukan oleh nilai dari angka pertumbuhan maximum dan infeksi berhubungan dengan angka kematian, sehingga tidak ada threshold jumlah reproduksi.

Penelitian selanjutnya dapat meninjau perilaku asimtotik model SIS dengan pertumbuhan eksponensial atau memodifikasi model SIS dengan dua populasi induk.

Daftar Pustaka

H. W. Hethcote, Three Basic Epidemiological Models, Biomathematics, Vol. 18, 119-144, (1989)

H. W. Hethcote, W. Wang dan Y. Li, Species Coexistence and Periodicity in Host-Host-Pathogen Models, J. Math. Biol. 51, 629-660, (2005).

M. Begon, R. G. Bowers, N. Kadianakis, D. E. Hodgkinson, Disease and Community Structure: The Importance of Host Self-Regulation in a host host-pathogen model. Am. Nat. 139, 1131-1150, (1992)

R. M. Anderson, R. M. May, Regulation and Stability of Host-Parasite Population Interaction I: Regulatory Processes, J. Animal Ecology 47, 219-247, (1978)

R. M. Anderson, R. M. May, Population Biology of Infectious Diseases: Part I. Nature 280, 361-367, (1979)

R. A. Saenz dan H. W. Hethcote, Competing Species Models with an Infectious Disease, Math. Biosciences and Engineering, Vol. 3, 219-235, (2006)

Aplikasi Model Dinamik Pada Bursa Efek

.

Oleh :
Joko Purwanto

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas: (1) sifat estimator dari parameter model linier , (2)sifat estimator dari parameter model dinamik , dan (3) aplikasi model dinamik . Untuk menentukan estimator dan menguji sifat estimator dengan pendekatan *Generalized least square* (GLS) yang dibawa ke bentuk *Ordinary least square* (OLS) dan meminimalkan OLS dengan pendekatan *Sum Squares Error* (SSE)., kemudian diberikan aplikasi untuk pemodelan data volume saham Hasil analisis diperoleh: (1) Estimator β pada model linier bersitat tak bias (2) Pada model dinamik estimator γ merupakan estimator yang bersifat konsisten, sedangkan untuk estimator β merupakan estimator yang bersifat BLUE. (3) Hasil pemodelan diperoleh model panel dinamik yang paling baik berbentuk: VOLUME_MANDIRI = -818883806.5 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_MANDIRI + 978463.5272*OPEN_

Kata Kunci : Model dinamik,GLS,OLS,BLUE.

1.Pendahuluan

Statistika adalah alat untuk mengambil keputusan. Keputusan yang diambil statistika adalah untuk: menjawab karakteristik populasi menggunakan sampel, menjawab distribusi peubah acak (populasi) menggunakan estimasi distribusi yang sesuai berdasarkan dari sampel yang telah ditentukan, menjawab parameter populasi menggunakan statistik sampel. Sebelum keputusan diambil perlu dilakukan analisis data. Banyaknya cara untuk menganalisis data tergantung bagaimana karakteristik data dan tujuan menganalisis. Ketepatan dalam mengambil analisis data akan memeberikan kesimpulan yang tepat, begitu pula sebaliknya.

Model dinamik merupakan bentuk model linier yang dipengaruhi oleh faktor internal yang merupakan model linier berbentuk auto regresi dan faktor eksternal yang merupakan model linier berbentuk regresi. Data yang digunakan untuk menganalisa berbentuk data panel. Keunggulan dari data panel adalah: dapat memberikan data lebih informatif, dapat digunakan untuk memodelkan variabilitas dari individu.

Kelemahannya adalah: desain eksperimen lebih komplek, resiko data tidak lengkap lebih besar .

Banyak sekali jenis-jenis data panel yang belum dikembangkan atara lain antara lain: *linier panel*, *dynamic linier model*, *panel count data*, *panel probit logit*, *dynamic panel probit logit*, *panel duration data,* dan *dynamic panel duration data (*Rencher ,1978).

Hasil penelitian yang berhubungan dengan model dinamik adalah: Wibowo (2004) membahas Estimasi fungsi Mean Data Panel Count dengan Pseudolikelihood semi parametrikdan Maddala (2005) membahas tentang beberapa isu analisis data panel,logit efek tetap dan model probit, random efek model probit. Makalah ini akan membahas bagaimana aplikasi model dinamik pada bursa saham, bagaimana bentuk model matematikanya.

2. Model Linier

Data panel memiliki bentuk model linier $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon$. Untuk menentukan estimator β dapat dilakukan dengan pedekatan *Sum Squares Error (SSE)* dengan estimator β akan ditunjukan pada teorema berikut:

Teorema 1

Jika $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon$. dimana $\boldsymbol{X}$ ukuran n × (k +1)dan rank X = k+1 <n , maka $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{(X'X)}^{-1}\boldsymbol{X'y}$ dan nilai β minimum.

Teorema 2

Jika $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{X}\beta$ dan $\boldsymbol{Cov}(\boldsymbol{y}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$, maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan estimator tak bias dan $\boldsymbol{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$. Bila berbentuk *Generalized least square* (GLS) maka harga estimatornya adalah

$\beta_{\boldsymbol{GLS}} = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{y}^{*} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$ dan

$Var(\hat{\beta}_{OLS}) = cov(\hat{\beta}_{OLS}) = cov[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y] = \sigma^2(\boldsymbol{X'}\Omega^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}$.

Hal ini berarti $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{OLS}}$ bersifat tak bias.

Hal ini berarti $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{OLS}}$ bersifat tak bias.

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{OLS}}) = \mathrm{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \mathrm{cov}[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}]$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{2}(\mathbf{X'X})^{-1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.2)$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{OLS}}) = \boldsymbol{\sigma}^{2}(\mathbf{X'X})^{-1}$ merupakan variansi minimum.

Andaikan ada estimator linier lain $\boldsymbol{\beta}_{1} = (\mathbf{C} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{y}$. Agar tidak bias maka harus berlaku **CX=0** , sehingga

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}_{1} - \boldsymbol{\beta}) = \left(\mathbf{C} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right)'\boldsymbol{\sigma}^{2}\mathbf{I}\left(\mathbf{C} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\right)$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{2}\{\mathbf{C'C} + \mathbf{C'(X'X)}^{-1}\mathbf{X'} + \mathbf{X(X'X)}^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{X'X})^{-1}\}.$$

Karena ada **C'C** $\geq$ **0**, maka $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}_{1}) \geq \mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{OLS}})$ sehingga diperoleh $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{OLS}})$ yang minimum. Karena $\hat{\beta}$ tak bias dan memiliki varian minimum maka bersifat BLUE.

3. Model Dinamik

Model dinamik secara umum memiliki model linier

$$\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\,\boldsymbol{y}_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\beta + \alpha_{i} + \lambda_{t} + \varepsilon_{it} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Untuk menentukan estimator γ dan β serta menguji apakah estimator tersebut bersifat BLUE, akan dilakukan model-model pengujian berikut:

1. *Fixed Effect Model*

Pada kasus *fixed effect* asumsi yang harus dipenuhi adalah α_{i} dan λ_{t} bersifat Deterministik. Bila kasus *fixed effect* model dengan *one way* (satu jalan), maka persamaan (3.1) akan berubah menjadi

$$\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\,\boldsymbol{y}_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\beta + \alpha_{i} + \varepsilon_{it}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

Untuk menentukan estimator γ, dilakukan dengan asumsi bahwa tidak ada korelasi dari faktor Eksternal, sehingga persamaan (1.1) berubah menjadi

$$\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\,\boldsymbol{y}_{i,t-1} + \alpha_{i} + \varepsilon_{it}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.2)$$

Dengan estimator γ adalah:

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_{it} - \bar{\boldsymbol{y}}_{i})'(\boldsymbol{y}_{i,t-1} - \bar{\boldsymbol{y}}_{i,-1})}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_{i,t-1} - \bar{\boldsymbol{y}}_{i,-1})^{2}} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_{it} - \bar{\boldsymbol{y}}_{i})'(\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_{i})/\boldsymbol{NT}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_{i,t-1} - \bar{\boldsymbol{y}}_{i,-1})^{2}/\boldsymbol{NT}}, \qquad (1.3)$$

atau untuk menyederhanakan bentuk ditulis

$$\hat{\gamma} = \gamma + \gamma^{*} \quad \text{……..(1.4)}$$

Estimator γ bersifat bias. Sehingga estimator γ tidak bersifat BLUE, tetapi konsisten, sehingga dapat dipakai sebagai estimator.

Untuk menentukan estimator β sangat ditentukan oleh bentuk model liniernya. Adapun bentuk-bentuk model linier adalah:

1.1. *Fixed Effect Model One Way* (dengan Satu Arah)

Pandang persamaan model $\boldsymbol{y}_i = \gamma \boldsymbol{y}_{i,-1} + \boldsymbol{X}_i\beta + \alpha_i + \varepsilon_i$ dan dengan mengalikan matrik transformasi $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_T - \frac{1}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{ee}'$

diperoleh model linier

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_i - \gamma \boldsymbol{y}_{i,-1}) = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{QX}_i\beta + \boldsymbol{Q}\varepsilon_i). \quad \text{……..(1.5)}$$

Dengan estimator β

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{QX}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}'_i\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_i - \gamma \boldsymbol{y}_{i,-1})\right) \quad \text{…….…(1.6)}$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2\left(\sum X'_i QX_i\right)^{-1}. \quad \text{….. ……. …...…(1.7)}$$

1.2. *Fixed Effect Model TwoWay* (dengan Dua Arah)

fixed effect Model two way mempunyai bentuk model linier $\boldsymbol{y}_{it} = \gamma \boldsymbol{y}_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\beta + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$. dengan mengalikan matrik transformasi

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}_N \otimes \boldsymbol{E}_T$$
$$= \left(\boldsymbol{I}_N - \frac{1}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{e}'_N\right) \otimes \left(\boldsymbol{I}_T - \frac{1}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e}_T\boldsymbol{e}'_T\right)$$

diperoleh model linier

$$\sum_{i=1}^{N} Q(y_i - \gamma y_{i,-1}) = \sum_{i=1}^{N} QX'_i\beta + \sum_{i=1}^{N} Q\varepsilon_i. \quad \text{……(1.8)}$$

Dengan estimator β

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{QX}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}'_i\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_{i,-1})\right) \quad \text{…….(1.9)}$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \left(\sum X'_i QX_i \right)^{-1}. \quad \text{……..……………………(1.10)}$$

2. *Random Effect Model*

Pada kasus *random effect* asumsi yang harus dipenuhi adalah $\boldsymbol{\alpha}_i \sim \boldsymbol{N}(0, \boldsymbol{\sigma}_\alpha^2)$ *independent identically distribured* (iid), $\lambda_t \sim \boldsymbol{N}(0, \sigma_\lambda^2)$ iid , ε_{it} dan $\boldsymbol{x}_{it}$ *independent*, dan $\boldsymbol{x}_{it}$ bersifat stokastik,dengan model linier

$$\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\, \boldsymbol{y}_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\beta + \alpha_i + \varepsilon_{it} \quad \text{…………………………….(2.1)}$$

dengan: $|\gamma| < 1$, i = 1,2,3…N dan t = 1,2 3,…T

Untuk menentukan estimator γ ,dilakukan dengan asumsi bahwa tidak ada korelasi dari faktor Eksternal, sehingga persamaan (2.1) berubah menjadi

$$\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\, \boldsymbol{y}_{i,t-1} + \alpha_i + \varepsilon_{it} \quad \text{…..…………..……………………… (2.2)}$$

dan diperoleh estimator γ

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{y}_{it}\boldsymbol{y}_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{y}_{i,t-1}^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} (\alpha_i + \varepsilon_{it})\boldsymbol{y}_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{y}_{i,t-1}^2} \quad \text{…………………………..(2.3)}$$

untuk menyederhanakan bentuk persamaan (2.3) ditulis

$$\hat{\gamma} = \gamma + \gamma^* \quad \text{…………………………………………………..……(2.4)}$$

Estimator γ bersifat bias. Sehingga estimator γ tidak bersifat BLUE tetapi bersifat konsisten,.maka dapat digunakan sebagai estimator.

Untuk menentukan estimator β sangat ditentukan oleh bentuk model liniernya. Adapun bentuk-bentuk model linier adalah:

2.1 *Random Effect Model One Way* (dengan Satu Arah)

Pandang persamaan model linier $\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\, \boldsymbol{y}_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\beta + \alpha_i + \varepsilon_{it}$ dengan mengalikan matrik transformasi $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_T - \frac{1}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{ee}'$

diperoleh model linier

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Q}\,(\boldsymbol{y}_i - \gamma\,\boldsymbol{y}_{i,-1}) = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}_i\,\beta + \boldsymbol{Q}\varepsilon_i)\,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5)$$

Dengan estimator β

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}'_i\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_{i,-1})\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2\left(\sum X'_i\,QX_i\right)^{-1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

2.2 Model *Random EffectTwoWay* (dengan Dua Arah)

Pendekatan model *random effect two way* mempunyai bentuk model linier $\boldsymbol{y}_{it} = \gamma\,\boldsymbol{y}_{i,t-1} + \boldsymbol{x}_{it}\beta + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$. Dengan $\boldsymbol{\alpha}_i \sim \boldsymbol{N}(0, \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^2)$ *independent identically distribured* (iid), $\lambda_t \sim \boldsymbol{N}(0, \sigma_{\lambda}^2)$ iid , ε_{it} dan $\boldsymbol{x}_{it}$ independen, dan $\boldsymbol{x}_{it}$ bersifat stokastik dengan mengalikan matrik transformasi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{E}_N \otimes \boldsymbol{E}_T \\ &= \left(\boldsymbol{I}_N - \frac{1}{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{e}'_N\right)\otimes\left(\boldsymbol{I}_T - \frac{1}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e}_T\boldsymbol{e}'_T\right)\end{aligned}$$

diperoleh model linier

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y} - \gamma\,\boldsymbol{y}_{-1}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}\beta + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{Q}\varepsilon\,. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2.8)$$

Dengan estimator β

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}'_i\,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_i\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.9)$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2\left(\sum X'_i\,QX_i\right)^{-1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$$

4. Aplikasi Model Dinamik

Bagian ini akan membahas penerapan dari hasil pembahasan sebelumnya, sebagai bentuk aplikasi dari hasil kajian teoritis yang telah dibahas.

Data dan Jenisnya

Data yang digunakan untuk melakukan uji penerapan adalah data Finansial yang terdiri dari satu variabel terikat dan empat variabel bebas. Sebagai variabel terikat Volume, dan variabel bebas yaitu: *Open, High, Low* dan *Close*. Jenis data dari variabel terikat dan variabel bebas masing-masing berbentuk data *cross-section* yang

terdiri dari data Saham Bank Mandiri, Indek Saham Gabungan Jakarta (JKSE), Indek Saham Gabungan Amerika (DJI), Indek Saham Gabungan Jepang (NIKKEI) sedangkan banyaknya pengulangan 20 hari dengan 5 hari kerja tiap minggu. Data akan diawali pada tanggal 5 Juni 2006 dan diakhiri tanggal 30 juni 2006.

Analisis Data

Untuk menganalisis data digunakan program *Eviews 5.0* dengan langkah-langkah:

(1) menyiapkan data dalam program *Eviews* yang berbentuk data *Cross-section* lalu dibawa dalam bentuk data *pooling.*

(2) melakukan simulasi model-model persamaan.

(3) menentukan model yang terbaik. Untuk menentukan rambu-rambu model estimator yang terbaik adalah: (a) melihat signifikansi koefisien variabel bebas dengan cara membandingkan harga Prob dengan $\alpha = 5\%$, bila harga prob. $> \alpha = 5\%$ maka variabel tersebut harus dikeluarkan dari model linier.(b) mencari harga Adjusted R-Squared yang tertinggi.(c) mencari harga Log Likehood yang terbesar.

(4) Menentukan estimator model yang terbaik. Dengan memperhatikan tahapan pemodelan, sebagai model awal yang digunakan untuk menentukan model terbaik untuk Volume saham-saham adalah $\boldsymbol{y} = \gamma \boldsymbol{y}_{-1} + \beta_0 + \beta \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2 + \beta_3 \boldsymbol{x}_3 + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$.

Hasil dan Pembahasan

Dari hasil simulasi diperoleh model *Fixed effect* dengan *cross section* berikut:

Dependent Variable: VOLUME?
Method: Pooled Least Squares
Date: 10/02/06 Time: 10:16
Sample: 6/05/2006 6/30/2006
Included observations: 20
Cross-sections included: 4
Total pool (balanced) observations: 80

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.89E+08	1.84E+09	-0.102813	0.9184
VOLUME_1?	-0.285131	0.109499	-2.603961	0.0112
OPEN?	978463.5	566436.6	1.727402	0.0883
LOW?	-885421.8	537294.9	-1.647925	0.1037
Fixed Effects (Cross)				

_MANDIRI--C	-8.19E+08
_JKSE--C	1.68E+08
_DJI--C	1.97E+09
NIKKEI--C	-1.31E+09

Effects Specification

Cross-section fixed (dummy variables)

R-squared	0.852973	Mean dependent var	5.88E+08
Adjusted R-squared	0.840888	S.D. dependent var	1.05E+09
S.E. of regression	4.19E+08	Akaike info criterion	42.62919
Sum squared resid	1.28E+19	Schwarz criterion	42.83762
Log likelihood	-1698.168	F-statistic	70.58438
Durbin-Watson stat	1.830841	Prob(F-statistic)	0.000000

.

Dengan model regresinya adalah:
Estimation Command:
==========
LS(CX=F) VOLUME? VOLUME_1? OPEN? LOW?

Estimation Equations:
==========
VOLUME_MANDIRI = C(5) + C(1) + C(2)*VOLUME_1_MANDIRI + C(3)*OPEN_MANDIRI + C(4)*LOW_MANDIRI

VOLUME_JKSE = C(6) + C(1) + C(2)*VOLUME_1_JKSE + C(3)*OPEN_JKSE + C(4)*LOW_JKSE

VOLUME_DJI = C(7) + C(1) + C(2)*VOLUME_1_DJI + C(3)*OPEN_DJI + C(4)*LOW_DJI

VOLUMENIKKEI = C(8) + C(1) + C(2)*VOLUME_1NIKKEI + C(3)*OPENNIKKEI + C(4)*LOWNIKKEI.

Berdasarkan model yang diperoleh dari hasil simulasi menunjukan bahwa data Volume berbentuk *Fixed effect* dengan *croos-section. Fixed effect* artinya pengaruh berbagai karakteristik bersifat konstan dalam waktu atau diantara individual dapat dilihat. Dengan kata lain masing-masing individu (Volume Mandiri, JKSE ,DJI, NIKKEI)berpengaruh secara individu.

Sedangkan hasil estimasi model *Fixed Effect* dari Volume memiliki bentuk model linier $y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + x_{it}\beta + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$. Volume yang berbentuk model *Fixed Effect* dengan *Cross-section* artinya data Volume bersifat *deterministik*. Dengan kata lain dari pengamatan masa lalu, keadaan masa datang dapat diramalkan secara pasti. Sehingga pengaruh dari masing-masing karakteristik yang bersifat konstan terhadap

waktu maupun pengaruh karakteristik diantara individual dapat dilihat secara sendiri-sendiri.. Artinya Volume Mandiri,Volume JKSE ,Volume DJI dan Volume NIKKEI secara sendiri-sendiri dapat dilihat.

Hasil analisis diperoleh model regresi masing-masing:

VOLUME_MANDIRI = -818883806.5 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_MANDIRI + 978463.5272*OPEN_MANDIRI - 885421.795*LOW_MANDIRI

VOLUME_JKSE = 167759461.2 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_JKSE + 978463.5272*OPEN_JKSE - 885421.795*LOW_JKSE

VOLUME_DJI = 1966002233 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_DJI + 978463.5272*OPEN_DJI -978463.5272*LOW_DJI

VOLUMENIKKEI = -1314877887 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1NIKKEI + 978463.5272*OPENNIKKEI - 885421.795*LOWNIKKEI

dengan Adjuted R-squared = 0.840888. Berdasarkan persamaan regresi tersebut terlihat bahwa Volume Bank Mandiri dipengaruhi oleh faktor internal yaitu Volume Bank Mandiri sebelumnya dengan koefisien - 0.2851306365 dan pengaruh eksternal dari harga pembukaan dengan koefisien 978463.5272,dan harga terendah dengan koefisien - 885421.795. Volume Jakarta (JKSE) dipengaruhi oleh faktor internal yaitu Volume Jakarta sebelumnya dengan koefisien - 0.2851306365 dan pengaruh eksternal dari harga pembukaan dengan koefisien 978463.5272,dan harga terendah dengan koefisien - 885421.795. Volume Saham Gabungan Amerika (DJI) dipengaruhi oleh faktor internal yaitu Volume DJI sebelumnya dengan koefisien - 0.2851306365 dan pengaruh eksternal dari harga pembukaan dengan koefisien 978463.5272, dan harga terendah dengan koefisien - 978463.5272. Sedangkan untuk Volume Saham Jepang (NIKKEI) dipengaruhi oleh faktor internal yaitu Volume NIKKEI sebelumnya dengan koefisien - 0.2851306365 dan pengaruh eksternal dari harga pembukaan dengan koefisien 978463.5272, dan harga terendah dengan koefisien - 885421.795. Berdasarkan model persamaan tersebut di atas, faktor yang memberikan sumbangan positif adalah harga pembukaan masing-masing saham.sedangkan yang memberikan sumbangan negative adalah volume saham sebelumnya dan harga terendah. Bila dilihat kostanta dari masing-

masing saham memberikan variansi yang berbeda. Begitu juga bila dilihat koefisien masing-masing saham juga berbeda ini berarti nilai penjualan masing-masing saham setiap harinya memberikan pendapatan yang berbeda pula. Dengan menganggap pengaruh eksternal tetap, maka setiap kenaikan 1% Volume saham sebelumnya akan memberikan penurunan Volume masing-masing saham hari ini sebesar 28,51% dan setiap penurunan 1% Volume saham sebelumnya akan memberikan kenaikan Volume saham hari ini masing-masing sebesar 28,51% . Begitu pula sebaliknya dengan menganggap pengaruh internal konstan, maka setiap kenaikan 1% harga pembukaan masing-masing saham akan memberikan kenaikan Volume saham masing-masing sebesar 9784.63527 dan diikuti penurunan harga terendah yang bervariasi dari masing-masing saham. Setiap penurunan 1% harga pembukan masing-masing saham akan memberikan penurunan volume saham masing-masing sebesar 9784.63527 dan diikuti kenaikan harga terendah yang bervariasi dari masing-masing saham.

Berdasarkan pandangan statistik semata-mata, garis regresi yang dihasilkan mencocokkan data cukup baik Bila dilihat harga Adjuted R-squared = 0.840888 berarti terdapat hubungan yang sangat erat antara Volume, *Open , High, Low* dan *Close* atau dengan kata lain bahwa 84,09 % variansi Volume saham-saham dipengaruhi *Open , High, Low* dan *Close.* Akibat adanya variansi dalam uji statistk berakibat realisasi Volume saham-saham Bank dilapangan selalu naik turun(*Fluktuatif*) tetapi selalu membentuk kecenderungan naik. Naik turunnya Volume saham tidak akan keluar jauh dari model dan harga variansi. Bila suatu ketika Volume saham keluar jauh dari model maka yang perlu dikaji adalah mengganti model dengan menggunakan data-data yang ada atau pengaruh sesaat dari faktor internal dan eksternal yang bersifat temporer dan dalam waktu yang singkat akan kembali pada posisi semula.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis di atas dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Estimator γ untuk data *fixed effect* diperoleh :

$$\hat{\gamma} = \gamma + \gamma^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \bar{y}_i)'(y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{i,t-1} - \bar{y}_{i,-1})^2} + \frac{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y_{it}} - \boldsymbol{\bar{y}_i})'(\varepsilon_{\boldsymbol{it}} - \bar{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}})/\boldsymbol{NT}}{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{y_{i,t-1}} - \boldsymbol{\bar{y}_{i,-1}})^2/\boldsymbol{NT}}$$

sedangkan untuk data *random effect* diperoleh :

$$\hat{\gamma} = \gamma + \gamma^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} y_{it}\, y_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} y_{i,t-1}^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} (\alpha_i + \varepsilon_{it})\, y_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} y_{i,t-1}^2}$$

Estimator β baik dari *fixed effect* maupun *random effect* diperoleh

$$\hat{\beta} = (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} y^*$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} X' Q X \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X' Q (y - \gamma y_{-1}) \right)$$

dengan Q matrik transformasi dan γ harganya seperti di atas

2. Estimator γ merupakan estimator yang bias, sehingga tidak bersifat BLUE, namun merupakan estimator yang konsisten, sehigga untuk nilai T yang besar dapat digunakan sebagai estimator. Sedangkan untuk estimator β merupakan estimator yang bersifat BLUE.
3. Hasil simulasi diperoleh model linier yang paling baik untuk menentukan Volume saham :

   VOLUME_MANDIRI = -818883806.5 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_MANDIRI + 978463.5272*OPEN_MANDIRI - 885421.795*LOW_MANDIRI

   VOLUME_JKSE = 167759461.2 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_JKSE + 978463.5272*OPEN_JKSE - 885421.795*LOW_JKSE

   VOLUME_DJI = 1966002233 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1_DJI + 978463.5272*OPEN_DJI -978463.5272*LOW_DJI

   VOLUMENIKKIE = -1314877887 - 189223016.9 - 0.2851306365*VOLUME_1NIKKIE + 978463.5272*OPENNIKKIE - 885421.795*LOWNIKKIE.

6. Daftar Pustaka

Baltagi, B.H .(2002). *Econometric Analysis of Panel Data,* John Wiley & Sons LTD, Toronto.

Hsiao, Cheng, (2001).*Analysis of Panel Data*,Cambridge University,California.

Lancaster, T.(1998). *PanelData Analises*. Lectures notes, Telburg, University.

Maddala, G.S.(2005). *Limited Dependen Vareabel Models Using Panel Data,* The Journal of Human Resources. P 275-306.

PurwantoJoko , Rosadi Dedi , Danardono.(2006). *Analisis Data Panel Model Dinamik*, Thesis Matematika,Tidak dipublikasikan, Yokyakarta: Universitas Gadjah Mada..

Rencher, A.C.(1978).*Linear Model in Statistics*, John Wiley & Sons LTD, Singapura.

Wibowo, Wahyu. (2004). *Estimasi fungsi Mean Data Panel Count dengan Pseudolikelihood Semiparametrik*, Tesis,Pascasarjana,UGM

Lampiran

VOLUME

Date	MANDIRI	JKSE	DJI	NIKKEI
30-Jun-06	8,347,000	44,515,100	3,049,560,064	108,800
29-Jun-06	1,918,500	72,286,400	2,621,250,048	87,600
28-Jun-06	1,862,000	51,834,900	2,085,490,048	96,400
27-Jun-06	6,166,500	75,568,896	2,203,130,112	94,000
26-Jun-06	4,884,000	48,677,300	1,878,579,968	93,200
23-Jun-06	2,074,000	41,696,100	2,017,270,016	98,200
22-Jun-06	3,259,000	71,186,800	2,148,179,968	109,000
21-Jun-06	4,365,000	137,333,792	2,361,230,080	95,000
20-Jun-06	8,740,000	168,756,000	2,232,950,016	91,800
19-Jun-06	4,917,500	171,105,696	2,517,199,872	86,400
16-Jun-06	19,056,000	141,178,208	5,900,000	130,200
15-Jun-06	9,816,000	196,905,696	2,775,480,064	112,600
14-Jun-06	16,233,000	104,315,400	5,040,000	146,000
13-Jun-06	22,488,000	145,860,400	3,215,770,112	118,600
12-Jun-06	8,273,500	53,161,200	2,247,010,048	116,000
9-Jun-06	6,657,500	142,699,696	2,214,000,128	219,200
8-Jun-06	13,153,000	137,929,600	3,543,790,080	171,400
7-Jun-06	11,846,000	85,747,600	2,644,169,984	122,200
6-Jun-06	17,212,500	184,781,408	2,697,649,920	96,200
5-Jun-06	6,903,500	18,544,500	2,313,469,952	89,600

VOLUME _1

Date	MANDIRI	JKSE	DJI	NIKKEI
30-Jun-06	1,918,500	72,286,400	2,621,250,048	87,600
29-Jun-06	1,862,000	51,834,900	2,085,490,048	96,400
28-Jun-06	6,166,500	75,568,896	2,203,130,112	94,000
27-Jun-06	4,884,000	48,677,300	1,878,579,968	93,200
26-Jun-06	2,074,000	41,696,100	2,017,270,016	98,200
23-Jun-06	3,259,000	71,186,800	2,148,179,968	109,000
22-Jun-06	4,365,000	137,333,792	2,361,230,080	95,000
21-Jun-06	8,740,000	168,756,000	2,232,950,016	91,800
20-Jun-06	4,917,500	171,105,696	2,517,199,872	86,400
19-Jun-06	19,056,000	141,178,208	5,900,000	130,200
16-Jun-06	9,816,000	196,905,696	2,775,480,064	112,600
15-Jun-06	16,233,000	104,315,400	5,040,000	146,000
14-Jun-06	22,488,000	145,860,400	3,215,770,112	118,600
13-Jun-06	8,273,500	53,161,200	2,247,010,048	116,000
12-Jun-06	6,657,500	142,699,696	2,214,000,128	219,200
9-Jun-06	13,153,000	137,929,600	3,543,790,080	171,400
8-Jun-06	11,846,000	85,747,600	2,644,169,984	122,200
7-Jun-06	17,212,500	184,781,408	2,697,649,920	96,200
6-Jun-06	6,903,500	18,544,500	2,313,469,952	89,600
5-Jun-06	9,350.00	1,324.52	11,048.24	15,500.92

HIGH

Date	MANDIRI	JKSE	DJI	NIKKEI
30-Jun-06	9,750.00	1,311.62	11,288.86	15,521.22
29-Jun-06	9,600.00	1,279.12	11,225.06	15,137.58
28-Jun-06	9,350.00	1,277.76	11,026.07	14,998.01
27-Jun-06	9,450.00	1,292.31	11,064.09	15,207.38
26-Jun-06	9,500.00	1,290.17	11,089.07	15,216.78
23-Jun-06	9,600.00	1,290.16	11,098.67	15,126.52
22-Jun-06	9,750.00	1,313.68	11,127.73	15,138.47
21-Jun-06	9,650.00	1,301.17	11,165.91	14,713.43
20-Jun-06	9,650.00	1,295.11	11,066.73	14,845.71
19-Jun-06	9,500.00	1,300.86	11,098.99	14,918.60
16-Jun-06	9,550.00	1,309.53	11,045.04	14,976.67
15-Jun-06	9,050.00	1,259.69	11,049.85	14,593.85
14-Jun-06	8,850.00	1,239.29	10,816.99	14,458.82
13-Jun-06	9,050.00	1,256.18	10,893.04	14,658.23
12-Jun-06	9,300.00	1,273.11	10,969.32	14,845.04
9-Jun-06	9,500.00	1,274.75	11,015.67	14,825.48
8-Jun-06	9,200.00	1,265.71	11,032.15	14,990.04
7-Jun-06	9,400.00	1,303.88	11,107.48	15,433.29
6-Jun-06	9,450.00	1,328.17	11,140.45	15,507.78
5-Jun-06	9,850.00	1,359.53	11,259.96	15,784.95

LOW

Date	MANDIRI	JKSE	DJI	NIKKEI
30-Jun-06	9,600.00	1,301.70	11,100.11	15,333.10
29-Jun-06	9,350.00	1,271.39	10,974.36	14,975.78
28-Jun-06	9,200.00	1,266.31	10,869.02	14,824.80
27-Jun-06	9,300.00	1,281.60	10,920.73	15,095.11
26-Jun-06	9,250.00	1,276.43	10,937.06	14,987.77
23-Jun-06	9,400.00	1,283.23	10,932.82	14,865.57
22-Jun-06	9,450.00	1,298.46	10,954.83	14,812.17
21-Jun-06	9,450.00	1,287.92	10,952.43	14,482.96
20-Jun-06	9,300.00	1,277.02	10,895.28	14,621.87
19-Jun-06	9,250.00	1,286.40	10,886.63	14,772.14
16-Jun-06	9,000.00	1,271.55	10,984.29	14,679.35
15-Jun-06	8,900.00	1,236.43	10,788.34	14,417.70
14-Jun-06	8,550.00	1,222.28	10,699.25	14,045.53
13-Jun-06	8,650.00	1,232.18	10,653.23	14,218.60
12-Jun-06	9,050.00	1,258.57	10,767.61	14,580.87
9-Jun-06	8,950.00	1,243.49	10,842.89	14,389.31
8-Jun-06	8,800.00	1,229.95	10,726.15	14,496.96
7-Jun-06	9,250.00	1,282.08	10,897.76	15,095.15
6-Jun-06	9,200.00	1,305.67	10,890.24	15,340.93
5-Jun-06	9,500.00	1,342.90	11,025.75	15,622.75

CLOSE

Date	MANDIRI	JKSE	DJI	NIKKEI
30-Jun-06	9,750.00	1,310.26	11,150.22	15,505.18
29-Jun-06	9,500.00	1,274.74	11,190.80	15,121.15
28-Jun-06	9,350.00	1,272.05	10,973.56	14,886.11
27-Jun-06	9,350.00	1,285.63	10,924.74	15,171.81
26-Jun-06	9,350.00	1,283.85	11,045.28	15,152.40
23-Jun-06	9,600.00	1,290.16	10,989.09	15,124.04
22-Jun-06	9,500.00	1,303.45	11,019.11	15,135.69
21-Jun-06	9,550.00	1,293.29	11,079.46	14,644.26
20-Jun-06	9,550.00	1,294.97	10,974.84	14,648.41
19-Jun-06	9,400.00	1,295.05	10,942.11	14,860.35
16-Jun-06	9,500.00	1,309.53	11,014.54	14,879.34
15-Jun-06	9,000.00	1,241.65	11,015.19	14,470.76
14-Jun-06	8,750.00	1,234.20	10,816.91	14,309.56
13-Jun-06	8,750.00	1,236.57	10,706.14	14,218.60
12-Jun-06	9,150.00	1,273.11	10,792.58	14,833.01
9-Jun-06	9,350.00	1,274.75	10,891.92	14,750.84
8-Jun-06	9,100.00	1,241.33	10,938.82	14,633.03
7-Jun-06	9,350.00	1,287.18	10,930.90	15,096.01
6-Jun-06	9,450.00	1,316.94	11,002.14	15,384.86
5-Jun-06	9,500.00	1,349.04	11,048.72	15,668.31

Analisis fraktal emisi sinyal ULF dan kaitannya dengan gempa bumi di Indonesia

Sarmoko Saroso

Pusat Pemanfaatan Sains Antariksa LAPAN
Jl. Dr. Djundjunan No. 133, Bandung 40173
email: sarmoko@bdg.lapan.go.id

Abstrak

Anomali sinyal ULF pada variasi medan geomagnet adalah merupakan salah satu fenomena yang diyakini kebenarannya dalam studi elektromagnetik yang berhubungan dengan kejadian gempa bumi, seperti terjadinya emisi dari kerak bumi yang berasal dari sumber gempa. Dari studi terdahulu telah banyak ditemukan pertanda anomali sinyal ULF sebelum kejadian gempa bumi berskala besar. Untuk membuktikan kebenaran fenomena tersebut dan untuk menjelaskan hubungan antara fenomena elektromagnetik dan mekanisme fisis yang mungkin terkait, telah dilakukan analisis data geomagnet di Kototabang yang berhubungan dengan kejadian gempa Sumatera. Studi kasus dilakukan untuk mengamati anomali sinyal ULF yang berhubungan dengan gempa Aceh yang terjadi pada tanggal 26 Desember 2004 dan gempa Nias yang terjadi pada tanggal 28 Maret 2005 dengan menggunakan metode analisis fraktal. Dalam analisis fraktal, penentuan anomali emisi sinyal ULF dilakukan dengan menghitung dimensi fraktal dari deret waktu ULF. Untuk menentukan dimensi fraktal digunakan metode Higuchi karena dimensi fraktal yang dihitung dengan metode ini lebih stabil dibandingkan dengan metode lainnya. Hasil yang diperoleh menunjukkan terjadinya penurunan dimensi fraktal 1 bulan hingga beberapa minggu sebelum kejadian gempa besar tersebut. Hal ini merupakan indikasi dari fase awal terjadinya peningkatan aktivitas seismik yang kemungkinan terkait dengan variasi geomagnet yang diakibatkan oleh aktivitas lokal yang berasal dari litosfer yang dipicu oleh kejadian gempa bumi di Aceh dan Nias.

Kata kunci : Anomali sinyal ULF, dimensi fraktal, aktivitas seismik

Abstract

Anomalous ULF geomagnetic field change is one of the most convincing and promising phenomena for earthquake-related electromagnetic studies such as emissions from the crust of the source region. There has been a good deal of accumulated and convincing evidence of ULF magnetic signatures before large earthquakes as reported in the previous studies. In order to verify these phenomena preceding large earthquakes and to clarify the relationship between electromagnetic phenomena and possible physical mechanism, we have been investigated on the basis of ULF geomagnetic observation at Kototabang station associated with the Sumatra earthquakes. A case study is carried out in this work to investigate the pre-earthquake ULF geomagnetic anomalies during the Aceh earthquake on December 26, 2004 and Nias earthquake of March 28, 2005. For this aim, the fractal analysis by means of the Higuchi's method has been applied to the observed data. Results of this analysis show the decrease in fractal dimension one month to a few weeks before the earthquakes This suggests that the the decrease in fractal dimension might be related with the earthquake preparation phase of Aceh and Nias earthquakes.

1. PENDAHULUAN

Indonesia merupakan salah satu negara di dunia yang memiliki wilayah tektonik sangat aktif. Karena itu, sejumlah besar kejadian gempa yang kadang disertai tsunami dan erupsi gunungapi sering terjadi. Dalam kaitan dengan bencana itu, suatu kajian sains dan teknologi yang bersifat penanggulangan dan mitigasi terhadap bencana gempa dan erupsi gunungapi tersebut sudah sangat diperlukan. Salah satu kajian penting yang perlu di-lakukan adalah upaya untuk menentukan prekursor gempa bumi. Akhir-akhir ini, kemunculan anomali medan elektromagnetik yang berhubungan dengan kejadian gempa telah banyak dilaporkan. Perubahan medan magnet bumi pada pita frekuensi ULF (ultra low frequency, <3Hz) serta anomali transmisi gelombang elektromagnetik seperti gelombang OMEGA (VLF, very low frequency, kHz) dan hamburan gelombang radio FM (VHF, very high frequency, MHz) yang disebabkan oleh terganggunya ionosfer adalah merupakan kajian untuk menentukan prekursor gempa bumi yang menjanjikan bila diaplikasikan.

Dalam kaitan dengan kajian tersebut, analisis yang komprehensif terhadap perubahan pada variasi medan magnet bumi yang dikenal sebagai anomali emisi sinyal ULF merupakan kegiatan yang menjadi prioritas utama dalam penelitian ini. Pada awal 1990-an, beberapa hasil yang menarik dari penelitian medan elektromagnetik ULF (Ultra-Low Frequency) dilaporkan oleh Fraser-Smith et al. (1990), Kopytenko et al. (1993), dan Hayakawa et al. (1996). Dari hasil penelitian yang mereka peroleh telah dapat memotivasi beberapa peneliti lain untuk melakukan pengukuran medan elektomagnetik dalam berbagai frekuensi. Kejadian gempa Kobe 1995 memberikan dampak besar, karena perubahan medan elektromagnetik sebelum gempa terjadi dalam berbagai pita frekuensi dapat terdeteksi oleh beberapa peneliti yang melakukan penelitian di bidang tersebut secara independen.

Hasil pengamatan tersebut boleh jadi merupakan kasus pertama yang mana beberapa metode dapat mendeteksi tanda-tanda secara bersamaan untuk satu kejadian gempa, dengan stasiun observasi mereka yang berjarak ratusan kilometer dari episenter. Data yang terkumpul berupa perubahan geopotensial DC, sinyal gelombang radio VLF 1-9 kHz, sinyal puncak LF, fluktuasi komponen vertikal arus bumi frekuensi tinggi lebih dari 1 MHz, emisi 22.2 MHz, perilaku abnormal pada gelombang VLF sampai 10 kHz berupa transmisi gelombang Omega, dan gelombang balik modulasi frekuensi FM-VHF

77.1 MHz. Semua data tersebut menunjukkan anomali secara simultan pada frekuensi ULF, VLF, LF, HF, dan VHF yang terjadi 7 hari sebelum gempa Kobe terjadi, dan pada umumnya perubahan sinyal-sinyal dari frekuensi lebih tinggi terjadi lebih dekat dengan waktu kejadian gempa. Berdasarkan data tersebut dapat disimpulkan bahwa secara umum makin tinggi frekuensi sinyal elektromagnetik yang digunakan, maka tanda-tanda atau prekursor akan semakin dekat dengan waktu kejadian gempa. Untuk membuktikan kebenaran fenomena tersebut dan untuk menjelaskan hubungan antara fenomena elektromagnetik dan mekanisme fisis yang mungkin terkait, telah dilakukan analisis data geomagnet di Kototabang yang berhubungan dengan kejadian gempa Sumatra. Studi kasus dilakukan untuk mengamati anomali sinyal ULF yang berhubungan dengan gempa Aceh yang terjadi pada tanggal 26 Desember 2004 dan gempa Nias yang terjadi pada tanggal 28 Maret 2005 dengan menggunakan metode analisis fraktal. Dalam analisis fraktal, penentuan anomali emisi sinyal ULF dilakukan dengan menghitung dimensi fraktal dari deret waktu ULF.

2. ANALISIS DATA DAN HASIL

Untuk mengamati anomali pada variasi medan geomagnet yang berhubungan dengan kejadian gempa bumi yang berskala besar tersebut, diperlukan metoda pemrosesan sinyal yang dapat memisahkan antara gangguan yang berasal dari dalam bumi akibat adanya aktivitas seismik dengan gangguan yang ditimbulkan oleh aktivitas geomagnet yang berasal dari magnetosfer (badai magnet) dan dari matahari (variasi harian dan musiman). Untuk meminimalisasi gangguan tersebut, maka data geomagnet yang digunakan (komponen H, D, dan Z) adalah data tahun 2004-2006 dari stasiun Kototabang (0.20°LS, 100.32°BT), sepert terlihat pada gambar 1, dari pukul 22.00 sampai 02.00 waktu lokal, dengan sampling data 1 detik. Untuk menentukan anomali pada emisi sinyal ULF digunakan analisis fraktal (Feder, 1989; Turcotte, 1997; Hayakawa et al., 1999; Smirnova et al., 1999, 2001; Gotoh et al., 2003) dengan menggunakan metode Higuchi (Higuchi, 1988).

Dalam analisis fraktal, penentuan anomali emisi sinyal ULF dilakukan dengan menghitung dimensi fraktal dari deret waktu ULF. Untuk menentukan dimensi fraktal tersebut digunakan metode Higuchi (1988) yang memodifikasi metode BK (Burlaga and Klein, 1986) dengan cara membangun deret waktu yang baru $X_m(k)$ yang didefinisikan sebagai,

$$X_m(k); X(m), X(m+k), X(m+2k), ..., X(m+[\frac{N-m}{k}]\cdot k) \quad (\text{m} = 1,2,3,.....\text{k}) \qquad (1)$$

dengan m adalah waktu awal dan k interval waktu.

Selanjutnya didefinisikan panjang kurva $X_m(k)$ sebagai,

$$L_m(k) = \{(\sum_{i=1}^{[\frac{N-m}{k}]} | X(m+ik) - X(m+(i-1)\cdot k) |) \frac{N-1}{[\frac{N-m}{k}]\cdot k}\} \qquad (2)$$

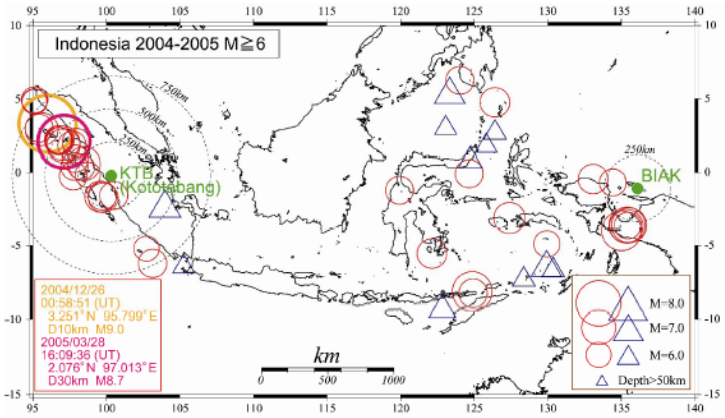
dengan $(N-1)/[\frac{N-m}{k}]\cdot k$ adalah faktor normalisasi.

Selanjutnya didefinisikan panjang kurva untuk interval waktu k, L(k) yaitu harga rata-rata dari $L_m(k)$ yang dapat dituliskan sebagai,

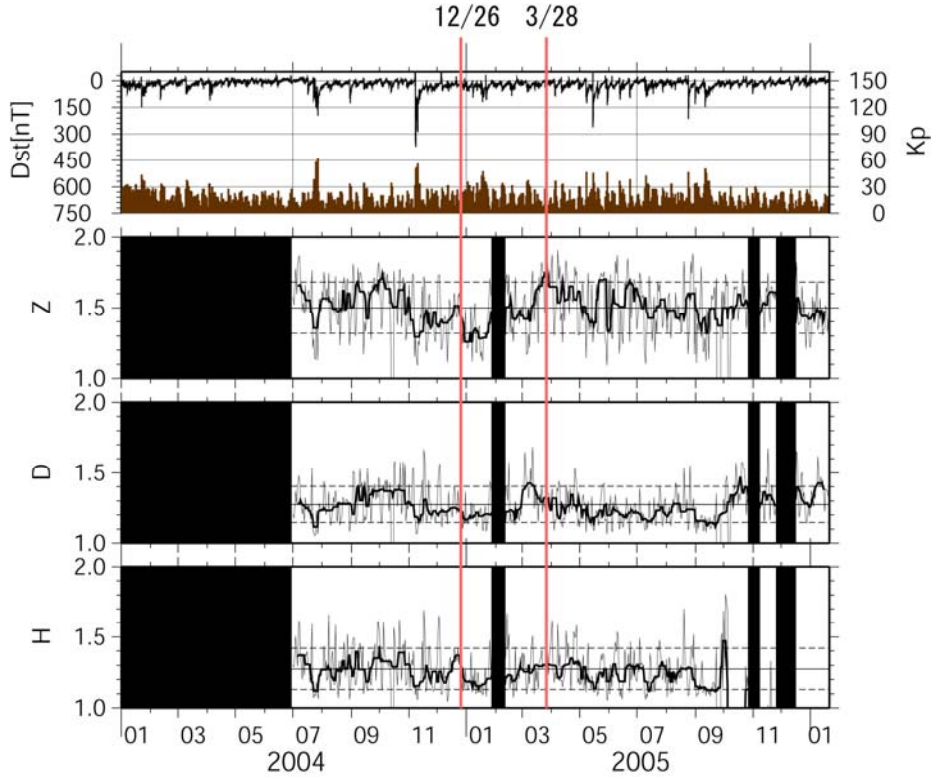
$$L(k) = \frac{\sum_{m=1}^{k} L_m(k)}{k} \qquad (3)$$

Bila L(k) diplot terhadap k, maka dimensi fraktal D dapat ditentukan dari hubungan L(k) $\propto k^{-D}$.

Dari perhitungan dimensi fraktal (D) dengan menggunakan metode Higuchi dan dengan menggunakan data geomagnet dari stasiun Kototabang untuk komponen H, D, dan Z dalam selang waktu antara pukul 22.00 sampai dengan 02.00 waktu lokal, dari bulan Juli sampai dengan Desember tahun 2004. Kemudian dimensi fraktal dihitung tiap 1 jam dan dihitung rata-ratanya untuk selang waktu 5 jam, yang hasilnya seperti terlihat pada gambar 2.



Gambar 1. Peta seismisitas gempa di Indonesia tahun 2004-2005, M ≥ 6



Gambar 2. Histogram paling atas menunjukkan indeks geomagnet Dst dan Kp, dari tanggal 1 Januari 2004 sampai dengan 31 Januari 2006. Histogram dibawahnya berturut-turut menunjukkan besarnya dimensi fraktal untuk komponen Z, D, dan H, dari bulan Juli 2004 sampai 31 Januari 2006. Garis tipis menunjukkan harga rata-rata jam-an sedangkan garis tebal menunjukkan harga median berjalan ± 5 hari. Garis horizontal menunjukkan harga rata-rata selama periode tersebut dan garis putus-putus menunjukkan ±σ (σ: standard deviasi). Garis vertikal yang tebal masing-masing menunjukkan saat kejadian gempa Aceh 26 Desember 2004 dan gempa Nias tanggal 28 Maret 2005.

Dari histogram di atas terlihat bahwa 1 bulan sampai beberapa minggu sebelum kejadian gempa Aceh 26 Desember 2004 dan gempa Nias 28 Maret 2005, terjadi penurunan dimensi fraktal. Hal ini mengindikasikan terjadinya proses SOC (Self Organizing Criticality) di litosfer yang merupakan awal dari peningkatan aktivitas seismik sebelum kejadian gempa.

3. Kesimpulan

Dengan memproses dan menganalisis data geomagnet di Kototabang tahun 2004- 2006, dapat ditentukan keterkaitan anomali sinyal ULF yang teramati di Kototabang dengan kejadian gempa di Aceh dan Nias. Dari hasil analisis fraktal emisi sinyal ULF, dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu :

1. Terjadi penurunan variasi dimensi fraktal beberapa minggu sebelum kejadian gempa Aceh 26 Desember 2004. Hal ini kemungkinan merupakan awal dari peningkatan aktivitas seismik se belum kejadian gempa.
2. Variasi temporal dari dimensi fraktal kemungkinan terkait dengan variasi geomagnet yang diakibatkan oleh aktivitas lokal yang berasal dari litosfer yang dipicu oleh kejadian gempa bumi di Aceh dan Nias.
3. Meskipun mekanisme fisis emisi sinyal ULF yang terkait dengan kejadian gempa masih belum dapat diterangkan dengan jelas, namun perlu diupayakan untuk dapat mengklarifikasi mekanisme tsb. Untuk itu, perlu dilakukan akumulasi kejadian emisi sinyal ULF yang terkait dengan kejadian gempa. Dengan menggunakan berbagai metode dan peralatan baik yang ada di bumi maupun pengamatan dari satelit, untuk kejadian yang sama adalah merupakan cara yang sangat diharapkan agar hasil yang diperoleh mempunyai reliabilitas yang tinggi.

Daftar Pustaka

Burlaga, L. F. and Klein, L. W. (1986), Fractal structure of the interplanetary magnetic field, J. Geophys. Res., 91, A1, 347–350.

Feder, J. (1989), Fractals, Plenum, New York.

Gokhberg, M. B., Morgounov, V. A., Yoshino, T., and Tomizawa, I. (1982), Experimental measurements of electromagnetic emissions possibly related to earthquake in Japan, J. Geophys. Res., 87, 7824-7828.

Gotoh, K., Hayakawa, M. and Smirnova, N. A. (2003), Fractal analysis of the ULF geomagnetic data obtained at Izu Peninsula, Japan in relation to the nearby earthquake swarm of June–August 2000, NHESS 3 3/4, pp. 229–236.

Hayakawa, M. and Fujinawa, Y., Editors (1994), Electromagnetic phenomena related to earthquake prediction, Terra Scientific Publishing Company (TERRAPUB), Tokyo, p. 677.

Hayakawa, M., Editor (1999), Atmospheric and Ionospheric Electromagnetic Phenomena Related with Earthquakes, Terra Scientific Publishing Company (TERRAPUB), Tokyo, p. 996.

Hayakawa, M., Ito, T. and Smirnova, T. (1999), Fractal analysis of ULF geomagnetic

data associated with the Guam earthquake on August 8, 1993, Geophys. Res. Lett. 26 18, pp. 2797–2800.

Hayakawa, M. and Molchanov, O. A., Editors (2002), Seismo Electromagnetics: Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere Coupling, Terra Scientific Publishing Company (TERRA-PUB), Tokyo, p. 477.

Higuchi, T. (1988), Approach to an irregular time series on the basis of fractal theory, Physica D 31, 277–283.

Miyakoshi, J. (1985), On some problems of the variation of self-potential observed in an active fault, the Yamasaki fault, Disaster Prev. Res. Inst. Ann. Rep., 28B, 127-132.

Molchanov O. A., M. Hayakawa (1998), On the generation mechanism of ULF seismogenic electromagnetic emissions, Physics of the earth and planetary interior, 105, 201-210.

Smirnova, N. A. (1999), The peculiarities of ground-observed geomagnetic pulsations as the background for detection of ULF emissions of seismic origin, In: Hayakawa, M., Editor, 1999, Atmospheric and Ionospheric electromagnetic phenomena associated with Earthquakes, Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, pp. 215–232.

Smirnova, N. A., Hayakawa, M. and Ito, T. (1999), Structure of the ULF geomagnetic noise in a seismoactive zone and its relation to the earthquake, In: Surya, C., Editor, , 1999. Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations (ICNF'99, Hong Kong, August 23–26), World Scientific, Singapore, pp. 471–474.

Smirnova, N. A., Hayakawa, M., Gotoh, K. and Volobuev, D. (2001), Scaling characteristics of the ULF geomagnetic fields at the Guam seismoactive area and their dynamics in relation to the earthquake, NHESS 1, pp. 119–126.

Sobolev, G.. A. (1975), Application of electric method to the tentative short-term forecast of Kamchatka earthquakes, Pure Appl. Geophys., 113, 229-235.

Turcotte, D. L. (1997), Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, (Second edition.), Cambridge University Press 397.

Warwick, J. W., Stoker, C., and Meyer, T. R. (1982), Radio emission associated with rock fracture: Possible application to the great Chilean earthquake on May 22, 1960, J. Geophys. Res., 87, 2851-2859.

PENGUJIAN HIPOTESIS RATA-RATA BERURUT UNTUK MEMBANDINGAN TINGKAT KEBOCORAN DI DAERAH DINDING GINGIVAL MENGGUNAKAN TIGA MACAM BAHAN TAMBALAN SEMENTARA

(Pendekatan Parametrik)

H. Bernik Maskun

Staf Jurusan Statistika Universitas Padjadjaran

Abstrak

Jika melalui suatu eksperimen, ingin dibuktikan bahwa efek dari perlakuan membentuk sebuah urutan dengan hipotesis,

$$H_1 : \quad \mu_1 \le ... \le \mu_k$$

untuk menguji hipotesis tersebut digunakan statistik uji berbentuk :

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} n_j [\hat{\mu}_j - \bar{y}_{[1,k]}]^2 / s_o^2 = \sum_{j=1}^{m} N_{[t_j]} [\bar{y}_{[t_j]} - \bar{y}_{[1,k]}]^2 / s_o^2$$

dengan

$$s_o^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j [\bar{y}_j - \bar{y}_{[1,k]}]^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2$$

daerah kritis $T_k \ge C$, dengan C ditentukan melalui

$$\alpha = \sum_{m=2}^{k} p_{m,k} P\left[\beta_{[(m-1)/2,(n-m)/2]} \ge C\right] \qquad .... \quad (*)$$

Variat $\beta_{[m-1)/2,(n-m)/2]}$ dalam persamaan (*) berdistribusi Beta dengan parameter(m-1)/2 dan (n-m)/2. Apabila σ^2 diketahui , statistik uji di atas diperoleh dengan mengganti s_0^2 oleh σ^2 dalam T_k dan distribusi Beta oleh Distribusi χ^2 dengan dk = m-1 (Chacko, 1963)

Kata Kunci : Distribusi Beta, Chi-Square, Rata-Rata Berurut

1. Latar Belakang

Penutupan akses kavitas pada gigi dengan perawatan saluran akar merupakan faktor yang penting dilakukan untuk mencegah masuknya mikroorganisme, cairan

rongga mulut maupun sisa makanan ke dalam saluran akar. Penutupan ini tidak hanya untuk menutup kavitas antar kunjungan saja tetapi juga menjaga keutuhan mahkota selama perawatan saluran akar (menurut Madison (1992) dan Kazemi (1994)).

Rulianto (1985) menyatakan bahwa premixed zinc oxide-calcium sulfate cement (Cavit G) sebagai penutup kavita kelas I merupakan bahan tambalan sementara yang paling kecil kebocorannya dibandingkan dengan zinc oxide eugenol dan semen fletcher. Tingkat kebocoran yang paling besar terdapat pada semen fletcher sedangkan semen zinc oxide eugenol tingkat kebocorannya berada di atas semen fletcher tetapi masih lebih besar kebocorannya dibandingkan dengan premixed zinc oxide-calcium sulfate cement (Cavit G) . Demikian pula hasil penelitian dari Nuryanti (2005), Zmener O, dkk (2004), Anderson RW dkk, untuk ketiga macam semen tersebut memberikan hasil penelitian yang kontroversi mengenai tingkat kebocoran.

Sebuah upaya untuk menetapkan mana diantara ketiga bahan paling baik dalam penambalan, secara statistik tidak dapat dikerjakan, seperti pengujian ketidaksamaan rata-rata, karena terdapat urutan dari ketiga rerata dalam hipotesisnya. Penggunaan analisis varians akan menyebabkan peluang kekeliruan tipe 1 lebih besar dari yang seharusnya mengingat dalam analisis varians tidak diperhitungkan urutan.

2. Rumusan Masalah

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, menunjukkan bahwa kebocoran yang terjadi dari ke-tiga macam tambalan sementara menunjukkan adanya tingkatan (berurut), sehingga rumusan masalah statistiknya terkait dengan pengujian hipotesis ; H_1 : $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_k$ adalah :

1. Menentukan statistik uji
2. Menentukan Distribusi Sampling dari statistik uji

3. Tujuan

Menentukan cara pengujian hipotesis alternatif berurut

4. Manfaat

Dengan adanya statistik uji untuk hipotesis alternatif berurut akan memberikan solusi yang lebih sesuai.

6. Statistik Uji untuk Hipotesis Rata-rata Berurut

Misalkan hipotesis yang berkaitan dengan eksperimen adalah :

$$\text{Ho} : \quad \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$$

melawan

$$\text{H}_1 : \quad \mu_1 \leq ... \leq \mu_k$$

Statistik Uji Pendekatan Parametrik :

Pengujian untuk hipotesis di atas, dikerjakan berdasarkan data yang ditampilkan seperti pada tabel berikut ini

Tabel 1 :

Statistik yang dihitung dari Data Pengamatan

(Tiap Perlakuan berisi n_j pengamatan)

	Perlakuan				
	1	2	j	k	
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1k}	
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2k}	
…	...	...	...	...	
I	Y_{i1}	Y_{i2}	Y_{ij}	Y_{ik}	
…	...	...	...	...	
…	...	...	...	...	
n_j	Y_{n1}	Y_{n2}		Y_{nk}	
Banyak Pengamatan	n_1	n_2	...	n_k	$\sum_{j=1}^{k} n_j = n$
Rata-rata	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_j$	$\bar{y}_k$	

dari tabel di atas nampak bahwa :

$$n = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

Berdasarkan data dalam Tabel 1, misalkan :

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} y_{ij}}{n_j}$$

dan

$$s_j^2 = \sum_{i=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 / n_j$$

adalah rata-rata dan simpangan baku dari perlakukan ke *j*.

Untuk mendapatkan statistik uji pengujian hipotesis di atas, misalkan rata-rata gabungan yang ditimbang untuk perlakuan ke *t* sampai dengan ke *s* adalah :

(1) $$\bar{y}_{[t,s]} = (n_t \bar{y}_t + n_{t+1} \bar{y}_{t+1} + ... + n_s \bar{y}_{s)}) / (n_t + n_{t+1} + ... + n_s)$$

dengan $1 \le t < s \le k$

sehingga penaksir *Maximum Likelihood* (*MLE*) untuk $\hat{\mu}_j$ di bawah H_o adalah

(2) $$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = ... = \hat{\mu}_k = \bar{y}_{[1,k]}$$

fungsi likelihood dari rata-rata sampel dengan anggapan independensi antar kelompok (populasi) dan distribusi normal, adalah

$$L = f(\bar{y}_1,...,\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1},...,\bar{y}_k) = f(\bar{y}_1)...f(\bar{y}_t)\,f(\bar{y}_{t+1})...f(\bar{y}_k)$$

di bawah H_o : $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \mu$, sehingga

$$L = \left\{\frac{\exp\left[\frac{-n_1(\bar{y}_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}/\sqrt{n}}\right\}\ldots\left\{\frac{\exp\left[\frac{-n_t(\bar{y}_t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}/\sqrt{n}}\right\}\ldots\left\{\frac{\exp\left[\frac{-n_k(\bar{y}_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}/\sqrt{n}}\right\}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{n})^k}{\sigma^k(2\pi)^{k/2}}\right)\exp\left[\frac{-\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \ldots \text{(a)}$$

atau, logaritma dari likelihood persamaan (a) adalah

$$\ln(L) = -\frac{k}{2}\ln\sigma^2 - \frac{k}{2}\ln(2\pi) + \frac{k}{2}\ln(n) - \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j-\mu)^2}{2\sigma^2} \quad \ldots \text{(b)}$$

differensiasi persamaan (b) terhadap μ, diperoleh

$$\frac{d(\ln L)}{d\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j-\mu)}{\sigma^2}$$

dan solusi untuk $\mu = \hat{\mu}$, adalah

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j-\hat{\mu})}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{y}_j-\hat{\mu}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} n_j\bar{y}_j - \sum_{j=1}^{k} n_j\hat{\mu} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} n_j\bar{y}_j = \sum_{j=1}^{k} n_j\hat{\mu}$$

atau ,

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j\bar{y}_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} = \bar{y}_{[1,k]}.$$

Brunk dan Van Eeden (1957) memperlihatkan bahwa penaksir μ di bawah hipotesisi alternatif adalah

$$\hat{\mu}_j = \max_{1 \le r \le j} \min_{j \le s \le k} \bar{y}_{[r,s]}$$

Terkait dengan penaksir di atas, terdapat beberapa bentuk penaksir *maximum Likelihood* $\hat{\mu}$ di bawah H_1 sesuai dengan kondisi yang berlaku, sebagai berikut :

(i) Jika $\bar{y}_1 \le \bar{y}_2 \le ... \le \bar{y}_k$ maka $\hat{\mu}_j = \bar{y}_j$: j = 1,2, ..., k

(ii) Jika $\bar{y}_j > \bar{y}_{j+1}$ untuk semua j (j =1, 2,..., k-1) maka $\hat{\mu}_j = \hat{\mu}_{j+1}$ dan rata-rata $\bar{y}_j$ dan $\bar{y}_{j+1}$ dalam barisan itu diganti oleh $\bar{y}_{[j,j+1]}$ sehingga hanya terdapat (k-1) rata-rata ((k-2) diantaranya merupakan rata-rata sampel dan satu sisanya merupakan rata-rata dari dua sampel yang ditimbang).

Nilai dari rata-rata yang ditimbang tadi kemudian dibandingkan dengan $\bar{y}_{j-1}$ dan $\bar{y}_{j+2}$, apabila

(a) $y_{(j,j+1)} > \bar{y}_{j+2}$, ke tiga nilai $\bar{y}_j, \bar{y}_{j+1}$ dan $\bar{y}_{j+2}$ diganti oleh $\bar{y}_{(j,j+2)}$

(b) $\bar{y}_{(j,j+1)} < \bar{y}_{j-1}$, ke tiga nilai $\bar{y}_{j-1}, \bar{y}_j, \bar{y}_{j+1}$ diganti oleh nilai rata-rata $\bar{y}_{(j-1,j+1)}$

(c) $\bar{y}_{j+2} < \bar{y}_{(j,j+1)} < \bar{y}_{j-1}$, pilih salah satu prosedur antara (a) dan (b)

(d) untuk lainnya tidak ada perubahan nilai.

Pekerjaan di atas dikerjakan kembali kepada barisan nilai yang baru demikian seterusnya sampai barisan merupakan satu kumpulan nilai rata-rata. (rata-rata sampel atau rata-rata gabungan ditimbang) yang monoton tidak turun. Jadi untuk setiap j penaksir *Maximum Likelihood* $\hat{\mu}_j$ untuk μ_j sama dengan nilai rata-rata dalam kumpulan yang baru.

Untuk lebih jelasnya, misalkan untuk 4 perlakuan (k=4) dimana untuk masing-masing perlakuan mempunyai ukuran sampel yang sama, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ dan nilai rata-rata sampelnya masing-masing sebagai berikut : sampel ke 1 adalah $\bar{y}_1$=3 , sampel ke 2 adalah $\bar{y}_2$= 2 , sampel ke 3 adalah $\bar{y}_3$ = 1 dan dari sampel ke 4 adalah $\bar{y}_4$ = 4, sehingga untuk contoh ini akan diperoleh barisan rata-rata sebagai berikut :

3 2 1 4

Menurut aturan di atas terlihat bahwa $\bar{y}_2 < \bar{y}_1$, maka kedua nilai tersebut harus

digabung dan dicari rata-ratanya yaitu : (3+2)/2 = 2,5. Kemudian kedua rata-rata yang asli diganti oleh rata-rata yang baru, sehingga barisanya akan menjadi :

2,5 2,5 1 4

Pada barisan yang baru, ternyata $\bar{y}_{[1,2]} > \bar{y}_3$, maka kita hitung lagi rata-rata dari ketiga nilai rata-rata yang asli : (3+2+1)/3 = 2, sehingga akan diperoleh rangkaian rata-rata baru sebagai berikut :

2 2 2 4

Karena sudah terurut, maka tidak perlu dilakukan perubahan lagi.

Misalkan proses penggabungan di atas menghasilkan *m* buah estimit yang berbeda yaitu t_1 buah rata-rata pertama , t_2 buah rata-rata kedua dan terakhir t_m buah rata-rata dengan $t_j > 0$, $t_1 + t_2 + ... + t_m = k$ dan jika dimisalkan :

$$\tau_0 = 0$$

$$\tau_j = t_1 + t_2 + ... + t_j \, (j = 1,2,...,m)$$

$$\tau_m = k$$

maka

$$\hat{\mu}_{\tau_j+1} = \hat{\mu}_{\tau_j+2} = ... = \hat{\mu}_{\tau_{i+1}} = \bar{y}_{[\tau_j+1,\tau_{j+1}]} \quad ; \quad j = (1,2,...,m-1)$$

Kembali kepada contoh di atas, proses penggabungan menghasilkan $m = 2$ buah estimit yang berbeda yaitu t_1 = tiga buah rata-rata pertama dengan nilai rata-rata sama dengan 2 dan t_2 = sebuah rata-rata kedua dengan nilai rata-rata sama dengan 4.

Untuk pembahasan selanjutnya, misalkan *m* buah estimit tersebut dinyatakan sebagai $\bar{y}_{[t_j]}$; j = 1,2,..., m dengan $\bar{y}_{[t_j]} = \bar{y}_{[\tau_{j-1}+1,\tau_j]}$ dan ukuran sampel dari t_j buah rata-rata dalam $\bar{y}_{[t_j]}$ dinyatakan sebagai $N_{[t_j]}$

Dalil : Bartholomew dan Chacko (1959)

Statistik uji melalui *Likelihood Ratio Test (LRT)* adalah :

(3) $$T_k = \sum_{j=1}^{k} n_j [\hat{\mu}_j - \bar{y}_{[1,k]}]^2 / s_o^2 = \sum_{j=1}^{m} N_{[t_j]} [\bar{y}_{[t_j]} - \bar{y}_{[1,k]}]^2 / s_0^2$$

dengan

(4) $$s_0^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j [\bar{y}_j - \bar{y}_{[1,k]}]^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2$$

Uji dengan daerah kritis $T_k \geq C$, dengan C ditentukan melalui

(5) $$\alpha = \sum_{m=2}^{k} p_{m,k} P\left[\beta_{[(m-1)/2,(n-m)/2]} \geq C\right]$$

Dalam perhitungan peluang kekeliruan tipe I, peluang $p_{m,k}$ merupakan peluang dengan bentuk persamaan sebagai berikut :

Dalil : (Chacko 1959)

$$p_{m,k} = \sum \prod_{j=1}^{k} j^{-\beta_j} \left(\beta_j!\right)^{-1}$$

$$\sum_{m=1}^{k} p_{m,k} = 1$$

dengan

β_j menyatakan banyaknya estimit yang diperoleh dengan menggabungkan *j* buah rata-rata sampel.

$0 \leq \beta_j \leq [k/j]$,

$[k/j]$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari pembagian *k/j* dan

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j = m$$

$$\sum_{j=1}^{k} j\beta_j = k$$

Variat $\beta_{[m-1)/2,(n-m)/2]}$ dalam persamaan (5) berdistribusi Beta dengan parameter (*m*-1)/2 dan (*n*-*m*)/2. Apabila σ^2 diketahui , statistik uji di atas diperoleh dengan mengganti s_0^2 oleh σ^2 dalam T_k dan distribusi Beta oleh Distribusi χ^2 dengan dk = *m*-1 (Chacko, 1963)

Kembali untuk contoh yang telah disampaikan sebelumnya, telah diperoleh urutan rata-rata 2 2 2 4 , sehingga $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$ dan $\beta_4 = 0$

dan $\sum_{j=1}^{4} \beta_j = 1+0+1+0$

$= 2$

atau $m = 2$

dan $\sum_{j=1}^{k} j\beta_j = (1)(1)+(2)(0)+(3)(1)+(4)(0)$

$= 4$

atau $k = 4$.

Nilai $p_{m,k}$ untuk $m = 1,2,...,10$ dan $k = 3,4,...,10$ diperlihatkan dalam tabel di bawah ini :

Tabel 2 :

Nilai-nilai $p_{m,k}$

m	k							
	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.33333	.25000	.20000	.16667	.14286	.12500	.11111	.10000
2	.50000	.45833	.41667	.38056	.35000	.32411	.30198	.28290
3	.16667	.25000	.29167	.31250	.32222	.32569	.32552	.32317
4		.04167	.08333	.11805	.14583	.16788	.18542	.19943
5			.00833	.02083	.34722	.04861	.06186	.07422
6				.00139	.00417	.00799	.01250	.01743
7					.00020	.00069	.00151	.00260
8						.00003	.00010	.00024
9							.00000	.00001
10								.00000

Nilai-nilai dalam tabel di atas memperlihatkan nilai peluang $p_{m,k}$. Sebagai contoh untuk m = 1 dan k = 3 diperoleh nilai $p_{1,3}$ = 0,3333.

7. Membandingkan Tingkat Kebocoran di Daerah Dinding Gingival Menggunakan Tiga Macam Bahan Tambalan Sementara

7.1 Disain Penelitian dan Hipotesis

Untuk mengetahui sampai seberapa besar tingkat kebocoran pada daerah dinding gingival gigi setelah memperoleh tambalan sementara dengan tiga macam bahan tambalan yang berbeda telah dilakukan penelitian sebagai berikut : 15 gigi molar pertama rahang atas dibagi atas tiga kelompok masing-masing lima gigi. Masing-masing kelompok akan memperoleh perlakuan dengan menggunakan bahan tambalan yang berbeda, yaitu kelompok I dengan bahan tambalan CAV (Cavit G), kelompok II dengan SF (Sulfate Cement) dan kelompok III dengan ZOE (Zinc Oxide Eugenol) . Dengan demikian model eksperimen/percobaan akan berbentuk Eksperimen Acak Sempurna dengan 5 replikasi untuk tiap kelompok. Variabel yang menjadi obyek penelitian terdiri atas : adanya kebocoran yang diukur berdasarkan jarak penetrasi (dlm mm)

Ingin diketahui apakah terdapat efek yang berarti dari pemberian CAV, SF dan ZOE dilihat dari adanya penetrasi/kebocoran ?

Hipotesis statistiknya sebagai berikut :

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$: Tidak terdapat perbedaan efek diantara ketiga macam bahan tambalan yang berbeda

melawan

H_1 : $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$: (terdapat urutan perbedaan efek)

7.2 Data Hasil Penelitian

Data dalam Tabel 3 adalah hasil penelitian Aznur (2007) yang menunjukkan kebocoran tambalan yang diukur dalam mm setelah diberikan pewarnaan :

Tabel 3 :
Penetrasi/Kebocoran Tambalan
(dlm mm)

Type Semen

CAV (Caviton)	SF (Fletcher)	ZOE (Zinc)
0.431	1.076	1.441
0.437	1.360	1.556
0.445	1.579	2.153
1.364	1.818	2.789
1.831	1.857	2.930

Selanjutnya dari data dalam Tabel 3, dihitung statistiknya sehingga diperoleh hasil seperti pada tabel berikut ini :

Tabel 4 :

Statistik Penetrasi/Kebocoran Tambalan

(dlm mm)

Type Semen				
No	CAV (Caviton)	SF (Fletcher)	ZOE (Zinc)	Keseluruhan
1	0.431	1.076	1.441	
2	0.437	1.360	1.556	
3	0.445	1.579	2.153	
4	1.364	1.818	2.789	
5	1.831	1.857	2.930	
Jumlah	4.508	7.691	10.869	
Rata-rata	0,902	1.538	2.174	1.539
Std	0.6564	0.3267	0.6836	0.759
Var	0.4309	0.1067	0.4673	0.576
N	5	5	5	15

Dari Tabel 4 di atas diperoleh nilai rata-rata tiap perlakuan sebagai berikut :

$\bar{y}_1$= Rata-rata penetrasi dengan semen Caviton = 0,902 mm

$\bar{y}_2$= Rata-rata penetrasi dengan semen Fletcher = 1,538 mm

$\bar{y}_3$= rata-rata penetrasi dengan semen Zinc = 2,174 mm

Kalau kita urutkan rata-rata yang diperoleh akan memperlihatkan barisan yang sesuai yaitu :

$$0{,}902 < 1{,}538 < 2{,}174$$

atau

$$\bar{y}_1 < \bar{y}_2 < \bar{y}_3$$

berarti $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$, $m = 3$ dan $k = 3$ **,** sehingga langkah selanjutnya dapat dihitung nilai

$$s_0^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{y}_j - \bar{y}_{[1,k]})^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2$$

$$s_0^2 = 5(0{,}902\text{-}1{,}539)^2 + 5(1{,}538\text{-}1{,}539)^2 + 5(2{,}174\text{-}1{,}539)^2 + 5(0{,}4309)^2 + 5(0{,}1067)^2 + 5(0{,}4673)^2$$

$$= 9{,}5225$$

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} n_j (\hat{\mu}_j - \bar{y}_{[1,k]})^2 / s_o^2 = \sum_{i=1}^{m} N_{[t_i]} (\bar{y}_{[t\ ]} - \bar{y}_{[1,k]})^2 / s_o^2$$

$$= [\ 5(0{,}902\text{-}1{,}539)^2 + 5(1{,}538\text{-}1{,}539)^2 + 5(2{,}174\text{-}1{,}539)^2\ ] / [12{,}3784]$$

$$= 4{,}0449 / 9{,}5225$$

$$= 0{,}4248$$

dan peluang kekeliruan tipe I adalah

$$\alpha = \sum_{m=2}^{k} p_{m,k} P\left[\beta_{[(m-1)/2,(N-m)/2]} \geq C\right]$$

$$= p_{23}\, P(\beta_{0,5;6,5} \geq C) + p_{33}\, P(\beta_{1;6} \geq C)$$

$$= 0{,}5 \times P(\beta_{0,5;6,5} \geq C) + 0{,}1667 \times P(\beta_{1;6} \geq C)$$

Untuk $\alpha = 0{,}05$ akan diperoleh nilai $C = 0{,}001$ (Lihat Lampiran 1)

Tolak Ho jika nilai $T_k \geq C$, dari hasil perhitungan $T_k = 0{,}4248 > C = 0{,}001$ ini menunjukkan hasil pengujian yang signifikan. (Pengecekan asumsi yang disyaratkan yaitu kenormalan dan homogenitas varians diperlihatkan dalam Lampiran 2 dan 3).

8. Kesimpulan

Untuk mengetahui perlakukan mana diantara ketiga perlakukan yang diberikan memberikan efek yang paling baik , perhatikan kembali rata-rata kedalaman penetrasi (kebocoran) tambalan,

$\bar{y}_1$= Rata-rata penetrasi dengan semen Caviton = 0,902 mm

$\bar{y}_2$= Rata-rata penetrasi dengan semen Fletcher = 1,538 mm

$\bar{y}_3$= rata-rata penetrasi dengan semen Zinc = 2,174 mm.

Ternyata pemakaian semen Caviton memberikan kedalaman kebocoran yang paling rendah, atau dapat dikatakan Cemen Caviton lebih baik dari dua macam semen lainnya.

9. Daftar Pustaka

1. Barlow, R.E., Bartholomew, D.J., Bremmer, J. M. and Brunk, H. D.,1972., *Statistical Inference Under Order Restrictions*, Wiley, New York.
2. Bartholomew, D.J., 1959, A test of homogeneity for oldered alternatives , *Biometrika* 46 328-335.
3. Brunk,H.D. (1955) , Maximum Lilelihood estimates of monotone parameters., *Ann. Math.Statist*. No 26, Hal 607-616
4. Brunk,H.D. (1958) , On Te Estimation of parameters restricted by inequalities., *Ann. Math.Statist*. No 29, Hal 437-454
5. Chacko, V.J., 1959, *Testing Homogeneity against oldered alternatives*. Ph.D. thesis, Univ. of California, Berkeley.
6. Chacko, V,J. , 1963, Testing Homogeneity agains ordered alternatives, *Ann. Math.Statist*. Vol.34 Hal 945-956.
7. Conover,W.J., 1973, *Practical Nonparametric Statistics*, John Wiley & Sons, Inc.
8. Gibbons, 1971, *Nonparametric Statistical Inference*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo, hal 198-201.
9. Ingle, J.I., *et. al.* ,2002. *Temporary Coronal Filling Material. Dalam Endodontics*. 5th ed. (Ingle & Backland ed.) Decker. Inc. : 649-52
10. Kazemi RB, Safavi KE., Spangberg LSW., 1994, Assessment of Marginal Stability and Permeability of Interim Restorative Endodontic Material, *Oral Surg Oral Med Oral Pathol* 78 ; 788-96

11. Laili, A., 2007, *Perbedaan Tingkat kebocoran Pada Kavitas Klas II Daerah Dinding Gingival dari tiga Bahan Tambalan Sementara*, FKG UNPAD, Bandung

12. Lehmann. E.l., D'Abrera. H.J.M., 1975, *Nonparametrics, Statistical Methods Based on Ranks*, McDraw-Hill, New York.

13. Madison S dan Anderson RW. 1992. *Medications and Temporaries in EndodonticTreatment*. Dent Clint North Am : 36(2) : 343-56

14. Mendenhall, W., Scheaffer, R.L., Wackerly, D.D., 1986, *Mathematical Statistics with Applications*, Thirt Edition, PWS Publishers, Duxbury Press, Boston.

15. Montgomery, C,D, 2001, *Design and Analysis of Experiments*, 5 th Edition, John Wiley & Sons, Inc, New York.

16. Nuryanti., 2005. *Pengaruh ChKM Yang Digunakan Dalam Perawatan SaluranAkar Terhadap Kerapatan Dua Bahan Tumpat Sementara Yang Berbahan DasarZinc Oxide, Eksperimental Laboratorik*, Jakarta, FKG Universitas Indonesia

17. Parsons.L.V., 1967, A Note on Te Exact Distribution of A Nonparametric Test Statistic for Ordered Alternatives, *The Annals of Statistics*, Vol 7, No. 2, Hal 454-458.

18. Rulianto M.1985. *Kebocoran Tepi Zinc Oxide-Eugenol, Fletcher dan Cavit Sebagai Bahan Tumpatan Sementara dalam Kumpan*, Naskah Kongres NasionalXVI PDGI : 27-33

19. Shorack, G.R, 1967, Testing against ordered alternatives in model I analysis of variance; normal theory and nonparametric, *Ann. Math. Statistics*, Vol. 38, Hal 1740-1753.

20. Sudjana, 2002, *Desain Dan Analisis Eksperimen*, Edisi IV, Tarsito, Bandung. Hal 30-40.

21. Sukmasari S. 1991. *Tambalan Sementara Di Bidang Konservasi Gigi. Tinjauan Pustaka*. Bandung, FKG UNPAD.

22. Swanson K dan Madison S., 1987, An Evalution of Coronal Microleakage in Endodontically Treated Teeth. Part I Time Periods., *Journal of Endodontics* 13 : 56-59.

23. Van Eeden, C., 1957., Maximum Lilkelihood estimation of partially or completely ordered parameters., *Indag.Math. 19* Hal 128-211.

24. Wardarma N. 2001. *Pengaruh Rasio Oksida Seng dan Eugenol*. Laporan Penelitian, Jakarta , FKG Universitas Indonesia.

25. Zmener O., Odont, Banegas G., Paneijer CH., 2004, Coronal Microleakage of Three Temporary Restorative Material : An In Vito Study., *J. Endo* 30(8) : 582-84

10. Lampiran

Lampiran 1
Nilai *C* pada Distribusi Beta
Dengan $p_{2,3}$ = 0,5 dan $p_{3,3}$ = 0,1667 , m = 3 , k = 3 , n = 15

$$\alpha = \sum_{m=2}^{k} p_{m,k} P\left[\beta_{[(m-1)/2,(n-m)/2]} \geq C\right]$$

	$p_{2,3}$ = 0.5			$p_{3,3}$ = 0,1667				
C	*alpha*	*Beta*	*P(Beta)*	*C*	*alpha*	*Beta*	*P(Beta)*	*Taraf Sign*
0.00073	0.5	6.5	0.076146	*0.00073*	1	6	0.004372	0.038802
0.00074	0.5	6.5	0.076665	*0.00074*	1	6	0.004432	0.039071
0.00075	0.5	6.5	0.077179	*0.00075*	1	6	0.004492	0.039338
0.00076	0.5	6.5	0.077691	*0.00076*	1	6	0.004551	0.039604
0.00077	0.5	6.5	0.078199	*0.00077*	1	6	0.004611	0.039868
0.00078	0.5	6.5	0.078704	*0.00078*	1	6	0.004671	0.040130
0.00079	0.5	6.5	0.079205	*0.00079*	1	6	0.004731	0.040391
0.0008	0.5	6.5	0.079703	0.0008	1	6	0.00479	0.040650
0.0009	0.5	6.5	0.084523	0.0009	1	6	0.005388	0.043159
0.001	0.5	6.5	0.089078	0.001	1	6	0.005985	0.045537
0.002	0.5	6.5	0.125745	0.002	1	6	0.01194	0.064863
0.003	0.5	6.5	0.153725	0.003	1	6	0.017866	0.079840
0.004	0.5	6.5	0.177182	0.004	1	6	0.023761	0.092552
0.005	0.5	6.5	0.197734	0.005	1	6	0.029627	0.103806
0.006	0.5	6.5	0.216212	0.006	1	6	0.035464	0.114018
0.007	0.5	6.5	0.233110	0.007	1	6	0.041272	0.123435
0.008	0.5	6.5	0.248751	0.008	1	6	0.04705	0.132219
0.009	0.5	6.5	0.263361	0.009	1	6	0.052799	0.140482
0.01	0.5	6.5	0.277103	0.01	1	6	0.05852	0.148307
0.011	0.5	6.5	0.2901	0.011	1	6	0.064211	0.155754
0.012	0.5	6.5	0.30245	0.012	1	6	0.069874	0.162873
0.013	0.5	6.5	0.31423	0.013	1	6	0.075509	0.169702
0.014	0.5	6.5	0.325502	0.014	1	6	0.081114	0.176273
0.015	0.5	6.5	0.336317	0.015	1	6	0.086692	0.18261
0.016	0.5	6.5	0.346719	0.016	1	6	0.092241	0.188736
0.017	0.5	6.5	0.356745	0.017	1	6	0.097762	0.194669
0.018	0.5	6.5	0.366425	0.018	1	6	0.103255	0.200425
0.019	0.5	6.5	0.375788	0.019	1	6	0.10872	0.206018
0.02	0.5	6.5	0.384856	0.02	1	6	0.114158	0.211458
0.021	0.5	6.5	0.393651	0.021	1	6	0.119567	0.216757
0.022	0.5	6.5	0.40219	0.022	1	6	0.124949	0.221924
0.023	0.5	6.5	0.410491	0.023	1	6	0.130304	0.226967
0.024	0.5	6.5	0.418568	0.024	1	6	0.135632	0.231894
0.025	0.5	6.5	0.426434	0.025	1	6	0.140932	0.23671

Lampiran 2 :
Uji Normalitas Kekeliruan
Untuk Tiga Macam Pemakaian Tambalan Sementara
(CAV, SF, dan ZOE)

	Error CAV - SF -ZOE	Z_i	$F(Z_i)$	$S(Z_i)$	$F(Z_i) - S(Z_i)$
	0.0208	-1.67867	0.04661	0.0666667	-0.020058
	0.0410	-1.60035	0.05476	0.1333333	-0.078572
	0.1780	-1.06917	0.1425	0.2000000	-0.057504
	0.2800	-0.6737	0.25025	0.2666667	-0.016416
	0.3190	-0.52249	0.30066	0.3333333	-0.032669
	0.4566	0.01101	0.50439	0.4000000	0.104393
	0.4620	0.03195	0.51274	0.4666667	0.046077
	0.4624	0.0335	0.51336	0.5333333	-0.019972
	0.4646	0.04203	0.51676	0.6000000	-0.083238
	0.4706	0.06529	0.52603	0.6666667	-0.140637
	0.6152	0.62593	0.73432	0.7333333	0.000987
	0.6178	0.63601	0.73762	0.8000000	-0.062384
	0.7328	1.08189	0.86035	0.8666667	-0.006318
	0.7562	1.17262	0.87952	0.9333333	-0.053808
	0.9294	1.84414	0.96742	1.0000000	-0.032581
Rata2	0.45376			L_o Max	0.104393
Std	0.25791914				
N	15			L tabel :	
				1%	0.257
				5%	0.22
				Sifat	Non-sign
				Ket	Normal

Lampiran 3 :
Uji Homogenitas Varians (*Uji Bartlett*)
Untuk Tiga Macam Perlakuan (Caviton, Fletcer dan Zinc)

Semen	Dk	1/dk	s_i^2	log s_i^2	(dk)log s_i^2
Caviton	4	0.25	0.4308	-0.3657	-1.4627
Fletcer	4	0.25	0.1067	-0.9717	-3.8867
Zinc	4	0.25	0.4674	-0.3304	-1.3214
Jumlah	12	0.75	-	-	-6.6708

Varians gabungan = 0.3350

Log varians gab	=	-0.4750	
Nilai B	=	-5.6997	
Chi kuadrat	=	2.2359	
Chi kuadrat tabel :			
dk = 2	0.01	=	11.3
	0.05	=	7.81
Sifat uji	:	Non-Sign	
Ket	:	Homogenitas Varians dipenuhi	

Keterbatasan Memori dan Implikasinya dalam Mendesain Metode Pembelajaran Matematika

Endah Retnowati, M.Ed.
Jurusan Pendidikan Matematika
Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Proses kognitif melibatkan tiga unsur utama dalam sistem memori manusia, yaitu memori penginderaan, memori pekerja dan memori jangka panjang. Memori penginderaan dan memori bekerja mempunyai keterbatasan dalam menyimpan (menahan) informasi, baik jumlah maupun durasinya. Memori penginderaan berfungsi untuk mempersepsikan informasi yang diterima oleh alat indera, yang kemudian akan dipilih dan diberi makna oleh memori bekerja. Memori pekerja berfungsi untuk mengorganisasikan informasi tersebut, membentuk (mengkonstruksi) pengetahuan dan menyimpannya ke memori jangka panjang. Memori jangka panjang mempunyai ketakterbatasan dalam menyimpan informasi. Informasi di dalam memori jangka panjang berperan penting dalam proses-proses kognitif selanjutnya.

Proses kognitif dalam sistem memori ini menentukan bagaimana pengetahuan dibangun dan disimpan dengan baik oleh seseorang. Oleh karenanya, prinsip kerja (fungsi) dari setiap unsur di sistem memori berkonsekuensi dalam penyajian materi pembelajaran. Sedangkan, teknik penyajian materi pembelajaran turut menentukan keefektifan metode pembelajaran yang dilaksanakan. Artikel ini akan membahas sistem memori yang terlibat dalam proses pembentukan pengetahuan dan implikasinya dalam mendesain metode pembelajaran matematika efektif.

Kata kunci: proses kognitif, konstruksi pengetahuan, metode pembelajaran

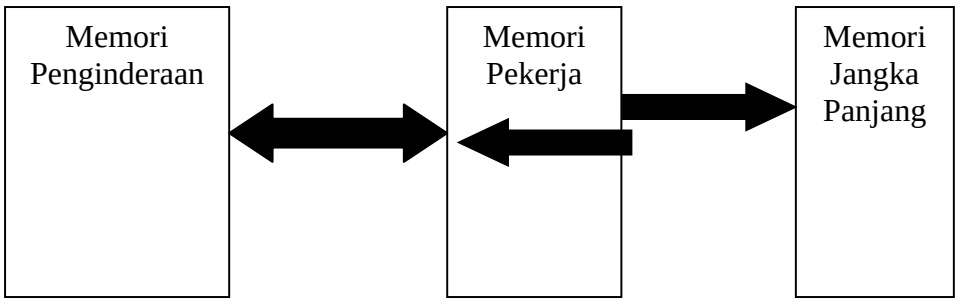
A. Pendahuluan

Belajar adalah suatu perubahan susunan pengetahuan yang telah disimpan di dalam memori melalui proses pengkonstruksian pengetahuan baru atau rekonstruksi pengetahuan lama. Proses belajar atau pembelajaran melibatkan sistem memori (disebut juga sistem kognitif) untuk mengolah informasi yang sedang dipelajari. Sehingga, untuk mendesain metode pembelajaran yang efektif, perlu memperhatikan bagaimana proses kognitif dalam membangun pengetahuan. Teori beban kognitif mengembangkan metode-metode pembelajaran berdasarkan karakter dan fungsi sistem memori dalam mengorganisasikan informasi (Pass, Renkl, & Sweller, 2004; Sweller, 2004). Artikel ini membahas proses kognitif dalam sistem memori, implikasinya dalam mendesain metode pembelajaran dan contoh-contoh metode pembelajaran matematika menggunakan prinsip yang dikembangkan berdasarkan sistem kognitif manusia.

B. Proses Kognitif

Informasi yang diterima oleh manusia diolah oleh suatu sistem memori yang ada di otak untuk dapat dikenali, diorganisasikan dan direspon. Pemrosesan informasi untuk menjadi pengetahuan yang tersimpan dalam memori manusia atau proses pengolahan pengetahuan di memori disebut dengan proses kognitif. Proses ini disebut juga proses mental kognitif.

Diskusi dan penelitian mengenai proses kognitif sudah dimulai sejak puluhan tahun yang lalu. Shiffrin dan Atkinson (1969) menyusun diagram sistem pemrosesan informasi yang dapat disederhanakan sebagai berikut:



Gambar *1 . Modal Model (diadaptasi dari Shiffrin & Atkinson, 1969, p. 180)*

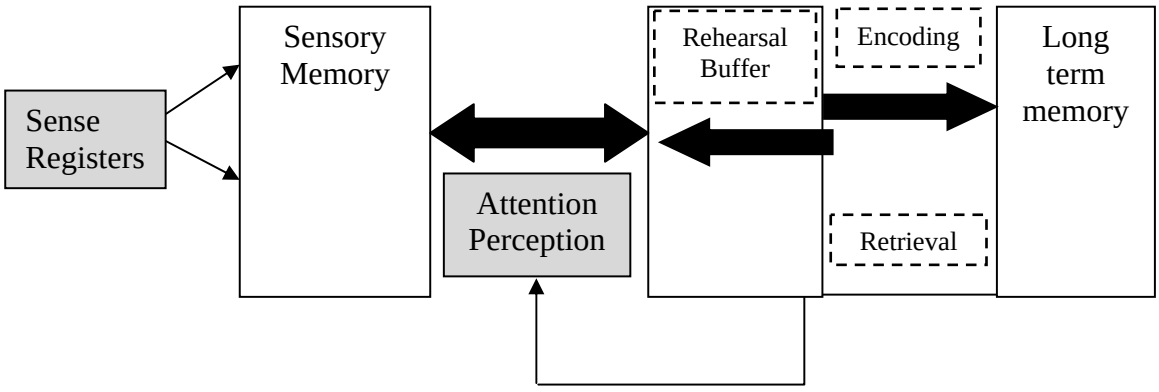
Diagram sistem pemrosesan informasi yang paling mendasar ini kemudian dikenal dengan *Modal Model* (Bruning, Scraw, Norby, & Ronning, 2004). Diagram ini telah

dikembangkan lebih lanjut oleh J. Anderson (Teori ACT), A. Baddeley (Klasifikasi memori pekerja) dan K. Ericcson (Pengembangan keahlian/ekspertis). Karakter dan fungsi dari masing-masing bagian sistem kognitif tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Memori Penginderaan (*Sensory Memory*)

Memori penginderaan adalah komponen paling pertama yang menerima informasi. Untuk memberikan persepsi dan identifikasi awal informasi yang diterima, memori ini mengubah informasi dalam bentuk signal-signal stimulus. Penelitian menunjukkan bahwa memori ini menahan signal-signal tersebut untuk memberikan persepsi dan identifikasi dalam waktu yang sangat pendek (kurang dari satu mikro detik) dan signal tersebut akan segera hilang dari memori ini karena datangnya signal-signal stimulus berikutnya (Bruning et al., 2004).

Memori penginderaan merupakan suatu sistem yang terdiri dari penerima atau penerus informasi (sense registers). Penerima informasi dikenal dengan alat pengindera, seperti mata (untuk melihat dan menerima pandangan/informasi visual), telinga (untuk mendengar dan menerima suara/informasi auditori), hidung (untuk membau), lidah (untuk merasa) dan kulit (untuk meraba). Meskipun setiap alat pengindera tersebut mempunyai kemampuan yang berbeda, sebagian besar peneliti lebih memfokuskan pada penglihatan dan pendengaran.



Gambar *2. Alat pengindera, perhatian dan persepsi yang terlibat dengan sensory memory*

Ada tiga proses yang terjadi ketika memori pengindera menerima suatu informasi: perhatian, persepsi atau pengenalan pola dan pemberian makna. Perhatian adalah langkah

pertama yang dilakukan oleh memori pengindera untuk mendeteksi dan memperhatikan datangnya suatu stimulus. Seseorang memberikan perhatian terhadap suatu informasi dengan mengalokasikan muatan kognitif terhadap informasi tersebut. Pemberian perhatian terhadap datangnya suatu informasi dapat terjadi secara otomatis (tidak sadar) maupun secara sadar (disengaja), tergantung dari pengetahuan awal yang tersedia di memori jangka panjang. Pengetahuan awal (*prior knowledge*) adalah informasi yang sebelumnya telah dipelajari dan disimpan di memori jangka panjang.

Di dalam memori penginderaan, informasi yang dipilih (diperhatikan) diuraikan menjadi sinyal-sinyal yang akan dipersepsikan dengan mengenali polanya, tanpa perlu memahami maknanya, menggunakan pengetahuan awal. Pengetahuan awal ini dapat berupa prototype, analisis bentuk atau deskripsi suatu bentuk. Pengetahuan awal ini menentukan bagaimana memori pengindera mempersepsikan suatu stimulus. Apabila perhatian untuk mengindera stimulus tersebut ditingkatkan, maka alat pengindera akan mengumpulkan lebih banyak informasi yang berkaitan dan mengabaikan informasi yang tidak berkaitan. Kemudian, sistem ini akan mengirimkan ke sistem memori berikutnya (*working memory)* untuk memberikan dan mengorganisasikan makna informasi tersebut. Memori penginderaan tidak berfungsi untuk mempelajari informasi, tetapi memperhatikan informasi dan mengenali polanya.

Implikasi dari fungsi memori penginderaan ini antara lain: (1) memori pengindera hanya dapat mengolah informasi dalam jumlah terbatas, sehingga penyajian materi pembelajaran perlu didesain sedemikian sehingga informasi-informasi kunci dapat diterima oleh siswa dengan baik; (2) memori penginderaan dapat menerima informasi dari kelima alat indera, sehingga mengkombinasikan sajian informasi, misalnya, visual (tertulis) dan verbal, dapat meningkatkan jumlah informasi yang mampu diterima oleh memori pengindera.

2. *Working Memory* (Memory Pekerja)

Ketika saat ini kita sedang memikirkan suatu informasi, maka kita sedang menghadirkan informasi tersebut di memori pekerja. Memori pekerja sebelumnya dikenal dengan memori jangka pendek (*short term memory*). Secara fungsi, memori ini bertugas untuk mengorganisasikan informasi, memberi makna informasi dan membentuk pengetahuan untuk disimpan di memori jangka panjang, sehingga disebut memori pekerja. Secara

kapasitas, memori ini hanya dapat menyimpan (menahan) informasi dalam waktu pendek, sehingga disebut memori jangka pendek.

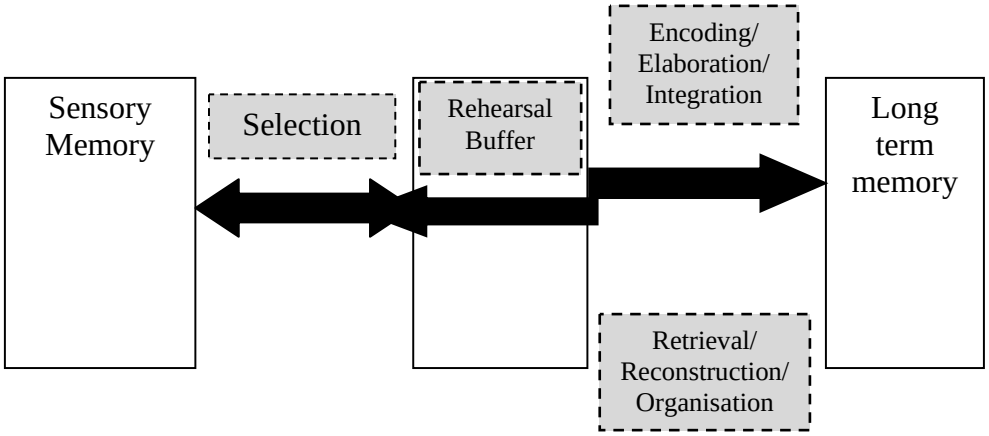
Berikut ini adalah suatu permasalahan yang mungkin ditemui dalam kehidupan sehari-hari:

Jika tanggal 4 Juni 2008 jatuh pada hari Senin, jatuh pada hari apakah tanggal 27 Juni 2008?

Bagi siswa yang tidak seringa tau belum pernah mengerjakan permasalahan seperti di atas, permasalahan tersebut adalah sesuatu yang awam. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, ada beberapa informasi yang perlu diolah secara simultan dengan mengaitkan satu informasi dengan informasi yang lain. Pada umumnya, siswa tidak dapat menyelesaikannya secara langsung meskipun permasalahan tersebut terkesan sederhana. Contoh permasalahan tersebut juga menunjukkan bahwa memori pekerja kita mempunyai kapasitas terbatas untuk mengolah informasi awam secara simultan.

Bahwa memori pekerja mempunyai kapasitas yang terbatas, yaitu sekitar 5 sampai dengan 9 elemen informasi dalam satu waktu, telah ditunjukkan oleh Robert Miller (1956). Dalam penelitiannya, Miller menyajikan kata-kata yang susunanya tidak bermakna dan kemudian meminta responden untuk menyatakannya kembali. Hasilnya menunjukkan bahwa sebagian besar responden hanya mampu mengingat antara lima sampai dengan sembilan kata. Penelitian yang sama diulang oleh Peterson dan Peterson pada tahun 1959 (dalam Bruning et al., 2004) yang menyatakan bahwa banyaknya informasi yang dapat ditahan oleh memori pekerja akan semakin menurun setelah beberapa waktu. Dengan kata lain, memori pekerja kita mempunyai keterbatasan kapasitas dan durasi dalam mengolah informasi secara simultan.

Gambar 3 di bawah ini dapat diilustrasikan sebagai berikut. Informasi yang telah dikenali polanya oleh memori penginderaan dan dipilih untuk diberi makna dikirim ke memori pekerja melalui proses *selection*. Memori pekerja akan memberi makna informasi tersebut dengan memanggil (*retrieval*) pengetahuan awal yang telah disimpan di memori jangka panjang. Informasi yang telah diolah dalam memori pekerja akan disimpan ke dalam memori jangka panjang melalui koding (*encoding*) pengetahuan baru atau dengan mengelaborasi (*elaboration*) atau mengintegrasikan (*integration*) pengetahuan baru dengan pengetahuan yang telah ada. *Rehearsal* adalah suatu proses pengulangan informasi baik dengan dilafalkan maupun tidak.



Gambar *3. Aktivitas yang terlibat dalam working memory*

Jika memori jangka panjang tidak cukup mempunyai pengetahuan awal yang menjadi prasyarat untuk memaknai dengan tepat informasi yang sedang diolah, maka memori pekerja akan kesulitan memberikan makna dan mengkonstruksi pengetahuan tersebut sebagai pengetahuan. Dengan kata lain, memori pekerja kelebihan beban memahami permasalahan. Namun, jika terdapat pengetahuan prasayarat (*prerequisite knowledge*) yang cukup untuk mengolah informasi yang sedang dihadirkan, maka memori pekerja akan menjadi mudah mengolah informasi tersebut. Dengan kata lain, memori pekerja mempunyai cukup kapasitas untuk memahami permasalahan sehingga ada ruang di memori perkerja yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi penyelesaian permasalahan tersebut.

Teori beban kognitif (Pass et al., 2004; Sweller, 2004) menyebutkan bahwa beban kognitif dalam memori pekerja dapat disebabkan oleh tiga sumber yaitu: (1) beban

kognitif instrinsik (*intrinsic cognitive load*); (2) beban kognitif ekstrinsik (*extrinsic cognitive load*) dan (3) beban kognitif konstruktif (*german cognitive load*).

Beban kognitif instrinsik ditentukan oleh tingkat kekompleksan informasi atau materi yang sedang dipelajari, sedangkan beban kognitif ekstrinsik ditentukan oleh teknik penyajian materi tersebut (Sweller & Chandler, 1994). Beban kognitif intrinsik tidak dapat dimanipulasi karena sudah menjadi karakter dari interaktifitas elemen-elemen di dalam materi. Sehingga, beban kognitif intrinsik ini bersifat tetap. Namun, beban kognitif ekstrinsik dapat dimanipulasi. Teknik penyajian materi yang baik, yaitu yang tidak menyulitkan pemahaman, akan menurunkan beban kognitif ekstrinsik. Pemahaman suatu materi dapat mudah terjadi jika ada pengetahuan prasyarat yang cukup yang dapat dipanggil dari memori jangka panjang. Jika pengetahuan prasyarat ini dapat hadir di memori pekerja secara otomatis, maka beban kognitif ekstrinsik akan semakin minimum. Semakin banyak pengetahuan yang dapat digunakan secara otomatis, semakin minimum beban kognitif di memori pekerja. Dalam hal ini, kapasitas memori pekerja menjadi semakin meningkat.

Materi yang secara intrinsik mempunyai beban berat, jika disajikan dengan baik, maka proses kognitif di memori pekerja akan berjalan dengan lancar. Sebaliknya, meskipun beban kognitif intrinsik suatu materi adalah ringan, jika disajikan dengan tidak baik, seperti terlalu banyak atau acak, maka proses kognitif di memori pekerja akan berjalan dengan lambat atau berhenti.

Jika memori pekerja telah dipenuhi oleh beban kognitif intrinsik dan ekstrinsik, maka tidak ada muatan yang tersisa untuk beban kognitif konstruktif. Beban kognitif konstruktif adalah beban kognitif yang diakibatkan oleh proses kognitif yang relevan dengan pemahaman materi yang sedang dipelajari dan proses konstruksi (akuisisi skema) pengetahuan. Jika tidak ada beban kognitif konstruktif, berarti memori pekerja tidak dapat mengorganisasikan, mengkonstruksi, mengkoding, mengelaborasi atau mengintegrasikan materi yang sedang dipelajari sebagai pengetahuan yang tersimpan dengan baik di memori jangka panjang. Dengan kata lain, informasi yang disajikan tidak dipelajari dengan baik. Informasi tersebut mungkin berhasil disimpan di memori jangka panjang, tapi mungkin akan sulit dipanggil kembali atau tidak terkoneksi dengan

pengetahuan yang relevan. Hal ini berakibat pada lambatnya proses pembelajaran yang terkait di masa selanjutnya.

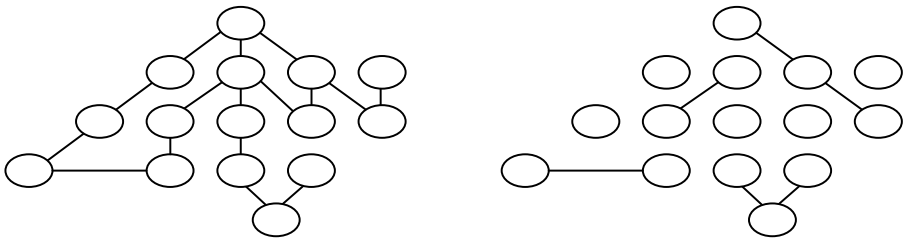
Proses kognitif konstruktif tersebut terjadi secara otomatis jika memang ada muatan di memori pekerja yang kosong akibat dari minimalnya beban kognitif intrinsic dan ekstrinsik. Tetapi, dapat dipengaruhi oleh motivasi dan sikap siswa terhadap materi yang dipelajari. Tanpa adanya motivasi dan sikap yang baik terhadap proses pemelajaran, meskipun materi telah dimanajemen dengan baik, hasil pembelajaran mungkin tidak maksimal.

Implikasi dari fungsi memori pekerja dalam mendesain metode pembelajaran antara lain: (1) perlu memahami tingkat kekompleksan materi yang akan dipelajari atau banyaknya informasi yang akan disampaikan; (2) perlu mengetahui tingkat pengetahuan awal siswa yang akan mempelajari materi yang disampaikan; (3) meminimalkan jumlah dari beban kognitif intrinsik dan ekstrinsik; dan (4) memfasilitasi proses yang meningkatkan beban kognitif konstruktif yaitu akuisisi dan konstruksi skema pengetahuan.

3. *Long Term Memory* (Memori Jangka Panjang)

Memori jangka panjang diasumsikan sebagai tempat penyimpanan pengetahuan secara permanen, karena pengetahuan dapat ditahan di dalam memori ini dalam waktu lama. Memori ini juga mempunyai kapasitas yang tidak terbatas (Pass et al., 2004; Sweller, 2004). Hal ini dapat ditunjukkan dengan kemampuan kita untuk menyimpan informasi sejak lahir sampai akhir hayat. Ketika kita merasa sulit menyimpan atau mengingat informasi, yang menjadi masalah bukan kapasitas memori jangka panjang kita terbatas. Namun, kapasitas memori pekerja yang terbatas dalam proses kognitif meyimpan pengetahuan atau memanggil pengetahuan.

Memori ini dapat menyimpan pengetahuan deklaratif, prosedural dan kondisional (Bruning et al., 2004). Pengetahuan tersebut tersimpan dalam bentuk skema (*schema/schemata*). Bagaimana informasi diproses sangat tergantung dari posisi skema-skema pengetahuan di dalam memori jangka panjang ini. Model-model skema di dalam memori jangka panjang dapat digambarkan pada Gambar 4.



(1) (2)

Gambar *4. Model pengetahuan di memori jangka panjang*

Susunan skema di memori jangka panjang menggambarkan kemampuan seseorang di suatu bidang. Gambar 4 (1) menunjukkan skema-skema yang saling terkait, tapi Gambar 4 (2) menunjukkan skema-skema yang tersimpan tidak berkaitan. Seorang ahli dalam bidang tertentu akan mempunyai susunan skema yang baik di dalam memorinya, sehingga memudahkannya untuk mentransfer ke materi baru atau penyelesaian masalah.

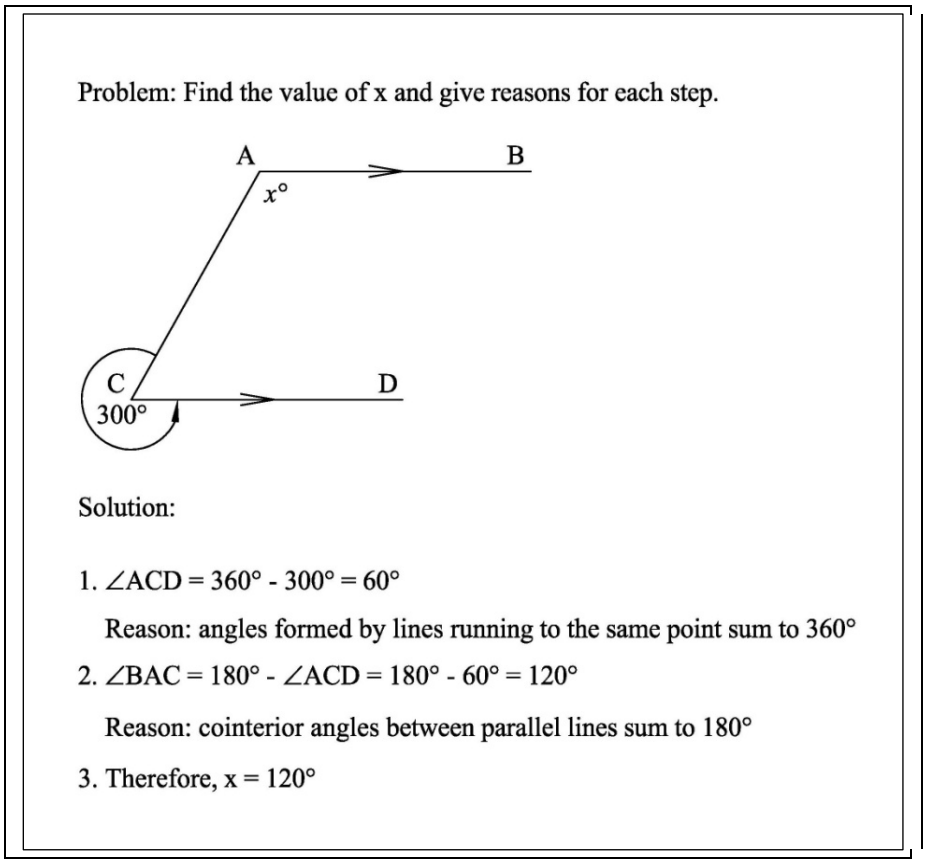
Implikasi dalam mendesain metode pembelajaran antara lain (1) materi pembelajaran disajikan secara hirarkis; (2) pengetahuan disimpan secara baik sehingga pemahaman mendalam; dan (3) memfasilitasi automatisasi skema yaitu pengetahuan yang telah disimpan perlu dilatih berulang-ulang agar dapat dimunculkan di memori pekerja secara otomatis ketika menyelesaikan suatu permasalahan, karena pengetahuan yang dihadirkan secara otomatis tidak menambah beban di memori pekerja.

C. Metode-Metode Pembelajaran Berdasarkan Teori Beban Kognitif

Pembelajaran yang bermakna, menurut Mayer (1999), adalah suatu proses pembelajaran yang menghasilkan kemampuan siswa untuk mentransfer pengetahuan yang telah diperoleh. Dengan demikian, metode pembelajaran yang efektif adalah metode yang mendorong siswa untuk membangun pengetahuan dengan baik, sehingga dapat menggunakannya unutk menyelesaikan masalah baru.

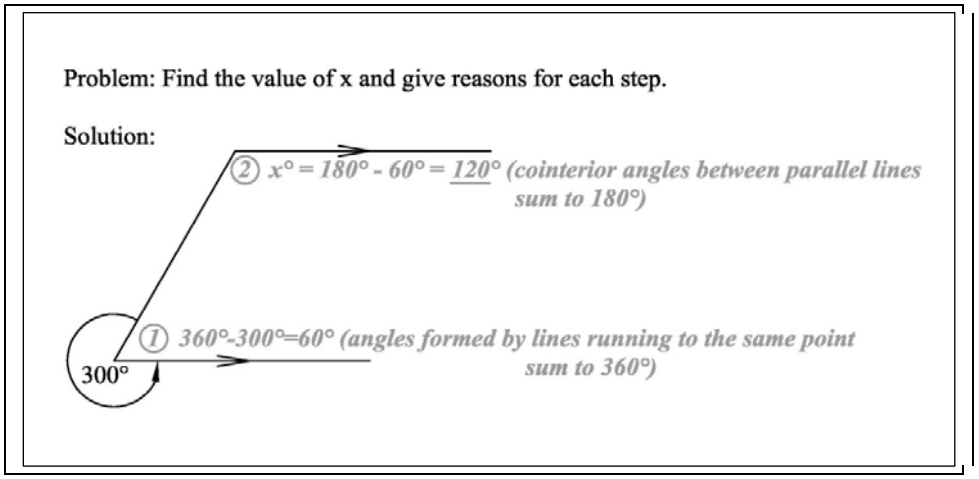
Teori beban kognitif yang diuraikan di atas menghasilkan pemahaman bahwa metode pembelajaran yang efektif adalah metode pembelajaran yang meminimalkan beban kognitif ekstrinsik atau memaksimalkan beban kognitif konstruktif. Dengan manajemen beban kognitif ini, memori pekerja dapat mengorganisasikan materi yang dipelajari dengan lancar.

Metode-metode untuk meminimalkan beban kognitif ekstrinsik antara lain dengan menghindari efek perhatian terpisah dan efek ulangan dalam menyajikan materi pembelajaran (Sweller, 1999). Efek perhatian terpisah diakibatkan oleh penyajian dua sumber informasi secara terpisah, padahal untuk memahaminya informasi tersebut harus diintegrasikan. Contohnya adalah dalam Gambar 5 berikut.



Gambar 5. *Efek perhatian terpisah (diambil dari Retnowati, Sweller & Ayres, 2008)*

Dalam mempelajari contoh soal di atas, siswa harus mengintegrasikan informasi pada gambar dan informasi pada langkah-langkah penyelesaian. Aktivitas mengintegrasikan ini menaikkan beban kognitif ekstrinsik. Alternatifnya adalah penyajian secara integrative seperti pada Gambar 6.



Gambar *6. Teknik integratif (diambil dari Retnowati, Sweller & Ayres, 2008)*

Penggunaan contoh soal yang disajikan secara integratif antara gambar dan teks (verbal atau tertulis) yang berasosiasi telah ditunjukkan kefektifannya dalam pembelajaran oleh berbagai penelitian (Chandler & Sweller, 1992, Retnowati, Sweller & Ayres, 2008; Moreno & Mayer, 1999; Tarmizi & Sweller, 1988; Tindall-Ford, Chandler, & Sweller, 1997; Van Gog, Paas, & Van Merrienboer, 2006). Namun, mengintegrasikan dua gambar dan ilustrasi yang berasosiasi perlu menghindari efek ulangan. Efek ini terjadi apabila gambar telah secara implisit memuat ilustrasi mengenai gambar tersebut (*self-explained figure*). Selain itu, efek ulangan ini juga dapat terjadi jika menyajikan informasi yang telah diketahui dengan baik oleh siswa (Chandler & Sweller, 1992). Dalam hal ini efek ulangan terjadi karena ada informasi yang berlebih, yaitu informasi yang disajikan dan pengetahuan yang berisi sama dengan informasi tersebut.

Metode pembelajaran menggunakan contoh soal yang disusun dengan meminimalkan beban kognitif ekstrinsik seperti dibahas diatas, perlu disertai dengan teknik yang mendorong beban kognitif konstruktif. Misalnya dengan menyajikan pasangan-pasangan contoh soal – permasalahan (*example – problem pairs*). Dalam metode ini, siswa difasilitasi dengan satu paket pasangan contoh dan soal. Contoh yang disajikan sebaiknya terdiri dari beberapa jenis dan soal yang diberikan adalah soal yang sejenis dengan contoh yang diberikan. Sehingga, siswa setelah mempelajari prosedur dalam contoh, siswa diberi fasilitas untuk mengulangnya dan mengkonstruksi pengetahuan melalui penyelesaian soal yang mengikutinya. Metode ini telah dibuktikan kefektifannya dalam berbagai penelitian (lihat Atkinson, Derry, Renkl & Wotham, 2000).

D. Penutup

Dari diskusi mengenai sistem memori dan terutama mengenai proses kognitif yang terjadi di memori pekerja, dapat disimpulkan bahwa memori pekerja mempunyai keterbatasan kapasitas ketika mempelajari informasi awam. Namun, memori pekerja tidak mempunyai keterbatasan dalam memproses informasi secara kognitif, apabila tersedia pengetahuan awal yang cukup dan dapat dihadirkan secara otomatis. Keotomatisan pengetahuan ditentukan oleh susunan skema pengetahuan yang baik di memori jangka panjang dan dihasilkan oleh proses konstruksi pengetahuan yang terorganisir atau penggunaan yang berfrekuensi di memori pekerja. Untuk menyusun metode pembelajaran yang efektif, beban kognitif intrinsic, ekstrinsik dan konstruktif perlu dioptimalkan agar tidak melebihi kapasitas memori pekerja.

Daftar Pustaka:

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Worthan, D. (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181-214.

Bruning, R. H., Scraw, G. J., Norby, M. N., & Ronning, R. R. (2004). *Cognitive Psychology and Instruction* (4 ed.). Ohio: Prentice Hall.

Chandler, P., & Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology, 62*(2), 233-246.

Mayer, R. (1999). *The Promise of Educational Psychology: Teaching for Meaningful Learning* (Vol. 2). USA: Merill - Prentice Hall.

Miller, R. (1956). The Magic Number of Seven Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information. *Psychological Review, 63*, 81-97.

Moreno, R., & Mayer, R. (1999). Cognitive Principles of Multimedia Learning: The Role of Modality and Contiguity. *Journal of Educational Psychology, 91*(2), 358-368.

Pass, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2004). Cognitive Load Theory: Instructional Implications of the Interaction between Information Structures and Cognitive Architecture. *Instructional Science, 32*(1-2), 1-8.

Retnowati, E., Sweller, J. & Ayres, P. (2008). Group Work Settings: Worked Example Vs. Problem Solving. *Online Proceeding of International Conference on Cognitive Load*

Theory 2008, Retrieved at http://www.uow.edu.au/conferences/Cognitive_Load_Theory_2008/program.html

Shiffrin, R. M., & Atkinson, R. C. (1969). Storage and Retrieval Process in Long Term Memory. *Psychological Review, 76*(2), 179-193.

Sweller, J. (1999). *Instructional Design in Technical Areas*. Victoria, Australia: Australian Council for Educational Research.

Sweller, J. (2004). Instructional Design Consequences of an Analogy between Evolution by Natural Selection and Human Cognitive Architecture. *Instructional Science, 32*(1-2), 9-31.

Sweller, J., & Chandler, P. (1994). Why Some Material is Difficult to Learn? *Cognition and Instruction, 12*(3), 185-233.

Tarmizi, R. A., & Sweller, J. (1988). Guidance Suring mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 80*(4), 424-436.

Tindall-Ford, S., Chandler, P., & Sweller, J. (1997). When Two Sensory Modes Are Better Than One. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 3 No. 4*, 257 - 287.

Van Gog, T., Paas, F., & Van Merrienboer, J. (2006). Effects of Process-Oriented Worked Examples on Troubleshooting Transfer Performance. *Learning and Instruction, 16*(2), 154-164.

MELATIH KEMAMPUAN METAKOGNITIF SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Oleh : Risnanosanti, M.Pd
Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Bengkulu
Email : rnosanti@yahoo.com

Abstrak

*Salah satunya perkembangan yang cukup pesat dalam dunia psikologi pendidikan saat ini adalah berkembangnya konsep metakognisi. Inti dari konsep metakognisi ini adalah menggali pemikiran orang tentang berpikir "*thinking about thingking". *Beberapa penelitian menunjukkan bahwa penguasaan kemampuan metakognitif oleh seseorang ternyata berpengaruh pada kemampuannya akan pemecahan masalah matematika. Sedangkan kemampuan pemecahan masalah matematika adalah kemampuan yang paling diharapkan dikuasai siswa setelah mereka belajar matematika. Menurut sebuah penelitian diperoleh hasil siswa yang menguasai kemampuan metakognitif akan menjadi lebih berkemampuan dalam menghadapi permasalahan. Siswa juga akan memeroleh keuntungan terutama rasa percaya diri dan menjadi lebih independen sebagai pebelajar, bahkan siswa yang berkemampuan rendah akan tetapi aktif belajar dengan proses metakognitif ternyata menjadi lebih mampu memecahkan permasalahan standard dibanding siswa yang sama yang tidak belajar dengan pengajaran metakognitif. Untuk itu guru perlu berusaha melatih siswa agar mempunyai kemampuan metakognitif serta memunculkannya sehingga pada akhirnya dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika yang merupakan fokus pendidikan matematika di Indonesia.*

A. Pendahuluan

Tujuan pendidikan matematika dalam kurikulum di Indonesia saat ini sejalan dengan tujuan yang diinginkan oleh NCTM (2000) yaitu, pembelajaran matematika saat ini tidak lagi hanya menekankan pada peningkatan hasil belajar, namun juga diharapkan dapat meningkatkan kemampuan; (1) komunikasi *(mathematical communication)*; (2) penalaran *(mathematical reasoning)*; (3) pemecahan masalah *(mathematical problem solving);* (4) mengaitkan ide *(mathematical connections);* (5) representasi *(mathematical representation).* Hal ini diperkuat dengan Permendiknas nomor 22 tahun 2006 yang mengatakan bahwa pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika di Indonesia.

Berkaitan dengan pemecahan masalah, para ahli pendidikan masalalu berpendapat bahwa pemecahan masalah merupakan objek tak langsung dalam belajar matematika sebagaimana yang dikemukakan oleh Gagne (Bell, 1978: 108)

> *"…these objects of mathematics learning are those direct and indirect things which we want students to learn in mathematics. The direct objects of mathematics learning are facts, skills, concepts, and principles; some of the many indirect objects are transfer of learning, inquiry ability, problem solving ability, self-discipline, and appreciation for structure of mathematics.."*

Dari pendapat Gagne ini dipandang bahwa pemecahan masalah dalam matematika akan tumbuh dengan sendirinya jika siswa belajar matematika dengan baik di kelas. Tetapi sekarang pandangan itu berubah, pemecahan masalah tidak lagi menunggu untuk tumbuh dengan sendirinya, akan tetapi guru menjadikan pemecahan masalah sebagai objek langsung yang harus dipelajari siswa. Sehingga pendidikan matematika sekarang mengharapkan guru mengajarkan pemecahan masalah agar siswa memiliki kemampuan untuk menghadapi tugas – tugas yang bersifat pemecahan masalah

Pemberian masalah terutama selama proses pembelajaran berlangsung, berarti memberikan kesempatan pada siswa untuk membangun konsep matematika dan mengembangkan keterampilan matematikanya. Tetapi agar dapat menyelesaikan suatu masalah setidaknya ada lima aspek kemampuan yang harus dikuasai siswa yaitu: kemampuan tentang konsep matematika, kemampuan dalam menguasai keterampilan algoritma matematika, kemampuan proses bermatematika, kemampuan untuk bersikap positif terhadap matematika dan kemampuan metakognitif.

Berdasarkan beberapa hasil penelitian dan pengamatan terhadap pembelajaran matematika yang ada di Indonesia selama ini, tiga kemampuan di atas yang pertama telah dilaksanakan guru di kelas, aspek bersikap positifpun mulai ditumbuhkan dalam diri siswa. Hanya aspek kemampuan metakognisi sebagai syarat penguasaan pemecahan masalah yang belum banyak disentuh oleh para guru.

B. Metakognitif sebagai Strategi Berpikir

Pada prinsipnya jika dikaitkan dengan proses belajar, kemampuan metakognitif adalah kemampuan seseorang dalam mengontrol proses belajarnya, mulai dari tahap perencanaan, memilih strategi yang tepat sesuai masalah yang dihadapi, kemudian memonitor kemajuan dalam belajar dan secara bersamaan mengoreksi jika ada kesalahan yang terjadi selama memahami konsep, menganalisis keefektifan dari strategi yang dipilih. Kemudian melakukan refleksi berupa mengubah kebiasaan belajar dan strateginya jika diperlukan, apabila hal itu dipandang tidak cocok lagi dengan kebutuhan lingkungannya. Hal ini berarti mengetahui dan menyadari bagaimana belajar dan mengetahui strategi kerja mana yang sesuai merupakan suatu kemampuan yang sangat berharga.

Selain itu memikirkan tingkah laku diri sendiri merupakan langkah pertama yang mengarah ke arah tingkah laku belajar dan bagaimana belajar. Strategi yang didiskusikan mempunyai arti bagi pengembangan metakognisi, termasuk di dalamnya mengidentifikasi 'apa yang kita diketahui' dan 'apa yang tidak kita ketahui'; ' bicara tentang berpikir'; 'mengembangkan dan membuat jurnal';' merencanakan dan regulasi diri'; bertanya kembali untuk memperoleh informasi mengenai segala hal yang berkaitan, untuk melengkapi proses berpikir'; dan 'evaluasi diri'.

Jadi metakognisi dikembangkan melalui proses berpikir seseorang berkenaan dengan tingkah laku yang dilakukannya. Mengembangkan metakognisi pada dasarnya adalah meningkatkan proses berpikir seseorang untuk mengontrol apa yang dipikirkannya, apa yang dikerjakannya, berkenaan dengan tugas yang diberikan, apakah telah memenuhi tuntutan yang diminta dari tugas tersebut atau belum. Hal itu dapat dilakukan selama dia bekerja atau setelah selesai mengerjakan sebuah tugas, ini dapat dilakukan dengan menulis sebuah jurnal.

Kaitan antara kemampuan metakognisi dengan strategi berpikir adalah bahwa kemampuan metakognisi menyediakan cara mengendalikan berpikir yang pada akhirnya akan menghasilkan kemampuan dalam berpikir kritis (*critical thingking*). Schafersman (1991) berpendapat bahwa "*Critical thinking means correct thinking in the pursuit of relevant and reliable knowledge about the world. Another way to describe it is reasonable, reflective, responsible, and skillful thinking that is focused on deciding what to believe or do"*. Jadi berpikir kritis berarti berpikir dengan benar dalam mencari pengetahuan yang relevan dan reliabel tentang sesuatu di sekitar kita. Cara yang lain untuk mengartikannya berpikir kritis adalah masuk akal (*reasonable*), reflektif, bertanggung jawab, dan berpikir cakap dan terampil dan semuanya dipusatkan untuk memutuskan apa yang harus dipercayai atau dilakukan.

Lebih lanjut Schafersman (1991) menyatakan seseorang yang memiliki kemampuan berpikir kritis dapat mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang sesuai, mengumpulkan informasi yang relevan, secara efisien dan kreatif mereka menyusun dan berbuat melalui informasi yang dikumpulkannya itu, bernalar secara logika berdasar informasi, dan datang dengan kesimpulan yang reliabel dan dapat dipercaya tentang lingkungan yang memungkinkannya tinggal dan berhasil di dalamnya. Pemikiran kritis bukanlah kemampuan berpikir biasa, yaitu berpikir yang tidak sekedar mampu

memproses informasi, seperti misalnya mengetahui tanda lampu mereah adalah untuk berhenti atau mampu mengetahui besarnya jumlah uang kembalian dari kasir supermarket. Kemampuan berpikir kritis yang benar adalah berpikir tingkat tinggi (*higher-order thinking*), yang memungkinkan seseorang untuk hal-hal yang global, luas dan analitis, sehingga dengan berpikir kritis memungkinkan seseorang menjadi individu yang lebih bertanggung jawab.

Siswa yang masih anak – anak tentu saja tidak memiliki kemampuan bawaan sejak lahir untuk berpikir kritis, mereka juga belum mampu mengembangkannya kemampuan ini secara alami. Berpikir kritis adalah suatu kemampuan belajar yang harus dipelajari, dan sebagaian besar orang tidak mempelajarinya secara sengaja. Berpikir kritis tidak dapat diajarkan pada orang yang tidak mempunyai kemampuan yang baik. Diperlukan instruktur atau guru yang memiliki pengetahuan tentang berpikir kritis, dan terlatih dalam menyampaikan ketrampilan serta informasi yang sesuai dengan berpikir kritis. Para guru matematika umumnya dianggap sebagai orang – orang yang tepat dalam mengajarkan dan memiliki informasi dan ketrampilan ini.

Berpikir kritis adalah kemampuan untuk berpikir bagi dirinya sendiri, dengan kemampuan itu seseorang menjadi percaya diri dan bertanggung jawab dalam membuat keputusan yang mempengaruhi kerjanya. Pemikiran kritis adalah juga inkuiri yang kritis, seperti halnya berpikir kritis dalam menyelidiki permasalahan, itu berarti kritis dalam bertanya, kritis dalam bersikap terhadap jawaban lain yang menantang sebagai sesuatu yang belum pasti benar salahnya (*status quo*), dan juga kritis terhadap informasi baru yang dapat digunakan untuk sesuatu yang baik atau jelek.

Berikut dinyatakan beberapa sifat dan karakteristik seseorang yang memiliki kemampuan berpikir kritis yang disampaikan oleh Raymond S. Nickerson (Schafersman, 1997), beberapa di antaranya adalah:

1. menggunakan bukti dengan terampil dan seimbang
2. mengorganisir pemikiran dan mengartikulasikannya dengan singkat dan dengan jelas
3. memahami perbedaan antara memberi alasan/menalar dan merasional-kan
4. memahami gagasan pada derajat/tingkat kepercayaan tertentu
5. berusaha untuk mengantisipasi konsekwensi tindakan alternatif yang mungkin
6. dapat belajar independen dan memiliki kepercayaan dalam melaksanakannya

7. menerapkan teknik dan strategi pemecahkan masalah dalam menyelesai-kan materi apapun
8. dapat membangun sebuah permasalahan yang disajikan secara informal ke dalam bentuk yang formal, seperti matematika, dan sekaligus dapat menggunakannya untuk memecahkan masalah.
9. terbiasa mempertanyakan pendapatnya sendiri dan berusaha untuk memahami pandangan / asumsinya secara kritis juga implikasi dari pandangannya itu
10. mengenali kemungkinan yang keliru dari pendapatnya sendiri, mengenali kemungkinan penyimpangan yang mungkiun dari pendapatnya, dan menyadari bahaya pada bukti menurut pilihan pribadi
11. menyadari fakta bahwa pemahaman seseorang selalu terbatas

Semua kemampuan di atas tidaklah dapat dikuasai seseorang tanpa dia sendiri menyadari akan kemampuan dirinya. Seseorang yang memiliki kemampuan menyadari kemampuan diri dan sekaligus dapat mengontrolnya, dapat dikatakan seseorang tersebut memiliki kemampuan metakognitif.

C. Strategi Melatihkan Metakognitif pada Siswa

Sebagaimana yang telah diuraikan di atas mengetahui dan menyadari bagaimana belajar dan mengetahui strategi kerja mana yang sesuai merupakan suatu kemampuan yang sangat berharga. Selain itu, hal tersebut juga merupakan indikator yang dapat membedakan siswa ahli dengan siswa pemula sebagaimana yang diutarakan oleh Ertmer dan Newby (1996) berikut ini:

> *"Novice Learners don't stop to evaluate their comprehension of the material. They generally don't examine the quality of their work or stop to make revisions as they go along. Satisfied with just scratching the surface, novice learners don't attempt to examine a problem in depth. They don't make connections or see the relevance of the material in their lives. Expert learners are "more aware than novices of when they need to check for errors, why they fail to comprehend, and how they need to redirect their efforts*."

Ini berarti seorang siswa pemula (*novice learners*) tidak terbiasa mengevaluasi pengertian mereka terhadap materi. Mereka biasanya tidak menguji kualitas pekerjaan mereka atau berhenti untuk membuat perbaikan selama mereka bekerja. Cukup puas hanya dengan membahas masalah di permukaannya saja, *novice learners* tidak mencoba untuk menguji masalah lebih dalam. Mereka tidak membuat hubungan atau melihat

relevansi dari materi dengan kehidupan nyata mereka. Sedangkan siswa ahli (*expert learners*) lebih peduli/sadar dibandingkan *novices learners*, dimana mereka selalu butuh mengecek setiap kesalahan yang mungkin dibuat, bertanya mengapa mereka gagal memperoleh kemajuan/mendapatkan hasil, dan bagaimana mereka butuh mengalihkan tujuan dari usaha yang telah dilakukan. Sehingga jika guru mengharapkan siswa menjadi seseorang yang ahli dalam suatu bidang khususnya matematika maka guru haruslah dapat melatihkan kemampuan metakognisi tersebut.

Kedudukan guru dalam meningkatkan kemampuan metakognitis siswa sangatlah penting. Guru dapat bertindak sebagai fasilitator yang memberikan arahan dan bimbingan melalui pertanyaan – pertanyaan yang mengiring, sehingga siswa menyadari akan kemampuan kognitif yang dimilikinya. Sejak akhir 1970, metakognisi memperoleh banyak perhatian dalam literatur pendidikan. Swanson mendefinisikan metakognisi sebagai "…*the knowledge and control one has over's thingking and learning activities.* …" (Kramarski *et. al.*,2002; 225). Pada sekitar akhir abad ke 20 Schoenfeld, Mayer (1987); Lester, Garofalio dan Kroll (1989); Cardel-Elawar (1995); serta Kramarski dan Mevarech, (1997) telah memulai mendisain metode pengajaran yang berbasis pada melatih siswa untuk mengaktifkan proses metakognitif selama penyelesaikan tugas matematika. (Kramarski et. al., 2002: 226). Bentuk ini kemudian dikenal dengan pengajaran metakognitif.

Umumnya elemen utama dari pengajaran metakognitif adalah melatih siswa yang bekerja dalam kelompok kecil untuk mampu beralasan secara matematika seperti merumuskan dan menjawab serangkaian pertanyaan metakognitif yang ditujukan pada diri sendiri (Kramarski et. al., 2002: 228). Pertanyaan ini difokuskan pada:

1. *comprehending the problem*, (contoh, membicarakan tentang apa soal yang sedang dihadapi ini sebenarnya?);
2. membangun *connections* (hubungan) antara pengetahuan lama dan baru (contoh, Apa perbedaan atau persamaan antara soal yang sedang ditangani dengan soal yang pernah kamu selesaikan? dan mengapa?);
3. menggunakan strategi yang tepat untuk menyelesaikan soal (strategi/ taktik/prinsip apa yang tepat digunakan untuk menyelesaikan soal? Dan mengapa?);

4. *reflecting* pada proses dan penyelesaian (contoh, kesalahan apa yang telah saya lakukan di sini? atau apakah penyelesaiannya masuk akal?).

Hal yang menarik adalah bahwa dalam kebanyakan penelitian seperti Schoenfeld (1987), Kramarski dan Mevarech (1997), dan van Hoek, den Eden dan Terwel (1999), pengajaran metakognitif dikerjakan dalam setting kooperatif dimana sekelompok kecil siswa 4 – 6 orang belajar bersama. Pendekatan kooperatif-metakognitif didasarkan pada teori kognitif yang menekankan pentingnya peran elaborasi dalam membangun pengetahuan baru. Penerapan pengajaran metakognitif dalam setting belajar kooperatif dapat menyajikan kondisi yang tepat untuk siswa mengelaborasi penalaran matematika mereka (Kramarski et al. 2002).

Tampak jelas bahwa peran guru dalam mengembangkan kemampuan metakognitif siswa sangatlah penting. Tidak hanya mengembangkan pengajaran metakognitif, pada beberapa penelitian guru juga didorong untuk menerapkan strategi dalam belajar-mengajarnya, sehingga strategi yang diterapkannya dapat memacu munculnya kemampuan metakognitif siswa. Seperti penelitian yang dilakukan Lobato dan Clarke (2005: 102) yang memperlihatkan bagaimana pembelajaran yang memungkinkan guru cukup banyak berbicara ketika mengajar ternyata mampu meningkatkan pemahaman siswa akan konsep yang disajikan. Akan tetapi dalam hal berbicara banyak ini, berbicara yang dimaksud adalah berbicara yang lebih menekankan pada 3 hal:

1. Fungsi berbicara (yang melibatkan perhatian kepada niat (*intention)* guru, sesuatu yang alamiah dari kegiatan mengajar, dan interpretasi siswa terhadap kegiatan mengajar/belajar) dibanding suatu bentuk dari aksi komunikatif guru.
2. Membicarakan hal yang lebih konseptual dibandingkan prosedural isi informasi baru.
3. Hubungan terhadap aksi yang lain dibanding sebagai sebuah aksi terisolasi. Pembentukan ulang ini menyelesaikan kembali beberapa perhatian dalam mengajar sebagai suatu kegiatan *TELLING*, dan membantu menetapkan legitimasi dari penyajian informasi baru dengan perspektif konstruktivis pada belajar.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bell, Frederick H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools).* Washington: Win. C. Brown Publishers

Carr, M., Kurtz, B. E., Schneider, W., Turner, L. A., & Borkowski, J. G. (1989). Strategy acquisition and transfer among German and American children: Environmental influences on metacognitive development. *Developmental Psychology, 25,* 765-771

Ertmer, P.A. & Newby, T.J. (1996). *The expert learner: strategic, self-regulated, and reflective. Instructional Science* 24: 1-24. Netherlands: Kluwer Academic Publishers [ON LINE] Tersedia: http://coe.sdsu.edu/eet/Articles/metacognition/start.html

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist,* 34, 906-911.

Foong, Pui Yee .(2002). *Using Short Open-ended Mathematics Questions to Promote Thinking and Understanding*. National Institute of Education, Singapore, [ON LINE] Tersedia: http://www.math.unipa.it/~grim/ SiFoong.PDF

Garner, R. (1990). When children and adults do not use learning strategies: Toward a theory of settings. *Review of Educational Research, 60,* 517-529.

Gartmann, Shirley and Freiberg, Melissa. (1998) Metacognition and Mathematical Problem Solving: Helping Students to Ask The Right Questions**.** *The Mathematics Educator*. Volume 6 Number 1

Houston, Kevin, (2005). *How to Think Like a Mathematician*. Leeds:University of Leeds

Kramarski, Bracha et al. (2002). The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks. *Educational Studies in Mathematics***.** Vol. 49, No. 2

Livingston, Jennifer A (1997). Metacognition: An Overview. [ON LINE] Tersedia: http://www.gse.buffalo.edu/fas/shuell/CEP564/Metacog.html

Lobato, Joanne et. al. (2005) Initiating And Eliciting In Teaching: A Reformulation Of Telling**.** *Journal for Research in Mathematics Education 36***:** 101–136, 2005. *NCTM*

Matlin, Margaret W. and Geneseo, Suny. (2003). *Cognition (5th Ed.)***.** New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

Miles, Don et. al. (2003) Experiences With The Metacognitive Skills Inventory. *33rd ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference***.** November 5-8, 2003, Boulder, CO.

Mohamed, Mohini and Nai, Tan Ten, (2005). The Use Of Metacognitive Process In Learning Mathematics. *The Mathemattics Educattion into the 21stt Centtury Projectt. Universittti Teknollogi Mallaysia Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education.* Johor Bahru, Malaysia.

Panaoura, Areti, and Philippou, George (2005) *Young Pupils´ Metacognitive Abilities in Mathematics in Relation to Working Memory and Processing Efficiency***.** University of Cyprus, Cyprus

Price, J. (1996). President's Report: Bulding Bridges of Mathematical Understanding for All Children. *Dalam Journal for Research in Mathematics Education.* Vol.27. No.5 November 1996. hal. 603-608

Pugalee, David K. (2004). A Comparison of Verbal and Written Descriptions of Students' Problem Solving Processes. *Dalam Educational Studies in Mathematics***.** 55**:** 27 – 47. New York: Kluwer Academic Publishers

Ridley, D.S., et.al. (1992). Self-regulated learning: the interactive influence of metacognitive awareness and goal-setting. *Journal of Experimental Education* 60 (4), 293-306.

Scheid, K. (1993). *Helping students become strategic learners: Guidelines for teaching.* Cambridge, MA: Brookline Books.

Schafersman, Steven D. (1991) *An Introduction To Critical Thinking* [ON LINE]

Winn, W. & Snyder D. (1996). Cognitive perspectives in pyschology. In D.H. Jonassen, ed. *Handbook of research for educational communications and technology*, 112-142. New York: Simon & Schuster Macmillan [ON LINE} Tersedia: http://coe.sdsu.edu/eet/Articles/metacognition/start.htm

_____. 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan* . Jakarta: DEPDIKNAS

Mengembangkan Soal Terbuka *(Open-Ended Problem)* dalam Pembelajaran Matematika

Ali Mahmudi
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
Kampus Karangmalang Yogyakarta
email: ali_uny73@yahoo.com

Abstrak

Penggunaan soal terbuka *(open-ended problem)* telah menjadi kecenderungan dalam pembelajaran matematika saat ini. Pembelajaran matematika yang memanfaatkan penggunaan soal terbuka memberikan peluang untuk lebih mengeksplorasi kemampuan berpikir siswa secara komprehensif. Penggunaan soal terbuka juga dapat mengakomodasi berbagai karakteristik siswa. Penggunaan soal terbuka perlu dibudayakan dalam pembelajaran matematika. Namun demikian, upaya ini sering terkendala oleh terbatasnya kemampuan guru dalam mengembangkan soal-soal terbuka. Tentu, keterbatasan ini perlu diatasi. Dalam tulisan ini akan dikemukakan beberapa strategi atau cara mengembangkan soal terbuka dalam pembelajaran matematika. Strategi-strategi tersebut di antaranya adalah mengubah soal tertutup menjadi soal terbuka, memberikan contoh yang memenuhi kondisi atau syarat tertentu, menentukan siapa yang benar, dan menyelesaikan soal dengan berbagai cara.

Kata Kunci : soal terbuka *(open-ended problem)*

A. Pendahuluan

Setiap siswa mempunyai karakteristik berbeda terkait aktivitas penyelesaian masalah. Misalnya, Ali lebih sering menggunakan metode informal untuk menyelesaikan masalah daripada menggunakan prosedur formal. Tasha lebih senang menyendiri sehingga ia merasa nyaman dalam menyelesaikan masalah. Ia lebih menyukai untuk menyalin uraian materi atau contoh soal dari papan tulis, mempraktikannya di rumah, dan menerapkan prosedur tersebut pada tes. Ia tidak menyukai sesuatu yang baru. Sekali ia menguasai suatu prosedur, ia tidak ingin mencari prosedur lainnya. Lain lagi dengan Joko. Jika ia tidak dibimbing tahap demi tahap maka ia akan mengalami kebuntuan. Sementara itu, Yono tampak kurang percaya diri dalam mengungkapkan ide-ide barunya. Meski, jika diberikan sedikit dorongan dan motivasi maka ia akan menghasilkan suatu prosedur penyelesaian masalah yang indah dan tidak terduga.

Pembelajaran matematika perlu dirancang sedemikian sehingga dapat mengakomodasi berbagai ragam karakterisik siswa. Salah satu cara yang dapat mewujudkan hal itu adalah penggunaan soal terbuka dalam pembelajaran matematika. Karakteristik soal terbuka memungkinkan siswa untuk menyelesaikan masalah dengan cara yang mereka pilih. Siswa seperti Ali misalnya, akan berkembang potensinya jika ia menyelesaikan soal terbuka yang mempunyai beragam strategi penyelesaian atau beragam solusi. Menyelesaikan soal terbuka yang mempunyai solusi tak tunggal dapat menumbuhkan rasa percaya diri siswa seperti Yono. Hal demikian akan terjadi apabila strategi penyelesaian yang dikemukakan siswa diperhatikan dan dihargai. Meskipun siswa seperti Tasha pada mulanya menolak atau menghindari soal terbuka, mereka dapat menjadi lebih nyaman melalui praktik berkelanjutan. Memang, siswa seperti Joko mungkin tidak menikmati soal terbuka, tetapi jika kita hanya memberikan soal-soal yang hanya disenangi Joko, maka kita akan berisiko kehilangan kesempatan untuk melejitkan potensi Ali dan Yono dalam bermatematika dengan cara yang mengesankan.

Penggunaan soal terbuka perlu dibudayakan dalam pembelajaran matematika. Namun demikian, upaya ini sering terkendala oleh terbatasnya kemampuan guru dalam mengembangkan soal-soal terbuka. Tentu, keterbatasan ini perlu diatasi. Dalam tulisan ini akan dikemukakan beberapa strategi atau cara mengembangkan soal terbuka dalam pembelajaran matematika.

B. Pengertian Soal Terbuka

Menurut Becker dan Shigeru (Inprashita, 2008), pendekatan *open-ended* pada awalnya dikembangkan di Jepang pada tahun 1970-an. Antara tahun 1971 dan 1976, peneliti-peneliti Jepang melakukan proyek penelitian pengembangan metode evaluasi keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pendidikan matematika dengan menggunakan soal atau masalah terbuka *(open-ended)* sebagai tema. Meskipun pada mulanya pengembangan soal terbuka dimaksudkan untuk mengevaluasi keterampilan berpikir tingkat tinggi siswa, tetapi selanjutnya disadari bahwa pembelajaran matematika yang menggunakan soal terbuka mempunyai potensi yang kaya untuk meningkatkan kualitas pembelajaran.

Menurut Takahashi (2006), soal terbuka *(open-ended problem)* adalah soal yang mempunyai banyak solusi atau strategi penyelesaian. Sedangkan menurut Syaban (2008), dipandang dari strategi bagaimana materi pelajaran disampaikan, pada prinsipnya pembelajaran dengan memanfaatkan soal terbuka dapat dipandang sebagai pembelajaran berbasis masalah, yaitu suatu pembelajaran yang dalam prosesnya dimulai dengan memberi suatu masalah kepada siswa. Hal ini sesuai dengan pendapat Shimada (1997) bahwa pembelajaran *open-ended* adalah pembelajaran yang menyajikan suatu permasalahan yang memiliki metode atau penyelesaian yang benar lebih dari satu. Pembelajaran *open-ended* dapat memberi kesempatan kepada siswa untuk memperoleh pengetahuan/pengalaman menemukan, mengenali, dan memecahkan masalah dengan beragam teknik.

Aspek keterbukaan dalam soal terbuka dapat diklasifikasikan ke dalam tiga tipe, yaitu: (1) terbuka proses penyelesaiannya, yakni soal itu memiliki beragam cara penyelesaian, (2) terbuka hasil akhirnya, yakni soal itu memiliki banyak jawab yang benar, dan (3) terbuka pengembangan lanjutannya, yakni ketika siswa telah menyelesaikan suatu, selanjutnya mereka dapat mengembangkan soal baru dengan mengubah syarat atau kondisi pada soal yang telah diselesaikan.

Berikut diberikan ilustrasi dua soal untuk membedakan antara soal tertutup dan soal terbuka. *(1) Gedung bioskop Plaza 27 mencatat penjualan tiket film Laskar Pelangi selama tiga hari berturut-turut adalah 457 lembar, 446 lembar, dan 475 lembar. Hitung jumlah tiket yang terjual selama tiga hari tersebut. (2) Susunlah sebuah data yang rata-ratanya lebih dari mediannya dan jangkauannya adalah 7.* Soal (1) merupakan soal rutin dan tidak termasuk masalah terbuka, karena prosedur yang digunakan untuk menentukan penyelesaiannya sudah tertentu yakni hanya menjumlahkan ketiga bilangan yang terdapat pada soal. Soal ini juga hanya memiliki satu jawaban yang benar. Sedangkan soal (2) merupakan soal terbuka (*open-ended problem*). Soal ini juga dikategorikan sebagai soal non-rutin. Keterbukaan soal ini meliputi keterbukaan proses, keterbukaan hasil akhir, dan keterbukaan pengembangan lanjutan. Soal ini dikategorikan sebagai soal non-rutin karena tidak memiliki prosedur tertentu untuk menjawabnya.

Dengan menggunakan soal terbuka, pembelajaran matematika dapat dirancang sedemikian sehingga lebih memberikan kesempatan kepada siswa untuk

mengembangkan kompetensi mereka dalam menggunakan ekspresi matematik (Takahashi, 2006). Dalam upaya menemukan berbagai alternatif strategi atau solusi suatu masalah, siswa akan menggunakan segenap kemampuannya dalam menggali berbagai informasi atau konsep-konsep yang relevan. Hal demikian akan mendorong siswa menjadi lebih kompeten dalam memahami ide-ide matematika. Hal demikian tidak akan terjadi dalam pembelajaran yang menggunakan soal tertutup yang hanya merujuk pada satu jawaban atau strategi penyelesaian. Penggunaan soal tertutup kurang mendorong siswa untuk mengeksplorasi berbagai ide-ide matematikanya, sehingga kurang memungkinkannya untuk secara efektif digunakan dalam mengembangkan kemampuan komunikasi matematika sekaligus membangun pemahaman matematik siswa.

Penggunaan soal terbuka juga dapat memicu tumbuhnya kemampuan berpikir kreatif. Menurut menurut Becker dan Shimada (Livne dkk, 2008), penggunaan soal terbuka dapat menstimulasi kreativitas, kemampuan berpikir original, dan inovasi dalam matematika. Sedangkan menurut Nohda (2008), salah satu tujuan pemberian soal terbuka dalam pembelajaran matematika adalah untuk mendorong aktivitas kreatif siswa dalam memecahkan masalah.

Menurut Takahashi (2006), terdapat beberapa manfaat dari penggunaan soal terbuka dalam pembelajaran matematika, yaitu sebagai berikut.

1. Siswa menjadi lebih aktif dalam mengekspresikan ide-ide mereka.
2. Siswa mempunyai kesempatan lebih untuk secara komprehensif menggunakan pengetahuan dan keterampilan mereka.
3. Siswa mempunyai pengalaman yang kaya dalam proses menemukan dan menerima persetujuan dari siswa lain terhadap ide-ide mereka.

Berbagai manfaat penggunaan soal terbuka juga dikemukakan oleh Sawada (Heinemann, 2008). Menurutnya, terdapat beberapa manfaat penggunan soal terbuka, yaitu sebagai berikut.

1. Siswa berpartisipasi secara lebih aktif dalam pembelajaran dan mengekspresikan ide-ide mereka secara lebih intensif. Pemecahan masalah terbuka memberikan kebebasan dan lingkungan belajar yang mendukung sebab terdapat banyak solusi

yang benar, sehingga setiap siswa mempunyai kesempatan untuk menghasilkan satu atau lebih jawaban yang unik. Aktivitas demikian akan mendorong terjadinya interaksi dan percakapan yang menarik antarsiswa di kelas.

2. Siswa mempunyai kesempatan lebih untuk menggunakan pengetahuan dan keterampilannya secara komprehensif. Karena terdapat banyak jawaban berbeda, maka siswa dapat memilih cara favoit mereka untuk memperoleh jawaban unik mereka.
3. Siswa mempunyai kesempatan lebih untuk mengembangkan penalarannya. Dengan membandingkan dan mendiskusikan strategi dan solusi siswa di kelas, siswa akan termotivasi untuk memberikan rasional atau penjelasan kepada siswa lain terhadap strategi atau solusi yang mereka hasilkan. Hal demikian akan menumbuhkan daya nalar siswa.
4. Siswa mempunyai pengalaman yang kaya untuk menikmati proses penemuan dan menerima persetujuan dari siswa lainnya terhadap strategi atau solusi yang mereka dihasilkan. Karena setiap siswa mempunyai solusi berdasarkan pada pemikiran mereka yang unik, maka setiap siswa akan tertarik atau berminat terhadap solusi siswa lainnya. Hal ini akan lebih menambah pengetahuan dan sekaligus dapat memperkaya strategi yang dimilikinya.

Dalam pembelajaran matematika, soal terbuka dapat diberikan kepada siswa di awal pembelajaran. Selanjutnya pembelajaran dikembangkan berdasarkan variasi jawaban yang muncul. Dengan cara ini siswa mempunyai pengalaman dalam menemukan sesuatu selama proses pemecahan masalah. Aktivitas matematika yang dihasilkan atau dibangun berdasarkan soal terbuka akan sangat kaya sedemikian sehingga guru dapat mengevaluasi keterampilan berpikir tingkat tinggi siswa.

C. Mengembangkan Soal Terbuka

Meskipun sangat disadari bahwa penggunaan soal terbuka dapat berdampak positif dalam pembelajaran matematika, tetapi hal ini tidak mudah untuk dipraktikkan di kelas karena tidak mudah untuk mengembangkan soal terbuka yang baik. Selain itu, pada umunya, guru tidak mempunyai cukup waktu untuk mengkreasi sejumlah besar soal terbuka. (Heinemann, 2008). Untuk mengembangkan soal terbuka, terdapat

langkah-langkah atau ”heuristik” tertentu yang dapat diacu. Salah satu cara untuk mengembangkan soal baru adalah dengan mengubah soal biasa atau tertutup menjadi soal terbuka. Berikut diberikan contoh mengubah atau merevisi soal tertutup menjadi soal terbuka.

Tabel 1. Mengubah Soal Tertutup Menjadi Soal Terbuka

Pertanyaan semula (soal tertutup)	**Pertanyaan revisi (soal terbuka)**
Dari bilangan-bilangan berikut, manakah yang merupakan bilangan prima? 7, 57, 67, 117	Menurut Fred 57 dan 67 adalah bilangan prima karena keduanya mempunyai satuan 7, yang merupakan bilangan prima. Dick tidak setuju dengan Fred. Siapakah yang benar? Mengapa?
Tentukan tiga suku berikutnya pada barisan berikut. 1, 4, 7, 10, 13, ..., ..., …	Perhatikan barisan berikut. 1, 4, 7, 10, 13, ..., ..., … Apakah 100 merupakan suku barisan itu? Jelaskan jawabanmu
Tentukan KPK dari 18 dan 24	Apakah 48 merupakan KPK dari 18 dan 24?

Selain mengubah soal tertutup menjadi soal terbuka sebagaimana dicontohkan di atas, terdapat beberapa cara lain dalam mengembangkan soal terbuka. Berikut diuraikan metode atau strategi tersebut.

1. Memberikan contoh yang memenuhi kondisi atau syarat tertentu.

Tugas jenis ini memungkinkan siswa untuk mengenali karakteristik konsep-konsep matematika terkait yang mendasari. Siswa harus memahami suatu konsep dan mengaplikasikannya untuk membuat suatu contoh yang memenuhi kondisi tertentu. Berikut diberikan beberapa contoh soal terbuka untuk berbagai jenjang sekolah.

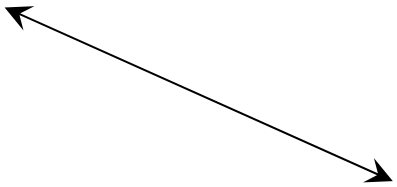
Contoh untuk SD

a. Susunlah bilangan genap 4 angka dengan menggunakan angka-angka berikut. Jelaskan mengapa bilangan yang kamu susun itu adalah bilangan genap.

3 6 7 1 5

_____ _____ _____ _____

b. Gambarlah sebuah segiempat beserta ukuran sisi-sisinya sedemikian sehingga kelilingnya lebih dari 19 dan kurang dari 20 satuan. Jelaskan bagaimana kamu mengetahui bahwa keliling itu lebih dari 19 dan kurang dari 20.
c. Gambarlah sebuah segitiga beserta bayangannya jika dicerminkan terhadap garis berikut.



Contoh untuk SMP

a. Tentukan 3 bilangan yang mempunyai FPB 5 dan KPK 180. Jelaskan bagaimana kamu menentukan bilangan-bilangan itu.
b. Susunlah data yang jangkauannya 10, rata-ratanya lebih dari mediannya, dan memuat 7. Jelaskan mengapa data yang kamu susun memenuhi kondisi tersebut.
c. Tentukan nilai a dan b yang memenuhi persamaan berikut. Jelaskan jawabanmu.

$$\sqrt{a} = 2\sqrt{b}$$

d. Gambarlah segiempat ABCD yang mempunyai tepat satu sumbu simetri. Jelaskan mengapa segiempat yang kamu buat tersebut memenuhi kondisi tersebut.

Contoh untuk SMA

a. Tuliskan sebuah bilangan irasional yang kuadratnya lebih kecil dari bilangan itu. Jelaskan mengapa bilangan itu memenuhi kriteria itu atau berikan alasan apabila tidak ada bilangan yang memenuhi kondisi itu.
b. Berikan contoh sebuah kerucut dan silinder beserta ukuran-ukurannya sedemikian sehingga keduanya mempunyai volum yang sama.
c. Tuliskan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik (-4, -3) dan (6,1). Gambarlah lingkaran tersebut. Jelaskan mengapa persamaan itu memenuhi syarat yang ditentukan.

2. Menentukan siapa yang benar.

Jenis tugas ini menyajikan dua atau lebih pendapat atau pandangan mengenai beberapa konsep atau prinsip matematika. Siswa diminta untuk memutuskan dan menjelaskan mana yang benar. Berikut diberikan beberapa contoh untuk setiap jenjang sekolah.

Contoh untuk SD

a. Berdasarkan data dari Bank Sentral diperoleh informasi mengenai persentasi uang berbentuk koin yang beredar di masyarakat, yakni terdiri atas 56% koin seratusan, 16% koin seribuan, dan sisanya koin limaratusan. Jeni mengatakan bahwa nilai seluruh koin ratusan yang beredar lebih banyak daripada nilai seluruh koin uang ribuan. Retno mengatakan sebaliknya. Sedangkan Wati mengatakan bahwa hal itu bergantung pada banyaknya koin uang tersebut. Siapakah yang benar? Mengapa?

b. Joko mengatakan bahwa untuk menentukan jumlah $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$, kita mempunyai sejumlah pilihan untuk menyamakan penyebut dari pecahan-pecahan tersebut. Sedangkan Edi mengatakan bahwa hanya terdapat satu pilihan untuk menyamakan penyebut pecahan-pecahan tersebut. Siapakah yang benar? Mengapa?

c. Susi dan Yuli akan menuliskan 5% dalam bentuk desimal. Susi menulis 0,5 dan Yuli menulis 0,05. Siapakah yang benar? Mengapa?

Contoh untuk SMP

a. Berikut ini adalah jawaban 3 siswa ketika mereka diminta untuk menentukan nilai dari 2^8.

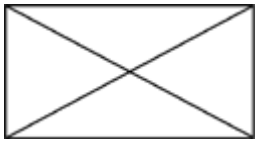
   Yanto: $2^8 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$

   Sofyan: $2^8 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 256$

   Danu: $2^8 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 64$

   Siapakah yang benar? Mengapa?

b. Dedy menyatakan bahwa ia telah membagi persegipanjang berikut menjadi 4 daerah yang sama luasnya. Tery tidak setuju dengan pendapat Dedy. Siapakah yang benar? Mengapa?



Contoh untuk SMA

a. Maman menyatakan bahwa 3 bukan akar persamaan $2x^4 + ax^3 + 3x^2 - 5x + 10 = 0$. Sedangkan Joni menyatakan bahwa untuk suatu nilai a tertentu, 3 merupakan akar polinomial itu. Siapakah yang benar? Mengapa?

b. Fikry menyatakan bahwa untuk beberapa nilai a, sistem persamaan linier berikut tidak mempunyai solusi.

   $2x - 5y = 8$

   $3x - 6y = a$

   Hilmy tidak setuju dengan Fikry. Menurutnya, sistem persamaan tersebut selalui mempunyai solusi berapapun nilai a. Siapa yang benar? Mengapa?

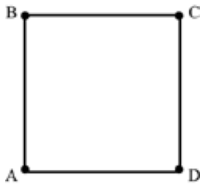
c. Rudy menyatakan bahwa untuk suatu nilai Ø, berlaku tan Ø < sin Ø. Sedangkan menurut Willy hal itu tidak mungkin. Siapakah yang benar? Mengapa?

3. Menyelesaikan soal dengan berbagai cara

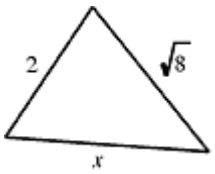
Metode ini jarang digunakan karena relatif sulit diterapkan karena tidak mudah untuk menentukan apakah terdapat alternatif metode penyelesaian suatu masalah. Selain itu, mungkin siswa akan berpikir untuk apa mencari alternatif metode untuk menyelesaikan suatu masalah, sementara mereka telah menyelesaikan masalah tersebut. Dalam hal ini, sikap siswa adalah "mengapa harus menemukan cara lain sedangkan sudah ditemukan cara atau jawaban yang memenuhi?". Namun demikian, cara demikian perlu dikembangkan dalam proses pembelajaran agar siswa menyadari bahwa terdapat beragam cara untuk menyelesaikan suatu masalah. Hal demikian akan mendorong siswa berpikir kreatif untuk mengkreasi cara mereka sendiri dalam upaya menyelesaikan masalah. Berikut diberikan beberapa contoh tugas demikian untuk berbagai jenjang sekolah.

Contoh untuk SMP

a. Berikan contoh dua transformasi berbeda yang memetakan persegi ABCD berikut menjadi dirinya sendiri.



b. Tentukan dua bilangan berbeda untuk menggantikan *x* pada segitiga berikut sedemikian sehingga memungkinkan untuk menggambar segitiga berikut dengan ukuran sisi yang diberikan. Jelaskan mengapa nilai *x* yang kamu berikan memungkinkan kamu untuk menggambar segitiga tersebut?



Contoh untuk SMA

a. Isilah titik-titik berikut menggunakan daftar jenis bilangan yang disediakan sehingga menjadi 3 pernyataan berbeda yang benar. Jelaskan mengapa pernyataan itu benar.

Semua ..... adalah .....

Bilangan kompleks
Bilangan bulat
Bilangan irasional
Bilangan Asli
Bilangan Rasional
Bilangan Real
Bilangan bulat

b. Isilah titik-titik berikut menggunakan daftar bangun segiempat yang disediakan sehingga menjadi 3 pernyataan berbeda yang benar. Jelaskan mengapa pernyataan itu benar.

Semua ..... adalah .....

Layang-layang
Jajargenjang
Persegipanjang
Belah ketupat
Trapesium
Persegi
Segiempat

D. Penutup

Disadari bahwa meskipun terdapat berbagai manfaat dari penggunaan soal-soal terbuka dalam pembelajaran matematika, namun terdapat beberapa kendala dalam mempraktikannya. Tidak mudah bagi guru untuk mengembangkan soal-soal terbuka apalagi dalam jumlah yang memadai. Berbagai strategi pengembangan soal terbuka sebagaimana dikemukakan di atas perlu diperhatikan oleh guru untuk selanjutnya dipraktikkan dalam pembelajaran matematika. Selanjutnya diharapkan penggunaan soal terbuka akan lebih membudaya, sehingga akan menjadikan pembelajaran matematika lebih bermakna, karena dapat mengoptimalkan pengembangan potensi siswa.

E. Daftar Pustaka

Heinemann. (2008). *Why Use Open-Ended Question?*. [Online]. Tersedia: http://books.heinemann.com/math/reasons.cfm. [17 Oktober 2008].

Inprasitha, Maitree. (2008). *Open-ended Approach and Teacher Education*. [Online]. Tersedia: http://www.human.tsukuba.ac.jp/~mathedu/journal/vol25/inprasitha.pdf. [17 Oktober 2008].

Livne, Nava L, Livne, Oren E., Wight, Charles A. (2008). *Enhanching Mathematical Creativity Through Multiple Solutions to Open-Ended Problems Online*. [Online]. Tersedia: http://www.iste.org/Content/NavigationMenu/Research/NECC_Research_Paper_Archives/NECC2008/Livne.pdf. [17 Oktober 2008].

Nohda, Nobuhiko. (2008). *A Study of "Open-Approach" Method in School Mathematics Teaching – Focusing On Mathematical Problem Solving Activities*. [Online]. Tersedia: http://www.nku.edu/~sheffield/nohda.html. [13 Oktober 2008].

Shimada. (1997). *Lesson Study for Effective Use of Open-Ended Problems*. [Online]. Tersedia: http://e-archive.criced.tsukuba.ac.jp/data/doc/pdf/2007/09/RCh%205%20Case%204%20Hashimoto_rev_max.pdf. [17 Oktober 2008].

Syaban, Mumun. (2008). *Menggunakan Open-Ended Problem untuk Memotivasi Berpikir Matematika*. [Online]. Tersedia: http://educare.e-fkipunla.net/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=54. [17 Oktober 2008].

Takahashi, Akihiko. (2008). *Communication as Process for Students to Learn Mathematical*. [Online]. Tersedia: http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/papers/PDF/14.Akihiko_Takahashi_USA.pdf. [17 Oktober 2008].

Pengaruh Pemberian Tugas *Creative Mind Map* setelah Pembelajaran Terhadap Kemampuan Kreativitas dan Koneksi Matematik Siswa

Oleh:

Ayu Anzela Sari
Jarnawi Afgani D.

Abstrak

Biasanya guru selalu memberikan tugas matematika dalam bentuk soal, merangkum, atau melakukan eksperimen. Tugas tersebut diyakini akan memberi pengalaman belajar, serta peningkatan pemahaman siswa. Creative mind map merupakan salah satu bentuk tugas yang mungkin dapat diberikan kepada siswa dengan tujuan agar siswa disamping memahami konsep matematika, juga diharapkan siswa mempunyai pemahaman yang komprehensif terhadap keseluruhan materi, serta aplikasi dari konsep tersebut.Hasil penelitian ini menemukan bahwa ada peningkatan kreativitas dan koneksi siswa dalam pembelajaran matematika setelah diberi tugas mind map.

Kata kunci: Mind map, Creative mind map, kreativitas, dan koneksi matematik

A. Pendahuluan

Pendidikan merupakan kebutuhan sepanjang hayat, tanpa pendidikan manusia akan sulit berkembang bahkan akan terbelakang. Pendidikan dapat menentukan maju mundurnya suatu bangsa, maka untuk menghasilkan sumber daya manusia sebagai subyek dalam pembangunan yang baik, diperlukan modal dari hasil pendidikan itu sendiri. Hal ini sejalan dengan konsep pendidikan yang dicanangkan oleh PBB bahwa pendidikan ditegakkan oleh 4 pilar, yaitu *learning to know, learning to do, learning to live together* dan *learning to be*. Dengan demikian pendidikan harus diarahkan agar dapat menghasilkan manusia yang berkualitas, mampu bersaing, memiliki budi pekerti yang luhur dan moral yang baik.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang dapat menunjang keberhasilan pendidikan suatu bangsa. Ruang lingkup matematika sangat luas, yang tidak hanya sekedar menghapal rumus dan kecepatan menghitung, tetapi banyak sekali penerapan matematika yang telah kita rasakan. Contoh kecilnya, agar anda tidak tertipu ketika belanja ke pasar maka anda harus memahami operasi aritmatik sederhana.

Pembangunan yang kita rasakan selama beberapa dekade terakhir ini tidak terlepas juga dari terapan ilmu matematika. Salah satu contohnya, untuk membangun sebuah jembatan yang kokoh dan dapat dipakai hingga seratus tahun kemudian, maka diperlukan prediksi daya tahan bangunan melalui perhitungan matematika. Artinya matematika tidak akan pernah lepas dari peradaban manusia. Namun selama ini sebagian masyarakat menganggap matematika secara sempit, implikasi terhadap pendidikan matematika adalah rendanya sikap, minat dan prestasi belajar matematika. Padahal matematika merupakan mata pelajaran dasar yang harus dikuasai oleh siswa di setiap jenjang pendidikan tetapi kenyataannya masih banyak siswa yang mengalami kesulitan.

Sejauh ini pembelajaran matematika di Indonesia masih didominasi oleh pembelajaran konvensional. Arus informasi yang semakin deras tidak lagi memungkinkan kita memposisikan guru sebagai mahatahu dan beranggapan bahwa siswa perlu dimasuki dengan berbagai fakta pengetahuan dan informasi. Siswa bukanlah sebuah botol kosong yang bisa diisi dengan muatan informasi apa saja yang dianggap perlu oleh guru. Metode pembelajaran seperti ini kurang memberi kesempatan kepada siswa dalam mengembangkan dan menemukan pemahamannya sendiri, sehingga belajar matematika menjadi tidak bermakna. Implikasinya, informasi-informasi yang disajikan sulit diserap, diproses dan disimpan dengan baik oleh sistem memori siswa. Dalam psikologi pristiwa seperti itu sering disebut lupa.

Menurut pandangan para ahli psikologi kognitif, materi pelajaran yang terlupakan oleh siswa tidak benar-benar hilang dari ingatan akalnya, materi pelajaran itu masih terdapat dalam subsitem akal permanen siswa namun terlalu lemah untuk diingat kembali sehingga diperlukan sebuah alat (pendekatan belajar) yang dapat membuat sistem memori siswa berfungsi optimal dalam memproses materi pelajaran yang diberikan (Syah, 2003: 171).

Kegiatan belajar mengajar bukan sekadar memorisasi dan pengulangan (*recall*), bukan sekadar penekanan pada penguasaan pengetahuan atau informasi matematik yang diajarkan, akan tetapi lebih menekankan pada internalisasi tentang apa yang diajarkan sehingga tertanam dan berfungsi sebagai muatan nurani dan dihayati serta dipraktekkan dalam kehidupan sehari-hari oleh peserta didik. Dengan begitu siswa dapat memandang, menggali permasalahan, mencoba mencari

pemecahan masalah-masalah yang berkaitan dengan matematika, disiplin ilmu lain maupun yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Kemampuan seperti ini dapat disebut sebagai kreativitas dan koneksi matematik.

Kemampuan kreativitas dan koneksi matematik belum maksimal dikembangkan pada sekolah-sekolah di Indonesia. Pembelajaran matematika di sekolah biasanya linear, yang cenderung hanya bertujuan meningkatkan nilai matematika tanpa memperhatikan mutu dan aspek matematika lain yang saling berkesinambungan. Pembelajaran yang linear hanya memacu kerja otak kiri, sedangkan otak kanan yang berhubungan dengan warna, gambar, imajinasi dan kreativitas belum digunakan secara optimal. Akibatnya proses berpikir kreatif siswa menjadi terhambat. Siswa tidak menghasilkan ide-ide kreatif dalam memecahkan masalah apalagi kemampuan untuk mengkoneksikan masalah.

Untuk menjawab permasalahan tersebut maka di desain sebuah pembelajaran dengan cara memberikan tugas membuat *creative mind map* setelah pembelajaran berlangsung.

B. *Creative Mind Map* dalam Proses Belajar Mengajar Matematika

Menurut psikologi gestalt, belajar bukan sekedar proses asosiasi antara stimulus dengan respons yang makin lama makin kuat karena adanya latihan atau Pengulangan. Tetapi, belajar terjadi jika ada pengertian (insight). Pengertian (insight) ini muncul setelah beberapa saat seseorang mencoba memahami suatu masalah yang muncul kepadanya. Dalam hal ini belajar adalah suatu proses rentan penemuan dengan bantuan pengalaman-pengalaman yang sudah ada (Mahmud, 2005: 87).

Bruner (Kusumah, 1992: 98) menyatakan bahwa belajar adalah proses mental untuk menemukan konsep, individu dapat membuat kategorisasi dan menemukan kaitan-kaitan antara aspek-aspek yang terkandung dalam kategori tersebut sehingga dalam benaknya tercipta peta konsep tertentu, jadi memorinya tidak hanya untuk mempelajari data yang baru, melainkan berfungsi juga menemukan hubungan-hubungan antara materi yang telah ada dengan materi yang sedang dipelajari.

Mengajar dapat dipahami sebagai upaya memberikan rangsangan (stimulus), bimbingan, pengarahan dan dorongan kepada siswa agar terjadi proses belajar.

Sebuah penelitian menunjukkan bahwa dalam perkuliahan bergaya ceramah, mahasiswa kurang menaruh perhatian selama 40 persen dari seluruh waktu kuliah. Mahasiswa dapat mengingat 70 persen dalam sepuluh menit pertama kuliah, sedangkan dalam sepuluh menit terakhir mereka hanya mengingat 20 persen materi kuliah (Pollio dalam Silberman, 2006: 24).

Proses belajar mengajar akan bermakna jika siswa terlibat aktif dalam proses belajar itu sendiri seperti mengerjakan tugas yang menuntut pengetahuan yang telah atau harus mereka dapatkan, menggambarkan sesuatu dengan cara mereka sendiri, dan mencoba memperaktikan keterampilannya. Pemberian tugas membuat *creative mind map* setelah materi pelajaran disampaikan oleh guru akan melibatkan siswa berpartisipasi aktif dan kreatif dalam belajar sekaligus membantu siswa mengadakan pengulangan meteri pelajaran yang telah disampaikan.

Untuk mengembangkan kreativitas, siswa perlu diberi kesempatan bersibuk diri secara kreatif. Pendidik hendaknya dapat merangsang siswa untuk melibatkan dirinya dalam kegiatan kreatif, dengan membantu mengusahakan sarana dan prasarana yang diperlukan. Dalam hal ini yang penting ialah memberi kebebasan kepada anak untuk mengekspresikan dirinya secara kreatif, tanpa merugikan orang lain atau lingkungan (Munandar, 2004: 46).

Mohamad Amin (Rampengan, 1986: 8) mengatakan bahwa agar dapat mengajarkan kreativitas, guru atau dosen harus menjadi kreatif dalam merencanakan cara-cara, penugasan dan sebagiannya.

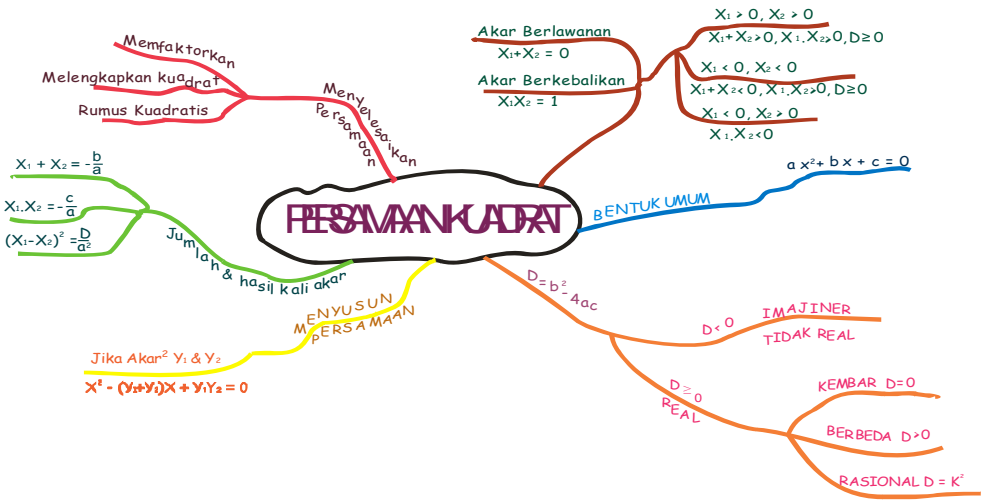
Peta pikiran sebagai mekanisme berpikir kreatif (Angell, 2007), dapat juga disebut sebagai *creative mind map*. *Creative mind map* sebagai bagian dari *mind map* dapat dipandang sebagai sebuah proses yang terjadi didalam otak manusia dalam menemukan dan mengembangkan sebuah gagasan baru (produk) yang lebih inovatif dan variatif. Dibandingkan dengan *mind map* biasa, *creative mind map* lebih mengarahkan siswa untuk memenuhi kriteria berpikir kreatif yaitu kelancaran, keluwesan (fleksibilitas), dan orisinalitas dalam berpikir, serta kemampuan untuk mengelaborasi (mengembangkan, memperkaya, memperinci suatu gagasan).

Creative mind map merupakan teknik belajar yang tidak jauh berbeda dengan peta konsep. Dalam membuat *creative mind map*, siswa dapat mengambarkan konsep suatu materi matematika dengan kreativitasnya sendiri baik bahasa, simbol ataupun ilustrasi yang digunakan. Namun tetap memperhatikan aturan-aturan dan notasi-notasi yang ada pada matematika.

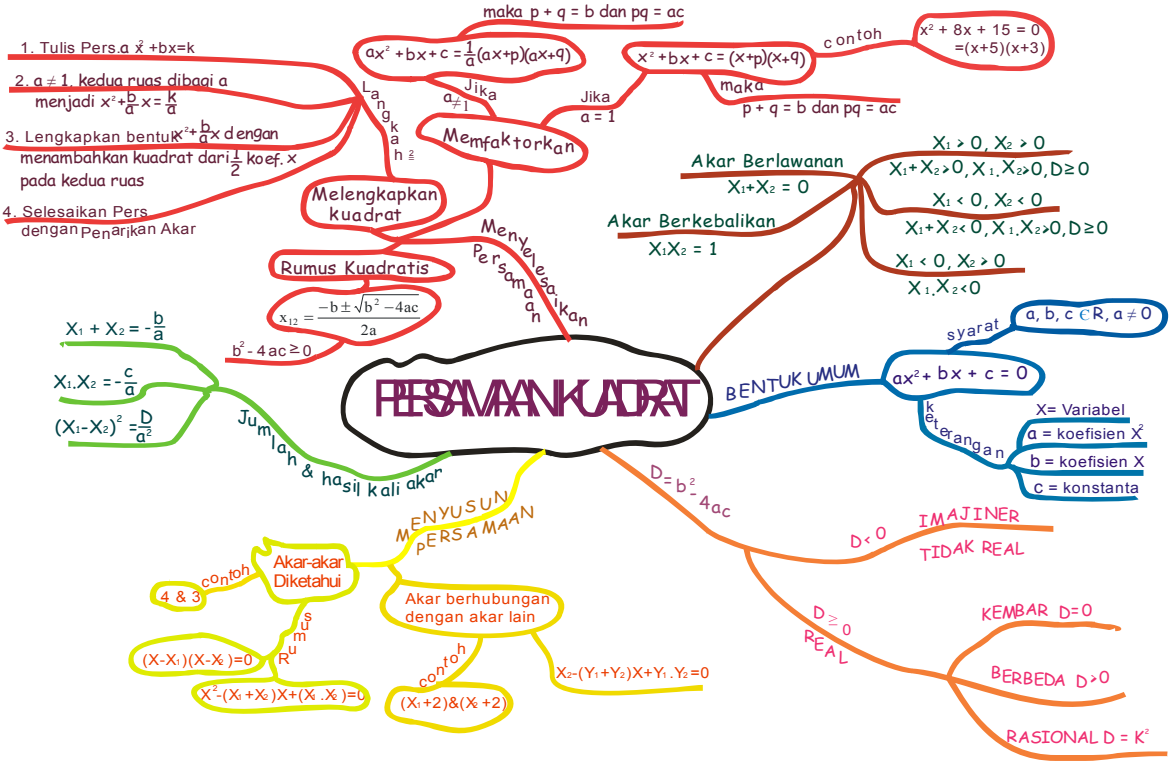
Secara ringkas penyusunan *creative mind map* sebagai bagian dari *mind map* adalah sebagai berikut:

1. Membaca uraian materi secara cermat, dengan cara menemukan gagasan intisari dari materi yang dipelajari. Tentukanlah gagasan paling utama dari gagasan-gagasan intisari yang diperoleh, gagasan intisari yang lainnya ditempatkan sebagai sub gagasan. Letakkanlah gagasan utama tersebut ditengah halaman kertas kosong.
2. Buatlah beberapa garis tebal berlekuk-lekuk yang menyambung dari gambar di tengah kertas menuju sub gagasan lainnya. Dari setiap sub gagasan tersebut ditarik lagi garis penghubung lain yang menyebar seperti cabang pohon. Gunakan warna yang berbeda untuk setiap cabang.
3. Tambahkan simbol-simbol dan ilustrasi-ilustrasi untuk mendapatkan ingatan yang lebih baik.

Contoh *mind map*:



Contoh *creative mind map*:



Dari ilustrasi diatas, dapat dilihat bahwa *creative mind map* merupakan hasil pengembangan dari sebuah *mind map*. Dalam mengerjakan *creative mind map* siswa dituntut berpikir lebih kreatif, khususnya kreatif dalam bidang matematika. Menurut Yudianto (2003: 39), dengan memperhatikan karakteristik matematika dan pembelajarannya yang khas, besar kemungkinan bahwa kreativitas dalam bidang yang lain seperti bahasa dan seni berbeda, dimana seseorang bisa mencurahkan kreativitasnya secara bebas. Dalam matematika kreativitas berpikir dipengaruhi dan dibatasi oleh penguasaan konsep, sebagian siswa tidak bisa secara bebas mencurahkan kreativitasnya, siswa harus mengetahui dan bisa menggunakan konsep yang tepat ketika akan menyelesaikan masalah dan mengembangkan kreativitasnya.

Kriteria penilaian sebuah *creative mind map* yang baik adalah jika semua aspek berikut, yaitu: kelancaran, keluwesan (fleksibilitas), orisinalitas dan elaborasi muncul. Dari ilustrasi *creative mind map* dan *mind map* sebelumnya, aspek kelancaran dipenuhi karena keduanya menghasilkan gagasan (ide) yang relevan dan didalamnya terdapat koneksi antara gagasan utama dengan sub-sub gagasan lain; aspek keluwesan dipenuhi karena dapat membuat sebuah subjek (materi pelajaran) disajikan dalam sudut pandang yang berbeda namun tetap berada dalam kaidah

matematika; aspek orisinalitas juga dipenuhi, karena gagasan-gagasan yang tercurah merupakan sesuatu yang baru dan unik bagi setiap individu; tetapi, aspek elaborasi hanya dipenuhi oleh *creative mind map* karena dalam *creative mind map* sebuah sub gagasan diperluas lagi secara lebih detail.

Pada ilustrasi *mind map* yang diberikan, "*cabang menyelesaikan persamaan*" langsung menuju kepada cabang yang berisi "*memfaktorkan, melengkapkan kuadrat dan rumus kuadratis*". Tetapi didalam *creative mind map* "*cabang menyelesaikan persamaan*" dikembangkan lagi menjadi menjadi tiga sub gagasan lain dan masing-masing sub gagasan tersebut diperinci secara lebih detail.

Creative mind map berfungsi sebagai alat bantu untuk memudahkan otak bekerja. Beberapa manfaat dari *creative mind map* yaitu:

1. Meningkatkan kreativitas.
2. Mampu menggerakan bahkan meningkatkan kekuatan mental sebagai tujuan utama penggunaan peta pikiran.
3. Memberikan kemampuan bagi pengguna peta pikiran untuk melihat berbagai macam unsur-unsur dasar secara bersamaan yang memungkinkan meningkatkan kumpulan maupun kesatuan daya cipta. Seperti, melihat koneksi antar topik yang berbeda
4. Memberikan kemampuan bagi seseorang untuk melacak/menemukan ide-ide yang secara normal berada tidak jelas dalam pikiran.
5. Memungkinkan untuk meningkatkan kemampuan memperoleh ide-ide baru.
6. Mendorong rasa keceriaan, humor, dan inovasi yang dapat menjauhkan para pengguna peta pikiran dari hal yang menyimpang dari aturan dan mampu menciptakan sebuah daya cipta/ide yang benar-benar murni. Seperti, memudahkan fokus pada pokok bahasan.

C. Metode Penelitian

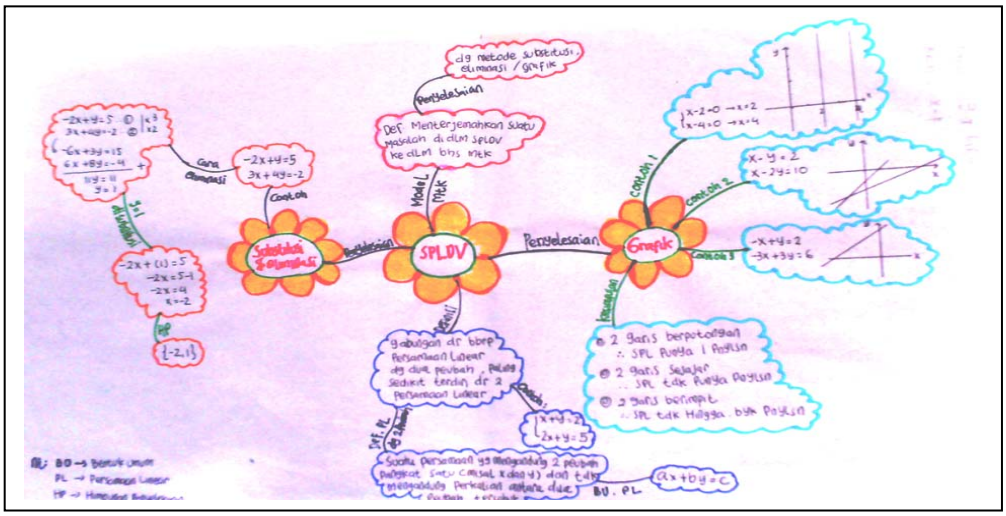
Penelitian ini bertujuan mengkaji secara deskriptif tugas dalam bentuk *mind map* dan pengaruhnya terhadap kemampuan kreativitas dan koneksi matematik siswa SMA. Adapun desain penelitian yang digunakan adalah desain *pre and post test control group design*.

D. Diskusi Hasil Penelitian

Gagne dalam Trianto (2007: 12) mengatakan bahwa untuk terjadinya belajar pada diri siswa diperlukan kondisi belajar, baik kondisi internal maupun kondisi eksternal. Agar siswa memperoleh hasil belajar yang diharapkan, sebaiknya memperhatikan atau menata pembelajaran yang memungkinkan mengaktifkan memori siswa yang sesuai agar informasi yang baru dapat dipahaminya. Kondisi internal merupakan peningkatan memori siswa sebagai hasil belajar terdahulu. Kondisi eksternal bertujuan antara lain merangsang ingatan siswa, penginformasian tujuan pembelajaran, membimbing belajar materi yang baru, memberi kesempatan kepada siswa menghubungkannya dengan informasi baru.

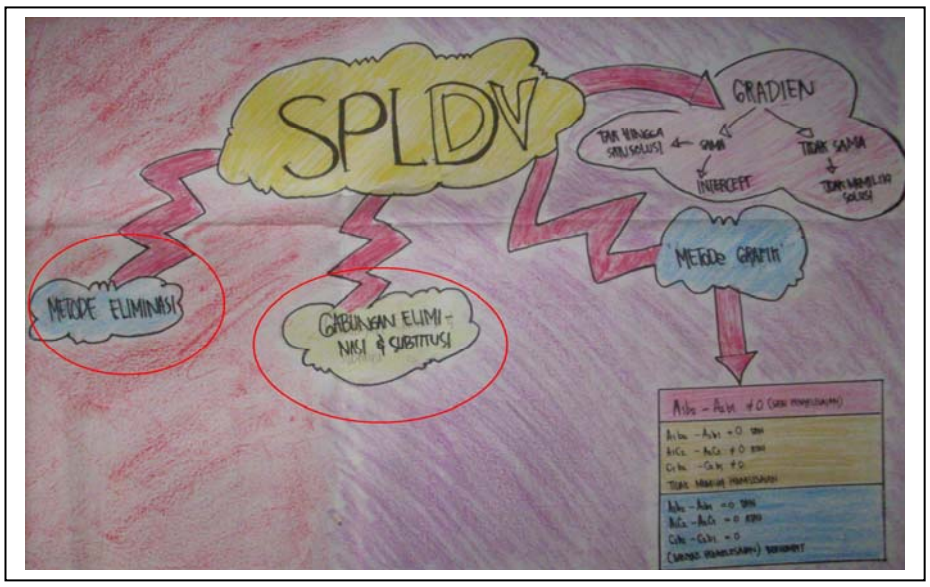
Tugas membuat *creative mind map* merupakan stimulus terhadap kondisi internal dan eksternal siswa agar mereka dapat mengkonstruksi pengetahuan yang diperoleh dalam proses pembelajaran. Sehingga siswa mampu membangun pemahaman mereka sendiri melalui keterlibatan aktif dalam proses belajar mengajar.

Creative mind map merupakan peta pikiran sebagai mekanisme berpikir kreatif (Angell, 2007). *Creative mind map* sebagai bagian dari *mind map* dapat dipandang sebagai sebuah proses yang terjadi didalam otak manusia dalam menemukan dan mengembangkan sebuah gagasan baru (produk) yang lebih inovatif dan variatif. Kriteria penilaian sebuah *creative mind map* yang baik adalah jika semua aspek berikut, yaitu: kelancaran, keluwesan (fleksibilitas), orisinalitas dan elaborasi muncul. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dibawah ini ditampilkan beberapa contoh *creative mind map* hasil karya siswa.



Gambar 4.7
***Creative Mind Map* yang Memenuhi Kriteria Baik**

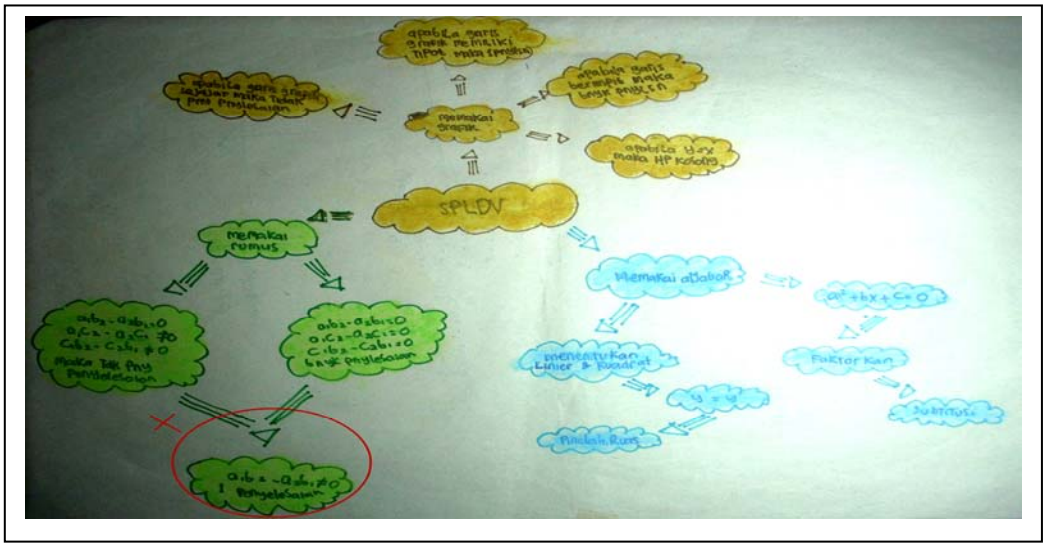
Gambar 4.7 memenuhi kriteria *creative mind map* yang baik karena di dalam *creative mind map* ini semua aspek kelancaran (*fluency*), keluwesan (*flexibility*), orisinalitas dan elaborasi muncul. Aspek kelancaran dipenuhi, karena siswa mampu menuangkan idenya yaitu menemukan gagasan-gagasan yang saling berkaitan satu sama lain (*connection*). Aspek keluwesan (*flexibility*) dipenuhi, karena siswa dapat menyampaikan idenya (gagasannya) menggunakan cara atau pendekatan yang berbeda dan menarik menurut mereka, namun tetap terdapat kesinambungan antara ide tersebut terhadap kaidah matematika yang relevan. Aspek orisinalitas dipenuhi, karena desain yang dibuat siswa merupakan sesuatu yang "baru" dan berbeda antara siswa yang satu dengan yang lain. Aspek elaborasi dipenuhi, karena didalam *creative mind map* ini siswa dapat memperluas dan memperinci idenya, seperti menambahkan contoh atau kesimpulan.



Gambar 4.8
***Creative Mind Map* yang Memenuhi Kriteria Kurang Baik**

Gambar 4.8 termasuk ke dalam *creative mind map* yang kurang baik, karena aspek elaborasi tidak dipenuhi. Dari gambar 4.8, pada bagian yang dilingkari, seharusnya siswa dapat memperluas "metode eliminasi dan metode gabungan eliminasi substitusi" dengan menambahkan beberapa keterangan. Seperti,

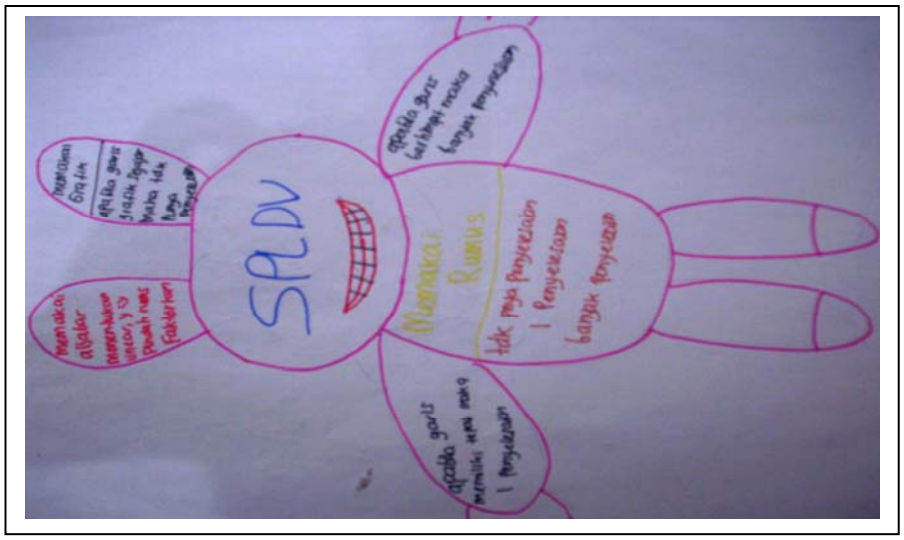
memberikan rincian secara ringkas berupa definisi, langkah-langkah penyelesaian, atau contoh.



Gambar 4.9
***Creative Mind Map* yang Memenuhi Kriteria Kurang Baik**

Gambar 4.9 termasuk ke dalam *creative mind map* yang kurang baik. Aspek kelancaran tidak dipenuhi, karena ada kekeliruan dalam menuangkan idennya. Dari gambar 4.9, pada bagian yang dilingkari, yaitu pada sub gagasan "*memakai rumus*", terlihat bahwa siswa tersebut kurang memahami materi yang telah diajarakan. Keterangan "$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, punya satu penyelesaian" tidak boleh diletakkan di bawah dua keterangan yang lain. Apabila hal tersebut dilakukan, menunjukkan bahwa keterangan "$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, punya satu penyelesaian" merupakan kesimpulan dari dua keterangan lainnya, ini tidak sesuai dengan konsep matematika. Artinya cara berpikir siswa kurang lancar.

Gambar 4.10 belum dapat memenuhi kriteria sebuah *creative mind map* yang baik. Karena bentuk dari gambar tersebut tidak menggambarkan sebuah cabang yang saling memiliki hubungan antara satu gagasan dengan gagasan lain, sehingga cara berpikir siswa tersebut masih sulit untuk dipahami. Salah satu aspek yang tidak muncul dalam gambar 4.10 adalah aspek keluwesan (fleksibel). Keluwesan atau kelenturan merupakan kemampuan untuk menghasilkan berbagai gagasan dan daya untuk beralih dari suatu gagasan kegagasan yang lain.



Gambar 4.10
***Creative Mind Map* yang Memuat Kesalahan Konsep**

Gordon dan Browne dalam Moeslichatoen (2004: 19) mengatakan bahwa kreativitas merupakan kemampuan anak menciptakan gagasan baru yang asli dan imajinatif, dan juga kemampuan mengadaptasi gagasan baru dengan gagasan yang sudah dimiliki. Bila guru ingin mengembangkan kreativitas anak, guru harus membantu mereka mengembangkan kelenturan dan menggunakan imajinasi, kesediaan untuk mengambil resiko, menggunakan diri sendiri sebagai sumber dan pengalaman belajar.

Dalam mengerjakan sebuah *creative mind map* siswa dituntut menggunakan imajinasinya dalam berpikir, menggambar atau membangun dan memperoleh hasil yang kreatif, khususnya kreatif dalam bidang matematika.

Menurut Yudianto (2003: 39), dalam matematika kreativitas berpikir dipengaruhi dan dibatasi oleh penguasaan konsep, sebagian siswa tidak bisa secara bebas mencurahkan kreativitasnya, siswa harus mengetahui dan bisa menggunakan konsep yang tepat ketika akan menyelesaikan masalah dan mengembangkan kreativitasnya.

Creative mind map membantu siswa membuat catatan yang menarik. Pendapat ini didukung oleh pernyataan siswa dalam angket dimana 62,42% siswa setuju dengan pernyataan "Belajar dengan tugas membuat *creative mind map* membantu saya dalam membuat catatan yang menarik". Trianto (2007: 92) berpendapat bahwa pembuatan

catatan membantu siswa dalam mengorganisasikan informasi sehingga informasi itu dapat diproses dan dikaitkan dengan pengetahuan yang telah ada secara lebih efektif.

Namun 33,33% siswa setuju dengan pernyataan "Pembelajaran yang disertai dengan tugas menyusun *creative mind map* hanya merepotkan saya." Artinya, sekitar sepertiga siswa mengalami kerepotan dalam membuat *creative mind map,* hal ini dikarenakan siswa belum terbiasa mencurahkan gagasannya dalam bentuk *mind map*. Menurut Puspasari (2005: 53), Peta pikiran dengan segala kelebihannya tetap bukan sesuatu yang sempurna. Peta pikiran juga masih mempunyai kekurangan karena tidak semua siswa bisa menggambar, sehingga mereka lebih menyenangi cara mencatat seperti biasa.

Gambar 4.11
***Creative Mind Map* Siswa yang Sulit Mencurahkan Konsep ke dalam Gambar**

Setelah dilakukan analisis data tes awal kemampuan kreativitas dan koneksi matematik pada kedua kelompok sampel diperoleh hasil bahwa kemampuan awal kedua kelompok sampel yaitu kelas eksperimen dan kontrol sama atau tidak berbeda secara signifikan. Namun skor rata-rata kedua kemampuan tersebut hanya berkisar 11-17 dari skor maksimal ideal. Hal ini karena, siswa masih terbiasa mengerjakan soal matematika tanpa memahaminya sebagai satu kesatuan yang terintegrasi, serta kurang terlatih dalam mengeluarkan ide.

Diakhir eksperimen siswa diberi tes yang menguji kemampuan krativitas dan koneksi matematik. Secara deskriptif kemampuan kreativitas dan koneksi matematik siswa yang belajar dengan tugas *creative mind map* lebih baik daripada siswa tanpa diberi tugas. Hal ini dapat dilihat dari skor rata-rata tes akhir kemampuan kreativitas dan

koneksi matematik yang mengalami peningkatan. Nilai rata-rata peningkatan kemampuan kreativitas kelas eksperimen adalah 0,301 menurut klasifikasi Meltzer berada dalam kategori sedang, sedangkan nilai rata-rata peningkatan kelas kontrol hanya sebesar 0,125 dan berada dalam kategori rendah. Adapun nilai rata-rata peningkatan kemampuan koneksi matematik kelas eksperimen adalah 0,676 dan kelas kontrol 0,345, keduanya berada pada kategori sedang.

Dapat kita lihat sebelumnya, dari kedua kelas tersebut nampak bahwa rata-rata kemampuan koneksi matematik siswa lebih tinggi dari kemampuan kreatifitas matematiknya. Hal ini disebabkan siswa telah mampuh menyelesaikan masalah dengan cara memandang matematika sebagai satu kesatuan yang utuh, namun kemampuan siswa dalam mengelaborasi, fleksibilitas, berpikir lancar dan orisinalitas masih kurang. Seperti kemampuan dalam menghasilkan gagasan, jawaban atau pernyataan bervariasi, melihat suatu masalah dari sudut pandang berbeda, menggunakan kombinasi-kombinasi yang tidak lazim dari unsur-unsur yang diketahui dalam suatu masalah dan menambah atau memperinci detail-detail dari suatu objek.

Pembelajaran dengan *creative mind map* juga memberikan pengaruh yang positif terhadap korelasi antara kemampuan kreativitas dan koneksi matematik siswa. Koefisien korelasi yang diperoleh sebesar 0,521, menurut klasifikasi Guilford nilai korelasi 0,521 menyatakan bahwa hubungan antara kedua kemampuan tersebut berada pada kategori sedang. Selain itu hasil analisis korelasi dengan *Pearson Product Moment* menyatakan bahwa nilai probabilitas (*Sig*.) yang diperoleh sebesar 0,002 lebih kecil dari taraf nyata sebesar 0,01, sehingga terdapat hubungan yang linear dan signifikan antara kemampuan kreativitas dan koneksi matematik siswa. Artinya siswa yang mendapatkan peringkat atas dalam kemampuan kreativitas kemungkinan mendapatkan peringkat atas juga dalam kemampuan koneksi. Hal ini juga didukung oleh hasil perhitungan asosiasi kontingensi. Koefisen kontingensi yang diperoleh sebesar 0,50, menyatakan bahwa tingkat asosiasi siswa antara kemampuan kreativitas dan koneksi matematik berada pada kategori cukup.

Tugas membuat *creative mind map* adalah pengalaman baru bagi siswa SMA Laboratorium UPI, namun demikian pengelaman tersebut telah membuat belajar matematika menjadi lebih menarik dan memudahkan dalam mengingat dan memahami materi yang telah dipelajari. Hal ini dapat dilihat dari hasil angket yang diberikan pada

kelas eksperimen, yaitu ada sekitar 77,58% siswa tidak setuju dengan pernyataan bahwa proses belajar yang disertai diskusi dalam menyelesaikan soal-soal dan membuat tugas *creative mind map*, membuat saya kesal, bosan dan enggan belajar. Kemudian sekitar 68,48% siswa setuju bahwa pembelajaran yang disertai dengan tugas menyusun *creative mind map* membuat saya tertarik belajar matematika dan 74,55% siswa setuju bahwa mereka lebih mudah mengingat materi yang telah dipelajari. Berdasarkan hasil analisis angket, secara umum siswa memiliki sikap positif terhadap pembelajaran dengan *creative mind map*, yang dapat dilihat dari nilai rata-rata angket sebesar 3,51 dan berada diatas nilai rata-rata skor netral yaitu tiga.

E. Kesimpulan dan Saran

Pembelajaran dengan *creative mind map* (peta pikiran yang kreatif) adalah pembelajaran yang diarahkan kepada pendekatan yang berpusat pada siswa. Siswa dapat membangun sendiri pemahaman matematiknya setelah mereka membaca, melakukan aktivitas belajar, menyelesaikan suatu masalah, dan membuat sebuah keputusan. Dengan pola pendekatan seperti ini diharapkan siswa memperoleh kesempatan menemukan pemahaman menggunakan kompetensi yang dimilikinya dan memberi ruang kepada siswa untuk merenungi cara belajarnya. Ketercapaian penggalian dan penemuan kompetensi dilakukan sendiri oleh siswa, agar informasi yang diterima akan selalu tertanam dalam sistem memorinya sehingga diharapkan mengurangi peristiwa lupa. Seperti yang telah dikemukakan, salah satu manfaat *creative mind map* dalam belajar adalah membantu siswa melihat koneksi antar topik yang berbeda. Dengan *creative mind map*, kesulitan siswa dalam mengkoneksikan atau mengabungkan konsep yang baru dengan konsep yang telah ada dapat diselesaikan.

Pembelajaran dengan *creative mind map* dapat meningkatkan kemampuan kreativitas dan koneksi siswa menjadi lebih baik. Dan juga, memberikan pengaruh yang positif terhadap korelasi antara kedua kemampuan tersebut. Karena dalam memenuhi kriteria *creative mind map* sebagai mekanisme berpikir kreatif, siswa juga harus mampu menggabungkan (menkoneksikan) gagasan-gagasan intisari menjadi satu kesatuan yang relevan sesuai dengan aturan dalam matematika.

F. Daftar Pustaka

Angell, Rose (2007). *The Mind Map as a Creative Thinking Mechanism*. [Online]. Tersedia: http://EzineArticles.com/?expert=Rose_Angell[21 September 2007]

Kusumah, I. H. (1992). *Studi Tentang Strategi Belajar dengan Menggunakan Peta Konsep*. Tesis. Bandung: Tidak Diterbitkan.

Mahmud. (2005). *Psikologi Pendidikan Muktahir*. Bandung: Sahifa.

Munandar, Utami. (2004). *Pengembangan Kreativitas Anak Berbakat*. Jakarta: PT Rineka Cipta.

Rampengan, M. J. (1986). *Faktor-Faktor Operasional Kreativitas Guru IPA dalam Mengajarkan Respirasi.* Tesis. Bandung: Tidak Diterbitkan.

Silberman, Melvin. (2006). *Active Learning: 101 Cara Belajar Siswa Aktif*. Bandung: Nusamedia.

Syah, Muhibbin. (2005). *Psikologi Belajar*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.

Yudianto, Yudi (2003). *Pengembangan Kemampuan Elaborasi Siswa Sekolah Dasar Melalui Pembeklajaran Matematika Dengan Pendekatan Pemecahan Masalah*. Tesis. Bandung: Tidak Diterbitkan.

Kontribusi Matematika dan Pembelajarannya bagi Pendidikan Nilai

Oleh :

Gregoria Ariyanti

(ariyanti_gregoria@yahoo.com)

Program Studi Pendidikan Matematika

Universitas Widya Mandala Madiun

Abstrak

Pendidikan nilai ialah penanaman dan pengembangan nilai –nilai dalam diri seseorang. Pendidikan nilai tidak harus merupakan satu program atau pelajaran khusus, seperti pelajaran matematika tetapi matematika, khususnya matematika sekolah dasar juga dapat memberikan kontribusi bagi pendidikan nilai (sikap) anak. Nilai yang disampaikan terimplisit dalam soal-soal matematika Selain itu, model pembelajaran matematika dewasa ini juga turut memberikan kontribusi bagi pendidikan nilai (sikap) anak, di antaranya solidaritas, tanggung jawab, disiplin, teliti ,kreatif dan kritis.

Kata-kata kunci : pendidikan nilai, matematika dan metode pembelajaran matematika

PENDAHULUAN

Selama ini masih banyak orang yang menganggap bahwa matematika tidaklah lebih dari sekedar berhitung dan bermain dengan rumus dan angka-angka. Tidak jarang muncul keluhan bahwa matematika cuma bikin pusing siswa (dan juga orang tuanya) dan dianggap sebagai momok yang menakutkan oleh sebagian siswa. Soal-soal matematika yang ditulis dalam beberapa buku paket matematika sekolah tidak hanya berupa bilangan (hitung-hitungan) langsung tapi juga banyak yang berupa soal cerita. Tingkatan soal juga tidak hanya menuntut cara berpikir yang rutin tetapi banyak juga soal-soal cerita yang menuntut cara berpikir yang tidak rutin. Saat ini mulai banyak metode pembelajaran yang diterapkan di sekolah tidak hanya sekedar ceramah sehingga pengetahuan matematika tidak berpusat pada guru saja tetapi siswa juga dituntut untuk membangun suatu konsep. Soal matematika yang disajikan dalam soal cerita (tidak hanya bilangan) dan metode pembelajarannya dapat memberikan makna tertentu.

Pendidikan matematika mengandung nilai yang antara lain dibawa oleh ciri-ciri atau karakteristik dari matematika itu sendiri (Soedjadi, 2007:75).

Tulisan ini ingin mengkaitkan matematika dan pembelajarannya dengan pendidikan nilai (sikap) pada anak. Adapun tujuan dari penulisan ini adalah agar diperoleh pemahaman bahwa matematika dan pembelajarannya juga mempunyai peran penting dalam pendidikan nilai pada anak, khususnya matematika sekolah dasar,tidak sekedar hitung-hitungan saja.

PENDIDIKAN NILAI (SIKAP) ANAK

Anak merupakan pribadi sosial yang memerlukan relasi dan komunikasi dengan orang lain. Anak ingin dicintai, ingin diakui dan dihargai. Berkeinginan pula untuk diperhitungkan dan mendapatkan tempat dalam kelompoknya. (Kartono, 1996). Periode/masa pada anak terbagi dalam beberapa interval umur tertentu. Salah satu masa tersebut adalah masa sekolah dasar yang berusia 6-12 tahun. Pada masa ini emosionalitas anak jadi makin berkurang, sedang unsur intelek dan akal budi (rasio, pikir) jadi semakin menonjol. Minat yang obyektif terhadap dunia sekitar menjadi semakin besar. Perasaan intelektual anak pada masa ini sangat besar. Teka teki silang, soal matematika dan perhitungan yang pelik-pelik (terutama kalau hasilnya berupa angka-angka yang utuh) merupakan daya tarik besar untuk dipecahkan oleh anak; baik oleh anak laki-laki maupun anak perempuan. (Kartono, 1996)

Semua ini membangunkan kemauan belajar dan menstimulir ketekunan usaha dan aktivitas anak. Lanjut Kartono, disiplin sekolah dan kewibawaan para guru memberikan kegairahan pada situasi bekerja dan usaha belajar anak. Pada umumnya, pada masa ini anak senang pergi ke sekolah. Ia merasa suka dan “betah kerasan” tinggal di sekolah. Tidak jarang anak merasa terpesona dan terikat hatinya pada gurunya. Pada usia 10–11 tahun, biasanya timbul kesukaran pada satu dua mata pelajaran, umpama matematik/berhitung dan ilmu hayat. Dan, belajar itu merupakan aktivitas yang menyenangkan bagi anak-anak yang sehat jasmani dan rohaninya. Dalam proses pendidikan, unsur ketegasan dari pendidik perlu, untuk menumbuhkan dan memantapkan kemauan anak, sampai anak mampu berkemauan sendiri.

Nilai kita rasakan dalam diri masing-masing sebagai daya pendorong atau prinsip-prinsip, yang menjadi pedoman dalam hidup. Nilai yang menjadi sesuatu yang abstrak

dapat dilihat dari tiga realitas : pola tingkah, pola berpikir dan sikap-sikap.(Kaswadi, 1993). Nilai berbeda dengan norma/prinsip. Nilai adalah daya pendorong dalam hidup yang memberi makna dan pengabsahan pada tindakan seseorang.

Pendidikan nilai ialah penanaman dan pengembangan nilai-nilai dalam diri seseorang. Pendidikan nilai tidak harus merupakan satu program atau pelajaran khusus, seperti pelajaran matematika, tetapi lebih merupakan suatu dimensi dari seluruh usaha pendidikan. Pendidikan tidak hanya mau mengembangkan ilmu, ketrampilan, teknologi, tetapi juga ingin mengembangkan aspek-aspek lainnya : kepribadian, etika moral dan lain-lain yang semuanya dapat disebut pendidikan nilai.

Sebagai contoh dalam praktek upacara bendera. Nilai-nilai yang ternyata dapat dikembangkan dalam kegiatan itu adalah :

partisipasi, tanggungjawab, ketrampilan, kepemimpinan, kreativitas, kerjasama, solidaritas, mengatur waktu, kebanggaan, penyaluran bakat, kepercayaan diri, penampilan di depan umum, kompetisi sehat dan sportifitas

Perbagai nilai-nilai yang dalam situasi dewasa ini dirasakan sangat perlu ditekankan antara lain : iman dan kasih, keadilan dan kepekaan pada golongan lemah dan kurang mampu, tanggung jawab pada kepentingan umum, hormat kepada sesama, kejujuran dan kelugasan, solidaritas dan keterlibatan sosial, kreativitas, rasionalitas, ketekunan dan ketertiban. Ada pendapat yang mengatakan bahwa kesadaran akan nilai-nilai ada yang tidak diajarkan secara langsung. Nilai barulah ditemukan sendiri oleh anak didik setelah ia mengalaminya sendiri.

KONTRIBUSI MATEMATIKA BAGI PENDIDIKAN NILAI (SIKAP) ANAK

Orang tua dapat membantu anak-anaknya mengembangkan diri mereka sendiri suatu nilai yang paling dasar, yang bisa diberikan dalam membantu anak menyelesaikan soal matematika, seperti beberapa soal matematika berikut ini yang dikutip dari buku paket Matematika Sekolah Dasar kelas 1, 2 dan 3 (Handoko,2006) :

1. Ada 6 teman Budi akan datang ke rumah Budi. Budi hanya mempunyai 4 kue. Apa yang harus dilakukan Budi supaya setiap teman Budi mendapat 1 kue ?
   (Handoko (1), 2006 : 33)

2. Pak Fernandes mempunyai 5 dus mi. Ada 5 tetangganya yang fakir miskin kemudian mi tersebut seluruhnya dibagikan. Coba berapa sisa mi yang dimiliki pak Fernandes? (Handoko (1), 2006 : 49)
3. Ratna dan Linda akan menyumbangkan majalah bekas ke perpustakaan sekolah. Majalah milik Ratna sebanyak 65 dan majalah Linda sebanyak 75. Berapa jumlah majalah yang akan disumbangkan Ratna dan Linda? (Handoko (2), 2006 : 51)
4. Untuk membantu korban bencana alam, siswa kelas 1 dan kelas 2 mengumpulkan mi. Mi yang terkumpul dari kelas 1 sebanyak 125, dari kelas 2 sebanyak 80 dan yang rusak sebanyak 9. Berapa mi yang tidak rusak? (Handoko (2), 2006 : 67)
5. Sebanyak 50 baju akan dibagikan kepada 10 anak yatim. Jika tiap anak mendapat bagian yang sama, berapa banyak baju yang didapat tiap anak? (Handoko (3), 2006 : 34)

Dari lima soal di atas, orang tua dapat menerangkan nilai-nilai yang disampaikan dalam soal tersebut di samping membantu anak menyelesaikannya. Nilai yang bisa ditangkap dari soal tersebut adalah nilai 'suka memberi' dan berbagi baik kepada teman, saudara, tetangga maupun fakir miskin dan anak yatim.

Beberapa soal matematika yang lain tentang pengukuran waktu seperti dikutip dalam buku kelas 2 SD (Supardjo,2006 : 82), buku kelas 4 SD (Handoko (4), 2006) dan buku kelas 5 SD (Handoko (5),2006) sebagai berikut :

1. Sekolah masuk pukul berapa? Pukul 9 pagi kamu di mana?
   Apakah kamu berada di sekolah pukul 9 pagi ?
2. Pukul 5 pagi, apakah kamu sudah bangun? Pukul berapa kamu mulai tidur ?
3. Pukul 6 pagi, apakah kamu sudah makan pagi ?
4. Coba perhatikan gambar berikut. Gambar menunjukkan kegiatan Asri sehari-hari. Coba tulislah waktu pada kotak yang disediakan.
   (Soal disertai gambar jam dan kegiatan seorang anak bernama Asri, Handoko(4), 2006 : 70-71).
5. Cobalah mencatat lamanya aktivitas penting yang kamu lakukan dalam satu hari, kemudian jumlahkan berapa lama waktu yang dibutuhkan. (Handoko (5),2006:65).

Kelima soal di atas, yang dalam buku paket Matematika SD tersebut juga menyertakan gambar jam, dapat memunculkan nilai kedisiplinan mengatur waktu dan tanggung jawab pada diri sendiri.

Soal lain yang dikutip dari buku paket Matematika kelas 3 SD (Handoko (3),2006 : 53) sebagai berikut :

> Menentukan jenis barang apa saja yang dapat dibeli jika diketahui daftar barang, harga satuan barang dan jumlah nilai uang yang dimiliki.

Sebagai contoh diberikan daftar barang yang dilengkapi harga barang dan soal berikut:

1. Edi memiliki uang 15.500 rupiah. Ia ingin membeli dua macam barang. Dua macam barang manakah yang dapat dibeli dengan semua uangnya ?
2. Saya mempunyai uang 5.000 rupiah. Barang apa saja yang dapat saya beli?
3. Saya mempunyai uang 10.000 rupiah. Barang apa saja yang dapat saya beli ?

Selain itu, juga terdapat soal berikut (Handoko (3),2006 : 58) :

> Aku ingin membeli sebungkus kelereng dengan harga 900 rupiah. Uangku hanya 500 rupiah. Dalam sehari aku hanya bisa menabung 200 rupiah. Berapa hari lagi tabunganku cukup untuk membeli kelereng ?

Beberapa soal tersebut mengajarkan bagaimana anak dapat mengatur uang dengan baik, bertanggung jawab terhadap uang yang diberikan orang tua dan menabung agar dapat membeli barang yang diinginkan.

Dalam buku paket matematika juga diberikan petunjuk pengerjaan yang dapat melatih kreativitas siswa dan ketelitian pengerjaan soal, seperti soal matematika kelas 1, 3, 4 dan 6 SD berikut ini (Handoko, 2006) :

1. buatlah cerita sesuai gambar, cerita berhubungan dengan pengurangan !
   (soal tersebut disertai dengan gambar seorang anak yang dihadapannya terdapat 4 gelas tetapi yang 1 gelas pecah) (Handoko (1), 2006 : 41)
2. buatlah soal cerita mengenai penjumlahan. Soal harus melibatkan 3 bilangan. Tukarkan soal ceritamu dengan soal cerita temanmu untuk dikerjakan. (Handoko (1), 2006 : 72)
3. Mari ukur benda – benda di bawah ini dengan penggarismu.
   (soal disertai gambar-gambar buku tulis, pensil, tempat pensil dan buku matematika). (Handoko (3), 2006 : 74)

4. Coba buat model-model simetris dengan menggunakan kertas dan cat air. (Handoko (4),2006:146)
5. Buatlah teodolit sederhana dari kertas, sedotan, paku dan benang, kemudian dipraktekkan. (Handoko (6), 2006 : 28)
6. Carilah gambar denah sebuah rumah. Kamu dapat mencari pada majalah, tabloid, koran atau brosur rumah. Hitunglah luas bangun rumah tersebut, jangan lupa sertakan gambar rumah lengkap dengan skalanya pada laporanmu!
   (Handoko (6), 2006 : 119)

Menurut Suwarsono (Susilo, 1996:13) matematika juga mengandung nilai-nilai (*value*) yang sangat berguna untuk pembentukan sikap dan kepribadian yang lengkap (utuh). Pembentukan sikap disiplin, sikap teliti, sikap kritis, sikap sabar, sikap hati-hati dan sebagainya, bisa dikembangkan melalui matematika. Di masa yang akan datang, sikap semacam ini semakin dibutuhkan karena semakin banyaknya masalah yang melingkupi manusia, dan semakin banyaknya orang yang terkena oleh masalah-masalah tersebut.

Tujuan pembelajaran matematika sekolah (khususnya SD) adalah agar siswa memiliki kemampuan yang dapat dialihgunakan melalui kegiatan matematika, memiliki pengetahuan matematika sebagai bekal untuk melanjutkan ke jenjang berikutnya, memiliki ketrampilan matematika untuk dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari, memiliki pandangan yang cukup luas, memiliki sikap logis, kritis, cermat dan disiplin serta menghargai kegunaan matematika (Karso, 2006).

Seorang pakar pendidikan matematika, Soedjadi (dalam Zulkardi,2000) mengatakan pembelajaran matematika tidak hanya diarahkan agar siswa dapat memecahkan soal dan menerapkan matematika tetapi juga dapat menumbuhkan kemampuan-kemampuan sebagai berikut :

1. kemampuan menerapkan dan menggunakan matematika dalam bidang lain
2. kemampuan berpikir analisis dan sintesis
3. kemampuan membedakan yang benar dan salah dengan alasan logis
4. kemampuan kerja keras, konsentrasi dan mandiri
5. kemampuan memecahkan masalah

Secara tidak langsung, kemampuan tersebut memberikan kontribusi bagi pendidikan nilai anak seperti dapat membedakan mana yang salah dan benar, kerja keras, mandiri dan sebagainya.

KONTRIBUSI PEMBELAJARAN MATEMATIKA BAGI PENDIDIKAN NILAI (SIKAP) ANAK

Jawa Pos (12 September 2006) mengungkapkan hasil polling bahwa dari 400 siswa SMA/SMK di Surabaya, 61,5% menyatakan ‘bersorak‘ jika pelajaran matematika kosong. Prosentase ini paling tinggi dibandingkan pelajaran lain. Ini menunjukkan bahwa matematika masih tetap menjadi mata pelajaran yang kurang disukai. Berkaitan dengan kondisi ini, pertanyaan-pertanyaan yang sering muncul dan menjadi diskusi menarik yang berkaitan dengan pengajaran matematika di antaranya adalah ‘mengapa siswa kurang tertarik untuk mengikuti kegiatan belajar mengajar matematika?’ mengapa pengetahuan matematika yang dipelajari siswa mudah dilupakan?dan sebagainya. Tentu ada banyak jawaban, salah satunya adalah karena matematika diajarkan di kelas dengan metode ataupun pendekatan yang tidak menarik.

Dewasa ini proses pembelajaran di sekolah belum berorientasi pada siswa, jadi masih terpusat pada guru. Belajar akan lebih bermakna jika anak yang menemukan dan mengalami apa yang dipelajarinya, bukan mengetahuinya. Pembelajaran sebaiknya tidak sekedar berorientasi materi tetapi juga dapat membekali siswa dalam memecahkan persoalan dalam kehidupan. Menurut Ismail (Widdiharto, 2004:1) pembelajaran cenderung abstrak dan dengan metode ceramah sehingga konsep-konsep akademik kurang bisa atau sulit dipahami. Sementara itu kebanyakan guru dalam mengajar masih kurang memperhatikan kemampuan berpikir siswa, atau dengan kata lain tidak melakukan pengajaran bermakna, metode yang digunakan kurang bervariasi, dan sebagai akibatnya motivasi belajar siswa menjadi sulit ditumbuhkan dan pola belajar cenderung menghafal dan mekanistis. Dan, itulah yang terjadi di kelas-kelas sekolah saat ini. Ada beberapa metode pembelajaran yang saat ini mulai diperkenalkan, di antaranya :

1. Pembelajaran Matematika Realistik

Ada beberapa pendapat ahli bahwa dengan mengkaitkan matematika ke dunia nyata, siswa dapat mengaplikasikan matematika yang mereka pelajari di kelas ke dunia nyata. Dengan mengkaitkan matematika dengan disiplin lain, siswa dapat melihat bahwa banyak hal-hal yang tergantung pada matematika. Pembelajaran matematika realistik merupakan konsep belajar yang membantu guru mengaitkan antara materi yang diajarkan dengan situasi dunia nyata siswa dan mendorong siswa membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dengan penerapannya dalam kehidupan mereka sebagai anggota keluarga dan masyarakat. Dengan konsep itu, hasil pembelajaran diharapkan lebih bermakna bagi siswa. Proses pembelajaran berlangsung alamiah dalam bentuk kegiatan siswa bekerja dan mengalami bukan transfer pengetahuan dari guru ke siswa.

Contoh :

a. Dalam mengajarkan ukuran panjang, siswa diajak mengukur panjang benda-benda yang ada di sekitar mereka seperti, meja, papan tulis dan mengukur tinggi teman lain.
b. Dalam mengajarkan data (untuk materi statistika), siswa disuruh mengamati benda-benda yang ada di lingkungan sekolah kemudian mencatatnya.

Dengan kedua contoh pembelajaran di atas anak akan secara tidak langsung dapat mengaplikasikan matematika dalam dunia nyata.

Matematika realistik awalnya diperkenalkan di negeri Belanda (yang disebut *Realistic Mathematics Education*), mengacu pada suatu pendapat *Freudenthal* (Widdiharto, 2004: 21) yang menyatakan bahwa pembelajaran konvensional terlalu berorientasi pada sistem formal matematika sehingga anti didaktik. Sementara pada tahun 1980-an telah terjadi pergeseran paradigma teori belajar pada pembelajaran matematika yaitu dari behavioris dan strukturalis, ke arah kognitif dan konstruktivis-realistik. Matematika harus dikaitkan dengan realita dan matematika merupakan aktivitas manusia. Ini berarti, matematika harus dekat dengan anak dan relevan dengan situasi sehari-hari. Upaya ini dilakukan melalui penjelajahan berbagai situasi dan persoalan-persoalan ‘realistik’ . Realistik dalam hal ini dimaksudkan, tidak mengacu pada realitas tetapi pada sesuatu yang dapat dibayangkan oleh siswa.

Nilai atau sikap positif yang bisa diperoleh dari pembelajaran matematika realistik adalah mengembangkan daya pikir, kemampuan berargumentasi, keberanian menjawab,menghormati teman yang sedang berbicara dan kerjasama (Ratini dkk,2001), selain itu juga kreativitas, partisipasi, disiplin, kebanggaan terhadap hasil kerja dan tanggung jawab terhadap tugas yang diberikan

2. Pembelajaran kooperatif

Untuk soal matematika yang tergolong mudah, siswa masih dapat mengerjakan secara mandiri, sedangkan untuk menghadapi konsep sulit, siswa akan lebih mudah menemukan dan memahaminya jika berdiskusi masalah dengan teman. Ini menjadi landasan bagi pembelajaran kooperatif . Model pembelajaran ini dikembangkan untuk mencapai tujuan pembelajaran, yaitu :

a. Hasil belajar
   1). Unggul dalam membantu memahami konsep sulit.
   2). Menumbuhkan kemampuan kerjasama, berpikir kritis dan saling membantu.
b. Penerimaan terhadap keragaman
   Penerimaan yang luas terhadap orang yang berbeda menurut ras, budaya, kelas sosial, kemampuan maupun ketidakmampuan
c. Pengembangan ketrampilan sosial
   Mengajarkan kepada siswa ketrampilan kerjasama dan kolaborasi

Beberapa hal yang perlu diperhatikan ketika siswa bekerja dalam kelompok adalah (Widdiharto, 2004 :13) :

a. Setiap anggota dalam kelompok harus merasa bagian dari tim dalam pencapaian tujuan bersama.
b. Setiap anggota dalam kelompok harus menyadari bahwa masalah yang mereka pecahkan adalah masalah kelompok, berhasil atau gagal akan dirasakan oleh semua anggota kelompok.
c. Untuk pencapaian tujuan kelompok, semua siswa harus bicara atau diskusi satu sama lain.
d. Harus jelas bahwa setiap kerja individu dalam kelompok mempunyai efek langsung terhadap keberhasilan kelompok.

Nilai yang ingin dicapai lewat pembelajaran kooperatif ini ialah dapat membagi dan memanfaatkan pengetahuan serta bakatnya untuk membantu orang lain. Di samping itu juga mengandung nilai dasar lain yaitu sehidup sepenanggungan bersama, bertanggungjawab atas segala sesuatu di dalam kelompok, kebanggaan kelompok, berbagi kepemimpinan, penerimaan terhadap keragaman dan berpikir kritis

PENUTUP

Meskipun matematika sering dianggap sebagai salah satu mata pelajaran sulit bagi anak maupun orang tua, tetapi dari soal-soal matematika khususnya soal cerita, orang tua dapat membantu menyampaikan nilai yang muncul dari soal tersebut di samping membantu anak menyelesaikan soal tersebut. Yaitu nilai membantu teman, saudara tetangga, mengatur waktu, mengatur uang dan kreatif. Dengan model pembelajaran matematika, yaitu pembelajaran konteksual, pembelajaran matematika realistik dan pembelajaran kooperatif, dapat diperoleh nilai-nilai sebagai berikut :

kerjasama, solidaritas, kreativitas, tanggungjawab, berpikir kritis dan menghargai.

DAFTAR PUSTAKA

Handoko (1), T. 2006. *Terampil Matematika 1 untuk kelas 1 SD*. Jakarta : Yudhistira.

Handoko (2), T. 2006. *Terampil Matematika 2 untuk kelas 2 SD*. Jakarta : Yudhistira.

Handoko (3), T. 2006. *Terampil Matematika 3 untuk kelas 3 SD*. Jakarta : Yudhistira.

Handoko (4), T. 2006. *Terampil Matematika 4 untuk kelas 4 SD*. Jakarta : Yudhistira.

Handoko (5), T. 2006. *Terampil Matematika 5 untuk kelas 5 SD*. Jakarta : Yudhistira.

Handoko (6), T. 2006. *Terampil Matematika 6 untuk kelas 6 SD*. Jakarta : Yudhistira.

Karso, dkk, 2006. *Materi Pokok Pendidikan Matematika 1 PGSD*. Jakarta : Universitas Terbuka.

Kartono, K.. 1996. *Psikhologi Anak*. Bandung : PT Alumni.

Kaswardi, EM. 1993. *Pendidikan Nilai Memasuki Tahun 2000*. Jakarta : PT Gramedia.

Ratini, dkk. 2001. *Pengalaman dalam Melaksanakan Uji Coba Pembelajaran Matematika secara Realistik di MIN Yogyakarta II*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika Realistik di Universitas Sanata Dharma Yogyakarta tanggal 14 – 15 November 2001.

Soedjadi, 2007. *Masalah Kontekstual sebagai Batu Sendi Matematika Sekolah*. Surabaya : Pusat Sains dan Matematika Sekolah Unesa.

Suharta, I G K., 2000. *Mengakrabkan Matematika dengan Lingkungan Anak*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Matematika Memasuki Milenium di Institut Teknologi Surabaya tanggal 9 Oktober 2000.

Supardjo, 2006. *Matematika Gemar Berhitung 2*. Solo : Tiga Serangkai

Susilo, F. 1996. *Percikan Matematika Sebuah Bunga Rampai*. Yogyakarta : Penerbitan Universitas Sanata Dharma.

Widdiharto, R. 2004. *Model-model Pembelajaran Matematika SMP*. Makalah disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar di PPPG Matematika Yogyakarta tanggal 10 s.d. 23 Oktober 2004..

Zulkardi, 2000. *Pengajaran Interaktif* : *Arah Baru dalam Pengajaran Matematika*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Matematika Memasuki Milenium di Institut Teknologi Surabaya tanggal 9 Oktober 2000.

_____, 2003. *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah*. Jakarta : Departemen Pendidikan Nasional.

---------.2002. *Pendekatan Kontekstual* . Jakarta : Dirjen Pendidikan Dasar dan Menengah.

Mahasiswa Field Independent dan Field Dependent Dalam Memahami Konsep Grup *

Oleh : Drs. Herry Agus Susanto, M.Pd**
E-mail : herrysanto_62@yahoo.co.id

Abstrak

Belajar merupakan suatu proses ativitas mental dalam pikiran manusia yang mengakibatkan terjadinya perubahan tingkah laku. Apabila perilaku dan suasana serupa berbeda (ada perubahan), maka dapat dikatakan telah terjadi belajar. Dalam melakukan kegiatan belajar, si pebelajar melakukan aktifitas mental yang merupakan proses berfikir dalam pikirannya.

Berpikir merupakan proses menghasilkan representasi mental yang baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara komplek antara atribut-atribut mental. Di dalam proses belajar matematika, terjadi juga proses berfikir. Proses berpikir merupakan suatu proses yang dimulai dari masuknya informasi atau penemuan informasi dari luar diri mahamahasiswa, pengolahan informasi, penarikan kesimpulan, dan pemanggilan kembali informasi itu dari ingatan ketika dibutuhkan.

Proses berfikir seseorang dipengaruhi oleh karakteristik individu. Karakteristik yang yg dimaksud adalah gaya kognitif field independen dan field dependent. Karakteristik ini bekaitan dengan kemampuan seseorang untuk membebaskan dirinya dari pengaruh linkungan. Karakteristik ini akan berdapak pada proses pembelajaran.

Dosen harus memperhatikan gaya kognitif mahamahasiswa dalam menerapkan pendekatan dalam pembelajaran, termasuk dalam memahami konsep. Memahami konsep merupakan tahapan atau fase dalam kegiatan belajar. Karakteristik mahamahasiswa memahami konsep dalam proses berfikirnya diantaranya dapat menyebutkan definisi konsep, dapat memberikan contoh dan non contoh. Masalahnya adalah bagaimana mahamahasiswa FI dan FD dalam memahami suatu konsep?

Konsep yang dimaksud dalam penulisan ini adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan.

Kata Kunci : proses berpikir,field independent, field dependent, memahami konsep.

*) Disajikan dalam Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika tanggal 28 Nopember 2008 di Universitas Negeri Yogyakarta

**) Dosen di Universitas Veteran Bangun Nusantara Sukoharjo

1. Pendahuluan

Berpikir merupakan suatu proses menghasilkan representasi mental yang baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara komplek antara atribut-atribut mental seperti penilaian, abstraksi, penalaran, imajinasi, dan pemecahan masalah (Solso, 1988). Di dalam proses belajar matematika, terjadi juga proses berfikir, sebab seseorang dikatakan berfikir bila orang tersebut melakukan kegiatan mental dan orang yang belajar matematika dapat dipastikan melakukan kegiatan mental.

Belajar, yang juga merupakan proses berikir, tidak akan lepas dari prinsip-prinsip belajar yang berkaitan dengan perbedaan individual. Mahamahasiswa merupakan individu yang unik, setiap mahamahasiswa memiliki perbedaan-perbedaan dalam berbagai hal. Untuk setiap mahamahasiswa memiliki variasi dan kecepatan belajar, memiliki gaya kognitif yang berbeda. Gaya kognitif berkaitan dengan kemampuan memproses, menyimpan maupun menggunakan informasi untuk menanggapi berbagai jenis situasi lingkungannya. Gaya kognitif seseorang dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu field independent dan field dependen. Karena adanya perbedaan ini, masalahnya adalah bagaimana mahamahasiswa dengan gaya kognitif tersebut dalam memahami konsep grup ?

Dalam makalah ini akan dicoba dijawab pertanyaan " Bagaimana proses berfikir mahasiswa field independen dan field dependen dalam memahami konsep grup". Secara berturut-turut akan disarikan tentang belajar, proses berfikir, mahasiswa field dependen dan field dependen dalam memahami konsep.

2. Pembahasan

Seperti yang tertera di atas, permasalahanya berkaitan dengan belajar, proses berpikir dari mahamahasiswa field independen dan field dependen dalam memahami konsep. Secara berturut-turut dejelaskan sebagai berikut.

a. Belajar.

Di depan telah disebutkan bahwa belajar merupakan aktifitas mental dalam pikiran manusia yang mengakibatkan terjadinya perubahan tingkah laku. Ini berarti bahwa belajar merupakan proses dan bukan merupakan suatu yang terjadi begitu saja. Karena belajar merupakan suatu proses, maka belajar memerlukan waktu.

Hudoyo (1988 : 1) mengatakan bahwa seseorang dapat dikatakan belajar apabila dalam diri orang tersebut terjadi suatu proses kegiatan yang mengakibatkan suatu perubahan tingkah laku. Proses terjadinya belajar sangat sulit diamati. Orang cenderung memberikan kesimpulan dari tingkah laku manusia kemudian disusun menjadi pola tingkah laku yang akhirnya tersusunlah suatu model yang menjadi prinsip-prinsip belajar yang bermanfaat sebagai bekal untuk memahami, mendorong dan memberi arah kegiatan belajar.

Belajar matematika akan berkaitan dengan materi matematika itu sendiri. Matematika sebagai bahan pelajaran mempunyai objek kajian berupa fakta, konsep, operasi dan prinsip yang abstrak. Dalam mempelajari matematika diperlukan kegiatan psikologis seperti abstraksi, generalisasi dan mengklasifikasi. Hudoyo (1988 : 3) mengatakan bahwa matematika berkenaan dengan ide-ide abstrak yang diberi simbul-simbul itu tersusun secara hierarkhis dan penalarannya deduktif. Sehingga jelas bahwa belajar matematika merupakan kegiatan mental yang tinggi. Karena kehierarkhisan itu, maka belajar matematika yang terputus-putus akan mengganggu terjadinya proses belajar. Ini berarti bahwa proses belajar matematika akan terjadi dengan lancar apabila belajar itu dilakukan secara kontinyu.

Marpaung (2005 : 3) mengatakan bahwa belajar adalah menangkap informasi (sensori register) meneruskan ke memori jangka pendek untuk diolah dan menyimpan olahan itu dalam memori jangka panjang, mengambil kembali pengetahuan itu untuk dibawa ke memori jangka pendek jika dibutuhkan untuk diolah kembali dengan informasi baru yang masuk ke memori jangka pendek, sehingga menghasilkan pengetahuan baru yang disimpan dalam memori jangka panjang. Menurut Piaget (Matlin 1988, Solso, 1991) mengatakan bahwa transformasi informasi dapat dilakukan melalui dua cara, yaitu : (1) asimilasi, mengubah struktur informasi yang baru masuk ke memori jangka pendek agar sesuai dengan skema yang sudah ada dalam memori jangka panjang, (2) akomodasi, melakukan perubahan skema yang sudah ada dalam memori jangka panjang agar sesuai dengan struktur informasi yang baru masuk, sehingga informasi baru itu dapat diterima, artinya dapat disimpan dalam memori jangka panjang. Pengolahan ini harus dilakukan secara aktif oleh si pebelajar. Dosen dalam pembelajaran tidak

lagi menjadi seorang yang aktif (memberi tahu) mahasiswa dalam aktifitasnya mengelola pengetahuan.

b. Proses Berfikir

Berpikir didefinisikan sebagai proses menghasilkan representasi mental yang baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara komplek antara atribut-atribut mental seperti penilaian, abstraksi, penalaran, imajinasi, dan pemecahan masalah (Solso, 1988). Di dalam proses belajar matematika, terjadi juga proses berfikir, sebab sesorang dikatakan berfikir bila orang tersebut melakukan kegiatan mental dan orang yang belajar matematika dapat dipastikan melakukan kegiatan mental.

Proses berpikir meliputi tiga komponen pokok, yaitu: (1) berpikir adalah aktivitas kognitif yang terjadi di dalam mental atau pikiran seseorang, tidak tampak, tidak dapat disimpulkan berdasarkan prilaku yang tampak, (2) berpikir merupakan suatu proses yang melibatkan beberapa manipulasi pengetahuan di dalam sistem kognitif . Pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan digabungkan dengan informasi sekarang sehingga mengubah pengetahuan seseorang mengenai situasi yang sedang dihadapi, dan (3) aktivitas berpikir diarahkan untuk menghasilkan pemecahan masalah (Mayer, dalam Solso, 1988)

Proses berpikir matematika menurut Dreyfus dalam Williams (2002) dapat dibentuk dari tiga tahapan, yaitu: (1) mengenali (*recognising*), (2) membangun dengan (*Building-with*), dan (3) konstruksi (*constructing*).

De Bono (1997: 61) mengatakan bahwa kegiatan berpikir manusia terdiri dari dua proses berpikir dasar yang keduanya muncul langsung dari perilaku otak, yaitu: meneruskan dan menghubungkan. Meneruskan diartikan sebagai proses yang terjadi dalam setiap gagasan mengikuti gagasan lainnya. Menghubungkan diartikan sebagai perpindahan dari satu gagasan ke gagasan berikutnya.

Pada anak yang berada di periode operasi konkrit, proses penalaran belum disadari, namun ternyata bahwa anak-anak itu menjadi semakin sadar akan dirinya pada periode operasi formal yang ditunjukkan oleh kemampuan memformulasikan definisi atau teorema. Ketika anak mencapai tahap operasi formal, ia menunjukkan kemampuannnya menguasai hubungan di antara objek dan bila ia memanipulasi

langsung terhadap objek itu tidak memungkinkan, maka ia (sebagai tanda operasi formal) akan membentuk hipotesis dan kemudian yang berhubungan dengan konsep-konsep lain dan mengerjakan operasi terhadap operasi.

Proses berpikir itu merupakan suatu rangkaian proses mulai saat informasi masuk, pemrosesan sehingga terbentuk skema berpikir merupakan suatu proses yang dinamis yang dapat dilukiskan menurut proses atau jalannya. Proses atau jalannya berpikir itu disebut proses berpikir. Proses berpikir pada pokoknya ada tiga langkah, yaitu pembentukan pengertian, pembentukan pendapat, dan penarikan kesimpulan (Suryabrata .1990). Proses berfikir merupakan proses pnerimaan informasi samapi pada pememanggilan kembali informasi itu dari ingatan (Marpaung, 1986)

Dari beberapa pengertian proses berfikir di atas, dapat ditarik suatu pengertian bahwa proses berfikir merupakan proses yang dimulai dari penerimaan informasi (dari dunia luar atau diri mahasiswa), pengolahan, penyimpanan dan pemanggilan informasi itu dari dalam ingatan serta pengubahan-pengubahan struktur yang meliputi konsep-konsep atau pengetahuan-pengetahuan itu.

c. Gaya Kognitif Field Independent dan Field Dependent

Setiap individu memiliki karakteristik yang khas, yang tidak dimiliki oleh individu lain. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa setiap individu berbeda satu dengan yang lain. Perbedaan karakteristik dari setiap indivdu dalam menanggapi informasi, merupakan gaya kognitif individu yang bersangkutan. Gaya kognitif merujuk pada cara seseorang memproses, menyimpan maupun menggunakan informasi untuk menanggapi suatu tugas atau menanggapi berbagai jenis situasi lingkungannya. Disebut sebagai gaya dan bukan sebagai kemampuan karena merujuk pada bagaimana seseorang memproses informasi dan memecahkan masalah dan bukan merujuk pada bagaimana proses penyelesaian yang terbaik.

Salah satu tinjauan perbedaan ini adalah dari aspek perseptual dan intelektual. Aspek perseptual dan intelektual mengungkapkan bahwa setiap individu mempunyai ciri khas yang berbeda dengan individu lain. Ciri khas tersebut adalah sebagai berikut: (a) kebiasaan memberikan perhatian, menerima, menangkap, menyeleksi dan mengorganisasikan stimulus (kegiatan perseptual); (b) menginterpretasi, mengkonversi, mengubah bentuk, mengingat kembali dan mengklasifikasikan suatu

informasi intelektual (kegiatan intelektual). Sesuai dengan tinjauan aspek perseptual intelektual tersebut dikemukakan bahwa perbedaan individu dapat diungkapkan oleh tipe-tipe kognitif yang dikenal dengan gaya kognitif (Cognitive style).

Ada beberapa pengertian tentang cognitive styles/ gaya kognitif yang dikemukakan oleh beberapa ahli, namun pada prinsipnya pengertian tersebut relatif sama. Broverman (1960 : 167) mengemukakan bahwa cognitive styles menggambarkan cara seseorang memahami lingkungannya. Kagan (Balter, 1973 : 160) mengemukakan bahwa Cognitive styles sebagai variasi cara individu dalam menerima, mengingat dan memikirkan informasi atau perbedaaan cara memahami, menyimpan, mentarnsformasi dan memanfaatkan informasi. Coop (1974 : 251) mengemukakan bahwa istilah gaya kognitif mengacu pada kekonsistenan pemolaan (patterning) yang ditampilkan seseorang dalam menanggapi berbagai jenis situasi. Juga mengacu pada pendekatan intelektual dan atau strategi dalam menyelesaikan masalah. Thomas (1990 : 610) mengemukakan bahwa cognitive styles merujuk pada seseorang memproses informasi dan menggunakan strategi untuk menanggapi suatu tugas. Woolfook (1993 : 128) mengemukakan bahwa cognitive styles adalah bagaimana seseorang menerima dan mengorganisasikan informasi dari dunia sekitarnya.

Witkin (Ismanoe, 1988 : 35) mendefinisikan ”a cognitive style is characteristic mode of functioning that (is revealed) throughout our perceptual and intellectual activities in highly consistent and pervasive way”. Demikian pula Messick (Ismanoe, 1988 : 35) menyatakan bahwa “ cognitive style as characteristics way of organizing and procesing information and experience”

Definisi-definisi di atas mengungkapkan bahwa gaya kognitif adalah cara yang khas pemfungsian kegiatan perseptual (kebiasaan memberikan perhatian, menerima, menangkap, merasakan, menyeleksi, mengorganisasikan stimulus) dan kegiatan intelektual (menginterpretasi, mengklasifikasi, mengubah bentuk informasi intelektual). Cara yang khas tersebut bersifat konsisten dan dapat memasuki ke seluruh tingkah laku, baik dalam aspek kognitif maupun dalam aspek afektif (Ismanoe, 1988 : 35).

Berdasarkan pendapat di atas, maka dapat dikatakan bahwa yang dimaksud dengan gaya kognitif (cognitive style) adalah cara seseorang dalam memproses,

menyimpan maupun menggunakan informasi untuk menanggapi suatu tugas atau menanggapi berbagai jenis situasi lingkunganya.

Penjelasan lebih lanjut mengenai gaya kogtitif dapat diungkapkan dengan menyebutkan karakteristk sebagai berikut : (1). Gaya kognitif merupakan dimensi yang dapat memasuki (pervasive dimension) ke seluruh tingkah laku, baik aspek aspek kognitif maupun dalam aspek afektif. Sifat dapat memasuki dari gaya kognitif mempunyai arti bahwa gaya kognitif dapat ditaksir dengan metode "non-verbal" (perseptual). (2). Gaya kognitif stabil sepanjang waktu. Karena kestabilan gaya kognitif ini, dapat digunakan secara optimal oleh dosen dalam pembelajaran yang memperhatikan gaya kognitif. Gaya mengajar dosen seharusnya bervariasi menyesuaikan dengan gaya kognitif anak, meskipun gaya kognitif dosen berbeda dengan gaya kognitif anak, hal ini dimaksudkan untuk menghindari adanya anak dirugikan dalam proses pembelajaran. Pada kejadian normal seseorang yang mempunyai style khusus pada suatu hari akan mempunyai style yang sama pada hari, mingggu, bulan dan bahkan tahun berikutnya. Stabilitas tersebut menjadikan gaya kognitif berguna dalam rentang yang lama untuk pembimbingan dan penyuluhan. (3). Gaya kognitif bersifat bipolar. Karakteristik ini mampu membedakan gaya kognitif dengan intelegensi dan dimensi kemampuan (ability) lainnya. Seseorang yang mempunyai intelengensi tinggi lebih baik dari pada seseorang yang mempunyai intelegensi rendah. Seseorang yang mempunyai banyak kemampuan lebih baik dari pada seseorang yang mempunyai sedikit kemampuan. Pada gaya kognitif, masing-masing kutub mempunyai nilai adaptip dalam keadaan khusus. Tidak dapat dikatakan bahwa seorang yang mempunyai skor lebih tinggi pada tes gaya kognitif berarti a lebih baik dalam setiap keadaan dibanding seseorang yang mempunyai skor yang lebih rendah pada tes gaya kognitif.

Gaya kognitif terbagi atas dua bagian, yakni Field Independent (FI) dan Field Dependent (FD). Sejak 1948, Witkin telah memulai mengembangkan alat ukur untuk membedakan tipe-tipe mahasiswa berdasarkan gaya kognitif (Witkin, 1977 : 2). Witkin menyatakan bahwa individu yang bersifat analitik adalah individu yang merasakan lingkungan ke dalam komponen-komponennya, kurang bergantung pada lingkungan atau kurang dipengaruhi oleh lingkungan. Individu ini dikatakan termasuk gaya kognitif Field Independent (FI). Sedangkan individu yang bersifat

global adalah individu yang memfokuskan pada lingkungan secara keseluruhan, didomiasi atau dipengaruhi lingkungan. Individu tersebut dikatakan termasuk gaya kognitif Field Dependent (FD).

Meskipun terdapat dua kelompok gaya kognitif yang berbeda tetapi tidak dapat dikatakan bahwa mahasiswa field independen lebih baik dari mahasiswa field dependen atau sebaliknya. Mahasiswa yang termasuk pada salah satu tipe, bukanlah masalah baik buruknya. Masing-masing mahasiswa field independen atau field dependen mempunyai kelebihan dalam bidangnya.

Witkin (1971) menyatakan bahwa FI dan FD mempunyai hubungan yang positip dengan situasi perseptual yang menuntut ”perseptual disembedding”, yaitu situasi perseptual yang menuntut pelepasan bagian-bagian dari persepsi yang diterima secara utuh. Field independen dan Field dependen tidak berhubungan dengan situasi perseptual yang tidak menuntut ”perseptual disembedding”.

Witkin (Elkind & Weiner, 1978, 214) menyatakan bahwa orang yang mempunyai gaya kognitif field independent menanggapi suatu tugas cenderung berpatokan pada isyarat dari dalam diri mereka sendiri. Orang yang memiliki gaya kognitif field dependent melihat syarat lingkungannya sebagai petunjuk dalam menanggapi suatu stimulus. Lebih lanjut Witkin (1977) menyatakan bahwa orang yang memiliki gaya kognitif field independent lebih bersifat analisitis, mereka dapat memilah stimulus berdasarkan situasi, sehingga persepsinya hanya sebagian kecil terpengaruh ketika ada perubahan situasi. Orang yang memiliki gaya kognitif field dependent mengalami kesulitan dalam membedakan stimulus melalui situasi yang dimiliki sehingga persepsinya mudah dipengaruhi oleh manipulasi dari situasi sekelilingnya

Individu yang sulit melepaskan diri dari keadaan yang mengacaukannya yaitu individu yang field dependent, akan menemukan kesulitan dalam masalah-masalah yang menuntut keterangan di luar konteks. Individu yang field dependent akan mengorganisasikan apa yang diterimanya sebagaimana yang disajikan. Sedang pada individu yang field independent, akan mampu menanggulangi apa yang diterimanya dengan mencari komponen-komponen yang diletakkan pada permasalahan yang dihadapinya.

Berdasarkan pendapat di atas, dapat dikatakan bahwa orang yang memiliki gaya kognitif field independent dalam menanggapi stimulus mempunyai kecenderungan menggunakan persepsi yang dimilikinya sendiri dan lebih analitis. Orang yang memiliki gaya kognitif field dependent dalam menanggapi sesuatu stimulus mempunyai kecenderungan menggunakan isyarat lingkungan sebagai dasar dalam persepsinya dan cenderung memandang suatu pola sebagai suatu keseluruhan, tidak memisahkan bagian-bagiannya.

d. Mahamahasiswa FI dan FD dalam Memahami Konsep Grup

Sebelum membahas bagaimana mahamahasiswa memahami konsep grup, terlebih dahulu diberikan pengertian konsep grup. Konsep grup dalam tulisan ini adalah himpunan tidak kosong dengan satu operasi yang memenuhi aksioma : tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemen memiliki invers. Atau dengan bahasa matematiknya dapat dituliskan seperti di bawah ini.

Suatu himpunan tidak kosong G dikatakan membentuk grup jika di dalam G didefinisikan suatu operasi biner, yang disebut produk dengan notasi ●, sedemikian sehingga :

a. Untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x \bullet y \in G$
b. Untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$
c. Terdapat elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $x \bullet e = e \bullet x = x$, untuk setiap elemen $x \in G$
d. Untuk setiap $x \in G$ terdapat elemen $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$

Memahami merupakan suatu tahapan atau fase dalam belajar. Seperti yang dinyatakan oleh Hudoyo (1988 : 23) bahwa fase belajar meliputi : fase motivasi, pemahaman, penguasaan, ingatan, pengungkapan kembali, generalisasi, perbuatan dan fase umpan balik.

Pada fase pemahaman, mahamahasiswa yang termotivasi itu, pertama kali harus menerima stimulus berupa informasi baik dari dosen maupun lainnya . Stimulus atau informasi ini masuk ke dalam peristiwa belajar yang esensial dan akhirnya informasi itu disimpan dalam memorinya. Dalam hal ini mahamahasiswa harus memperhatikan bagian demi bagian dari keseluruhan stimulus yang relevan dengan

tujuan belajarnya. Misalnya mahamahasiswa belajar grup, maka ia akan memperhatikan definisi konsep grup dan juga konsep-konsep lain yang berkaitan. Proses perhatian itu berlangsung di dalam bagian internal yang disebut dengan sekumpulan kegiatan mental (mental set). Sekumpulan kegiatan mental itu berfungsi sebagai suatu jenis pengaturan yang terjadi dalam pemrosesan informasi.

Karakteristik seseorang telah memahami dalam belajar konsep, secara umum adalah : (1) mengenal definisi atau definisi-definisinya, (2) mengenal beberapa contoh dan non contoh, (3) mengenal sejumlah sifat-sifat esensial, (4) dapat menggunakan konsep itu untuk mendefinisikan konsep-konsep lain, (5) mengenal hubungan konsep itu dengan konsep-konsep yang berdekatan, (6) dapat mengenal kembali konsep itu dalam berbagai situasi, (7) dapat menggunakan konsep itu untuk menyelesaikan soal, (8) khusus geometri : mengenal wujudnya, dapat meragakan dan mengenal persamaannnya.

Seperti yang disebutkan di atas bahwa proses berpikir mahamahasiswa meliputi dari penerimaan informasi (dari dunia luar atau diri mahasiswa), pengolahan, penyimpanan dan pemanggilan informasi itu dari dalam ingatan.

Untuk mengetahui pemahaman mahamahasiswa tentang konsep grup, diberikan soal (permasalahan) yang berkaitan dengan konsep grup. Kemudian mahamahasiswa diminta untuk menyelesaikan dan dilakukan wawancara. Soal yang diberikan sebagai berikut : Diketahui A adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan bilangan bulat. (1) Selidikilah apakah himpunan beserta operasi tersebut merupakan suatu grup, (2) Berikan penjelasan dan alasan dari jawaban saudara.

Bagi mahamahasiswa field dependen, dalam menerima informasi, ia tidak dapat merinci apa yang ada dalam soal, meskipun ia dapat menyelesaikannya. Ia hanya mengetahui secara keseluruhan. Mahamahasiswa tidak dengan mudah memahami bahwa disana ada hal yang berkaitan dengan konsep-konsep lain yang membentuk konsep grup. Berdasarkan jawaban tertulis yang di dapat dari mahamahasiswa field dependen, diperoleh data sebagai berikut.

Ketika mahamahasiswa ditanya : apakah ada konsep lain yang berkaitan dengan soal tersebut? Jawabnya tidak ada. Namun ketika tanya : Apakah operasinya tertutup? Mahamahasiswa menjawab : ya!. Ketika ditanya lagi konsep apa jika

terdapat himpunan kosong dengan satu operasi yang bersifat tertutup? Ia dapat menjawab ”grupiod”. Jadi adakah konsep lain ya berkaitan dengan soal itu? Dijawab : Ada. Mengapa tadi saudara menjawab tidak ada? Karena disitu ada sifat operasi dan sifat lainnya, yaitu assosiatif dan identitas. Berbeda dengan mahamahasiswa field independent, ia dapat memahami bahwa dalam soal tersebut mengandung jawabanya memuat konsep-konsep yang lain. Ia dapat menyebutkan bahwa dalam soal tersebut, untuk sampai pada jawaban grup, ia tahu bahwa ada grupoid, semigrup dan monoid.

Ketika mahamahasiswa ditanya tentang definisi konsep grup, kedua mahamahasiswa juga menjawabnya ada perbedaan. Mahamahasiswa yang field dependen menjelaskan dengan membaca bahasa simbol. Tetapi mahamahasiswa field independen dapat menggunakan bahasa sendiri.

Pada saat mengerjakan soal, mahamahasiswa juga telah melakukan aktifitas pengolahan infomasi. Informasi yang ada meliputi himpunan bilangan bulat, operasi penjumlahan dan grup. Dengan adanya informasi ini, mahamahasiswa harus menghubungkan dan mengolah antar informasi. Dalam mengolah informasi, mahamahasiswa mengkaitkan nformasi satu dengan informasi lain misalnya sifat asosiatif, elemen identitas dan invers dari suatu elemen. Pengolahan informasi bagi mahamahasiswa field dependen terasa kesulitan, ia tidak dengan mudah mengkaitkan antar informasi. Misalnya mahamahasiswa sulit untuk menentukan invers dari suatu elemen dikaitkan dengan operasi penjumlahan. Ketika mahamahasiswa ditanya berapa invers 2? Ia menjawab setengah. Mengapa ? Karena dua kali setengah sama dengan satu. Ketika ditanya elemen identitasnya berapa ? Dia menjawab nol. Tetapi bagi mahamahasiswa field independen, ia denga mudah menjelaskan kaitan antar informasi.

Konsep-konsep sebagai pengetahuan yang ada pada mahasiswa, merupakan konstruksi mahasiswa melalui proses pemahaman. Disisi lain bahwa setiap mahasiswa memilik karakteristik yang berbeda didasarkan atas gaya kognitifnya. Hal ini akan berpengaruh pada bagaimana seorang mahasiswa dalam memahami/ mengkonstruksi pengetahuan.

Karena mengkonstruksi suatu konsep merupakan proses berpikir yang dilakukan oleh diri mahasiswa, maka karakteristik mahasiswa akan mempengaruhi

proses berpikirnya. Karakteristik mahasiswa yang dimaksud berkaitan dengan intelektual dan disebutkan oleh Suwarsono (1987 : 75) meliputi kemampuan intelektual umum, kemampuan penalaran umum, kemampuan menalar secara logis dan kemampuan menalar secara abstrak.

Komponen penting dalam pengukuran intelegensi adalah kemampuan berpikir abstrak. Semakin tinggi tingkat intelegensi seseorang, semakin besar kemampuan untuk berpikir abstrak. Ini berarti bahwa mahasiswa yang taraf intelegensinya relative tinggi akan cenderung lebih mudah untuk diberi pengajaran secara abstrak daripada para mahasiswa yang taraf intelegensinya rendah. Para mahasiswa yang intelegensinya relatif lebih rendah akan cenderung berhasil jika dosen banyak mempergunakan pendekatan yang bersifat konkrit dalam pengajarannya.

Mengingat kemampuan berpikir abstrak erat kaitannnya dengan kemampuan berpikir deduktif, sedangkan kemampuan berpikir secara konkrit erat kaitannya dengan berpikir induktif. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa yang taraf intelegensinya lebih tinggi akan lebih mudah untuk mengkuti pelajaran yang menggunakan pendekatan deduktif. Untuk mahasiswa yang intelegensinya relatif rendah akan berhasil jika pendekatan pengajarannya menggunakan pendekatan induktif.

Karakteristik selain dikaitkan dengan intelegensi, adalah karakteristik yang berkaitan dengan perlakuan Karakteristik yang dimaksudkan adalah field independent, yaitu suatu karaktersitik ynag menunjukkan sampai sejauh mana seseoang dapat membebaskan dirinya dari keadaan lingkungan yang melingkupi dirinya atau melingkupi pekerjaan yang sedang ia lakukan. Dengan kata lain, seseorang dikatakan mempunyai tingkat field independence yang tinggi apabila dalam bertingkah laku atau dalam mengerjakan sesuatu hal dalam lingkungan atau suatu kondisi ia dapat memusatkan perhatiannya pada apa yang ia lakukan atau ia kerjakan, tanpa terpengaruh oleh keadaan lingkungan yang cenderung dapat mengacaukan perhatiannya.

Mahasiswa yang mempunyai gaya kognitif field independent menanggapi suatu tugas cenderung berpatokan pada isyarat dari dalam diri mereka sendiri. Sedangkan mahasiswa yang memiliki gaya kognitif field dependent melihat syarat

lingkungannya sebagai petunjuk dalam menanggapi suatu stimulus. Lebih lanjut dinyatakan bahwa orang yang memiliki gaya kognitif field independent lebih bersifat analisitis, mereka dapat memilah stimulus berdasarkan situasi, sehingga persepsinya hanya sebagian kecil terpengaruh ketika ada perubahan situasi. Mahasiswa yang memiliki gaya kognitif field dependent mengalami kesulitan dalam membedakan stimulus melalui situasi yang dimiliki sehingga persepsinya mudah dipengaruhi oleh manipulasi dari situasi sekelilingnya.

3. Penutup

Dengan adanya perbedaan gaya kognitif mahasiswa, akan merupakan suatu manfaat yang besar dalam rangka pencapain tujuan belajar. Dosen dapat memberikan pelayanan sesuai dengan kemampuan menangkap, memahami dan menggunakan informasi berupa konsep yang disampaikan dosen. Mahasiswa memahami dan mengkonstruksi konsep berdasarkan skema yang sudah dimiliki mahasiswa.

Memang disadari bahwa dalam proses pembelajaran, dosen belum melihat dan mengamati proses berpikir mahasiswa. Dosen kebanyakan melihat hasil yang nampak ditunjukkan oleh mahasiswa, baik berupa prilaku yang tampak ataupun hasil pekerjaan yang diperoleh mahasiswa. Diharapkan dengan tulisan ini mendorong mahasiswa untuk memahami dirinya sendiri dan bagi dosen dapat tergugah untuk mengkaji lebih jauh dan menerapkan dalam proses pembelajaran.

REFERENSI

Alex Sobur, 2003, *Psikologi Umum*, Pustaka Setia, Bandung

De Bono E. 1992. *de Bono"s Thinking Course*. Petancor B.V.

De Bono E. 1997. *Berpikir Praktis*. BinarupaAksara – Jakarta

Ellin & Weiner, 1978. Development of the Chield. New York : John Willey & Sons .Inc

Herman Hudoyo, 1990. *Strategi Belajar Mengajar Matematika*, IKIP Malang. Madang

Herman Hudoyo, 2001. *Pembelajaran Menurut pandangan Konstruktivisme*. Makalah disajikan pada seminar dan lokakarya Konstruktivisme sebagai Rangkaian Kegiatan Piloting FMIPA UM, Malang

Matlin, 1989, *Cognition*, Holt, Rinehart and Winston,Inc. New York

Solso, 1995, *Cognitive Pshycologi*, Allyn and Bacon, Boston

Suwarsono, 1987. *Trait-Treatment Interaction dalam Pendidikan Matemátika*, Makalah disajikan pada seminar Pendidikan Físika dan Matemática di USD, Yogyakarta.

The Liang Gie, 2003, *Teknik Berpikir Kreatif*, PUBIB, Yogyakarta

Witkin, H.A, Oltman, P.K Raskin, E. 1971. *Manual Embedded Figures Test, Children Embedded Figures Test, Group Embedded Figures Test*. Consulting Psychology Press, Inc. California

Witkin, H.A, Moore, C.A, Goodnough D.R, dan Cox, P.W. 1977. *Field Dependent and Field Inependent Cognitive Style and Their Educational Implication.* Reviewof Educational Researh Winter. Vol 47. No.1

Woolfok, Anrita, E. 1993. Educational Psycology, 5 edition, Singapore : Allyn and Bacon

Peningkatan Pembelajaran Konsep Pengolahan Data Melalui Tutor Sebaya Dengan Komputer

Oleh
Endah Ekowati
SD Buin Batu Sumbawa Barat
Jl Kayu Besi 400 Buin Batu Sumbawa Barat – NTB

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah: (1) untuk mengetahui kreativitas siswa kelas 6 SD dalam pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan menggunakan TURBATER, (2) untuk mengetahui bagaimana tingkat prestasi belajar matematika siswa kelas 6 SD dalam pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan menggunakan TURBATER

Adapun tempat penelitian di dalam kelas 6 SD Buin Batu.Metode penelitian ini menggunakan model Kemmis dan Tanggart dengan tahapan perencanaan, tindakan dan pengamatan serta refleksi untuk setiap siklus. Penelitian ini bersifat kolaboratif karena melibatkan guru matematika sekaligus Kepala sekolah SD-SMP Buin Batu sebagai observer. Penelitian ini dirasa cocok untuk pemecahan masalah karena memungkinkan peneliti untuk melakukan tindakan atau peningkatan terhadap suatu program dengan melibatkan guru matematika di sekolah lokasi.

Hasil pengolahan data untuk tiap siklus diperoleh hasil penelitian sebagai berikut: (a) untuk siklus pertama, dari 20 orang siswa kelas 6 SD Buin Batu, terdapat 7 orang yang telah tuntas belajarnya secara individual dan 13 orang siswa yang tidak tuntas, sehingga secara klasikal terdapat 35 % dari seluruh siswa yang tuntas. Jadi penelitian ini perlu dilanjutkan dengan siklus selanjutnya, (2) dari 20 orang siswa kelas 6 SD Buin Batu, terdapat 10 orang yang telah tuntas belajarnya secara individual dan 10 orang siswa yang tidak tuntas, sehingga secara klasikal terdapat 50 % dari seluruh siswa yang tuntas sehingga terdapat peningkatan sebesar 15 %. Jadi penelitian ini perlu dilanjutkan dengan siklus selanjutnya, (3) Pada siklus ketiga (terakhir) dari 20 orang siswa kelas 6 SD Buin Batu yang telah tuntas belajarnya 17 orang dan yang tidak tuntas 3 orang, sehingga pada siklus ini dihentikan penelitiannya karena terdapat 85 % secara klasikal telah tuntas belajarnya.

Keyword : Pengolahan Data , Kreativitas, Prestasi , Ketuntasan Individu , Ketuntasan Klasikal

I. Pendahuluan

A. Latar Belakang

Guru harus terus berupaya dengan berbagai metode dan strategi agar peserta didik dapat menguasai kompetensi yang meliputi 3 aspek 1) pemahaman konsep,2)penalaran dan komunikasi,3)pemecahan masalah serta penerapannya ini sebagaimana yang diamanatkan dalam kurikulum KTSP.

Ada banyak faktor yang mempengaruhi keberhasilan siswa dalam mencapai kompetensi di atas. Salah satu faktor yang sangat penting dan menentukan adalah motivasi. Motivasi berbanding lurus dengan hasil yang dicapai, karena merupakan sumber energi yang memungkinkan peserta didik mau dan sanggup melakukan sesuatu.Dalam penelitian ini, penulis dan observer berupaya menciptakan suasana pembelajaran yang menyenangkan dan menantang guna mengembangkan kompetensi pemahaman konsep melalui sebuah metode **tutor sebaya** menggunakan media **komputer (TURBATER)**

TURBATER ini merupakan salah satu pendekatan pembelajaran yang diduga mampu mewujudkan situasi pembelajaran yang kondusif : aktif, kreatif, efektif dan menyenangkan. Menurut Sudjana (1989:30) yag termasuk dalam komponen pembelajaran yang adalah ”tujuan, bahan, metode, media serta alat penilaian ”. Melalui metode tutor sebaya dan media komputer yang ada disekolah kami , siswa bukan dijadikan sebagai objek pembelajaran tetapi subjek pembelajaran yaitu siswa diajak untuk menjadi tutor atau sumber belajar dan tempat bertanya bagi temannya, dengan cara demikian siswa yang menjadi tutor dapat mengulang dan menjelaskan kembali materi/ konsep sehingga menjadi lebih memahaminya.Oleh karena itu Penelitian tindakan kelas ini sangat penting untuk dilakukan karena dalam pembelajaran matematika tidak hanya ditekankan pada penguasaan konsep akan tetapi juga harus mampu mengembangkan penalaran / komukasi serata ketrampilan proses siswa. Pada proses pembelajaran konsep Pengolahan Data peneliti dan Observer sebagai team kolaborasi menemukan masalah dimana siswa banyak yang kurang mampu menguasai konsep Pengolahan Data dengan cepat dan kurang tertarik jika selalu diberikan rumus-rumus dan latihan sehingga kreativitas dan prestasi mereka rendah terutama di kelas 6 SD Buin Batu, oleh karena itu perlu untuk diteliti upaya pembelajaran yang mampu meningkatkan kreativitas dan prestasi siswa dalam konsep Pengolahan Data di kelas 6 SD Buin Batu dengan menggunakan tutor sebaya dan media komputer, diharapkan sesuai dengan yang diharapkan dan untuk selanjutnya diambil tindakan guna terus meningkatkan penguasaan/ pemahaman konsep, penalaran dan komunikasi, pemecahan masalah serta penerapannya ini sebagaimana yang diamanatkan dalam kurikulum KTSP.

B. Rumusan Masalah dan Pemecahan Masalah

1. Perumusan Masalah

Dari latar belakang masalah di atas dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

a. Bagaimana upaya peningkatan kreativitas siswa menggunakan TURBATER pada pembelajaran konsep Pengolahan Data di kelas 6 SD Buin Batu?
b. Bagaimana upaya peningkatan prestasi siswa menggunakan TURBATER pada pembelajaran konsep Pengolahan Data di kelas 6 SD SMP Buin Batu?

2. Pemecahan Masalah

Pada Penelitian Karya Ilmiah guru ini, yaitu peneliti secara **kolaboratif** akan melakukan tindakan-tindakan siklus sebanyak 3 siklus. Setiap siklus memiliki tahapan sebagai berikut: (1) mengidentifikasi permasalahan, (2) mengkaji seluruh komponen pembelajaran dan keterampilan menggunakan metode tutor sebayadengan media komputer, (3) mengaplikasikan model pembelajaran Pengolahan Data melalui kegiatan latihan, (4) mengaplikasikan model pembelajaran Pengolahan Data dalam kegiatan **real teacing**. Perubahan dari siklus pertama sampai dengan siklus berikutnya dilakukan secara simultan, artinya siklus awal merupakan dasar bagi perubahan pada siklus sebelumnya. Siklus terakhir dikatakan berhasil jika indikator kerja yang telah ditetapkan telah terpenuhi secara optimal.

3. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Untuk menemukan upaya peningkatan prestasi siswa menggunakan TURBATER pada pembelajaran konsep Pengolahan Data di kelas 6 SD Buin Batu.
b. Untuk menemukan upaya peningkatan upaya peningkatan kreativitas siswa menggunakan TURBATER pada pembelajaran Pengolahan Data di kelas 6 SD Buin Batu.

II. Kajian Teoritis

A. Teori tentang Motivasi

Secara sederhana motivasi dapat diartikan sebagai dorongan.

Morgan (1986) dalam bukunya *Introduction To Psychology*, menjelaskan beberapa teori motivasi:

1. Teori insentif
2. Pandangan hedonistik

(http://www.e-psikologi.com)

B. Teori tentang Kreativitas

Ciri-ciri Kreativitas

Dorongan ingin tahunya besar, sering mengajukan pertanyaan yang baik, memberikan banyak gagasan dan usul terhadap suatu masalah, bebas dalam menyatakan pendapat, mempunyai rasa keindahan, menonjol dalam salah satu bidang seni, mempunyai pendapat sendiri dan dapat mengungkapkannya serta tak mudah terpengaruh orang lain, rasa humor tinggi, daya imajinasi kuat, keaslian (orisinalitas) tinggi (tampak dalam ungkapan gagasan, karangan, dan sebagainya. **(http://www.e-smartschool.com);(http://www.pikiran-rakyat.com).**

C. Teori tentang Prestasi Belajar

Prestasi belajar terdiri atas dua kata prestasi dan belajar. Makna prestasi menurut Kamus Umum Bahasa Indonesia berarti : hasil yang telah dicapai dari yang telah dilakukan. Dengan demikian prestasi belajar berarti hasil yang telah dicapai dariproses belajar. Sedangkan pengertian belajar banyak dikemukakan para ahli antara lain belajar adalah proses yang aktif untuk membangun pengetahuan dan keterampilan siswa.

D. Teori tentang Tutor Sebaya

Tutor sebaya merupakan salah satu strategi pembelajaran yang menggunakan pendekatan kooperatif yang dapat menumbuhkan rasa saling menghargai dan menumbuhkan rasa percaya diri serta dapat mengembangkan kemampuan yang lebih baik untuk mendengarkan, berkonsentrasi dan memahami konsep yang sedang dipelajari. Penjelasan Tutor sebaya lebih memungkinkan berhasil dibandingkan guru. Dimana mereka melihat masalah dengan cara yang berbeda dibandingkan orang dewasa

dan mereka menggunakan bahasa yang lebih akrab. Tetapi semua metode punya kelemahan karena tidak semua siswa dapat menjelaskan kepada temannya dan tidak semua siswa dapat menjawab pertanyaan temannya.

E. Microsoft Excel

Microsoft Excel adalah program komputer aplikasi spreadshett (lembar kerja) yang paling populer dan banyak digunakan saai ini untuk membantu dalam pengerjaan menghitung , menganalisa data ,membuat diagram dan presentasi data.

F. Pengolahan Data

Pengolahan Data dalam pelajaran matematika meliputi kompetensi : 1) pengumpulan data, membuat tabel frekuensi, membaca tabel ,2) menyajikan data dalam bentuk tabel, diagram gambar, batang dan lingkaran,3) menentukan Modus, Median dan Rata-rata data

2. Hipotesis Tindakan

Adapun hipotesis tindakan dalam penelitian ini adalah:

a. Jika dalam proses pembelajaran konsep Aritmatika Sosial menggunakan TURBATER, maka kreativitas siswa pada di kelas 6 SD Buin Batu akan meningkat.
b. Jika dalam proses pembelajaran konsep Aritmatika Sosial menggunakan TURBATER, maka prestasi siswa pada di kelas 6 SD Buin Batu akan meningkat.

III. Metodologi Penelitian

A. Prosedur Penelitian

1. Setting Penelitian

Lokasi penelitian tindakan kolaboratif ini adalah kelas 6 SD Buin Batu Sumbawa Barat karena kelas ini siswanya beragam tingkat pemahaman dalam sebuah konsep pembelajaran matematika terutama konsep Pengolahan Data perlu

diberi motivasi yang lebih dari guru untuk meningkatkan kreativitas dan prestasi siswa belajar matematika.

2. Desain Penelitian

Untuk memecahkan permasalahan dilakukan serangkaian tindakan dalam bentuk siklus-siklus, sebanyak 3 (tiga) siklus atau sebanyak 3 (tiga) bulan efektif. Setiap siklus memiliki tahapan perencanaan,tindakan,Observasi, Refleksi dan Evaluasi.

3. Data dan Sumber Data

Dengan mencermati seluruh uraian di atas, dapat ditetapkan bahwa sumber data penelitian ini berasal dari guru matematika (peneliti), tutor sebaya dan siswa. Dari guru (peneliti) memperoleh data tentang implementasi pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan mengggunakan metode tutor sebaya dengan media komputer sesuai KTSP, dari siswa peneliti peroleh data kreativitas dan prestasi siswa belajar matematika. Data dari guru diperoleh dari lembar observasi (penilaian rubrick) untuk memperoleh kesiapan proses pembelajaran di kelas, sedangkan dari siswa, hasil karya dan lembar tes digunakan untuk mengetahui penguasan standar materi matematika, yaitu 1) pemahaman konsep,2)penalaran dan komunikasi,3)pemecahan masalah.

4. Teknik Analisa Data

Data yang diperoleh dari keseluruhan tindakan (siklus) selanjutnya dianalisis secara kualitatif dengan tahapan-tahapan meliputi: (1) reduksi data; (2) hasil tahapan pertama disajikan secara deskriptif; (3) penyimpulan atas sajian data hasil analisis. Hasil merupakan dampak yang diperoleh dari keseluruhan siklus sehingga dapat diketahui tingkat keoptimalan tindakan tentang implementasi pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan mengggunakan TURBATER.

B. Indikator Keberhasilan Tindakan

Indikator keberhasilan tindakan ini, meliputi: (1) motivasi atau minat belajar siswa terhadap pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan mengggunakan TURBATER dapat meningkatkan kreatifitas dan prestasi siswa, ditandai secara kualitatif dengan unsur kreativitas siswa, keaktifan siswa, dan keterlibatan sumber

belajar secara menyeluruh; Secara kuantitatif prosentase keberhasilan unsur kualitatif tersebut adalah 90 % (2) peningkatan kemampuan siswa dalam penguasaan konsep Pengolahan Data dengan mengggunakan TURBATER,ditandai dengan peningkatan prestasi belajar secara kualitatif terpenuhi aspek kognitif, apektif, dam psikomotor. Secara kuantitatif jika minimal 75 % dari keseluruhan siswa mencapai ketuntasan belajar individual 75% dan klasikal 85 %, berdasarkan standard materi yang telah ditetapkan.

IV. Hasil Penelitian Dan Pembahasan

1. Hasil Penelitian

1.1. Siklus Pertama

Siklus ini dilaksanakan pada hari Senin, tanggal 26 Agustus 2008 , data yang diperoleh pada siklus ini dikelompokkan menjadi tiga bagian sekaligus menunjukkan tahapan kegiatan tiap satu siklus, yakni perencanaan, tindakan dan observasi, serta analisis dan refleksi. Permasalahan yang timbul pada siklus pertama guru merasa kesulitan dalam menyampaikan materi pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan mengggunakan metode tutor sebaya dengan media komputer sesuai dengan KTSP dan belum dapat meningkatkan kreatifitas dan prestasi siswa karena minat dan motivasi siswa sangat rendah dalam proses pembelajaran.

1.2. Siklus Kedua

Siklus ini dilaksanakan pada Senin, tanggal 2 September 2008.

1.3. Siklus Ketiga

Siklus ini dilaksanakan Senin tanggal 9 September 2008.

No	SIKLUS	HASIL				Keterangan
		JML Siswa	JML Siswa Tuntas	JLH Siswa yang Tidak tuntas	% Ketuntasan	
1.	I	I	20	7	13	35 %
2.	II	II	20	10	10	50 %
3.	III	III	20	17	3	85 %

2. Pembahasan

Pada bagian ini akan diuraikan pembahasan yang dilaksanakan berdasarkan deskripsi data pada setiap rangkaian siklus:

2.1. Siklus Pertama

Pada tahap perencanaan, data menunjukkan bahwa pembelajaran matematika yang diterapkan oleh guru selama ini masih berorientasi pada penguasaan konsep secara kognitif.. Pendekatan dan metode yang digunakan guru kurang bervariatif, masih terfokus pada guru, siswa kebanyakan pasif dalam menerima pelajaran. Dalam proses perencanaan ini diperoleh kesepakatan tentang model pembelajaran dan hasil diskusi untuk pembenahan proses pembelajaran konsep Pengolahan Data dengan menggunakan TURBATER diharapkan dapat meningkatkan kreativitas dan prestasi, tersusunnya model evaluasi yang dapat mengukur pemahaman anak yang lebih dalam yaitu aspek afektif dan aspek psikomotor, dan guru telah memiliki kesiapan untuk menerapkan model pembelajaran yang ada.

Pada bagian tindakan dan observasi, nampak bahwa guru menerapkan skenario pembelajaran yang telah disusun dengan memanfaatkan media komputer dan implementasi pembelajaran Pengolahan Data. Hasil pengamatan jalannya proses pembelajaran menunjukkan bahwa cukup antusias dalam pembelajaran karena dilihat dari siswa menjawab senang dan gembira dalam belajar matematika, sehingga motivasi siswa makin tinggi.

Beberapa hal yang belum terlaksana dengan baik adalah terdapat beberapa bagian materi yang belum sempat disampaikan karena kurangnya waktu yang disediakan. Untuk itu perlu direncanakan media dan strategi pembelajaran yang bervariasi, sehingga pembelajaran lebih menarik lagi. Pelaksanaan evaluasi dan proses bimbingan untuk membuat laporan dalam bentuk table data, diagaram batang,lingkaran dan garis belum sempat dilaksanakan karena kekurangan waktu.

Dari hasil analisa data dan refleksi diperoleh bahwa dari 20 orang siswa kelas 6 SD Buin Batu diperoleh nilai tertinggi 100 dan terendah 35 jumlah siswa yang telah tuntas belajarnya 7 orang dengan prosentase ketuntasan klasikal 35 %.

Dengan memperhatikan hasil pengolahan data, maka peneliti dan team sepakat untuk meningkatkan proses pembelajaran sesuai kriteria yang disepakati bersama, dan hal ini sangat penting untuk melaksanakan siklus kedua.

2.2. Siklus Kedua

Pada bagian perencanaan, setelah memperhatikan hasil analisis dan pengolahan data, maka pada siklus ini menunjukkan bahwa telah dilakukan penyusunan kembali skenario pembelajaran pengolahan data dengan menggunakan TURBATER yang telah ditetapkan team dan jangka waktu 5 jam pelajaran (5 x 45 menit). Di samping itu evaluasi berupa penilaian rubrick dan lembar observasi keberhasilan berupa laporannya. Siswa dapat menyelesaikan LKS yang digunakan dengan baik sesuai dengan yang telah direncanakan dengan kreativitas didalam komputer yang dipakai setiap siswa. Bagian-bagian penting yang telah dicapai pada siklus pertama akan dipertahankan dan sekaligus ditingkatkan pada siklus ini. Setelah dilakukan serangkaian tindakan, maka hasil observasi menunjukkan bahwa guru melaksanakan skenario pembelajaran yang telah disusun, guru nampak lebih santai dalam proses pembelajaran karena siswa aktif.Di samping itu Tutor sebaya lebih leluasa memberikan bimbingan kepada siswa lain yang membutuhkan penjelasan. Siswa lebih mudah dan cepat dalam memahami konsep Pengolahan Data dengan menggunakan tutor sebaya dan media komputer, antara tutor sebaya dan siswa lebih aktif dalam proses pembelajaran. Pada akhir pembelajaran siswa sudah bisa membuat Design table perhitungan ,diagram batang, lingkaran dan garis sendiri tanpa bimbingan dari guru dan dapat mengerjakan soal-soal yang diberikan guru, namun waktu yang tersedia tidak cukup untuk menyelesaikan soal.

Dari hasil analisa data dan refleksi pada siklus ini dalam upaya peningkatan prestasi belajar siswa dalam pembelajaran Pengolahan Data dengan menggunakan metode tutor sebaya dan media komputer diperoleh bahwa dari 20 orang siswa kelas 6 SD Buin Batu diperoleh nilai tertinggi 100 dan terendah 37,5 ; jumlah siswa yang telah tuntas belajarnya 10orang dengan prosentase ketuntasan klasikal 50 %. Sedangkan dalam upaya peningkatan minat/ motivasi siswa diperoleh prosentase ketuntasan 86,22 % secara klasikal.

Dengan memperhatikan hasil Pengolahan Data, maka peneliti dan team sepakat untuk meningkatkan proses pembelajaran sesuai kriteria yang disepakati bersama, dan hal ini sangat penting untuk melaksanakan siklus ketiga.

2.3. Siklus Ketiga

Peneliti bersama guru menyusun skenario pembelajaran untuk siklus terakhir (ketiga). Implementasi refleksi dari siklus sebelumnya adalah pentingnya belajar berkomunikasi dengan teman atau tutor sebaya dalam memahami konsep pembelajaran Pengolahan Data. Berdasarkan implementasi dari semua siklus, diketahui bahwa pada siklus ketiga (terakhir) data telah menunjukkan adanya perubahan ke arah yang lebih baik dan optimal, hal ini dapat dilihat dari hasil pengolahan data pada siklus ketiga (terakhir) yaitu dari jumlah siswa 20 orang, diperoleh nilai tertinggi 100 dan terendah 60 yang telah tuntas belajarnya adalah sejumlah17 orang atau dengan prosentase ketuntasan belajar secara klasikal 85 %. Untuk indicator keberhasilan upaya peningkatan minat dan motivasi kami melakukan penilaian rubrick yang menunjukkan 96 %. Dengan demikian indicator penelitian telah terpenuhi.

V. Simpulan Dan Saran

1. Simpulan

Berdasarkan hasil implementasi dari semua siklus, diketahui bahwa pada siklus ketiga (terakhir) data telah menunjukkan adanya perubahan kearah lebih optimal sebagai bentuk telah terjadinya suatu peningkatan pemahaman pembelajaran konsep pembelajaran Pengolahan Data dengan menggunakan TURBATER dapat meningkatkan kreativitas dan prestasi siswa di kelas 6 SD Buin Batu hal ini dapat ditunjukkan oleh prestasi belajar siswa dengan sistem ketuntasan belajar yang telah ditetapkan yaitu 75 % untuk individual dan 85 % secara klasikal.

Hal ini ditunjukkan pada siklus pertama motivasi siswa sangat rendah demikian pula prestasi belajar siswa mencapai ketuntasan hanya 35 % ,pada siklus kedua terdapat upaya peningkatan minat/ motivasi siswa dengan ketuntasan 86,22 % untuk prestasi belajar siswa mengalami peningkatan prestasi sebanyak 15 % sehingga ketuntasan klasikal siswa kelas 6 SD Buin Batu menjadi 50 %, sedangkan pada siklus ketiga upaya peningkatan minat/ motivasi siswa mengalami peningkatan 9,78 % dari siklus dua menjadi 96 % dan untuk prestasi belajar siswa juga mengalami peningkatan 35 % dari siklus kedua menjadi 85 %.

Penerapan ini berdampak pada upaya peningkatan minat/ motivasi siswa serta upaya peningkatan prestasi belajar siswa dalam menguasai konsep pembelajaran Pengolahan Data dengan menggunakan TURBATER dapat meningkakan kreativitas dan prestasi siswa di kelas 6 SD Buin Batu yang ditandai dengan unsur penguasaan evaluasi pembelajaran. Di samping itu peningkatan prestasi belajar yang diperoleh siswa sebagai wujud dari implementasi tindakan setiap siklus. Dalam setiap siklus dalam penelitian tindakan kelas selalu dilakukan observasi oleh observer dengan bantuan lembar observasi guru, hal dilakukan sebagai upaya meningkatan perbaikan proses pembelajaran Pengolahan Data dengan menggunakan TURBATER dapat meningkakan kreativitas dan prestasi siswa di kelas 6 SD Buin Batu.

2. Saran

Berdasarkan kesimpulan di atas, maka diajukan beberapa saran sebagai berikut:

Untuk siswa :

1. Diharapkan siswa menjadikan hasil penelitian ini sebagai upaya peningkatan pemahaman konsep pembelajaran Pengolahan Data.
2. Diharapkan siswa menyadari bahwa Prestasi dan minat/motivasi belajar siswa akan optimal jika ada kemauan berlatih , mencoba dan melakukan praktek praktis dalam memahami suatu konsep pembelajaran Pengolahan Data.

Untuk Guru :

1. Diharapkan Guru mata pelajaran matematika yang lain dapat menerapkan hasil penelitian ini sebagai inspirasi dan perbaikan pembelajaran
2. Diharapkan Guru mata pelajaran lain juga dapat menerapkan hasil penelitian tindakan kelas ini agar pembelajarannya lebih menarik sehingga siswa enjoy , senang , dan jelas untuk mempelajari suatu konsep pembelajaran**.**

Untuk sekolah :

1. Diharapkan kepala sekolah menjadikan hasil penelitian tindakan kelas ini sebagai salah bentuk supervisi dan penilaian /performan guru dalam proses pembelajaran dalam upaya meningkatkan kualitas pembelajaran khususnya pada mata pelajaran matematika. Untuk itu sekolah diharapkan selalu memfasilitasi

peneliti untuk mengatasi kekurangan-kekurangan yang dialami oleh guru matematika dalam menyelenggarakan pembelajaran.

2. Diharapkan kepala sekolah menjalin kemitraan dan sekaligus mengembangkan jalinan kolaborasi dengan pihak lain. Hal ini penting untuk dilaksanakan dalam rangka mencari model pembelajaran yang tepat pada proses pembelajaran matematika di SD

Untuk Instansi Lain :

1. Diharapkan pihak-pihak yang terkait dapat memberikan bimbingan yang terus-menerus untuk perbaikan dan inovasi penulisan penelitian tindakan kelas dengan selalu mengadakan training , lomba atau sayembara.
2. Diharapkan pihak –pihak yang terkait dengan hasil penelitian ini menjalin kemitraan dan sekaligus mengembangkan jalinan kolaborasi dengan sekolah – sekolah sekitar tambang untuk memberikan bimbingan pembelajaran matematika di SD.

VI. Daftar Pustaka

Depdiknas, 2004. *Kurikulum 2004*. Jakarta : Balai Pustaka

Martina Rini, 2002, *Anakku malas belajar*, Jakarta, http://www.e-psikologi.com

Ahmad Faqih, 2003, *Sekilas tentang Moivasi Berprestasi*, Jakarta, http://psikologi.net/artikel/arsip/motivasi_berprestasi.doc

_____, 2004, *ciri-ciri kreativitas*, Jakarta http://www.e-smartschool.com

Priatna, Nanang, 2004. *Saya ingin pintar matematika*,Bandung: Grafindo

Sukmana, 2004, *Dinamika Proses Belajar, Jakarta, http://www.pikiran-rakyat.com*

Riyanto,Yatim.2005. *Metodologi Penelitian Pendidikan.*Surabaya : PT. Wardani, 2003. *Penelitian Tindakan kelas* .Jakarta : Universitas terbuka

Suharsimi Arikunto, 2005, *Penelitian Tindakan Kelas*, Rineka Cipta, Yogyakarta

STRARS-C, 2001. *Tujuh Prinsip CTL (Versi Transparansi).*Surabaya : UNESA

Zuhdan K. Prasetyo,dkk., 2005. *Kapita Selekta Pembelajaran Fisika* .Jakarta : Universitas terbuka

Pembelajaran Matematika untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa Sekolah Menengah Atas

Oleh:
Ibrahim (e-mail: ibyulin@plasa.com)
Prodi Pendidikan Matematika, Fakualtas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga

Abstrak

Kemampuan pemecahan masalah matematis merupakan kemampuan yang perlu untuk dijadikan perhatian utama dan urgen untuk ditingkatkan pada diri siswa karena selain merupakan tujuan pembelajaran matematika, tetapi juga sebagai jantungnya matematika serta merupakan alat utama untuk melakukannya. Selain itu, kemampuan ini akan digunakan pada masalah keseharian siswa atau situasi dalam pembuatan keputusan secara baik dalam kehidupannya.

Fakta-fakta telah mengungkapkan baik di dalam maupun di luar Indonesia bahwa kemampuan pemecahan masalah matematis siswa masih belum cukup memadai. Hal ini memberikan petunjuk untuk segera memperbaiki kelemahan dari proses pembelajaran di kelas yang berkaitan dengan kemampuan pemecahan masalah matematis. Apabila kelemahan semacam ini tidak diantisipasi dan tidak diperbaiki maka akan selalu terjadi dan akan menghambat pada pencapaian tujuan pembelajaran matematika.

Di dalam makalah ini akan dikaji karakteristik dari salah satu alternatif pembelajaran matematika yang dianggap inovatif serta memberikan peluang lebih banyak pada siswa untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis, yaitu pembelajaran berbasis masalah. Selain itu juga, dikaji beberapa faktor yang perlu diperhatikan dan dipertimbangakan pada pembelajaran matematika dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah.

Kata kunci: *kemampuan pemecahan masalah matematis dan pembelajaran berbasis masalah*.

A. Pendahuluan

1. Latar Belakang Masalah

Salah satu penelitian yang menjadi perhatian besar bagi para akademisi, praktisi, dan pemerhati pendidikan matematika, yaitu penelitian *The Third International Mathematics and Sciences Study* (TIMSS) tahun 1999. Tentang penelitian TIMSS tersebut, Suryadi (2005, h. 3) mengemukakan, "Hasil studi internasional dalam bidang matematika dan IPA (TIMSS) untuk kelas delapan SLTP (*eighth grade)*, menunjukan bukti bahwa soal-soal matematika tidak rutin yang memerlukan kemampuan berpikir tingkat tinggi pada umumnya tidak berhasil dijawab dengan benar oleh sampel siswa Indonesia". Dari laporan penelitian TIMSS ini diketahui juga bahwa ternyata kemampuan siswa-siswa Amerika Serikat sebagai negara maju, untuk kelas delapan dan kelas dua belas kemampuannya jauh di bawah rerata internasional, terutama

kemampuan mengerjakan soal-soal secara mendalam (Olson, 2005, h. 76; Walle, 2007, h. 7). Ini menunjukan pembelajaran matematika belum fokus pada pengembangan kemampuan matematik tingkat tinggi, yang salah satunya adalah kemampuan pemecahan masalah matematis, di Indonesia maupun di beberapa negara maju.

Dalam Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) (Depdiknas, 2006) disebutkan bahwa tujuan pembelajaran matematika salah satunya adalah untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis. Sementara itu, Wahyudin (2003) menyatakan bahwa pemecahan masalah bukanlah sekadar tujuan dari belajar matematika, tetapi juga merupakan alat utama untuk melakukannya. Serta merupakan keterampilan yang akan dibawa pada masalah-masalah keseharian siswa atau situasi-situasi dalam pembuatan keputusan secara baik dalam kehidupannya. Mengenai kemampuan pemecahan masalah dalam matematika bukan saja menjadi kepentingan di Indonesia, bahkan di negara luar Indonesia, seperti: Amerika Serikat, Cina, dan Australia, kemampuan pemecahan masalah dalam matematika menjadi kemampuan yang penting harus dimiliki siswa (Stacey dan Groves dalam Anderson, 2005, h. 3).

Fakta yang ada di dalam maupun di luar Indonesia menunjukkan bahwa kemampuan pemecahan masalah matematis siswa masih rendah, baik di tingkat pendidikan menengah maupun pendidikan tinggi. Hal ini didasarkan pada beberapa hasil penelitian, yaitu tidak kurang dari limabelas hasil penelitian tingkat nasional dan internasional yang mengungkapkan bahwa secara klasikal kemampuan pemecahan masalah matematis belum mencapai taraf yang memuaskan. Hasil penelitian ini memberikan petunjuk untuk segera memperbaiki kelemahan-kelamahan dari proses pembelajaran di kelas yang berkaitan dengan kemampuan pemecahan masalah matematis.

Dengan demikian sudah selayaknya bahwa kemampuan pemecahan masalah matematis mendapatkan perhatian yang sangat khusus dalam pembelajaran matematika. Apabila kelemahan semacam ini tidak diantisipasi dan tidak diperbaiki maka akan selalu terjadi dan akan menghambat pada pencapaian tujuan pembelajaran matematika. Untuk itu, diperlukan alternatif pembelajaran matematika yang berkualitas, yaitu suatu pembelajaran matematika yang inovatif serta memberikan peluang lebih banyak pada siswa untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis.

Memperhatikan uraian di atas, maka keperluan untuk melakukan studi atau kajian yang berfokus pada penggunaan pembelajaran matematika yang diduga dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa, dipandang oleh penulis menjadi sangat urgen dan utama. Dalam hubungan ini, maka penulis mencoba untuk mengkaji yang berkaitan dengan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa, pembelajaran yang diduga dapat meningkatkannya serta faktor-faktor yang dapat mempengaruhi dalam pembelajarannya. Dengan mempertimbangkan bahwa kajian yang berkaitan dengan hal tersebut untuk di tingkat sekolah menengah atas (SMA) masih jarang dilakukan maka pengkajian untuk di tingkat sekolah menengah atas menjadi sangat penting dan mendesak untuk dilakukan.

2. Rumusan Masalah

Dari uraian pada latar belakang masalah, maka dirumuskan permasalahannya sebagai berikut.

1. Pembelajaran matematika yang seperti apakah, yang mungkin untuk diadaptasi dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa?
2. Faktor-faktor apa yang dianggap penting untuk diperhatikan dalam pembelajaran matematika dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa?

3. Tujuan dan Manfaat

Tujuan yang ingin dicapai dalam kajian ini adalah untuk memperoleh gambaran mengenai: 1) pembelajaran matematika yang mungkin untuk diadaptasi dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa; 2) Faktor-faktor yang dianggap penting untuk diperhatikan dalam pembelajaran matematika dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

Secara praktis hasil dari kajian ini dapat bermanfaat bagi sekolah (guru atau siswa), yaitu sebagai informasi tentang alternatif pembelajaran matematika yang dapat digunakan untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Sedangkan secara teoritis akan bermanfaat bagi kajian/penelitian dan pengembangan keilmuan.

B. Pembahasan

1. Belajar Matematika di Sekolah Menengah Atas

Menurut teori metakognisi bahwa siswa yang belajar mestinya akan memiliki kemampuan tertentu untuk mengatur dan mengontrol apa yang dipelajarinya (Uno, 2008, h. 134). Secara rinci Woolfolk (Uno, 2008, h. 134) menyatakan bahwa kemampuan itu meliputi empat jenis, yaitu kemampuan pemecahan masalah, kemampuan pengambilan keputusan, kemampuan berpikir kritis, dan kemampuan berpikir kreatif.

Apabila keempat kemampuan tersebut dapat dikembangkan pada siswa di sekolah melalui proses pembelajaran, dapat diperkirakan bahwa kualitas hasil belajar siswa paling tidak memenuhi tuntutan masyarakat bangsa Indonesia. Namun sayangnya, selama ini kita masih menyaksikan keluaran pendidikan yang ternyata belum memadai dalam hal keempat kemampuan itu. Hal ini mungkin disebabkan siswa yang dididik sampai saat ini berda pada paradigma lama, yaitu paradigma yang monoton yang menghambat untuk mengembangkan kemampuan berpikir kreatif dan pemecahan masalah.

Berpijak pada kerangka berpikir di atas, sudah saatnya pelaku pendidikan untuk mengkaji ulang, melakukan reformasi, melakukan redefinisi, dan reorientasi terhadap landasan teoritis dan konseptual belajar dan pembelajaran yang mampu menumbuhkembangkan siswa menghargai keragaman dengan jalan mengembangkan pola pikir siswa salah satunya dalam memecahkan masalah yang penerapannya dapat dilakukan pada pembelajaran matematika di sekolah. Namun, jika selama matematika diajarkan dengan menekankan pada yang sifatnya hafalan apalagi secara parsial maka kemungkinan siswa untuk memiliki kemampuan pemecahan masalah dengan baik, peluangnya kecil. Dalam hal ini, guru diharapkan mampu menggunakan model pembelajaran yang berkaitan dengan cara memecahkan masalah.

2. Konstruktivisme dalam Mewarnai Pandangan Baru terhadap Pembelajaran Matematika

Para pendidik matematika sepakat bahwa siswa harus memahami matematika. Teori yang paling luas diterima, yang dikenal dengan teori konstruktivisme, menyarankan cara terbaik bagi seseorang untuk memulai belajar konsep dan prinsip

dalam matematika adalah dengan mengkonstruksi sendiri konsep dan prinsip yang dipelajari itu. Dengan kata lain, siswa harus aktif dalam mengembangkan pemahamannya tentang konsep matematika. Teori konstruktivisme memberi wawasan tentang bagaimana siswa belajar matematika dan membimbing untuk menggunakan strategi pembelajaran yang dimulai dengan memperhatikan kondisi siswa dan bukannya memperhatikan kondisi guru.

Prinsip dasar dari konstruktivisme adalah siswa mengkonstruksi sendiri pengetahuannya. Selanjutnya, prinsip-prinsip umum teori konstruktivisme kebanyakan didasarkan pada proses asimilasi dan akomodasi dari Piaget serta interaksi sosial dari Vygotsky. Vygotsky percaya bahwa proses berpikir berada di antara orang-orang di dalam lingkungan sosial dan dari lingkungan ini siswa memperoleh ide-ide (Crain, 2007. h. 373 – 377; Santrock, 2007, h. 268 – 267). Transformasi ide ini dinamakan interaksi yang menurut Vygotsky hanya terjadi di dalam *Zona of Proximal Development* (ZPD) setiap siswa (Crain, 2007. h. 373, Santrock, 2007, h. 62). Goos (Walle, 2007, h. 30) menyebutkan bahwa ZPD bukan ruang fisik, tetapi merupakan ruang simbolik yang dibuat melalui interaksi para siswa yang lainnya yang berpengetahuan lebih banyak dan dengan budaya mereka. Persisnya, Vygotsky (Crain, 2007, h. 371) mendefinisikan zona perkembangan proksimal ini sebagai:

> Jarak antara tingkat perkembangan aktual yang ditentukan oleh pemecahan masalah secara independen dan tingkat perkembangan potensial yang ditentukan lewat pemecahan masalah di bawah bimbingan orang dewasa atau dalam kolaborasinya dengan rekan-rekan yang lebih mampu.

Vygotsky memandang ide-ide yang berada di kelas, di dalam buku-buku, dan dari guru atau sumber lain, berbeda dengan ide-ide yang dikonstruksi oleh siswa. Ide-ide yang diformulasikan dengan baik yang datang dari luar siswa dinamakan konsep ilmiah, sedangkan ide-ide yang dikembangkan oleh siswa dinamakan konsep spontan.

Berdasarkan pandangan ahli konstruktivisme seperti Piaget dan Vygotsky tentang pembelajaran, dapat diperoleh hal-hal berikut ini.

1. Siswa mengkontruksi sendiri pengetahuan dan pemahaman mereka, dengan kata lain kita tidak dapat mentransfer ide kepada siswa yang pasif.
2. Pengetahuan dan pemahaman memiliki sifat yang unik bagi setiap siswa.

3. Pembelajaran supaya efektif, penting dimulai dengan ide-ide yang telah dimiliki oleh siswa sehingga dapat menstimulasi, menantang, dan melibatkan siswa untuk berpikir.
4. Lingkungan sosial budaya dari sebuah komunitas belajar matematika berinteraksi dengan ide matematika awal siswa dan sekaligus meningkatkan perkembangan ide matematika tersebut.
5. Siswa belajar matematika adalah hasil dari proses pemecahan masalah, sehingga ide-ide matematika adalah hasil dari pengalaman memecahkan masalah dan bukan bagian yang harus diajarkan sebelum penyelesaian soal atau memecahakan masalah.
6. Model-model untuk ide-ide matematika membantu siswa dalam mengungkap, mendiskusikan, dan mungkin untuk mengkritisi ide-ide matematika.
7. Pengajaran yang efektif merupakan kegiatan yang terpusat pada siswa (*student center*).

Dengan demikian dalam upaya mencapai keberhasilan siswa belajar matematika, sudah semestinya tujuh hal yang disebutkan di atas untuk dipertimbangkan atau bahkan dijadikan rambu-rambu dalam menyusun bahan ajar dan rencana pembelajaran/skenario pembelajaran matematika.

3. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis dan Pembelajaran Berbasis Masalah

Berkaitan dengan kemampuan pemecahan masalah matematis, di dalam Prinsip-prinsip dan Standar dari NCTM tahun 2000 (Walle, 2007, h. 5) dinyatakan bahwa ada empat indikator dari pemecahan masalah matematis, yaitu: 1) siswa membangun pengetahuan matematis baru melalui pemecahan masalah; 2) siswa menyelesaikan masalah yang muncul dalam matematika dan dalam bidang lain; 3) siswa menerapkan dan menyesuaikan berbagai macam strategi yang cocok untuk memecahkan masalah; dan 4) siswa mengamati dan mengembangkan proses pemecahan masalah matematis. Selain itu menurut NCTM (2000) bahwa pemecahan masalah melibatkan konteks yang bervariasi yang berasal dari penghubungan masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari untuk situasi matematika yang ditimbulkan.

Dengan demikian, kemampuan pemecahan masalah adalah komponen penting untuk belajar matematika di masa sekarang dan mendatang. Dengan kemampuan

pemecahan masalah, siswa akan membangun dan sekaligus memilikinya kemampuan dasar yang lebih bermakna dari sekadar kemampuan berpikir, terlebih dengan mengaitkannya pada bidang lain, kemudian siswa dapat membuat strategi-strategi penyelesaian untuk masalah-masalah selanjutnya yang dipandang lebih efektif. Selain itu, dalam hal ini siswa didorong supaya berpikir bahwa sesuatu itu multidimensi sehingga mereka dapat melihat banyak kemungkinan penyelesaian untuk suatu masalah dengan ketajaman pengamatan, analisis yang lebih baik serta pengembangan proses pemecahan masalah itu sendiri.

Selama hampir dua dekade sejak penerbitan dokumen asli Standar NCTM pada tahun 1989, bukti-bukti yang menyatakan bahwa pemecahan masalah merupakan sarana yang diduga kuat efektif untuk belajar matematika. NCTM (Walle, 2007, hal. 38) menyebutkan bahwa

> Pemecahan masalah merupakan bagian yang tak terpisahkan dari semua proses belajar matematika, sehingga seharusnya tidak dijadikan sebagai bagian yang terpisah dari program pengajaran matematika. Pemecahan masalah dalam matematika harus mencakup kelima wilayah materi yang digambarkan di dalam Standar ini … . Masalah yang baik akan menggabungkan beberapa topik dan meliputi matematika yang penting.

Jadi, para siswa memecahkan masalah bukan untuk menerapkan matematika, tetapi untuk belajar matematika yang baru. Saat siswa melibatkan diri dalam tugas-tugas berbasis masalah yang dipilih dengan baik dan memfokuskan pada metode-metode penyelesaiannya, maka yang menjadi hasilnya adalah pemahaman baru tentang matematika yang tersisipkan di dalam masalah tersebut. Ketika siswa sedang aktif mencari hubungan, menganalisis pola, menemukan metode mana yang sesuai atau tidak sesuai, menguji hasil, atau menilai dan mengkritisi pemikiran temannya, maka mereka secara optimal sedang melibatkan diri dalam berpikir tentang ide-ide yang terkait.

Pembelajaran berbasis masalah (*Problem-Based Learning*) adalah suatu pembelajaran yang di awali dengan menghadapkan siswa pada suatu masalah (Savery dan Duffy, 1995, h. 8). PBM lebih menekankan pada pemecahan masalah autentik seperti masalah yang tejadi dalam kehidupan sehari-hari (Santrock, 2007, h. 374). Dalam konteks pembelajaran matematika Shoenfeld dan Boaler (Roh, 2003, h. 1) menyatakan bahwa PBM adalah suatu strategi pembelajaran matematika di dalam kelas dengan aktivitas memecahkan masalah serta memberikan peluang lebih banyak pada siswa untuk berpikir kritis, kreatif, dan berkomunikasi matematis dengan teman

sebayanya. Dengan bekal pengetahuan, kemampuan, dan pengalaman yang dimilikinya, dalam PBM siswa dituntut untuk menyelesaikan masalah yang sengaja diberikan oleh guru.

Melalui PBM ini siswa diharapkan akan berfokus pada kegiatan memecahkan masalah. Dalam kegiatan memecahkan masalah tersebut siswa memiliki kesempatan yang luas untuk dapat bertukar ide atau pendapat dengan siswa lainnya sehingga memperoleh pemahaman baru tentang matematika yang disisipkan dalam masalah tersebut. Kemudian dalam kegiatan memecahkan masalah tersebut siswa memiliki kesempatan yang luas untuk dapat mencari hubungan, menganalisis pola, menemukan metode mana yang sesuai atau tidak sesuai, menguji hasil, menilai dan mengkritisi pemikiran temannya sehingga secara optimal mereka melibatkan diri dalam proses pembelajaran matematika. Dengan demikian, jelaslah bahwa melalui PBM, siswa dikondisikan untuk membangun pengetahuan matematis baru, siswa dikondisikan untuk mencari, menemukan, dan mengaplikasikan dalam kaitannya dengan materi lain di dalam matematikan maupun dalam bidang lain, siswa dikondisikan untuk mencari dan menemukan berbagai cara alternatif untuk mendapatkan solusi serta menentukan cara yang paling efektif untuk menyelesaikan masalah, siswa dikondisikan untuk mengamati, mengkritisi, dan mengembangakan proses penyelesaian masalah. Hal-hal tersebut merupakan ciri dari kemampuan pemecahan masalah matematis.

4. Faktor-faktor yang Perlu Diperhatikan dalam Upaya Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa

Herman (2006, h. 8) menyatakan bahwa kegiatan dalam pembelajaran berbasis masalah menuntut siswa untuk menggunakan potensinya secara optimal. Sementara itu, untuk menciptakan proses pembelajaran dengan penggunaan potensi siswa secara optimal, Suryadi, 2005; Herman, 2006; Saragih, 2007 menyatakan bahwa faktor kemampuan matematika siap pakai atau kemampuan matematika sebelumnya yang dimiliki siswa perlu menjadi perhatian. Hal ini disebabkan oleh adanya hubungan antara intervensi yang harus dipersiapkan guru dengan materi prasyarat serta pengetahuan matematika siap pakai tersebut yang dapat menunjang proses pemahaman materi yang disajikan. Karena kemampuan matematika siap pakai siswa dalam suatu kelas pasti beragam, maka perlakuan yang diterapkan dalam suatu proses pembelajaran ada

kemungkinan berdampak terhadap respon, cara berpikir serta hasil belajar mereka. Dengan demikian dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa, perlu kiranya diperhatikan mengenai kemampuan siswa yang tergolong pada kelompok atas, sedang, dan bawah, pada sebelum proses, sedang proses, dan setelah proses pembejaran.

Dalam rangka menciptakan proses pembelajaran yang optimal, faktor peringkat atau kualifikasi sekolah perlu menjadi perhatian dan pertimbangan, karena kenyataannya peringkat sekolah berkaitan erat dengan kemampuan matematis siswa secara umum. Selain itu pertimbangan atas peringkat sekolah ini dapat dipahami juga, karena untuk menciptakan proses pembelajaran yang berpusat pada siswa dengan hasil yang optimal maka latar belakang siswa mesti menjadi perhatian guru guna mempersiapkan atau mengantasipasi respon yang berbeda. Hal ini dapat dilihat dari beberapa laporan hasil penelitian di tingkat sekolah menengah maupun perguruan tinnggi, seperti laporan hasil penelitian Suryadi, 2005; Herman, 2006; yang menyatakan bahwa peringkat sekolah/perguruan tinggi berpengaruh secara signifikan terhadap peningkatan kemampuan matematis siswa/mahasiswa.

Eisenberg, Martin, dan Fabes (Santrock, 2007, h. 198) menyatakan bahwa dalam beberapa penelitian, kemampuan dalam matematika siswa laki-laki lebih baik dibandingkan dengan kemampuan dalam matematika siswa perempuan. Hal ini diperkuat seperti yang diungkapkan Santrock (2007, h. 199) bahwa banyak para pakar gender percaya perbedaan kemampuan dalam matematika antara siswa laki-laki dan perempuan disebabkan oleh perbedaan pengalaman, sikap, minat, dan bakat terhadap matematika. Sementara itu, Leder (Suryadi, h. 11) menyatakan bahwa perbedaan perilaku, cara berpikir, dan sikap antara siswa laki-laki dan perempuan memberikan pengaruh yang berbeda terhadap hasil belajarnya. Dengan demikian, dalam rangka menciptakan proses pembelajaran yang optimal maka faktor perbedaan gender perlu menjadi perhatian dan pertimbangan.

Santrock (2007, h. 546) menyatakan bahwa kecemasan murid bertambah pada saat menghadapi tes. Hal ini diperkuat oleh Hasan (2007, h. 1) yang mengungkapkan bahwa ada sebuah penelitian yang dilakukan oleh Hill tahun 1980 yang melibatkan 10.000 ribu siswa sekolah dasar dan menengah di Amerika yang menunjukkan bahwa sebagian besar siswa yang mengikuti tes gagal menunjukkan kemampuan mereka yang

sebenarnya disebabkan oleh situasi dan suasana tes yang membuat mereka cemas. Ini menunjukkan bahwa faktor tingkat kecemasan siswa dalam menghadapi tes dapat memberikan pengaruh terhadap hasil tes itu sendiri. Dengan demikian, dalam rangka menciptakan proses pembelajaran yang optimal maka faktor tingkat kecemasan siswa dalam melakukan tes perlu menjadi perhatian dan pertimbangan.

.

C. Simpulan

Berdasarkan hasil diskusi atau pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Pembelajaran matematika yang mungkin untuk diadaptasi dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa adalah pembelajaran matematika dengan menyajikan masalah pada awal pembelajaran sebagai salah satu stimulus atau kendaraan proses belajar siswa untuk berpikir dan mencapai tujuannya. Alternatif pembelajaran itu disebut pembelajaran berbasis masalah (PBM).
2. Faktor-faktor yang dianggap penting untuk diperhatikan dalam pembelajaran matematika dalam upaya meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa adalah faktor kemampuan awal, kualifikasi sekolah, perbedaan gender, dan tingkat kecemasan, karena faktor-faktor ini diduga kuat ikut berinteraksi.

D. Saran

Berdasarkan hasil simpulan di atas, maka dapat diajukan saran-saran sebagai berikut.

1. Pembelajaran berbasis masalah dapat dijadikan sebagai alternatif pembelajaran matematika untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa sekolah menengah atas.
2. Faktor kemampuan awal, kualifikasi sekolah, perbedaan gender, dan tingkat kecemasan perlu diperhatikan oleh guru dalam mengemas bahan ajar dan rencana pembelajaran atau skenario pembelajaran.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, J. (2005). *Implementing problem solving in mathematics classrooms: what support do teachers want?*. [Online]. Tersedia: http://www.google.co.id/search=problem+solving+in+mathematics+education&hl=id&start=120&sa=N. [3 Januari 2008]

Crain, W. (2007). *Teori perkembangan*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Depdiknas (2006). *Kurikulum tingkat satuan pendidikan.* Jakarta: Depdiknas.

Hasan, C. D. (2007). *Test anxiety: sisi lain dari UN*. [Online]. Tesedia: http://www.e-psikologi.com/remaja/250602.htm. [5 Januari 2007]

Herman, T. (2006). *Pembelajaran berbasis masalah untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematika tingkat tinggi siswa sekolah menengah pertama*. Disertasi pada PPS UPI. Bandung: Tidak Dipublikasikan.

NCTM (2000). *Defining problem solving*. [Online]. Tersedia: http://www.learner.org/channel/courses/teachingmath/gradesk_2/session_03/sectio_03_a.html. [18 Nepember 2007].

Olson, S. (2005). *Count down*. Jakarta: Banana Publisher.

Roh, K. H. (2003). *Problem-based learning in mathematics*. Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. [Online]. Tersedia: http://www.ericdigest.org/2004-3/math.html.

Santrock, W. J. (2007). *Educational psychology*. Texas: McGraw-Hill Company.

Saragih, S. (2007). *Mengembangkan kemampuan berpikir logis dan komunikasi matematik siswa sekolah menengah pertama melalui pendekatan matematika realistik.* Disertasi Doktor PPS UPI. Bandung: PPS UPI.

Savery, J. R. dan Duffy, T. M. (1995). Contructivist learning environments: case studies in instructional design. Dalam B.G. Wilson (ed). *PBL: An instructional model and is constructivist framework.* Englwood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Suryadi, D. (2005). *Penggunaan pendekatan pembelajaran tidak langsung serta pendekatan gabungan langsung dan tidak langsung dalam rangka meningkatkan kemampuan berpikir matematik tingkat tinggi siswa SLTP*. Disertasi Doktor PPS UPI. Bandung: PPs UPI.

Uno, B. H. (2008). *Model pembelajaran*. Jakarta: Bumi Aksara.

Wahyudin (2003). *Peranan problem solving.* Makalah Seminar Technical Cooperation Project for Development of Mathematics and Science for Primary and Secondary Education in Indonesi*a*. 25 Agustus 2003.

Walle, V. A. J. (2007). *Elementary and middle school mathematics*. Singapore: Pearson Education.

Strategi Pembelajaran Kolaboratif Berbasis Masalah

Oleh
Djamilah Bondan Widjajanti
Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY
Dj_bondan@yahoo.com

Abstrak

Guru atau dosen berkewajiban untuk menjamin hak setiap siswa atau mahasiswa untuk memperoleh pembelajaran yang bermakna. Untuk dapat menjamin hak setiap siswa/mahasiswa tersebut, guru/dosen perlu merancang dan melaksanakan pembelajaran yang dapat mengatasi masalah sebagai akibat keheterogenan siswa/mahasiswa yang ada. Untuk guru/dosen matematika, salah satu solusinya adalah dengan melaksanakan pembelajaran dalam kelompok kecil, menggunakan strategi pembelajaran kolaboratif berbasis masalah. Ide pembelajaran kolaboratif berpangkal pada pendapat dari Sato (2007) yaitu bahwa pembelajaran haruslah "**melampaui batas dan melompat**" melalui kolaborasi.

Landasan teoritis untuk strategi pembelajaran kolaboratif berbasis masalah adalah teori konstruktivisme, khususnya teori konstruktivisme sosial dari Vygotsky, terutama pada konsep tentang ZPD, dan dipadu dengan konsep *scaffolding* dari Bruner, yang menekankan pentingnya interaksi sosial untuk membantu siswa memperoleh tingkat pemahaman yang lebih tinggi. Belajar "melampaui batas dan melompat" dengan bantuan teman dan guru, adalah konsep ZPD dan *scaffolding*.

Strategi pembelajaran kolaboratif berbasis masalah, mempunyai karakteristik: (1) Pembelajaran dipandu oleh masalah yang menantang, (2) Sebelum para siswa/mahasiswa belajar dalam kelompok, mereka diberi kesempatan untuk mengidentifikasi masalah yang diberikan oleh guru/dosen dan merancang strategi penyelesaiannya beberapa saat secara mandiri, kemudian dipersilahkan belajar dalam kelompok (4 -6 orang) untuk mengklarifikasi pemahaman mereka, mengkritisi ide/gagasan teman dalam kelompoknya, membuat konjektur, memilih strategi penyelesaian, dan menyelesaikan masalah yang diberikan, dengan cara saling bertanya dan beradu argumen, (3) Setelah belajar dalam kelompok, siswa/mahasiswa menyelesaikan masalah yang diberikan guru/dosen secara individual, (4) Guru/dosen mengambil peran sebagai fasilitator, yang berkewajiban memfasilitasi jalannya diskusi kelompok dengan memberi pertanyaan pancingan untuk menghidupkan kolaborasi, (5) Beberapa siswa/mahasiswa yang diberi kesempatan mempresentasikan penyelesaian masalahnya di depan kelas tidak dalam peran mewakili kelompok.

Kata kunci: *pembelajaran, kolaboratif, berbasis masalah*

Pendahuluan

Bermula dari kelas-kelas yang pada umumnya heterogen, maka melaksanakan pembelajaran atau perkuliahan pada kelas yang demikian merupakan suatu tantangan bagi setiap guru atau dosen. Tantangan terberat adalah bagaimana guru/dosen dapat merancang dan melaksanakan pembelajaran/perkuliahan yang menjamin hak setiap siswa/mahasiswa untuk memperoleh pembelajaran yang bermakna. Ini bukan sesuatu yang mudah bagi para guru/dosen. Dikaitkan dengan pendekatan pembelajaran yang saat ini banyak direkomendasikan para pakar pendidikan matematika, yaitu pembelajaran berbasis masalah (PBL), maka pemilihan masalah yang akan digunakan untuk memandu proses pembelajaran sudah merupakan kendala tersendiri, karena suatu soal atau masalah yang sukar untuk kelompok siswa/mahasiswa tertentu bisa jadi bukan merupakan masalah untuk kelompok siswa/mahasiswa yang lain.

Mengatasi keheterogenan siswa atau mahasiswa dalam berbagai aspek, khususnya aspek motivasi dan tingkat intelektual, maka melaksanakan pembelajaran atau perkuliahan dimana siswa atau mahasiswa belajar dalam kelompok-kelompok kecil dapat merupakan salah satu solusi. Namun, pertanyaan yang kemudian muncul adalah: bagaimana kelompok-kelompok tersebut harus dibentuk, bagaimana para siswa atau mahasiswa harus belajar dalam kelompoknya, bagaimana materi atau tugas harus diberikan, bagaimana cara setiap siswa atau mahasiswa mengambil peran dalam kelompoknya, dan bagaimana guru atau dosen melibatkan diri dalam kelompok, sedemikian hingga setiap siswa atau mahasiswa dapat dijamin haknya untuk memperoleh pembelajaran yang bermakna?.

Pembelajaran Kolaboratif

Sato (2007) menawarkan suatu model pembelajaran sebagai solusi, yang ia sebut dengan pembelajaran kolaboratif. Menurutnya, pembelajaran haruslah "**melampaui batas dan melompat**" melalui kolaborasi. Untuk mencapai target pembelajaran yang lebih tinggi, dan juga untuk memberi kesempatan bagi setiap siswa untuk belajar secara mendalam, terdapat satu kunci yang penting: siswa berlatih mengajukan pertanyaan pada teman, "Bagaimana saya bisa memecahkan masalah ini?". Untuk dapat menciptakan keadaan yang membuat seorang siswa perlu bertanya kepada siswa lainnya, tingkat materi pelajaran (masalah) yang diberikan haruslah lebih tinggi dari biasanya. Makin mudah masalahnya menjadikan makin jarang siswa yang bertanya

kepada temannya. Untuk mereka yang berada pada kelompok bawah (kemampuan dibawah rata-rata kelas), jika mereka tidak dapat menyelesaikan soal/masalah yang dianggap mudah untuk kelompok atau siswa lain, mereka akan lebih cenderung untuk berusaha memecahkan masalah dan menghadapi kesulitannya tanpa bantuan orang lain. Kalau mereka gagal, maka mereka akan selalu tersisih dari yang lain, dan semakin tertinggal di belakang.

Pembelajaran kolaboratif menurut Sato adalah pembelajaran yang dilaksanakan dalam kelompok, namun tujuannya bukan untuk mencapai kesatuan yang didapat melalui kegiatan kelompok, namun, para siswa dalam kelompok didorong untuk menemukan beragam pendapat atau pemikiran yang dikeluarkan oleh tiap individu dalam kelompok. Pembelajaran tidak terjadi dalam kesatuan, namun pembelajaran merupakan hasil dari keragaman atau perbedaan (Sato, 2007).

Beberapa penulis menyebutkan pengertian tentang pembelajaran kolaboratif yang senada dengan pengertian pembelajaran kolaboratif dari Sato. Gerlach yang dikutip oleh Dennen (2000) menyatakan bahwa "*Collaborative learning is a process that involves interaction among individuals in a learning situation. It is rooted in a theory of learning the focuses on social interaction as a way to building knowledge*". Pengertian pembelajaran kolaboratif yang demikian menekankan pentingnya interaksi sosial antar individu dalam kelompok untuk membangun pemahaman atau pengetahuan setiap anggota kelompok, senada dengan pendapat Sato dalam hal pentingnya setiap individu dalam kelompok mengajukan pertanyaan kepada temannya..

Pada dasarnya pembelajaran kolaboratif merujuk pada suatu metoda pembelajaran dimana siswa dari tingkat performa yang berbeda bekerja bersama dalam suatu kelompok kecil. Setiap siswa bertanggung jawab terhadap pembelajaran siswa yang lain, sehingga kesuksesan seorang siswa dapat membantu siswa lain untuk menjadi sukses. Gokhale (1995) menyebutkan bahwa "*collaborative learning fosters development of critical thinking through discussion, clarification of ideas, and evaluation of other's ideas*". Wiersema (2000) juga menyatakan hal yang senada, yaitu bahwa "*Collaborative Lerning is philosophy: working together, building together, learning together, changing together, improving together*". Sedangkan Lang & Evans (2006) menyatakan bahwa "*Collaborative learning is an approach to teaching and*

learning in which student interact to share ideas, explore a question, and complete a project".

Dari beberapa pengertian tersebut di atas dapatlah disimpulkan bahwa model pembelajaran kolaboratif adalah suatu model pembelajaran kelompok, dimana para siswa dalam kelompok didorong untuk saling berinteraksi dan belajar bersama untuk meningkatkan pemahaman masing-masing. Alat yang digunakan untuk mendorong adanya interaksi tersebut adalah materi atau masalah yang menantang. Bentuk interaksi yang dimaksud adalah diskusi, saling bertanya dan menyampaikan pendapat atau argumen.

Meskipun apa yang dikemukakan Sato tentang pembelajaran kolaboratif di atas lebih dimaksudkan untuk para siswa, namun memperhatikan satu hal yang sama antara kelas di pendidikan dasar dan menengah dengan kelas di perguruan tinggi, yaitu heterogenitas siswa atau mahasiswa dalam suatu kelas, maka model pembelajaran kolaboratif yang demikian dipandang tetap sesuai untuk diimplementasikan di pergururuan tinggi.

Landasan Teoritik

Jika dicermati beberapa pengertian pembelajaran kolaboratif sebagaimana tersebut diatas, maka ada kalimat kunci yang terkandung di dalamnya, yaitu pentingnya interaksi diantara para siswa/mahasiswa dalam kelompok untuk meningkatkan pemahaman masing-masing. Ini berarti bahwa pada prinsipnya pembelajaran kolaboratif didasarkan pada filsafat konstruktivisme, khususnya konstruktivisme sosial dari Vygotsky, yaitu bahwa interaksi sosial memainkan peranan penting dalam perkembangan kognitif anak. Interaksi sosial dengan orang yang ada disekitar anak akan membangun ide baru dan mempercepat perkembangan intelektualnya. Dalam penelitiannya, Vygotsky lebih memfokuskan perhatian pada hubungan dialektika antara individu dan masyarakat, dimana interaksi sosial dapat mempengaruhi hasil belajar (Suparno, 1997). Secara umum, teori Vygotsky berfokus pada interaksi sosial pada tiga faktor, yakni budaya (*culture*), bahasa (*language*), dan *zone of proximal development* (Oakley, 2004).

Menurut Vygotsky, siswa mempunyai dua tingkat perkembangan, yaitu tingkat perkembangan aktual dan tingkat perkembangan potensial. Tingkat perkembangan aktual didefinisikan sebagai pemfungsian intelektual individu saat ini dan kemampuan

untuk belajar sesuatu yang khusus atas kemampuannya sendiri. Tingkat perkembangan potensial didefinisikan sebagai tingkat seseorang individu dapat memfungsikan atau mencapai tingkat itu dengan bantuan orang lain, seperti guru, orang tua, atau teman sejawat yang kemampuannya lebih tinggi. Zona antara tingkat perkembangan aktual dan tingkat perkembangan potensial itulah yang disebut dengan zona perkembangan terdekat atau ZPD (Ibrahim dan Nur, 2000; Oakley, 2004). *Zone of Proximal Development* (ZPD) diartikan sebagai jarak antara peringkat perkembangan sebenarnya yang ditentukan oleh "*problem solving*" yang perlu dilakukan secara mandiri dan peringkat perkembangan yang berpotensi yang ditentukan di bawah bantuan orang dewasa atau sewaktu bekerja sama dengan rekan sebaya yang lebih berpengetahuan/paham, melalui "*problem solving*", sebagaimana disebutkan oleh Vygotsky dalam bukunya yang berjudul *Mind in Society* (Vygotsky, 1978), bahwa

> "*… the zone of proximal development …. is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers*."

Teori tentang ZPD dari Vygotsky ini bermakna bahwa pembelajaran terjadi melalui interaksi sosial dengan bantuan guru atau teman sejawat. Melalui tantangan dan bantuan dari guru atau dari teman yang lebih mampu, siswa bergerak ke dalam ZPD mereka dimana pembelajaran terjadi.

Pengembangan dari konsep ZPD Vygotsky ini adalah konsep *scaffolding* dari Bruner. Dengan teorinya tentang belajar penemuan, Bruner menekannya pentingnya membantu siswa memahami struktur dan ide kunci dari suatu disiplin ilmu, perlunya siswa terlibat secara aktif dalam proses pembelajaran, dan perlunya suatu keyakinan bahwa pembelajaran dapat terjadi melalui penemuan pribadi. *Scaffolding* dapat diartikan sebagai suatu proses di mana seorang siswa dibantu menuntaskan masalah tertentu melampaui kapasitas perkembangannya melalui bantuan (*scaffolding*) dari seorang guru, atau orang lain yang lebih mampu (Ibrahim dan Nur, 2000). Konsep tentang "melampaui kapasitas perkembangannya" ini mirip dengan konsep "melampaui batas dan melompat" dari Sato.

Dari uraian tentang konsep ZPD dan *scaffolding* tersebut di atas, jelaslah bahwa dasar teoritik dari model pembelajaran kolaboratif adalah teori konstruktivisme,

khususnya teori konstruktivisme sosial dari Vygotsky, terutama pada konsep tentang ZPD, dan dipadu dengan konsep *scaffolding* dari Bruner, yang menekankan pentingnya interaksi sosial untuk membantu siswa memperoleh tingkat pemahaman yang lebih tinggi. Belajar " melampaui batas dan melompat" dengan bantuan teman dan guru, adalah konsep ZPD dan *scaffolding*.

Kooperatif vs Kolaboratif

Terdapat cukup banyak persamaan diantara model pembelajaran kooperatif dan kolaboratif, namun demikian terdapat juga beberapa perbedaan yang mendasar. Menurut Choy (1999) keduanya sering dikaitkan dengan pembelajaran aktif, konstruktivisme, pembelajaran kontekstual, dan pembelajaran sosial.

Menurut John Myres, yang dikutip oleh Ted Panitz (1996), pembelajaran kooperatif berasal dari Amerika dari tulisan philosofi John Dewey yang menekankan sifat dasar sosial dari pembelajaran, sedangkan pembelajaran kolaboratif berasal dari Inggris, berdasarkan model kerja dari guru-guru Inggris dalam mengeksplorasi cara untuk membantu siswa merespon terhadap tugas kepustakaan, dengan memberi lebih banyak peran dalam belajar mereka sendiri.

Pendapat Matthews, *et. al*., yang dikutip Choy (1999) menyebutkan perbedaan antara pembelajaran kooperatif dan kolaboratif antara lain terdapat dalam: (a) Gaya, fungsi, dan derajat pelibatan pengajar, (b) Isu hubungan wewenang (hak dan kewajiban) antara pengajar dan pelajar, (c) Sejauh mana pelajar perlu dilatih untuk bekerja dalam kelompok, (d) Bagaimana pengetahuan dibangun (dibina) dan diasimilasikan, (e) Isu-isu implementasi yang lain, seperti pembentukan kelompok, pemberian tugas, akuntabilitas individu dan kelompok, dan penilaian yang tepat. Sedangkan Menurur Panitz (1996) "Kolaborasi adalah falsafah dari interaksi dan gaya hidup perorangan/pribadi sedangkan kooperasi adalah struktur dari interaksi yang dirancang untuk memfasilitasi penyelesaian pencapaian hasil akhir atau suatu tujuan tertentu."

Beberapa penulis menyebutkan bahwa pembelajaran kooperatif merupakan salah satu aspek dalam pembelajaran kolaboratif, sebagaimana Lang & Evans (2006), menyatakan bahwa "*the term of collaborative learning is an umbrella term that included various interactive approach and methods for group work. Cooperative learning is an aspek of collaborative learning that takes a very specialist approach to group work*". Demikian juga Wiersema. (2000) juga menganggap bahwa kolaborasi

lebih dari kooperasi. Menurutnya: … *that co-operation is technique to finish a certain product together: the faster, the better, the less work for each, the better. Collaboration refers to the whole process of learning, to students teaching each other, students teaching the teacher (why not?) and of course the teacher teaching the students to*o.

Sato (2007) menyebutkan pembelajaran kolaboratif berbeda dari pembelajaran kooperatif. Perbedaan terbesar antara pembelajaran kolaboratif dan pembelajaran kooperatif adalah sebagai berikut; pembelajaran kooperatif berfokus pada kesatuan dalam kelompok, sedang pembelajaran kolaboratif, unit yang ditekankan adalah pada setiap individu. Tujuan dari kegiatan kelompok adalah bukan untuk mencapai kesatuan yang didapat melalui kegiatan kelompok, namun, para siswa dalam kelompok didorong untuk menemukan beragam pendapat atau pemikiran yang dikeluarkan oleh setiap individu dalam kelompok. Dalam melaksanakan pembelajaran kolaboratif dalam kelompok kecil, guru tidak boleh berusaha untuk menyatukan pendapat dan ide para siswa dalam kelompok kecil tersebut, serta tidak boleh meminta mereka untuk menyatakan pendapat mereka sebagai perwakilan pendapat dari kelompok, seperti yang dilakukan dalam pembelajaran kooperatif.

Memperhatikan beberapa pandangan tentang kedua model pembelajaran, dapatlah disimpulkan bahwa pada intinya perbedaan tersebut terletak pada cara kerja dalam kelompok, dimana didalam model pembelajaran kooperatif aktivitas kelompok lebih terstruktur dan setiap siswa memainkan peranan spesifik dengan tujuan menyelesaikan tugas kelompok, sedangkan dalam model pembelajaran kolaboratif aktifitas siswa dalam kelompok adalah belajar bersama untuk mendapatkan dan meningkatkan pemahaman masing-masing.

Model pembelajaran kolaboratif dan kooperatif sering digunakan dalam perkuliahan di perguruan tinggi, karena kedua model pembelajaran ini sangat memungkinkan terjadinya komunikasi matematis antar mahasiswa atau kelompok mahasiswa, sehingga diharapkan dapat menjembatani keheterogenan, meningkatkan kemampuan penalaran, kemampuan pemecahan masalah, dan ketrampilan berfikir kritis mahasiswa.

Strategi Pembelajaran Kolaboratif Berbasis Masalah

Seperti halnya dengan berbagai jenis model pembelajaran atau perkuliahan kooperatif, seperti Student Teams Achievement Divisions (STAD), Jigsaw, Teams

Games Tournaments (TGT), Team Accelerated Instructions (TAI), Grup Investigation (GI), dan lain-lain, pada dasarnya pada pembelajaran kolaboratifpun dimulai dengan pemberian masalah kepada siswa/mahasiswa untuk diselesaikan, dimana masalah yang diberikan sudah dipilih sedemikian hingga akan dapat "membimbing" dan menantang siswa/mahasiswa untuk menemukan definisi/aturan/prinsip/konsep/rumus/algoritma, atau meningkatkan pemahaman, penalaran, komunikasi, koneksi, representasi, dan juga kemampuan pemecahan masalah.

Setelah setiap siswa/mahasiswa mendapatkan kesempatan beberapa saat untuk mengidentifikasi masalah dan merencanakan strategi penyelesaiannya secara individual/mandiri, siswa/mahasiswa kemudian diminta untuk belajar dalam kelompok kecil (4 – 6 orang). Hanya saja, ketika siswa/mahasiswa membuat kelompok dan belajar dalam kelompoknya, guru/dosen tidak perlu terlalu mengatur atau terlalu ikut campur atas peran mereka dalam kelompok (berbeda sekali dengan pembelajaran kooperatif jenis Jigsaw atau TGT, misalnya). Guru/dosen hanya akan memfasilitasi jalannya diskusi kelompok dengan memberikan pertanyaan pancingan atau mendorong siswa/mahasiswa dalam kelompok untuk menyampaikan ide/gagasannya, saling bertanya, menjawab pertanyaan, dan beradu argumen. Demikian juga ketika siswa/mahasiswa diminta untuk mempresentasikan penyelesaikan masalah yang didapatkannya, maka ia tidak dalam peran mewakili kelompok, tetapi menyampaikan hasil belajarnya sendiri, yang mungkin saja sebagian besar diantaranya ia dapatkan dari diskusi di dalam kelompoknya. Dengan model yang demikian, maka dapat diharapkan masing-masing siswa/mahasiswa akan berupaya lebih keras untuk belajar "sesuatu" dalam kelompoknya agar dapat menyelesaikan masalah yang diberikan oleh guru/dosen.

Memperhatikan bagaimana tingkat masalah yang harus diberikan kepada para siswa/mahasiswa agar memunculkan kolaborasi diantara mereka, sedemikian hingga siswa/mahasiswa yang heterogen (terdiri dari kelompok tinggi, sedang, dan rendah dalam motivasi dan kemampuan intelektual) ini dapat saling bertukar berbagai pertanyaan atau pendapat sehingga terwujud pembelajaran yang "melampaui batas dan melompat", maka model kolaborasi yang demikian sangatlah cocok dikombinasikan dengan pendekatan pembelajaran berbasis masalah dan dapat dinamakan strategi pembelajaran kolaboratif berbasis masalah.

Strategi pembelajaran kolaboratif yang berbasis masalah sangat cocok digunakan untuk meningkatkan kemampuan berfikir kritis, kemampuan pemecahan masalah dan kemampuan komunikasi matematis siswa/mahasiswa dikarenakan:

(1) Dalam PBL, basis dari perkuliahan adalah masalah, dan siswa/mahasiswa belajar dalam kelompok-kelompok kecil untuk memecahkan masalah. Dalam proses menyelesaikan masalah yang diberikan oleh guru/dosen, para siswa/mahasiswa akan mengklarifikasi pemahaman mereka, mengkritisi ide/gagasan teman dalam kelompoknya, membuat konjektur, memilih strategi penyelesaian, dan menyelesaikan masalah yang diberikan. Apa yang akan dilakukan siswa/mahasiswa dalam kelompoknya tersebut, akan berakibat pada meningkatnya kemampuan mahasiswa untuk berfikir kritis, menyelesaikan masalah, dan berkomunikasi secara matematis.

(2) Menggunakan strategi pembelajaran kolaboratif, mahasiswa belajar dalam kelompok kecil untuk "melampaui batas dan melompat" melalui masalah atau pertanyaan yang diberikan oleh dosen. Belajar dalam kelompok ditekankan pada terjadinya interaksi sosial melalui diskusi/dialog, saling bertanya dan memberi pendapat untuk meningkatkan pemahaman masing-masing. Interaksi yang demikian ini merupakan bagian dari cara untuk meningkatkan pemahaman, penalaran, kemampuan berfikir kritis, kemampuan pemecahan masalah, dan kemampuan komunikasi matematis.

Simpulan

Berdasarkan kajian di atas, dapatlah di simpulkan bahwa strategi pembelajaran kolaboratif berbasis masalah mempunyai karakteristik: (1) Pembelajaran dipandu oleh masalah yang menantang, (2) Sebelum para siswa/mahasiswa belajar dalam kelompok, mereka diberi kesempatan untuk mengidentifikasi masalah yang diberikan oleh guru/dosen dan merancang strategi penyelesaiannya beberapa saat secara mandiri, kemudian dipersilahkan belajar dalam kelompok (4 -6 orang) untuk mengklarifikasi pemahaman mereka, mengkritisi ide/gagasan teman dalam kelompoknya, membuat konjektur, memilih strategi penyelesaian, dan menyelesaikan masalah yang diberikan, dengan cara saling bertanya dan beradu argumen, (3) Setelah belajar dalam kelompok, siswa/mahasiswa menyelesaikan masalah yang diberikan dosen secara individual, (4) Guru/dosen mengambil peran sebagai fasilitator, yang berkewajiban memfasilitasi

jalannya diskusi kelompok dengan memberi pertanyaan pancingan untuk menghidupkan kolaborasi, (5) Beberapa mahasiswa yang diberi kesempatan mempresentasikan penyelesaian masalahnya di depan kelas tidak dalam peran mewakili kelompok.

Daftar Pustaka

Choy, Ng Kim. (1999). *Perbezaan Pembelajaran Kolaboratif & Pembelajaran Koperatif*.[online] Tersedia: http://www.teachersrock.net. [2 Agustus 2007].

Gokhale, A (1995). *Collaborative learning enhances critical thinking*. Journal of Technology Education, (7) 1. [Online]. Tersedia: http://scolar.lib.vt.edu/ejournals/ JTE/jte-v7n1/gokhale,jt-v7n1.html. [6 Mei 2008]

Ibrahim, M. & Nur, M. (2000). *Pengajaran Berdasarkan Masalah*. Surabaya: UNESA-University Press.

Lang, H. R, & Evans, D.N. (2006). *Models, Strategis, and Methods for Effective Teaching*. USA: Pearson Education, Inc.

Oakley, Lisa. 2004. *Cognitive Development.London:* Routledge-Taylor & Francis Group

Sato, Manabu (2007). *Tantangan yang Harus Dihadapi Sekolah*, makalah dalam Bacaan Rujukan untuk Lesson Study – Berdasarkan Pengalaman Jepang dan IMSTEP. Jakarta: Sisttems

Suparno, Paul (1996). *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.

Panitz, Ted. (1996). *A Definition of Collaborative vs Cooperative Learning*. [Online]. Tersedia:http://www.city.londonmet.ac.uk/deliberations/collab.learning/panitz2.html.[20 Agustus 2007]

Vygotsky , L.S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Editor: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, Ellen Souberman . Cambrigde, Massachusetts: Harvard University Press

Wiersema, N. (2000). *How Does Collaborative Learning Actually Work in A Classroom and How Do Students React to It?*.[Online]. Tersedia: http://www.city.londonmet.ac.uk/deliberations/collab.learning/wiersema.html. [11 September 2007].

Pembelajaran Matematika
dengan Pendekatan Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat
Dalam Persiapan Menghadapi UN 2009

Oleh
Kukuh Guntoro

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah: (1) untuk Untuk mewujudkan proses pembelajaran Matematika yang lebih bermakna dengan hasil prestasi siswa yang tinggi, guru harus kreatif dan inovatif dalam mengembangkan strategi pembelajaran (2) untuk mengetahui bagaimana strategi pembelajaran Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat yang merupakan pengembangan dari belajar kooperatif dapat meningkatkan hasil UN. Adapun langkah – langkah Belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat adalah sebagai berikut : (1) Menentukan siswa yang berada di level 1, level 2, level 3, dan level 4, (2) Membentuk kelompok belajar, (3) Guru memberikan materi secara keseluruhan dan memberi LKS, (4)Level 1 diberi materi dan LKS, (5) Siswa level 1 memberikan ke siswa level 2, (6) Dengan dibantu siswa level 1 dan siswa level 2 memberikan materi dan LKS ke siswa level 3, (7) Dengan dibantu siswa level 1, siswa level 2, dan siswa level 3 memberikan materi dan LKS ke siswa level 4, (8) Guru memantau dan mengevaluasi proses kegiatan pembelajaran siswa di tiap-tiap kelompok belajar, (9)Presentasi masing-masing kelompok belajar, (10) Penilaian akhir, (11)Penghargaan kelompok dan individu

PENDAHULUAN

Untuk mewujudkan proses pembelajaran Matematika yang lebih bermakna dengan hasil prestasi siswa yang tinggi, guru harus kreatif dan inovatif dalam mengembangkan strategi pembelajaran. Kegiatan pembelajaran dirancang sedemikian rupa untuk memberikan pengalaman belajar yang melibatkan proses mental dan fisik melalui interaksi antar siswa, siswa dengan guru, lingkungan dan sumber belajar lainnya dalam rangka pencapaian kompetensi dasar. Pengalaman yang dimaksud dapat terwujud melalui penggunaan strategi pembelajaran yang bervariasi dan berpusat pada siswa.

Pada pembelajaran Matematika di sekolah, sebagian besar guru masih mendominasi proses belajar dengan menerapkan pendekatan pembelajaran konvensional. Pada umumnya guru memulai pembelajaran langsung pada pemaparan materi, kemudian pemberian contoh-contoh soal dari guru, dan selanjutnya mengevaluasi siswa melalui latihan soal. Siswa menerima pelajaran Matematika secara pasif dan bahkan hanya menghafal rumus-rumus tanpa memahami makna dan manfaat

dari apa yang dipelajari. Akibatnya prestasi belajar Matematika di sekolah masih relatif rendah dan tidak mengalami peningkatan yang berarti.

Seiring diberlakukannya Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) diharapkan guru dapat meningkatkan prestasi belajar siswa khususnya pada pelajaran Matematika dengan menggunakan berbagai macam strategi pembelajaran yaitu strategi pembelajaran Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat yang merupakan pengembangan dari belajar kooperatif dengan landasan filosofinya adalah kontruktivisme.

I S I

A. *Konstruktivitas dalam pembelajaran Matematika*

Belajar adalah suatu proses aktif dimana siswa membangun pengetahuan baru berdasarkan pengalaman atau pengalaman yang sudah dimiliki.[Jerome Bruner, 1999] Selain itu proses pembangunan bisa melalui Asimilasi atau Akomodasi.[MC Mahon, 1996]

Pembelajaran Matematika dalam pandangan konstruktivis menurut Hudojo[1998] mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

1. Siswa terlibat aktif dalam belajarnya.
2. Informasi baru harus dikaitkan dengan informasi sebelumnya sehingga menyatu dengan skemata yang dimiliki siswa.

B. *Pembelajaran Kooperatif*

Dalam belajar kooperatif, siswa dibentuk dalam kelompok-kelompok yang terdiri dari 3 atau 4 anak untuk bekerjasama dalam menguasai materi yang diberikan guru.[Slavin, 1995]

Jonson [1994] menyatakan bahwa tujuan pokok belajar kooperatif adalah memaksimalkan belajar siswa untuk peningkatan prestasi akademik dan pemahaman baik secara individu maupun kelompok. Oleh sebab itu dalam belajar kooperatif siswa belajar lebih banyak dengan teman mereka dari pada dari guru.

Menurut Stahl [1994] ciri-ciri dari pembelajaran kooperatif adalah sebagai berikut:

1. belajar dari teman sendiri dalam kelompok
2. tatap muka antar teman
3. mendengarkan antar anggota
4. belajar di kelompok kecil (3 atau 4 orang)

5. produktif berbicara atau mengemukakan pendapat
6. siswa membuat keputusan sendiri
7. siswa aktif

C. ***Strategi Belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat***

Strategi belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat adalah belajar dalam kelompok kecil yang terdiri 3 atau 4 anak dengan menumbuhkan kerjasama secara maksimal melalui kegiatan pembelajaran oleh teman sendiri dengan sistim tutor sebaya yang di dalamnya untuk mencapai kompentensi dasar.

Keunggulan Strategi Belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat adalah :

1. Menyajikan pembelajaran yang aktif, kreatif, efektif, dan menyenangkan.
2. Siswa dapat mengaktualkan kemampuannya melalui perannya dalam kegiatan peer teaching.
3. Memiliki daya serap yang tinggi.
4. Guru dapat memperbaiki gaya mengajarnya.
5. Kegiatan belajar yang semula berpusat pada guru menjadi berpusat pada siswa (student center).

Adapun langkah – langkah Belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat adalah sebagai berikut :

1. Menentukan siswa yang berada di level 1, level 2, level 3, dan level 4
2. Membentuk kelompok belajar
3. Guru memberikan materi secara keseluruhan dan memberi LKS
4. Level 1 diberi materi dan LKS
5. Siswa level 1 memberikan ke siswa level 2
6. Dengan dibantu siswa level 1 dan siswa level 2 memberikan materi dan LKS ke siswa level 3
7. Dengan dibantu siswa level 1, siswa level 2, dan siswa level 3 memberikan materi dan LKS ke siswa level 4.
8. Guru memantau dan mengevaluasi proses kegiatan pembelajaran siswa di tiap-tiap kelompok belajar
9. Presentasi masing-masing kelompok belajar
10. Penilaian akhir
11. Penghargaan secara kelompok dan individu

PENUTUP

A. *Kesimpulan*

Strategi Belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat telah kami praktekkan yang hasilnya sangat cukup signifikan. Siswa sangat antusias dalam proses pembelajaran. Guru tidak terlalu ngotot dalam menjelaskan materi, dan bagi anak yang kurang pandai ternyata penjelasan dari teman lebih mudah diterima.

Akhirnya dalam upaya meningkatkan efektifitas pembelajaran Matematika di SMP dalam rangka persiapan menghadapi Ujian Nasional (UN) dapat kita rekomendasikan sebagai berikut :

1. Pembelajaran Matematika yang selama ini menggunakan metode konvensional sudah waktunya diganti dengan strategi yang memudahkan siswa untuk belajar.
2. Menciptakan lingkungan belajar yang membuat siswa nyaman atau tidak takut salah.
3. Memberikan jaminan belajar yang positif secara emosional.

B. *Saran*

Semoga makalah singkat ini bermanfaat bagi kita semua dan menjadi salah satu alternatif dalam memudahkan siswa untuk belajar dan menyukai Matematika. Salah satunya adalah dengan menggunakan Strategi Belajar Kooperatif Tutor Sebaya Bertingkat.

DAFTAR PUSTAKA

Departemen Pendidikan Nasional 2003, ***Model Pembelajaran Matematika Sekolah Dasar***.

Nyoman Sudana, ***PARADIGMA***, Pendidikan Universitas Malang

Teori *Van hiele* Dan Komunikasi Matematik (Apa, Mengapa Dan Bagaimana)

Oleh :
Hj.Epon Nur'aeni
Dosen Pendidikan Guru Sekolah Dasar (PGSD)
UPI Kampus Tasikmalaya

Abstrak

Geometri merupakan salah satu cabang matematika yang diajarkan di Sekolah Dasar. Dengan mempelajari Geometri dapat menumbuhkan kemampuan berfikir logis, mengembangkan kemampuan memecahkan masalah dan pemberian alasan serta dapat mendukung banyak topik lain dalam matematika .Kenyataan di lapangan, banyak siswa SD mengalami kesulitan dalam mempelajari dan memahami konsep dasar geometri.

Berkenaan dengan masalah tersebut ada suatu teori pembelajaran yaitu Teori *Van hiele* yang menyatakan bahwa tingkat berfikir geometri siswa secara berurutan melalui 5 tingkat, yaitu; tingkat 0 (visualisasi), tingkat 1 (analysis), tingkat 2 (informal deduction), tingkat 3 (Deduction), tingkat 4 (Rigor). Untuk membantu meningkatkan kemajuan kemampuan berfikir geometri siswa dari tingkat dasar ke tingkat berikutnya secara berurutan, yaitu hasil pembelajaran yang diorganisir ke lima tahap (yang disebut 5 tahap pembelajaran *Van hiele*). Setiap tahap pembelajaran merujuk pada kegiatan pencapaian tujuan pembelajaran dan peran guru dalam proses pembelajaran. Ke lima tahap tersebut yaitu, (l) tahap information, (2) tahap orientasi terarah(directed orientation), (3) tahap Explicitation, (4) tahap free orientation, (5) tahap integration. Masing-masing tingkat pemikiran mempunyai bahasa dan interpretasi sendiri terhadap istilah yang sama.Situasi tsb menjadi peluang mengembangkan komunikasi matematik siswa. Oleh karena itu, model pembelajaran dengan menggunakan tahap *Van hiele* merupakan salah satu alternatif pembelajaran yang dapat membantu siswa SD dalam memahami konsep dasar geometri dan mengembangkan komunikasi matematik.

Kata kunci : Teori *Van hiele*, geometri, tahap pembelajaran, pemahaman, komunikasi.

I. Pendahuluan.

Geometri merupakan salah satu cabang matematika yang juga diajarkan di Sekolah Dasar. Dengan mempelajari Geometri dapat menumbuhkan kemampuan berfikir logis, mengembangkan kemampuan memecahkan masalah dan pemberian alasan serta dapat mendukung banyak topik lain dalam matematika (Kennedy,1994:385).

Tiga alasan mengapa geometri perlu di ajarkan, menurut Usiskin(dalam Kahfi, l999:8). ***Pertama***, geometri merupakan satu-satunya ilmu yang dapat mengaitkan

matematika dengan bentuk fisik dunia nyata. ***Kedua,*** geometri satu-satunya yang memungkinkan ide-ide dari bidang matematika yang lain untuk di gambar. ***Ketiga***, geometri dapat memberikan contoh yang tidak tunggal tentang sistem matematika. Dari apa yang telah dikemukakan, tampaknya logis bagi kita bahwa peran geometri di jajaran bidang studi matematika sangat kuat. Bukan saja karena geometri mampu membina proses berpikir siswa, tapi juga sangat mendukung banyak topik lain dalam matematika. Jadi seharusnya siswa sekolah dasar khususnya memahami geometri dengan baik dan benar.

Kenyataan di lapangan, memperlihatkan bahwa diantara semua cabang matematika, hasil belajar siswa dalam geometri yang sangat memprihatinkan. Herawati (l994:110) melaporkan hasil penelitiannya bahwa masih banyak siswa sekolah dasar yang belum memahami konsep-konsep dasar geometri. Temuan Soejadi (dalam Herawati,l994:4), antara lain sebagai berikut : l) Siswa sukar mengenali dan memahami bangaun-bangun geometri terutama bangun ruang serta unsur-unsurnya, 2) Siswa sulit menyebutkan unsur unsur bangun ruang, misal siswa menyatakan bahwa pengertian rusuk bangun ruang sama dengan sisi bangun datar. Yus Irianto (l999:l07) melaporkan bahwa masih banyak siswa sekolah dasar kelas VI yang mengalami kesulitan dalam memahami konsep geometri datar.

Nur'aeni (2000:3), melaporkan bahwa masih banyak siswa kelas V sekolah dasar melakukan kesalahan dalam menentukan unsur-unsur bangun ruang kubus dan balok. Nur'aeni dkk (2002;5), melaporkan bahwa siswa kelas V masih banyak yang belum memahami konsep geometri datar segitiga dan segi empat.

Mis-konsepsi siswa dalam geometri mengarah pada sebuah 'gambaran menyedihkan' dari pemahaman geometri mereka (Clements dan Batista, 1992). Beberapa contoh mis-konsepsi tersebut adalah:

- Sebuah sudut harus memiliki satu sinar horizontal
- Sebuah sudut siku adalah sudut yang titik-titiknya siku-siku
- Sebuah persegi adalah bukan persegi jika sisi alas tidak horizontal.
- Tiap bentuk yang memiliki empat sisi adalah persegi.
- Sebuah bentuk dapat berupa sebuah segitiga hanya jika bentuk tersebut adalah sama sisi.
- Jumlah sudut segi empat adalah sama dengan luasnya

- Luas segi empat dapat diperoleh dengan mentransformasikan menjadi persegi panjang dengan ukuran yang sama.

Berkenaan dengan kesulitan siswa dalam mempelajari geometri , ada suatu teori yang berkaitan dengan pembelajaran geometri yang berkaitan dengan masalah tersebut yaitu Teori *Van hiele* (1958) yang menyatakan bahwa tingkat berfikir geometri siswa secara berurutan melalui 5 tingkat/evel, yaitu; level 0 (visualisasi), level 1(analysis), level 2 (informal deduction), level 3 (Deduction), level 4 (Rigor). Wirszup (1976) dan Hoffer (1979), tetap menggunakan lima tingkatan tersebut, namun melakukan penomoran ulang dimana level 0 menjadi level 1, level 1 menjadi level2 dan seterusnya. Pada tahun 1986, Piere *Van hiele* mulai menggunakan skala 1 – 5, dan kebanyakan peneliti menggunakan skala tersebut hingga saat ini. Tingkatan tersebut yaitu; 1.Recognition/Visualisasi 2. Analysis 3. Ordering/Deduktif Informal/Abstraksi, 4.Deduction 5. Rigor. Untuk membantu meningkatkan kemajuan kemampuan berfikir geometri siswa dari level dasar ke level berikutnya secara berurutan, yaitu hasil penbelajaran yang diorganisir ke lima tahap pembelajaran (yang disebut 5 tahap pembelajaran *Van hiele*). Setiap tahap pembelajaran merujuk pada kegiatan pencapaian tujuan pembelajaran dan peran guru dalam proses pembelajaran. Ke lima tahap tersebut yaitu, (l) tahap information, (2) tahap orientasi terarah/terbimbing (guided orientation), (3) tahap Explicitation, (4) tahap free orientation, (5) tahap integration.(Crowley, 1987:5).

Dengan penerapan tahap pembelajaran *Van hiele* diharapkan dapat membantu siswa SD khususnya dalam memahami konsep dasar geometri. Oleh karena itu, model pembelajaran dengan menggunakan tahap *Van hiele* merupakan salah satu alternatif pembelajaran untuk membantu siswa SD khususnya dalam memahami konsep dasar geometri dan kemampuan komunikasi matematik .

II. Pembahasan

2.1. Apa, Mengapa dan Bagaimana Penerapan Teori Van Hiele Dikembangkan Pada Siswa SD.

Pasangan suami istri educator Belanda, Piere *Van hiele* dan Dina *Van hiele* Geldof, memperhatikan kesulitan yang dialami siswa mereka ketika mempelajari geometri. Pengamatan ini mengarahkan mereka untuk meneliti dan selanjutnya mengembangkan

teori yang melibatkan tingkat-tingkat pemikiran dalam geometri yang dilewati siswa ketika maju dari sekadar pengenalan sebuah gambar hingga menjadi mampu menulis bukti geometrik formal. Teori mereka menjelaskan kenapa banyak siswa mengalami kesulitan dalam pelajaran geometri, terutama dengan bukti formal. *Van hiele* yakin bahwa penulisan bukti memerlukan pemikiran pada tingkat yang relatif tinggi, dan bahwa banyak siswa perlu mempunyai lebih banyak pengalaman dalam pemikiran pada tingkat-tingkat yang lebih rendah sebelum mempelajari konsep-konsep geometrik formal.

2.1.1 Apa yang dimaksud dengan tingkat-tingkat pemahaman geometrik *Van hiele*?

Ada lima tingkat yang berangkai dan hirarkhis, yakni:

a. Level 1 (Visualisasi/Recognition)*:* Siswa mengenali gambar-gambar bangun geometri melalui penampilan saja, sering melalui pembandingannya dengan prototip yang dikenal. Sifat-sifat sebuah gambar tidak dipersepsi. Pada tingkat ini, siswa membuat keputusan berdasarkan persepsi, bukan penalaran. . Misalnya, seorang siswa sudah mengenal persegi panjang dengan baik, bila ia sudah bisa menunjukkan atau memilih persegipanjang dari sekumpulan benda-benda geometri lainnya.(misalnya siswa mengenali persegipanjang karena seperti daun pintu)

b. Level 2 (Analisis): Siswa melihat gambar-gambar sebagai kumpulan sifat-sifat. Mereka dapat mengenali dan menyebut sifat-sifat suatu bangun geometri, tetapi mereka tidak melihat hubungan di antara sifat-sifat ini. Ketika menggambarkan sebuah objek, siswa yang beroperasi pada tingkat ini bisa mencantumkan semua sifat yang diketahui siswa itu, tetapi tidak melihat sifat mana yang perlu dan mana yang cukup untuk menggambarkan objek tersebut. Misalnya , siswa akan mengatakan bahwa persegi memiliki empat sisi yang sama panjang dan empat sudut siku-siku. Tetapi ia belum dapat memahami hubungan antar bangun-bangun geometri, misalnya persegi adalah persegi panjang, persegi panjang adalah jajar genjang.

c. Level 3 (Abstraksi)/Informal Deduction/Ordering)*:* Siswa mempersepsi hubungan di antara sifat-sifat dan di antara gambar-gambar. Pada tingkat ini, siswa dapat menciptakan definisi yang bermakna dan memberi argumen informal untuk membenarkan penalaran mereka. Implikasi logis dan inklusi kelas, seperti persegi

merupakan satu jenis dari persegi panjang bisa dipahami. Tetapi peran dan signifikansi dari deduksi formal tidak dipahami.

d. Level 4 (Deduksi)*:* Siswa dapat mengkonstruksi bukti, memahami peran aksioma dan definisi, dan mengetahui makna dari kondisi-kondisi yang perlu dan yang cukup. Pada tingkat ini, siswa harus mampu mengkonstruksi bukti seperti yang biasanya ditemukan dalam kelas geometri sekolah menengah atas.

e. Level 5 (Ketat/rigor)*:* Siswa pada tingkat ini memahami aspek-aspek formal dari deduksi, seperti pembentukan dan pembandingan sistem-sistem matematika. Siswa pada tingkat ini dapat memahami penggunaan bukti tak langsung dan bukti melalui kontra-positif, dan dapat memahami sistem-sistem non-Euclidean.

2.1.2 . Karakteristik Teori *van hiele*

2.1.2.1 Tingkatan tersebut bersifat rangkaian yang berurutan

2.1.2.2 Tiap tingkatan memiliki symbol dan bahasa tersendiri

2.1.2.3 Apa yang implisit pada satu tingkatan akan menjadi eksplisit pada tingkatan berikutnya

2.1.2.4 Bahan yang diajarkan pada siswa diatas tingkatan pemikiran mereka akan dianggap sebagai reduksi tingkatan

2.1.2.5 Kemajuan dari satu tingkatan ke tingkatan berikutnya lebih tergantung pada pengalaman pembelajaran; bukan pada kematangan atau usia.

2.1.2.6 Seseorang melangkah melalui berbagai tahapan dalam melalui satu tingkatan ke tingkatan beikutnya.

2.1.2.7 Pembelajar tidak dapat memiliki pemahaman pada satu tingkatan tanpa melalui tingkatan sebelumnya.

2.1.2.8 Peranan guru dan peranan bahasa dalam konstruksi pengetahuan siswa sebagai sesuatu yang krusial (Crowley, 1987:4).

2.1.3. Tahap- tahap Belajar Geometri Menurut *van hiele*.

Menurut D'Augustine dan Smith (1992: 277), Crowley (1987:5), menyatakan bahwa kemajuan tingkat berpikir geometri siswa maju dari satu tingkatan ke tingkatan berikutnya melibatkan lima tahapan atau sebagai hasil dari pengajaran yang diorganisir ke lima tahap pembelajaran. Kemajuan dari satu tingkat ke tingkat berikutnya lebih bergantung pada pengalaman pendidikan/pembelajaran ketimbang pada usia atau kematangan. Sejumlah pengalaman dapat

mempermudah (atau menghambat) kemajuan dalam satu tingkat atau ke satu tingkat yang lebih tinggi.

Tahap-tahap *van hiele* digambarkan berikut ini:

Tahap 1 ***Informasi (information)****:* Melalui diskusi,guru mengidentifikasi apa yang sudah diketahui siswa mengenai sebuah topik dan siswa menjadi berorientasi pada topik baru itu..Guru dan siswa terlibat dalam percakapan dan aktifitas mengenai objek-objek , pengamatan dilakukan, pertanyaan dimunculkan dan kosakata khusus diperkenalkan.

Tahap 2 ***Orientasi terarah/terpandu (Guided orientation)****:* Siswa menjajaki objek-objek pengajaran dalam tugas-tugas yang distrukturkan secara cermat seperti pelipatan, pengukuran, atau pengkonstruksian. Guru memastikan bahwa siswa menjajaki konsep - konsep spesifik.

Tahap3 ***Eksplisitasi (Explicitation)****:* Siswa menggambarkan apa yang telah mereka pelajari mengenai topik dengan kata-kata mereka sendiri.,guru membantu siswa dalam menggunakan kosa kata yang benar dan akurat. Guru memperkenalkan istilah-istilah matematika yang relevan.

Tahap 4 ***Orientasi bebas (Free orientation)****:* Siswa menerapkan hubungan-hubungan yang sedang mereka pelajari untuk memecahkan soal dan memeriksa tugas yang lebih terbuka (open-ended).

Tahap 5 ***Integrasi (Integration)****:* Siswa meringkas/membuat ringkasan dan mengintegrasikan apa yang telah dipelajari, dengan mengembangkan satu jaringan baru objek-objek dan relasi-relas.

2.1.4. Pemahaman Matematika

Sumarmo (2006) mengemukakan , secara umum indikator pemahaman matematika meliputi; mengenal, memahami dan menerapkan konsep, prosedur, prinsip dan idea matematika. Pemahaman konseptual dalam matematika dapat dijabarkan antara lain sebagai berikut ;

2.1.4.1. Mengenali, melabelkan, dan membuat contoh serta non contoh konsep

2.1.4.2. Mengenali, menginterpretasikan, dan menerapkan tanda, simbol dan istilah yang digunakan untuk merepresentasikan konsep

2.1.4.2. Membandingkan, membedakan, dan menghubungkan konsep dengan prinsip

2.1.4.3.Kemampuan untuk mengolah ide tentang pemahaman sebuah konsep dengan berbagai cara

2.1.4.4. Mengidentifikasi dan menerapkan prinsip-prinsip

2.1.4.5. Mengetahui dan menerapkan fakta definisi.

Pemahaman konseptual matematika tersebut di atas, khusus dalam geometri Sekolah Dasar(misalnya untuk konsep persegi dan persegi panjang) dan disesuaikan dengan tingkat berpikir siswa dapat dijabarkan sebagai berikut ;

- Mengenali bangun geometri persegi dan persegi panjang melalui tampilannya secara utuh, tidak berdasar ciri-ciri atau sifat-sifat yang dimiliki oleh bangun geometri tersebut. Misalnya siswa mengenali persegi panjang karena seperti pintu. Kemudian siswa dapat menunjukkan contoh dan bukan contoh dari persegi panjang dengan mengenali berbagai bangun geometri dalam berbagai ukuran dan berbagai warna.
- Siswa dapat merepresentasikan konsep persegi dan persegi panjang dengan cara yang berbeda, dan dengan menggunakan bahasa/ kata-kata sendiri.
- Siswa dapat membandingkan, membedakan antara konsep persegi, persegi panjang dengan yang bukan persegi dan bukan persegi panjang dengan mengidentifikasi bangun-bangun geometri dalam berbagai ukuran berdasar tampilan.
- Pemahaman Konsep Dasar Geometri yang dimaksud dalam bahasan ini adalah antara lain ;a) mengenali, melabelkan dan membuat contoh serta non contoh (konsep dasar geometri bangun datar persegi, persegi panjang dan segitiga) b) membandingkan, membedakan, dan menghubungkan konsep dengan prinsip c) mengenali, menginterpretasikan dan menerapkan tanda, simbol dan istilah yang digunakan untuk merepresentasikan konsep persegi, persegi panjang dan segitiga d) kemampuan untuk mengolah ide tentang pemahaman sebuah konsep dengan berbagai cara(memahami konsep persegi, persegi panjang dan konsep segitiga dengan tahap tahap pembelajaran *van hiele*).

2.1.5 Komunikasi Matematik

Kemampuan siswa dalam komunikasi matematik ada indikatornya. NCTM (1989 : 214) menyatakan bahwa kemampuan komunikasi matematik

siswa dalam pembelajaran dapat dilihat dari (1) Kemampuan mengekspresikan ide-ide matematika melalui lisan, tertulis dan mendemonstrasikannya serta menggambarkannya secara visual; (2) Kemampuan memahami, menginterpretasikan, dan mengevaluasi ide-ide matematika baik secara lisan, tulisan, maupun dalam bentuk visual lainnya; (3) Kemampuan dalam mengunakan istilah, notasi-notasi matematika dan struktur-strukturnya, untuk menyajikan ide-ide, menggambarkan hubungan-hubungan dan model-model situasi.

Sumarmo (2006,5) menyatakan bahwa kegiatan yang tergolong pada komunikasi matematik diantaranya adalah :

1) Menyatakan suatu situasi, gambar, diagram, atau benda nyata ke dalam bahasa, simbol, idea, atau model matematik
2) Menjelaskan idea, situasi, dan relasi matematik secara lisan atau tulisan
3) Mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematik
4) Membaca dengan pemahaman suatu representasi matematika tertulis
5) Membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi, dan generalisasi
6) Mengungkapkan kembali suatu uraian atau paragrap matematika dalam bahasa sendiri

Komunikasi matematik yang dimaksud dalam bahasan ini khusus dalam geometri antara lain; a) menggunakan bahasa matematik untuk mengekpresikan konsep persegi dan persegi panjang melalui gambar atau benda dari konsep yang dimaksud dengan jelas b) mengkomunikasikan pemahaman matematika dengan jelas kepada orang lain dengan menggunakan kata-kata sendiri, baik secara lisan maupun secara tertulis yaitu pemahaman konsep persegi, persegi panjang dan konsep segitiga.c) membuat ringkasan /rangkuman tentang konsep persegi dan persegi panjang dengan bahasa sendiri.

Berdasar pendapat Hoffer (Ikhsan,2008:6), akan terjadi kesulitan dalam berkomunikasi antar guru dan siswa, apabila tingkat berpikir dan bahasa yang digunakan antara guru dan siswa berbeda. Umumnya, siswa tidak akan memahami isi yang sedang diajarkan. Biasanya siswa akan berusaha menghafal materi itu dan mungkin seakan-akan telah menguasainya, tetapi siswa tersebut

tidak akan benar-benar memahami materi itu. Siswa mungkin dengan mudah melupakan materi yang telah dihafal, atau tidak mampu menerapkannya, terutama dalam situasi yang tidak biasa bagi dia.

. Guru perlu mengingat bahwa walaupun guru dan siswa mungkin menggunakan kata yang sama, mereka bisa menafsirkannya secara cukup berbeda. Contohnya, jika seorang siswa berada pada tingkat pertama, kata "persegi" membayangkan sebuah bangun yang tampak seperti sebuah persegi , tetapi tidak banyak yang lainnya. Pada tingkat kedua, siswa tersebut berpikir dari segi sifat-sifat dari sebuah persegi, tetapi mungkin tidak mengetahui sifat-sifat mana yang perlu atau cukup untuk menentukan sebuah persegi. Siswa mungkin merasa bahwa untuk membuktikan bahwa sebuah gambar adalah persegi, semua sifat harus dibuktikan. Guru, yang berpikir pada tingkat yang lebih tinggi, mengetahui bukan saja sifat-sifat dari sebuah persegi, tetapi juga sifat-sifat mana yang dapat digunakan untuk membuktikan bahwa sebuah gambar adalah persegi. Nyatanya guru mungkin memikirkan beberapa cara untuk menunjukkan bahwa sebuah gambar adalah persegi , karena guru tersebut mengetahui hubungan-hubungan di antara berbagai sifat dan dapat menentukan sifat-sifat mana diimplikasikan oleh yang lain. Guru harus mengevaluasi bagaimana siswa menginterpretasikan sebuah topik untuk berkomunikasi secara efektif**.** Bahasa memainkan peran penting dalam pembelajaran geometri. *Van hiele* memandang peranan guru dan peranan bahasa dalam konstruksi pengetahuan siswa sebagai sesuatu yang krusial. Seperti ditunjukkan pada tingkatan berpikir *van hiele* di atas, masing-masing tingkat pemikiran mempunyai bahasanya sendiri dan interpretasinya sendiri terhadap istilah yang sama.

2.1.6. Contoh Pembelajaran Geometri dengan tahap *van hiele*

Dalam bahasan ini, akan diuraikan contoh pembelajaran Geometri dengan tahap *van hiele* untuk tingkat 1(Visualisasi) dan tingkat 2 (Analisis), pada siswa sekolah dasar kelas V dengan tujuan untuk meningkatkan pemahaman konsep dasar geometri dan komunikasi matematik siswa dengan materi segi empat (persegi dan persegi panjang) dan segitiga (berdasar ukuran panjang sisi dan ukuran besar sudut).

Pembelajaran untuk tingkat 1 (Visualisasi), dengan materi persegi dan persegi panjang.

Tahap 1. Informasi

- Dikondisikan terjadi percakapan/dialog antara guru dan siswa, pertanyaan dimunculkan dengan tujuan untuk menggali pengetahuan awal siswa tentang materi yang akan dibahas (persegi dan persegi panjang). Kegiatan sebagai berikut; Guru memberikan beberapa pertanyaan, misalnya;1) apakah anak-anak sudah tahu atau pernah mendengar tentang persegi atau persegipanjang ? 2) coba diruangan ini ada benda atau barang yang berbentuk persegi atau persegipanjang ? 3) coba tunjukkan di ruangan ini benda yang berbentuk persegi atau persegipanjang. Pada bagian ini guru harus sudah mempunyai gambaran apakah anak-anak sudah paham tentang persegi dan persegipanjang ? jika anak belum paham , lanjutkan dengan menunjukkan beragam bangun-bangun geometri datar segi empat dan segitiga dalam berbagai ukuran dan warna, siswa menelaah bangun-bangun geometri yang ditunjukkan oleh guru sehingga siswa fokus pada materi yang akan dibahas, yaitu persegi dan persegi panjang. Kemudian guru menyampaikan lagi beberapa pertanyaan, misalnya, coba tunjukkan dari bangun-bangun geometri yang anak-anak telaah tersebut , mana persegi ? mana persegipanjang ? .

Tahap 2. Orientasi terpandu

- Dari beragam bangun-bangun geometri datar yang sudah guru berikan kepada anak-anak dalam berbagai ukuran dan warna, siswa diminta untuk menunjukkan mana yang dimaksud persegi atau persegipanjang, dengan pertanyaan sebagai berikut; anak-anak coba tunjukkan ke ibu/bapak, mana yang dimaksud dengan persegi? Coba tunjukkan lagi mana yang dimaksud persegipanjang?Guru meminta siswa untuk mengerjakan tugas dalam kelompoknya yaitu; 1) membandingkan antar persegi dan persegipanjang 2) mengukur sisi-sisi dari persegi dan sisi-sisi persegipanjang 3) menggambar dengan cara menjiplak persegi dan persegipanjang dan 4) mengidentifikasi persegi dan persegipanjang. Pada

tahap ini guru sudah mempunyai gambaran yang jelas apakah siswa sudah memahami konsep persegi dan persegipanjang dari berbagai kegiatan yang sudah dilakukan.

Tahap 3. Eksplisitasi

- Siswa diminta untuk mengekspresikan konsep persegi dan persegi panjang yang sudah dipahami pada tahap 2 dengan menggunakan kata-kata sendiri berdasar tampilan bentuk.Misalnya persegi adalah segiempat yang bentuknya mirip tegel,atau persegi adalah segiempat yang sisinya lebih pendek dibanding sisi-sisi persegipanjang, atau persegi adalah tetap persegi meskipun ukuran , letak dan warna berubah sedang persegipanjang adalah segi empat yang bentuknya seperti pintu atau persegipanjang adalah segiempat yang sisi-sisinya lebih panjang dibanding sisi-sisi persegi. Guru membimbing untuk menggunakan kosakata yang baik dan benar, mengenalkan istilah-istilah matematika yang relevan (misalnya sifat khusus dari persegi dan persegi panjang berdasarkan tampilannya). Pada tahap ini kemampuan komunikasi geometri siswa lanjutan dari tahap 2, baik lisan maupun tulisan dapat dikembangkan.

Tahap 4. Orientasi Bebas

- Pada tahap ini , siswa menemukan caranya sendiri dalam memahami konsep persegi dan persegi panjang, misal dengan melakukan pengukuran, menggambar, merubah posisi, membandingkan dengan bangun geometri yang lain dan menyebutkan sifat-sifat dari persegi dan persegi panjang berdasar tampilan, tidak sifat-sifat yang diterapkan secara umum.(misalnya persegi itu tetap persegi meskipun ukuran , warna, posisi berubah).

Tahap 5. Integrasi

- Pada tahap ini, siswa dapat membuat rangkuman/ ringkasan tentang persegi dan persegi panjang, setelah proses orientasi bebas. Misalnya ringkasan tentang sifat persegi dan persegi panjang berdasar tampilan atau pembandingan dan telaahan bangun-bangun geometri yang disediakan.

Setelah berakhir proses tahap *van hiele* dari tahap 1 sampai tahap 5, untuk setiap tingkatan berpikir Geometri, diberikan soal latihan, dalam hal ini untuk tingkat berpikir Geometri Visualisasi tentang persegi dan persegi panjang.

Pembelajaran untuk tingkat 2 (Analisis), dengan materi persegi dan persegi panjang.

Tahap 1. Informasi

- Guru menyiapkan beragam bangun-bangun geometri datar dalam bangun yang berbeda dari berbagai ukuran dan warna, siswa menelaah, mengidentifikasi bagian-bagian bangun geometri, sehingga siswa fokus pada materi yang akan dibahas, yaitu persegi dan persegi panjang. Siswa dibagi dalam kelompok kecil .
- Dikondisikan terjadi dialog tentang sifat khusus persegi dan persegi panjang, dengan menganalisis bagian-bagian dari persegi dan persegi panjang dengan tujuan untuk mengetahui sejauh mana perkembangan pemahaman konsep persegi dan persegi panjang yang dimiliki siswa.

Tahap 2. Orientasi Terpandu

- Guru memandu siswa untuk mengungkapkan hasil identifikasi dan pengklasifikasian persegi dan persegi panjang berdasar sifat khusus dari masing-masing bentuk.
- Siswa dipandu dalam kelompok kecil untuk mengidentifikasi dan menelaah ulang sifat khusus yang sama dan yang berbeda antara persegi dan persegi panjang.

Tahap 3. Eksplisitasi

- Guru memastikan siswa sudah memiliki pemahaman tentang sifat-sifat khusus persegi dan persegi panjang dari hasil identifikasi, klasifikasi bentuk-bentuk geometri yang disediakan (misal semua sisi persegi sama panjang, sedangkan sisi persegi panjang tidak sama panjang hanya yag berhadapan sama panjang).
- Siswa mencoba mengekspresikan/ mengkomunikasikan pemahaman tentang konsep persegi dan persegi panjang hasil analisis sifat-sifat khusus dengan menggunakan kata-kata mereka sendiri. Guru

membimbing untuk menggunakan kosakata yang baik dan benar, mengenalkan istilah-istilah matematika yang relevan. Misalnya sisi-sisi berhadapan pada persegi panjang sama panjang, semua sudut persegi dan persegi panjang masing-masing berukuran $90^{o.}$ Pada tahap ini kemampuan komunikasi matematik siswa , baik lisan maupun tulisan dapat dikembangkan.

Tahap 4. Orientasi Bebas

- Pada tahap ini , siswa menemukan caranya sendiri dalam memahami konsep persegi dan persegi panjang dengan menganalisis sifat-sifat khusus dari bentuk-bentuk geometri yang disediakan. Misal; a) dengan membandingkan persegi dan persegi panjang dengan merujuk pada kesamaan/perbedaan sisi dan sudutnya b) membuat daftar ciri-ciri atau sifat –sifat dari semua segi empat, namun tidak dapat menjelaskan bahwa persegi itu adalah persegi panjang.

Tahap 5. Integrasi

- Pada tahap ini, siswa dapat membuat rangkuman/ ringkasan tentang persegi dan persegi panjang setelah proses orientasi bebas. Misalnya ringkasan tentang sifat khusus persegi dan persegi panjang melalui pembandingan dan telaahan bangun-bangun geometri yang disediakan.

III. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan tersebut di atas, dapat disimpulkan bahwa :

3.1. Kemampuan pemahaman matematika siswa Sekolah Dasar khususnya dalam topik Geometri dapat di tingkatkan melalui pembelajaran dengan tahap *Van hiele*. Dengan kegiatan yang membuat siswa aktif, siswa terbiasa atau mengenali objek yang mereka *telaah***(**menelaah contoh dan bukan contoh), siswa *mengerjakan tugas-tugas* yang melibatkan berbagai hubungan yang berbeda dari jaringan yang akan dibentuk(misalnya melipat, mengukur dan mencari simetri), siswa menyadari hubungan, mencoba menunjukkan hubungan tersebut *dengan kata-kata,* dan mempelajari *bahasa tekhnis* yang menyertai materi yang diajarkan(misalnya mengekspresikan gagasan mengenai ciri-ciri gambar):, siswa belajar dengan *tugas yang lebih rumit, menemukan caranya*

sendiri dalam hubungan jaringan(misalnya, mengetahui ciri-ciri dari satu jenis bentuk, menyelidiki ciri. -ciri tersebut pada bentuk baru), *siswa merangkum* semua yang dia pelajari, lalu *merefleksikannya* pada tindakan mereka dan memperoleh penelaahan gambaran akan hubungan jaringan yang baru terbentuk(ciri-ciri gambar yang dirangkum).

3.2. Kemampuan komunikasi matematik siswa sekolah dasar khususnya, dapat dikembangkan melalui pembelajaran tahap *Van hiele*. Pada setiap tahap *Van hiele*, kegiatan yang siswa lakukan menunjukkan betapa pentingnya bahasa untuk komunikasi matematik siswa, a.l, menjelaskan idea, situasi, baik secara lisan atau tulisan, berdiskusi, membaca dengan pemahaman, membuat konjektur, merumuskan definisi, mengungkapkan kembali suatu uraian atau paragrap matematika dalam bahasa sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

Augustine,Charles D' Smith (1992). *Teaching Elementary School Mathematics*. New York: Harper Collins Publisher.

Crowley, M.L.(1987). *The Van hiele Model of the Development of Geometric Thought* . Dalam Lindquist, M.M and Shulte, A.P. (Eds.), Learning and Teaching Geometry, K-12, (pp. 1-16). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H & Battista. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning.* Dalam D.A. Grows, (ed.). Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics. (pp. 420-464). New York: MacMillan Publisher Company.

Herawati,Susi.(1994). *Penulusuran Kemampuan Siswa Sekolah Dasar Dalam Memahami Bangun-Bangun Geometri.* Studi Kasus di Kls V SD no 4. Purus Selatan. Tesis tidak diterbitkan.Malang Program Pasca Sarjana IKIP Malang.

Hudoyo.H. (1998). *Pembelajaran Matematika Menurut Pandangan Konstruktivistik.* Makalah Seminar Nasional Pendidikan Matematika, IKIP Malang.

Ikhsan, M. (2008). *Meningkatkan Prestasi dan Motivasi Siswa dalam Geometri melalui Pembelajaran Berbasis teori Van Hielle.* Disertasi pada PPS UPI : Tidak Dipublikasikan

Iryanto, Yus. (!999). *Upaya Mengatasi Kesulitan Siswa SD Kelas VI dalam Memahami Bangun Datar.* Tesis Tidak Diterbitkan. Malang : IKIP Malang

Kennedy,L.M. Tipps Steve. (1994). *Guiding Children's Learning of Mathematics. :* Wadswarsh Publishing Company.

Kahfi . S. Muhammad. (1999). *Analisis materi Geometri Dalam Buku Paket Matematika Sekolah Dasar Ditijnau Dari Teori Van hieles.* Tesis tidak diterbitkan. Malang : dalam program pascasajana IKIP Malang.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics.* Virginia : The NCTM Inc.

Nur'aeni (2000). *Model Pembelajaran Untuk Memahami Konsep Unsur-Unsur Bangun Ruang Kubus dan Balok Berdasarkan Kesalahan Siswa Kelas V Sekolah Dasar.* Tesis tidak diterbitkan. Malang : dalam program pascasajana IKIP Malang.

Nur'aeni dkk. (2003). *Implementasi Model Pembelajaran Dengan Tahap Belajar Van hiele Untuk Membantu Siswa Kelas 5 SD dalam Memahami Konsep Bangun Bangun Geometri Datar (PTK).* Tasikmalaya : PGSD Tasikmalaya

Sumarmo (2006). *Berfikir Matematik Tingkat Tinggi*. Makalah pada Seminar Pendidikan Matematika UNPAD, Bandung.

TIM MKPBM. (2001). *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung : UPI.

Wu Der-bang. (2005). *A Study of the Geometric Concepts of Elementary School Students Van hiele Level one.* [Online] Tersedia : http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol4WuMa.pdf [5 November 2007]

Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematis Tingkat Tinggi Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Berbasis Komputer Pada Perguruan Tinggi Muhammadiyah

Oleh : Bambang Priyo Darminto

Pendahuluan

Saat ini, dunia telah memasuki era ekonomi global berbasis pengetahuan, di mana pertumbuhan ekonomi, kemakmuran, dan kesejahteraan suatu bangsa amat dipengaruhi oleh kemampuannya dalam menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi. Perkembangan ini ternyata diikuti oleh makin kuatnya kecenderungan sistem terbuka yang menimbulkan persaingan global. Dalam rangka menghadapi persaingan tersebut, maka bangsa Indonesia harus meningkatkan mutu SDM-nya agar memiliki daya saing yang tinggi.

Pendidikan tinggi memiliki peran yang amat strategis dalam meningkatkan mutu SDM. Bank Dunia dalam salah satu laporannya tahun 1999 menyatakan bahwa terdapat kontribusi yang signifikan dari sektor pendidikan tinggi terhadap upaya peningkatan daya saing bangsa (Depdiknas, 2004). Sehubungan dengan hal tersebut, pemerintah telah menyusun Rencana Strategis Departemen Pendidikan Nasional Tahun 20052009 dengan tujuan utama meningkatkan meningkatkan mutu lulusan perguruan tinggi, yakni lulusan yang terampil, kreatif dan inovatif dalam memanfaatkan ilmu pengetahuan dan teknologi, ahli, profesional, serta memiliki kecakapan hidup yang dapat membantu dirinya dalam menghadapi berbagai tantangan dan perubahan (Depdiknas,2005). Rencana tersebut meliputi upaya peningkatan kemampuan tenaga pengajar, penyediaan sarana dan prasarana belajar yang lebih memadai, mengembangkan kurikulum, memperbanyak sumber dan bahan ajar, menciptakan model-model pembelajaran, serta meningkatkan penguasaan *information communication technology* (ICT).

Guru matematika yang profesional merupakan salah satu unsur penting dalam meningkatkan mutu SDM. Dalam rangka menghadapi masa depan dan daya saing bangsa yang semakin ketat, setiap calon guru matematika harus memiliki kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi (KBMTT) yang meliputi penalaran matematis, koneksi mate-matis, komunikasi matematis, dan pemecahan masalah matematis (Webb, N.L. dan Coxford, 1993). Kemampuan berpikir seperti ini dapat ditingkatkan melalui

pendidikan matematika di perguruan tinggi karena pembelajaran matematika difokuskan untuk melatih berpikir dan bernalar dalam menarik kesimpulan, mengkomunikasikan gagasan secara lisan atau melalui grafik, dan mengembangkan kemampuan memecahkan masalah. Di samping itu, matematika memiliki karakteristik yang unik, yaitu penalaran deduktif. Dalam penalaran deduktif, kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya sehingga kaitan antarkonsep atau pernyataan tersebut bersifat konsisten (Depdiknas, 2003). Matematika juga dikenal sebagai ilmu yang terstruktur dalam arti antara konsep matematis yang satu dengan lainnya terjalin hubungan fungsional. Karakteristik matematika yang lain adalah sifatnya yang sistematis yakni materinya tersusun secara hierarkhis, menggunakan bahasa simbol yang efisien. Di samping itu, dengan menggunakan matematika dapat dibuat suatu bentuk pemodelan tertentu untuk memecahkan beberapa masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Pengetahuan matematika juga erat berkait dengan perkembangan teknologi. Beberapa pakar ilmu komputer menyatakan bahwa matematika mempunyai peran yang sangat pen-ting dalam mengembangkan ilmu komputer. Standish (1995) menyatakan bahwa matema-tika mempunyai dua peran yang amat penting dalam mengembangkan ilmu komputer yaitu membantu perhitungan dan analisis dalam hal *efficiency/correctness* program aplikasi dalam bidang ilmu komputer. Di samping itu, matematika merupakan pondasi yang amat penting dalam mengembangkan kinerja komputer (Cormen, *et al*.,1990).

Di sisi lain, perkembangan teknologi komputer dari *mainframe* ke *personal computer (PC)*, ternyata dapat mempengaruhi proses pembelajaran dan pengajaran matematika di sekolah menengah maupun di perguruan tinggi. Sarama dan Clements (2001) menyatakan bahwa pembelajaran matematika berbantuan komputer di sekolah menengah dapat meningkatkan kemampuan berpikir para siswa. Di perguruan tinggi, Hillel (2001) menya-takan bahwa penggunaan komputer sangat bermanfaat untuk meningkatkan kreativitas mahasiswa dalam menemukan solusi permasalahan, meningkatkan logika dan mengem-bangkan konsep-konsep matematis. Karena itu, kehadiran komputer sangat membantu manusia dalam menyelesaikan masalah secara cepat dan akurat. Dalam bidang pendidikan, komputer bermanfaat untuk meningkatkan mutu proses pembelajaran.

Penerapan model pembelajaran berbasis komputer di Perguruan Tinggi Muhammadiyah (PTM) belum banyak dilakukan. Perkuliahan di PTM pada umumnya masih dilaksanakan secara konvensional, yaitu proses pembelajaran di dalam kelas dengan menggunakan metode *ekspositori/ceramah* dan memposisikan mahasiswa sebagai pemerhati ceramah dosen. Model pembelajaran konvensional masih banyak digunakan di PTM karena paling mudah dilaksanakan.

Dengan semakin pesatnya perkembangan teknologi informasi dan komunikasi, saat pembelajaran matematika dapat dilakukan dengan memberdayakan teknologi komputer. Pembelajaran matematika berbasis komputer merupakan pembelajaran yang berlandaskan pada konsep *ComputerBased Instruction (CBI)* maupun *ComputerAssisted Instruction (CAI).* Pada awalnya program aplikasi komputer yang digunakan dalam *CBI* atau *CAI* dikembangkan berdasarkan teori perilaku dan pembelajaran terprogram, namun sekarang telah dikembangkan berdasarkan teori kognitif sehingga telah terdapat beberapa program aplikasi multimedia interaktif yang dibuat berlandaskan tingkat kemampuan dan kesiapan belajar anak. Untuk meningkatkan minat dan daya tarik, program aplikasi pembelajaran berbasis komputer dibuat lebih menarik, interaktif, menggabungkan konsep visual, grafis, dan audio, serta mudah dioperasikan.

Penelitian ini mengunakan mata kuliah statistika sebagai ruang lingkup bidang kajian karena statistika merupakan salah satu cabang matematika yang penerapannya sering kali digunakan dalam memecahkan berbagai persoalan manusia sehari-hari. Selain itu, metodologi statistika banyak digunakan dalam banyak bidang ilmu pengetahuan dan *engineering.* Mayers L.S, *et al.* (2002:14) mengemukakan bahwa " ... *there are many case studies that demonstrate statistical analysis of interesting real life data sets*". Karena peranannya sangat penting dalam kehidupan manusia, maka statistika diajarkan sejak di SD sampai dengan perguruan tinggi.

Perguruan tinggi swasta (PTS) sebagai mitra perguruan tinggi negeri (PTN) mempunyai peran dan tanggung jawab untuk meningkatkan mutu SDM di Indonesia. Sehubungan dengan hal itu, PTS yang membuka program pendidikan keguruan dan memiliki program studi pendidikan matematika senantiasa ber-upaya meningkatkan mutu akademik dan mutu pelayanan dengan menyediakan berbagai sarana belajar dan kebutuhan infrastruktur lainnya. Upaya-upaya ini perlu dilakukan oleh PTS agar mampu

menghasilkan calon-calon guru matematika yang bermutu tinggi, profesional, dan memiliki daya saing tinggi.

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, peneliti memperoleh inspi-rasi untuk mengaplikasikan komputer sebagai alat bantu dalam proses pembelajaran matematika di PTM sebagai salah satu upaya meningkatkan KBMTT mahasiswa. Selan-jutnya, untuk melihat efektivitas dan kehandalan kedua model pembelajaran berbasis komputer, maka proses pelaksanaan pembelajaran dalam penelitian ini dirancang dalam tiga model pembelajaran sebagai berikut,

1. Eksperimen-1: kelompok mahasiswa yang diajar dengan menggunakan program aplikasi multimedia interaktif statistika berbasis komputer buatan peneliti.
2. Ekperimen-2: kelompok mahasiswa yang diajar dengan menggunakan program aplikasi multimedia interaktif *Elementary Statistics, A Step by Step Approach for Higher Education* berbasis komputer buatan Allan G. Bluman.
3. Konvensional: kelompok mahasiswa yang diajar tanpa menggunakan alat bantu komputer, dilaksanakan di kelas dengan metode ceramah/ ekspositori.

Perhatian penelitian ini difokuskan pada penerapan model pembelajaran matematika berbasis komputer, namun *level* kemampuan awal (tinggi dan rendah) dari para mahasiswa juga ikut diperhatikan sebab untuk meningkatkan KBMTT, mahasiswa akan dihadapkan pada sejumlah tugas/permasalahan matematika tingkat tinggi yang penyelesaiannya memerlukan sejumlah pengetahuan awal matematika. Berdasarkan uraian di atas, permasalahan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Apakah terdapat perbedaan yang signifikan mengenai peningkatan KBMTT antara mahasiswa yang diajar dengan model eksperimen-1, eksperimen-2, dan konvensional di PTM1 dan PTM2? Jika terdapat perbedaan, kelompok manakah yang memiliki pening-katan KBMTT tertinggi dari ketiga model pembelajaran tersebut?
2. Apakah terdapat terdapat perbedaan mengenai peningkatan KBMTT antara mahasiswa yang diajar dengan model eksperimen-1 dan mahasiswa yang diajar dengan model eksperimen-2, baik yang dilaksanakan di PTM1 maupun di PTM2?
3. Apakah kemampuan awal dan sikap mahasiswa terhadap model pembelajaran matematika berbasis komputer mempengaruhi peningkatan KBMTT?

Penelitian ini mempunyai beberapa tujuan, antara lain:

1. Mengetahui kemungkinan adanya perbedaan peningkatan KBMTT antara mahasiswa diajar dengan menggunakan model eksperimen-1, eksperimen-2, dan konvensional di PTM1 dan PTM2.
2. Mengetahui/membandingkan model pembelajaran matematika berbasis komputer mana yang lebih tepat diterapkan pada PTM dalam meningkatkan KBMTT.
3. Mengetahui kemungkinan adanya hubungan/korelasi antara kemampuan, sikap, dan KBMTT mahasiswa.

Berdasarkan tujuan yang telah dikemukakan di atas, penelitian ini mempunyai beberapa manfaat, antara lain:

1. Bagi mahasiswa, pembelajaran berbasis komputer bermanfaat untuk meningkatkan minat, daya tarik, dan aktivitas/keterlibatan mahasiswa dalam proses pembelajaran.
2. Bagi dosen, pembelajaran berbasis komputer bermanfaat untuk kegiatan remediasi dan penguatan *(reinforcement).*
3. Bagi lembaga atau penentu kebijakan (*decision maker*), pembelajaran berbasis komputer bermanfaat dapat digunakan sebagai salah satu daya tarik sehingga dapat meningkatkan kepercayaan masyarakat untuk memilih PTM sebagai tempat belajar.

Metode Penelitian

Populasi penelitian ini adalah mahasiswa calon guru matematika di Universitas Muhammadiyah Purworejo dan Universitas Muhammadiyah Purwokerto. Sampel penelitian diambil dengan secara *random sampling* melalui undian. Banyaknya sampel di PTM1 115 mahasiswa, dan di PTM2 sebanyak 98 mahasiswa.

Penelitian ini merupakan penelitian eksperimen dengan desain kelompok pretespostes (*pretest postest control group design*). Dalam desain ini, sampel diambil secara acak (A), KBMTT awal diukur dengan *pretes* (O), dan setelah diberi perlakuan kemudian diukur KBMTT akhir dengan *postes* (O). Kelas eksperimen-1 dan eksperimen-2 masing-masing memperoleh perlakuan X_1 dan X_2, sedangkan kelas kontrol tidak diberi perlakuan. Desain penelitian ini disajikan sebagai berikut:

A	O	X_1	O
A	O	X_2	O
A	O		O

A : Pemilihan sampel secara acak
O : Pretes atau postes tentang KBMTT
X_1 : Perlakuan 1
X_2 : Perlakuan 2

Desain faktorial yang digunakan dalam penelitian ini adalah $2 \times 2 \times 3$, disajikan pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. Skema Desain Penelitian

PTM	KAM	KBMTT Mahasiswa			Sikap Mahasiswa	
		Eksp-1	Eksp-2	Kontrol	Eksp-1	Eksp-2
PTM1	Tinggi	$KBMTT_{1T}$	$KBMTT_{2T}$	$KBMTT_{KT}$	Skp_{1T}	Skp_{2T}
PTM2	Rendah	$KBMTT_{1R}$	$KBMTT_{2R}$	$KBMTT_{KR}$	Skp_{1R}	Skp_{2R}
GAB. PTM	Total	$KBMTT_{1}$	$KBMTT_{2}$	$KBMTT_{K}$	Skp_{1}	Skp_{2}

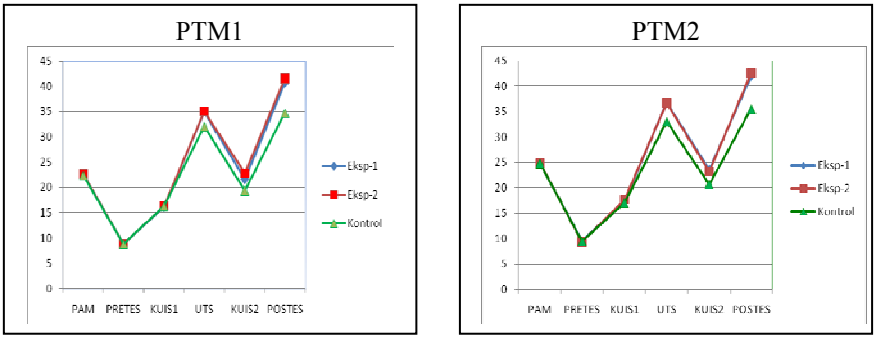
Prosedur analisis data dalam penelitian ini dilakukan sebagai berikut:

1. Menghitung ratarata skor TPAM dan Pretes untuk menentukan kemampuan mahasiswa ke dalam kategori *lower group* (kelompok rendah/bawah), *middle group* (kelompok sedang/tengah) dan *upper group* (kelompok tinggi/atas). Banyaknya kelompok rendah/bawah atau kelompok atas/tinggi kira-kira 25%-27%, sedangkan kelompok sedang kurang lebih 56%-50%.
2. Mengolah skor TPAM, Pretes, dan Postes untuk melihat gambaran atau deskripsi secara umum.
3. Melakukan analisis statistik uji normalitas, uji homogenitas variansi, dan uji ratarata dari distribusi skor TPAM, Pretes dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Uji Normalitas Distribusi Skor TPAM, Pretes, dan Postes.
   b. Uji Homogenitas Variansi Skor TPAM, Pretes, dan Postes.
   c. Uji Perbedaan RataRata Skor TPAM, Pretes, dan Postes.
4. Menganalisis interaksi antara model pembelajaran dan kemampuan mahasiswa dengan ANOVA Dua Jalur.
5. Penarikan kesimpulan.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Untuk mengetahui ada atau tidaknya perbedaan peningkatan KBMTT mahasiswa pada PTM yang dilihat dari aspek PTM, model pembelajaran dan kemampuan awal, digunakan uji perbedaan atau ANOVA dua jalur. Sebelum itu, dilakukan uji normalitas dan homogenitas pada masingmasing kelompok. Hasil-hasil perhitungan tersebut

disajikan pada beberapa tabel, sedangkan gambaran hasil pembelajaran dan interaksi antarvariabel disajikan pada beberapa gambar di bawah ini.



Gambar 1. Deskripsi Perkembangan KBMTT di PTM1 dan PTM2

Tabel 2. ANOVA Dua Jalur Skor Postes KBMTT Mahasiswa pada PTM1

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	10469,083(a)	5	2093,817	105,956	,000
Intercept	92276,817	1	92276,817	4669,617	,000
KEMAMPUAN (A)	10010,417	1	10010,417	506,572	,000
MODEL PBM (B)	437,733	2	218,867	11,076	,000
A×B	20,933	2	10,467	,530	,592
Error	1067,100	54	19,761		
Total	103813,000	60			
Corrected Total	11536,183	59			

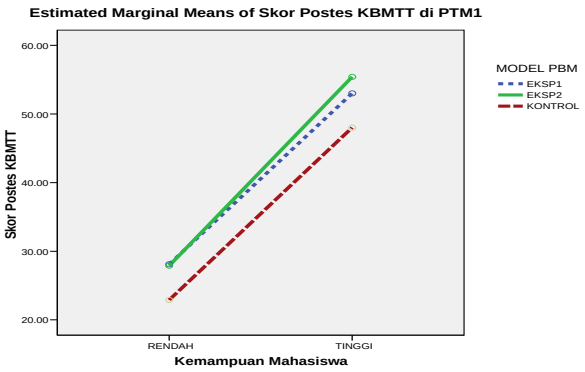
α=5% (2*tailed*)

Berdasarkan Tabel 2 di atas, diperoleh nilai F_{hitung} untuk faktor kemampuan (A) sama dengan 506,572 dengan nilai *Sig.* sama dengan 0,000 (<0,05). Karena itu, H_0 ditolak. Ini berarti terdapat perbedaan yang signifikan mengenai KBMTT antara mahasiswa yang kemampuannya rendah dengan mahasiswa yang kemampuannya tinggi. Dalam hal ini mahasiswa di PTM1 yang kemampuannya tinggi mempunyai KBMTT yang relatif lebih tinggi daripada mahasiswa yang kemampuannya rendah.

Nilai F_{hitung} untuk model pembelajaran (B) yaitu 11,076 dengan nilai *Sig.* sama dengan 0,000 (<0,05). Karena itu, H_0 ditolak. Dengan demikian terdapat perbedaan yang signifikan mengenai KBMTT antara mahasiswa yang diajar dengan menggunakan eksperimen-1, eksperimen-2, dan kontrol.

Nilai *Sig.* A×B sama dengan 0,592 (>0,05). Karena itu, H_0 diterima. Ini berarti bahwa tidak ada interaksi antara kemampuan dan model pembelajaran dalam KBMTT

mahasiswa. Representasi interaksi antara kemampuan mahasiswa dan model pembelajaran di PTM1 disajikan pada gambar berikut.



Gambar 2. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Model PBM di PTM1

Tabel 3. ANOVA Dua Jalur Skor Postes KBMTT Mahasiswa pada PTM2

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	9189,204(a)	5	1837,841	76,621	,000
Intercept	86000,463	1	86000,463	3585,428	,000
KEMAMPUAN (A)	8740,167	1	8740,167	364,384	,000
MODEL PBM (B)	404,593	2	202,296	8,434	,001
A × B	44,444	2	22,222	,926	,403
Error	1151,333	48	23,986		
Total	96341,000	54			
Corrected Total	10340,537	53			

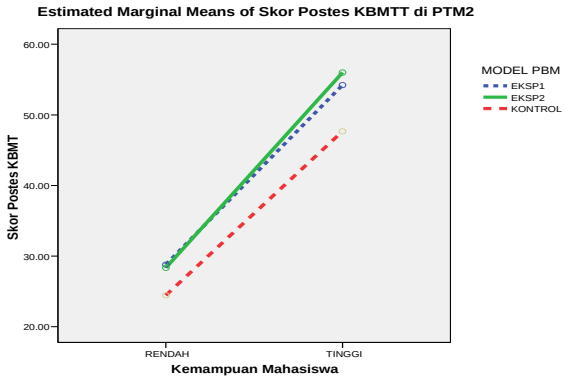
α=5% (2*tailed*)

Berdasarkan Tabel 3 di atas, diperoleh nilai F_{hitung} untuk faktor kemampuan (A) sama dengan 364,384 dengan nilai *Sig.* sama dengan 0,000 (<0,05). Karena itu, H_0 ditolak. Ini berarti terdapat perbedaan yang signifikan mengenai KBMTT antara mahasiswa yang kemampuannya rendah dengan mahasiswa yang kemampuannya tinggi. Dalam hal ini mahasiswa di PTM2 yang kemampuannya tinggi mempunyai KBMTT yang relatif lebih tinggi daripada mahasiswa yang kemampuannya rendah.

Nilai *Sig.* untuk model pembelajaran (B) sama dengan 0,001 (<0,05). Karena itu, H_0 ditolak. Dengan demikian terdapat perbedaan yang signifikan mengenai KBMTT antara mahasiswa yang diajar dengan menggunakan eksperimen-1, eksperimen-2, dan kontrol.

Nilai *Sig.* A×B sama dengan 0,403 (>0,05). Karena itu, H_0 diterima. Ini berarti bahwa tidak ada interaksi antara kemampuan dan model pembelajaran dalam KBMTT

mahasiswa. Representasi interaksi antara kemampuan mahasiswa dan model pembelajaran di PTM2 disajikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Model PBM di PTM2

Tabel 4. ANOVA Dua Jalur Skor Postes KBMT Mahasiswa pada Gabungan PTM

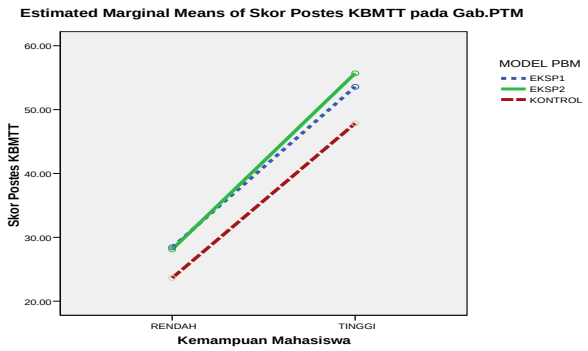
Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	19301,426(a)	11	1754,675	81,116	,000
Intercept	179435,736	1	179435,736	8295,037	,000
KEMAMPUAN (A)	18200,022	1	18200,022	841,359	,000
MODEL PEMBELAJARAN (B)	934,817	2	467,409	21,608	,000
PTM (C)	29,806	1	29,806	1,378	,243
A×B	28,044	2	14,022	,648	,525
A×C	7,917	1	7,917	,366	,547
B×C	4,010	2	2,005	,093	,912
A×B×C	9,097	2	4,549	,210	,811
Error	2206,433	102	21,632		
Total	201198,000	114			
Corrected Total	21507,860	113			

α=5% (2*tailed*)

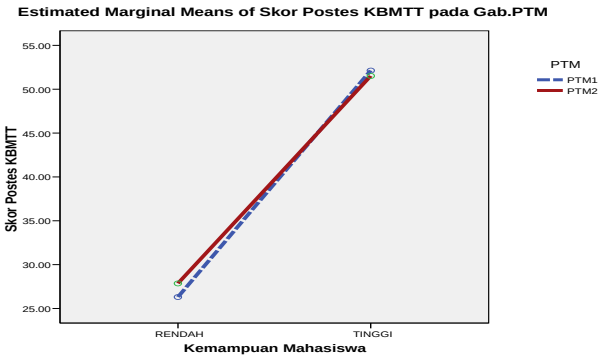
Berdasarkan Tabel 4, nilai *Sig*. untuk sumber PTM (C) sama dengan 0,243 (>0,05). Karena itu, H_0 diterima. Jadi, tidak ada perbedaan yang signifikan mengenai KBMTT mahasiswa di PTM1 dan PTM2. Jika ditinjau dari kemampuan awal, mahasiswa PTM1 atau PTM2 yang kemampuan awalnya rendah maka KBMTTnya tetap rendah atau mahasiswa yang kemampuan awalnya tinggi maka KBMTTnya tetap tinggi meskipun diajar dengan model eksperimen-1 atau eksperimen-2.

Nilai *Sig.* A×C sama dengan 0,547 (>0,05), nilai *Sig.* B×C sama dengan 0,912 (>0,05), dan nilai *Sig.* A×B×C sama dengan 0,811 (>0,05). Karena itu, H_0 diterima. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa: (1) Tidak ada interaksi antara kemampuan

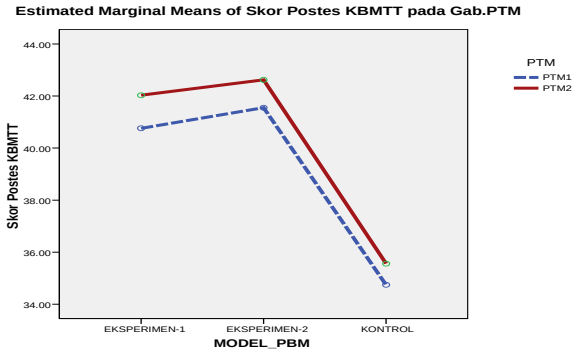
dan keberadaan PTM, (2) Tidak ada interaksi antara model pembelajaran dan keberadaan PTM, dan (3) Tidak ada interaksi antara kemampuan, model pembelajaran dan kebera-daan PTM dalam KBMTT. Representasi interaksi hasil analisis data pada gabungan PTM disajikan pada gambar berikut.



Gambar 4. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Model PBM pada Gab. PTM



Gambar 5. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Keberadaan PTM pada Gab. PTM



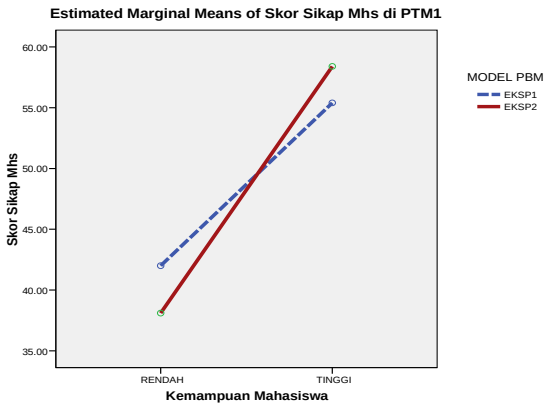
Gambar 6. Interaksi antara Model PBM dan Keberadaan PTM pada Gab. PTM

Tabel 5. ANOVA Dua Jalur Skor Sikap Mahasiswa terhadap Model Pembelajaran Berbasis Komputer pada PTM1

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	2960,275(a)	3	986,758	123,473	,000
Intercept	93993,025	1	93993,025	11761,380	,000
KEMAMPUAN (A)	2839,225	1	2839,225	355,273	,000
MODEL PBM (B)	2,025	1	2,025	,253	,618
A ×B	119,025	1	119,025	14,894	,000
Error	287,700	36	7,992		
Total	97241,000	40			
Corrected Total	3247,975	39			

α=5% (2*tailed*)

Berdasarkan Tabel 5 di atas, nilai *sig.* pada A sama dengan 0,000 (<0,05). Jadi H_o ditolak. Ini berarti bahwa terdapat perbedaan sikap antara mahasiswa yang kemampuannya tinggi dan rendah. Nilai *sig.* pada B sama dengan 0,618 (>0,05). Jadi H_o diterima. Ini artinya tidak terdapat perbedaan sikap antara mahasiswa dalam eksperimen-1 dan eksperimen-2. Nilai *Sig.* A×B sama dengan 0,000 (<0,05). Karena itu, H_o ditolak. Ini berarti bahwa jika ditinjau dari aspek kemampuan awal, maka mahasiswa di PTM1 yang kemampuannya rendah pada kelas eksperimen-1 memiliki sikap yang berbeda dengan mahasiswa yang kemampuannya rendah pada kelas eksperimen-2. Demikian juga, mahasiswa yang kemampuannya tinggi pada kelas eksperimen-1 memiliki sikap yang berbeda dengan mahasiswa yang kemampuannya tinggi pada kelas eksperimen-2. Interaksi antara kemampuan mahasiswa dan model pembelajaran dalam sikap mahasiswa pada PTM1 tersebut digambarkan oleh dua garis berpotongan yang disajikan pada Gambar 7 di di bawah.



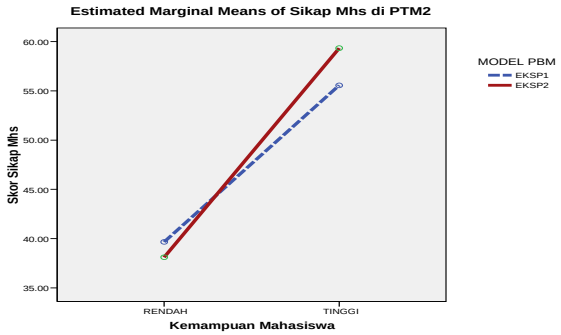
Gambar 7. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Model PBM dalam Sikap Mahasiswa di PTM1

Tabel 6. ANOVA Dua Jalur Skor Sikap Mahasiswa terhadap Model Pembelajaran Berbasis Komputer pada PTM2

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	3173,889(a)	3	1057,963	97,533	,000
Intercept	83521,000	1	83521,000	7699,759	,000
KEMAMPUAN (A)	3098,778	1	3098,778	285,675	,000
MODEL PMB (B)	11,111	1	11,111	1,024	,319
A ×B	64,000	1	64,000	5,900	,021
Error	347,111	32	10,847		
Total	87042,000	36			
Corrected Total	3521,000	35			

α=5% (2*tailed*)

Berdasarkan Tabel 6 di atas, nilai *sig.* pada A sama dengan 0,000 (<0,05). Jadi H_o ditolak.Ini berarti bahwa terdapat perbedaan sikap antara mahasiswa yang kemampuannya tinggi dan rendah. Nilai *sig.* pada B sama dengan 0,319 (>0,05). Jadi H_o diterima. Ini artinya tidak terdapat perbedaan sikap antara mahasiswa dalam eksperimen-1 dan eksperimen-2. Nilai *Sig.* A×B sama dengan 0,021 (<0,05). Karena itu, H_o ditolak. Ini berarti bahwa jika ditinjau dari aspek kemampuan awal, maka mahasiswa di PTM2 yang kemampuannya rendah pada kelas eksperimen-1 memiliki sikap yang berbeda dengan mahasiswa yang kemampuannya rendah pada kelas eksperimen-2. Demikian juga, mahasiswa yang kemampuannya tinggi pada kelas eksperimen-1 memiliki sikap yang berbeda dengan mahasiswa yang kemampuannya tinggi pada kelas eksperimen-2. Interaksi antara kemampuan mahasiswa dan model pembelajaran dalam sikap mahasiswa pada PTM2 tersebut digambarkan oleh dua garis berpotongan yang disajikan pada Gambar 8 di bawah. Hasil analisis di PTM2 ternyata sama dengan analisis di PTM1.



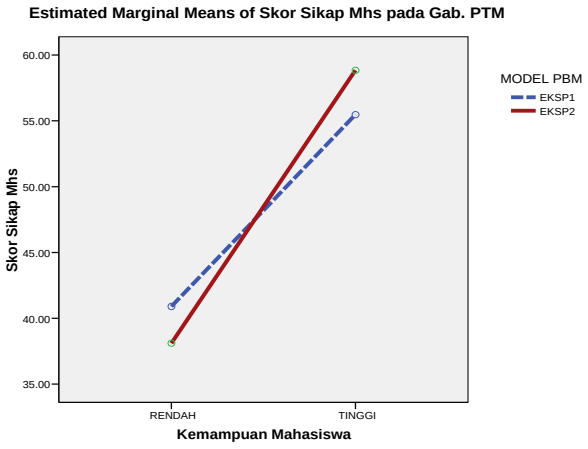
Gambar 8. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Model PBM dalam Sikap Mahasiswa di PTM2

Tabel 7. ANOVA Dua Jalur Skor Sikap Mahasiswa terhadap Model Pembelajaran Berbasis Komputer pada Gab. PTM

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	6135,965(a)	7	876,566	93,896	,000
Intercept	176961,064	1	176961,064	18955,800	,000
KEMAMPUAN (A)	5937,884	1	5937,884	636,057	,000
MODEL PBM (B)	2,070	1	2,070	,222	,639
PTM (C)	1,801	1	1,801	,193	,662
A × B	177,222	1	177,222	18,984	,000
B × C	11,544	1	11,544	1,237	,270
A × C	13,779	1	13,779	1,476	,229
A × B × C	2,907	1	2,907	,311	,579
Error	634,811	68	9,335		
Total	184283,000	76			
Corrected Total	6770,776	75			

α=5% (2*tailed*)

Tabel 7 menggambarkan bahwa terdapat pengaruh model pembelajaran terhadap sikap mahasiswa ditinjau dari kemampuan (*Sig.*A × B=0,00<0,05). Sikap mahasiswa yang kemampuannya rendah dalam eksperimen-1 lebih positif daripada eksperimen-2, tetapi sebaliknya, mahasiswa yang kemampuannya tinggi dalam eksperimen-2 ternyata memiliki sikap yang lebih posisif daripada eksperimen-1. Interaksi antara model pembelajaran dan kemampuan dalam sikap mahasiswa disajikan pada Gambar 9 di bawah.



Gambar 9. Interaksi antara Kemampuan Mahasiswa dan Model PBM dalam Sikap Mahasiswa pada Gab. PTM

Untuk mengetahui keeratan hubungan antara KBMTT, kemampuan, dan sikap mahasiswa di bawah ini disajikan hasil perhitungan korelasi antarvariabel tersebut dengan menggunakan korelasi parsial.

Tabel 8. Korelasi antara KBMTT, Kemampuan, dan Sikap Mahasiswa di PTM1

Control Variables			KBMTT	SIKAP	KEMAMPUAN
none(a)	KBMTT	Correlation	1,000	,958	,981
		Significance (2tailed)	.	,000	,000
		df	0	74	74
	SIKAP	Correlation	,958	1,000	,971
		Significance (2tailed)	,000	.	,000
		df	74	0	74
	KEMAMPUAN	Correlation	,981	,971	1,000
		Significance (2tailed)	,000	,000	.
		df	74	74	0
KEMAMPUAN	KBMTT	Correlation	1,000	,132	
		Significance (2tailed)	.	,258	
		df	0	73	
	SIKAP	Correlation	,132	1,000	
		Significance (2tailed)	,258	.	
		df	73	0	

α=5% (2*tailed*)

Berdasarkan Tabel 8, sebelum korelasi partial atau pada *zero order* (tanpa ada variabel kontrol) didapat koefisien korelasi antara KBMTT dengan sikap sama dengan 0,958, dan uji signifikansi korelasi KBMTT dengan sikap menunjukkan 0,000 dengan dk sama dengan 74. Karena nilai signifikansi tersebut lebih kecil daripada 0,025, maka terdapat hubungan yang signifikan antara KBMTT dengan sikap mahasiswa terhadap model pembelajaran berbasis komputer pada PTM1. Koefisien korelasi antara KBMTT dengan kemampuan mahasiswa sama dengan 0,981, dan uji signifikansi korelasinya menunjukkan nilai 0,000 dengan dk sama dengan 74. Karena nilai signifikansi lebih kecil daripada 0,025, maka korelasi variabel antara KBMTT dan kemampuan mahasiswa adalah signifikan. Koefisien korelasi sikap dengan kemampuan mahasiswa sama dengan 0,971, dan uji signifikansinya sama dengan 0,000 dengan dk sama dengan 74. Karena nilai signifikansi lebih kecil 0,025, maka terdapat hubungan yang signifikan antara sikap dan kemampuan mahasiswa pada PTM1.

Pada keluaran kedua, setelah variabel kemampuan dikeluarkan dan dilakukan korelasi, maka koefisien korelasi antara KBMTT dan sikap turun dari 0,958 menjadi 0,132 dan uji signifikansi korelasinya menunjukkan nilai 0,258 dengan dk sama dengan 73. Karena nilai signifikansi jauh lebih besar daripada 0,025, maka korelasi antara kedua variabel setelah variabel kontrol kemampuan dikeluarkan menjadi tidak signifikan. Jadi, tidak terdapat hubungan yang signifikan antara KBMTT dengan sikap mahasiswa PTM1.

Tabel 9. Korelasi antara KBMTT, Kemampuan, dan Sikap Mahasiswa di PTM2

Control Variables			KBMTT	SIKAP	KEMAMPUAN
none(a)	KBMTT	Correlation	1,000	,899	,906
		Significance (2tailed)	.	,000	,000
		df	0	62	62
	SIKAP	Correlation	,899	1,000	,981
		Significance (2tailed)	,000	.	,000
		df	62	0	62
	KEMAMPUAN	Correlation	,906	,981	1,000
		Significance (2tailed)	,000	,000	.
		df	62	62	0
KEMAMPUAN	KBMTT	Correlation	1,000	,127	
		Significance (2tailed)	.	,323	
		df	0	61	
	SIKAP	Correlation	,127	1,000	
		Significance (2tailed)	,323	.	
		df	61	0	

α=5% (2*tailed*)

Berdasarkan Tabel 9, disimpulkan beberapa hal sebagai berikut: (1)Terdapat hubungan yang signifikan antara KBMTT dengan sikap mahasiswa terhadap model pembelajaran berbasis komputer pada PTM2, (2) Korelasi variabel antara KBMTT dan kemampuan mahasiswa adalah signifikan, (3) Terdapat hubungan yang signifikan antara sikap dan kemampuan mahasiswa pada PTM2, (4) Setelah variabel kemampuan dikeluarkan dan dilakukan korelasi, maka tidak terdapat hubungan yang signifikan antara KBMTT dengan sikap mahasiswa pada PTM2. Jadi dapat disimpulkan bahwa, pada PTM2 ketiga variabel yakni KBMTT, sikap dan kemampuan mahasiswa saling berpengaruh dan peran kemampuan mahasiswa sangat penting dalam menjelaskan hubungan antara KBMTT dan sikap mahasiswa. Ini berarti bahwa semakin tinggi kemampuan awal dan semakin positif sikap mahasiswa, maka semakin tinggi pula KBMTTnya.

Kesimpulan

1. Terdapat perbedaan mengenai peningkatan KBMTT antara mahasiswa yang diajar dengan model eksperimen-1, eksperimen-2, dan konvensional. Mahasiswa yang diajar dengan menggunakan model eksperimen-1 atau eksperimen-2 di PTM1 dan PTM2 masing-masing mempunyai peningkatan KBMTT yang relatif lebih tinggi daripada mahasiswa yang diajar secara konvensional.
2. Tidak terdapat perbedaan mengenai KBMTT antara mahasiswa yang diajar dengan model eksperimen-1 dan mahasiswa yang diajar dengan model eksperimen-2, baik yang dilaksanakan di PTM1 maupun di PTM2.

3. Terdapat korelasi positif antara sikap dan kemampuan awal terhadap KBMTT mahasiswa, baik di PTM1 maupun PTM2. Kemampuan awal berperan penting dalam menjelaskan hubungan antara KBMTT dan sikap mahasiswa.

Daftar Pustaka

Cormen, H.T, *et al.* (1990). *Introduction to Algorithms*. Massachusetts : The Massachusetts Institute of Technology.

Departemen Pendidikan Nasional. (2003). *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika, Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah.* Jakarta : Depdiknas.

Departemen Pendidikan Nasional. (2004). *Strategi Jangka Panjang Pendidikan Tinggi 2003-20010 (HELTS).* Jakarta : Depdiknas.

Departemen Pendidikan Nasional. (2005). *Rencana Strategis Departemen Pendidikan Nasional Tahun 2005-2009.* Jakarta : Depdiknas.

Hillel, Joel. (2001). "Computer Algebra Systems in the Learning and Teaching of Linear Algebra: Some Examples",dalam Derek Holton (Ed.).*The Teaching and Learning of Mathematics at University Level.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Mayers, L.S, *et al.* (2002). *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. USA: Prentice-Hall Inc.

Sarama, J.& Clements, H.D. (2001). *Computers in Early Childhood Mathematics.* USA : University at Buffalo.

Standish, T.A. (1995). *Data Structures, Algorithms, and Software Principles in C*. California : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Webb, N.L. dan Coxford , A.F. (Eds) (1993). *Assessment in Mathematics Classroom.* Virginia: NCTM.

Pembelajaran Matematika dengan Konflik Kognitif

Oleh:
Dasa Ismaimuza
Pend. Matematika FKIP Universitas Tadulako
Palu, Sulawesi Tengah

Abstrak

Pendekatan konflik kognitif dalam pembelajaran matematika adalah pembelajaran yang mempertentangkan anatara struktur atau kemampuan kognisi dengan sumber-sumber belajar sehingga siswa dapat memahami konsep dengan benar. Dalam situasi ini terjadi konflik antara apa yang ada pada siswa dengan situasi yang sengaja diciptakan. Interaksi yang aktif antara siswa dengan guru merupakan hal yang penting dalam konflik kognitif.

Kata kunci : konflik kognitif, scaffolding, pemahaman konsep

Pendahuluan

Dalam pengerttian yang sederhana, jika tidak terdapat kesamaan persepsi (pendapat atau paham) yang menimbulkan pertentangan antara dua kelompok, maka maka dikatakan bahwa telah terjadi konflik diantara dua kelompok tersebut. Demikian juga jika pada diri seorang individu terjadi kebimbangan dalam memilih satu atau lebih pilihan dari banyak pilihan yang tersedia maka pada diri seseorang tersebut terjadi konflik. Membuat keputusan atau member jawaban terhadap masalah atau pertanyaan tertentu dengan didasari alasan-alasan tertentu sering kali membuat kebimbangan dalam individu untuk menjawabnya, maka hal ini kita katakana telah terjadi konflik dalam diri individu yang bersangkutan.

Dalam kegiatan belajar, siswa atau mahasiswa sering mengalami kebimbangan dalam memastikan apakah solusi atau alas an yang dia kemukakan /berikan adalah suatu solusi yang benar atau salah. Memberi jawaban atau alasan terhadap suatu pertanyaan tentu terkait dengan kemampuan kognitif dari individu. Dalam situasi konflik yang terjadi sehubungan dengan kemampuan kognitif individu, dimana individu tidak mampu menyesesuaikan struktur kognitifnya dengan situasi yang dihadapi dalam belajar , maka dikatakan bahwa ada konflik kognitif dalam diri individu tersebut

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa konflik kognitif adalah suatu situasi dimana kesadaran seorang individu mengalami ketidakseimbangan (Mischel, 1971).

Demikian juga konflik kognitif adalah ketidakseimbangan kognitif yang disebabkan oleh adanya kesadaran seseorang akan adannya informasi-informasi yang bertentangan dengan informasi yang dimilikinya yang tersimpan dalam struktur kognitifnya. Konflik kognitif dapat juga muncul dalam lingkungan social ketika ada pertentangan pendapat/ pemikiran antara seseorang individu dengan individu lainnya pada lingkungan individu yang bersangkutan (Damon dan Killen, 1982) Sebagai contoh ketika seorang siswa belum bias memastikan ada berapa persamaan kuadrat yang akar-akarnya 4 dan -4, apakah terdapat tepat satu persamaan ataukah lebih dari satu persamaan kuadrat , ketika siswa tertegun dan bingung untuk menjawabnya maka kitakan siswa tersebut mengalami konflik kognitif.

Dalam situasi konflik kognisi, siswa akan memanfaatkan kemampuan kognitifnya dalam upaya mencari justifikasi, konfirmasi atau verifikasi terhadap pendapatnya. Artinya kemampuan kognitifnya memperoleh kesempatan untuk diberdayakan, disegarkan, atau dimantapkan, apalagi jika siswa tersebut masih terus berupaya.Misalnya siswa akan memanfaatkan daya ingatnya, pemahamannya akan konsep-konsep matematika ataupun pengalamannya untuk membuat suatu keputusan yang tepat.Dalam situasi konflik kognitif seperti ini, siswa dapat memperolh kejelasan dari lingkungannya, antara lain dari guru ataupun siswa yang lebih pandai(scaffolding). Dengan kata lain , konflik kognitif yang ada pada diri seseorang yang direspon secara tepat atau positif dapat menyegarkan dan memberdayakan kemampuan kognitif yang dimiliki siswa.

Membangun Konflik Kogitif

Sebagaimana telah diungkapkan sebelumnya, sesungguhnya konflik kognitif dapat terjadi dalam diri siswa, dan dapat terjadi sebagai dampak hadirnya interaksi pada suatu kelompok dengan lingkungannya, dalam hal ini kita katakan sebagai konflik sosial. Disadari atau tidak konflik kognitif sering muncul dalam aktifitas belajar mengajar , hal ini disebabkan karena kemampuan kognitif dari individu ataupun kelompok yang beragam serta sifat dari materi yang kita ajarkan.Artinya konflik kognitif dapat terjadi dalam belajar ketika tidak terjadi keseimbangan antara informasi atau pengetahuan yang telah dimilik oleh siswa dengan informasi yang dihadapi dalam suasana belajar.

Dalam hal situasi pemecahan masalah, siswa biasanya dihadapkan kepada tantangan-tantangan dan sering mereka berhadapan dengan kebuntuaan. Dengan menghadirkan suatu konflik kognitif dengan secara sengaja merupakan suatu upaya untuk membiasakan siswa dan memberi pengalaman bagaimana menghadapi suatu situasi yang tidak dikehendaki, memberi tantangan dan kesempatan kepada siswa untuk memantapkan pengetahuan dan ketrampilan matematika yang dimilikinya.

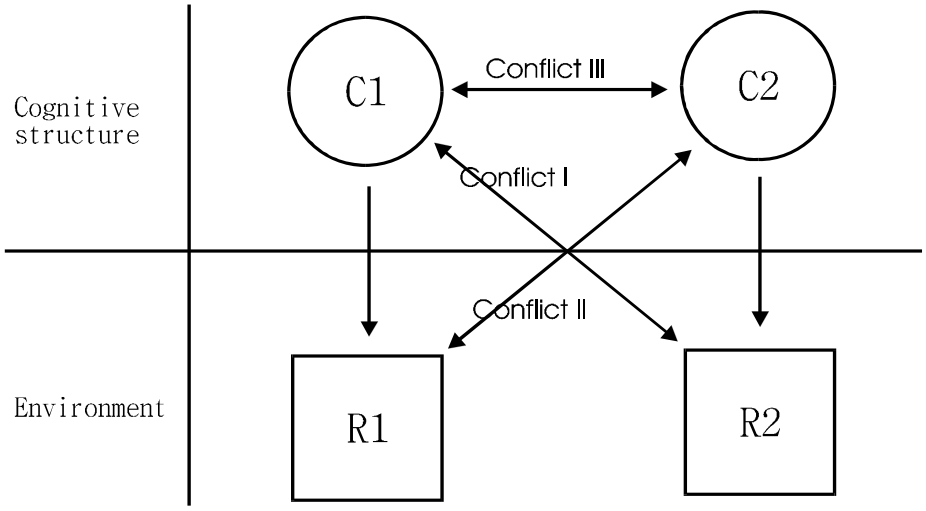
Sesungguhnya konflik kognitif terbentuk dan berkaitan dengan struktur kognitif dari individu dengan lingkungannya. Terdapat beberapa pendapat beberapa ahli yang mengungkapkan bagaimana konflik kognitif itu dibangun :

1. Piaget mengemukakannya dengan ketidakseimbangan kognitif, yaitu ; ketidak seimbangan antara struktur kognitif seseorang dengan informasi yang berasal dari lingkungannya, dengan kata lain terjadi ketidakseimbangan antara struktur-struktur internal dengan masukan-masukan eksternal

2. HAsweh mengemukakannya dengan ketidakseimbangan kognitif atau konflik metakognitif, yaitu: konflik diantara kemata-skemata dimana terjadi pertentangan antara struktur kognitif yang lama dengan struktur kognitif yang baru (yang sedang dipelajari atau yang dihadapi)

3. Kwon mengemukakan dengan Konflik kognitif, yaitu; konflik antara struktur kognitif yang baru (menyangkut materi barudipelajari) dengan lingkungan yang dapat dijelaskan tetapi penjelasan itu mengacu pada struktur kognitif awal yang dimiliki oleh individu

Gambar berikut merupakan versi yang disederhanakan oleh Kwon yang disajikan oleh Hasweh (Hasweh, 1986)



Gambar . Model Konflik Kognitifdari Kwon dan Lee (2001)

Gambar pada bagian atas menggambarkan tentang struktur-struktur kognitif, sedangkan gambar pada bahagian bawah menggambarkan stimulus-stimulus dari lingkungan. C 1 menyatakan konsep awal yang ada pada siswa, yang mungkin saja hal

ini merupakan miskonsepsi dari siswa.C 2 merupakan konsep yang akan dipelajari. R 1 menyatakan lingkungan yang dapat dijelaskan oleh C 1, sedangkan R 2 menyatakan lingkungan yang dapat dijelaskan oleh C 2

Jenis konflik yang dikemukakan oleh Piaget adalah antara C 1 dan R 2 (conflict I), sedangkan konflik kognitif yang dikemukakan oleh Hasweh adalah antara C1 dan C2 (conflict III) pada gambar. Sedangkan konfilk yang dikemukakan oleh Kwon adalah antara C 2 dengan R 1 (conflict II).

Terdapat beberapa pendefinisian tentang konflik kognitif. Ada banyak istilah yang digunakan oleh para peneliti dalam menggambarkan dan menjelaskan konflik kognitif, seperti ketidakcocokkan kognitif (*dissonance cognitive*), kesenjangan kognitif (*gap cognitive*), konflik konsep (*conceptual cognitive*), ketidaksesuaian (*discrepancy*), disequilibrium, konflik internal (*internal conflict*). Smedlund (1961) menggunakan kata equilibrasi nya Piaget dalam menyatakan konflik kognitif. Dari beberapa literatur kita dapat menemukan beberapa definisi konflik kognitif sebagai berikut:

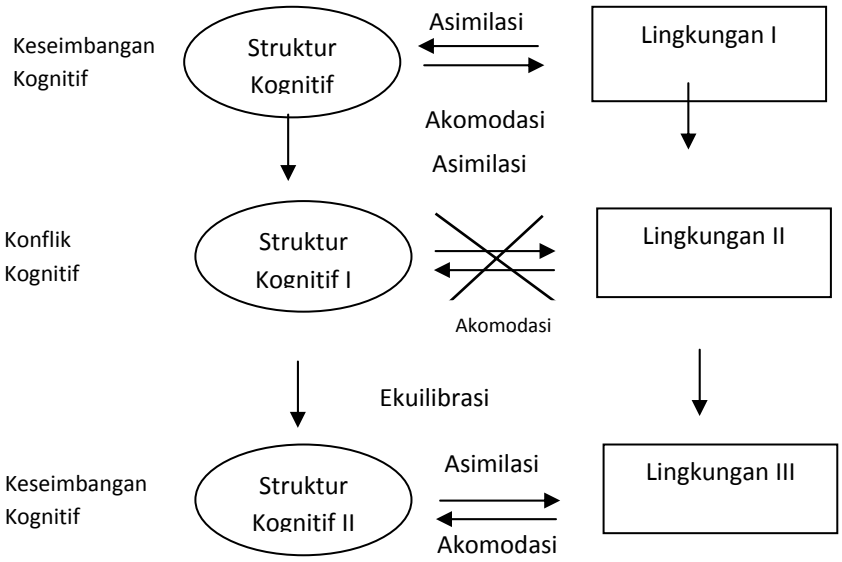
1. Kesadaran individu terhadap suatu disequilibrium pada suatu sistim skema (Mischel, 1971)
2. Merasa konsep yang dia miliki bertentangan dengan kosep yang dimiliki oleh orang lain (Damon dan Killen (1982).
3. Kesadaran akan ketidakcocokan informasi (Bodlakova 1988)
4. Kesadaran anak terhadap dua pendapat yang bertentangan (Wadsworth, 1996)
5. Konflik antara struktur pengetahuan yang dimiliki seseorang dengan lingkungannya (Kwon,1989)

6. Munculnya pertentangan antara struktur kognitif siswa atau pengetahuan awal siswa dengan sumber-sumber belajar dalam lingkungan belajar (Sabandar, 2005)

Dari beberapa pendapat yang dikemukakan para ahli maka dapat disimpulkan bahwa konflik kognitif adalah *keadaan dimana terdapat ketidak cocok antara struktur kognitif yang dimiliki dan dipunyai oleh seseorang dengan informasi yang baru dia dapat dari luar (lingkungan) atau informasi baru yang diterimannya tidak cocok dengan struktur kognitif yang telah dia miliki*.

Latar Belakang Spikologis

Secara psikologis, mulainya konflik kognitif dipandang sebagai suatu strategi untuk mengembangkan berfikir dipelopori oleh Sokrates. Sokrates memunculkan strategi konflik kognitif untuk merangang lawan bicaranya untuk berfikir. Namun dasar yang lebih jelas dalam memunculkan konflik kognitif ditemukan oleh Piaget. Piaget menamakan konflik kognitif tersebut dengan disekuilibrium. Piaget mengatakan bahwa suatu struktur kognitif (strutur pengetahuan yang terorganisir dengan baik di otak) selalu berintegrasi dengan lingkungannya melalui asimilasi dan akomodasi. Jika asimilasi dan akomodasi terjadi dengan bebas dengan lingkungannya (bebas konflik), maka struktur kognitif dikatakan dalam keaadaan ekuilibrium dengan lingkungannya., namun jika hal ini tidak terjadi pada seseorang, maka seseorang tersebut dikatakan pada keadaan yang tidak seimbang (disekuilibrium). Bilamana seseorang berada atau mengalami suatu disekuilibrium maka dia akan merespon terhadap keaadaan tersebut dan mencari keseimbangan (ekuilibrium) yang baru dengan lingkungannya.Gambar berikut menunjukkan proses perkembangan kognitif menurut Piaget (Kwon, 2001)



Proses Perkembangan Kognitif dar Piaget

Gambar diatas menerangkan bagaimana terjadinya konflik kognitif, pada level rendah, keseimbangan kognitif terjadi, sehingga tidak terjadi konflik kognitif meskipun terjadi asimilasi dan akomodasi, pada level ini informasi baru di asimilasi dan diakomodasi dengan baik, dengan kata lain informasi yang didapat ditangkap, dipahami sesuai dengan skemata yang telah ada dalam pikiran anak . Pada level menengah terjadi ketidakseimbangan kognitif atau terjadi konflik kognitif karena terjadi kekurangan data sehingga informasi yang didapat tidak cocok dengan pengetahuan atau struktur kognitif (skemata) yang dimiliki, sehingga informasi yang ada tidak dapat diasimilasi, akibatnya proses akomodasipun tidak terjadi terhadap informasi tersebut. Pada level ini, perlunya scafolding baik dari guru, maupun dari teman sebaya yang tidak mengalami konflik kognitif, disamping scafolding peranan metakognisi juga dapat membantu untuk mengakhiri konflik kognitif. Pada level yang lebih tinggi, equilibrium kognitif (re-equilibrium) terjadi akibat adanya rekonseptualisasi terhadap informasi sehingga terjadi keseimbangan baru dari apa yang sebelumnya bertentangan (konflik kognitif). Pada level ini keseimbangan kognitif terjadi karena adanya intervensi (scafolding) yang

dilakukan dengan sengaja oleh guru atau sumber lain sehingga proses asimilasi dan akomodasi berlangsung dengan lancar. Berdasarkan hal ini, maka dapat dikatakan bahwa disequilibrium kognitif atau konflik kognitif perlu dikondisikan agar terjadi suatu equilibrium pada tingkat yang lebih tinggi daripada equilibrium yang sebelumnya.

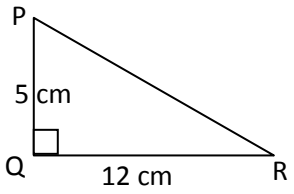
Contoh 1

Ketika anak diajarkan tentang mencari akar-akar persamaan kuadrat dari $ax^2 + bx + c = 0$, dan mereka sudah bisa menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, ketika persamaan kuadratnya dirubah kedalam bentuk $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, atau salah satu dari konstanta $b = 0$, atau $c = 0$, atau variabelnya (konstanta) diganti dengan variabel (konstanta) yang lain misalnya $py^2 + qy + s = 0$ kemudian anak disuruh menentukan akar-akarnya, bila anak dapat menentukan persamaan kuadrat tersebut maka pada diri anak tidak terjadi konflik kognitif, tapi bila anak bingung dan merasa aneh, asing dengan bentuk persamaan kuadrat yang dilihatnya sehingga anak tidak bisa menentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut dan merasa soalnya sulit atau tidak bisa dipecahkan , karena sudah berbeda bentuk degan yang telah dikenal anak , maka anak mengalami konflik kognitif (disequilibrium), dari sini guru atau teman bisa memberikan petunjuk (scafolding) atau metakognisi yang dilakukan oleh anak sehingga anak dapat merubah persamaan tersebut bisa kedalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, sehingga anak dapat menentukan akar-akarnya. Dengan pemberian scafolding atau metakognisi , maka anak akan mengakhiri konlik kognitif yang terjadi dalam dirinya, sehingga timbul pemahaman baru bagi sianak (equilibrium) bahwa ada berbagai bentuk persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ atau persamaan bisa dirubah kedalam berbagai bentuk. Ketika anak mencari sendiri akar-akar persamaan kuadrat maka anak dikatakan mencapai level

pengembangan aktual (*actual development*) , ketika anak mendapat bantuan orang lain (scafolding) dalam mencari akar-akar persaman kuadrat tadi, maka anak mencapai level pengembangan potensial (*potensial development)*. Area antara level pengembangan aktual dengan level pengembangan potensial disebut dengan ZPD (*zone of proximal development*).

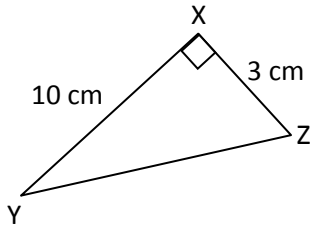
Contoh 2

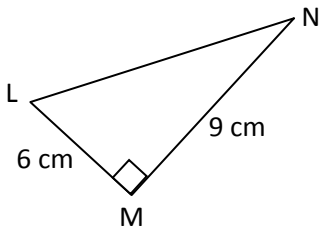
Misalkan anak sudah diajarkan cara mencari panjang sisi miring dari suatu segitiga PQR



Ketika anak disuruh untuk menentukan panjang sisi AB pada segitiga ABC, pada segitiga ABC, dimana gambar segitiganya berbeda segitiga dengan segitiga PQR, pada segitiga ABC sisi miringnya diketahui, dan letak sudut siku-siku berbeda dengan segitiga PQR, bila anak dapat menentukan panjang sisi AB, maka pada diri anak tidak terjadi konflik kognitif, tetapi bila pada pikiran anak muncul keanehan, keganjilan ketika melihat segitiga tersebut, dan anak tidak dapat menyelesaikan soal dengan baik , maka kita katakan bahwa pada anak telah terjadi konflik kognitif, untuk mengakhiri atau menghilangkan konflik kognitif itu, maka anak perlu diberi scafolding, atau metakognisi, sehingga anak paham dan mengerti cara menentukan panjang AB, dan segitiga siku-siku tidak harus berbentuk segitiga PQR

Hal yang sama juga berlaku bila anak disuruh untuk menentukan panjang sisi YZ dari segitiga XYZ, menentukan panjang sisi LN dari segitiga LMN





Kesimpulan

Konflik kognitif sering dijumpai oleh seseorang yang sedang belajar. Ada banyak istilah yang digunakan oleh para peneliti dalam menggambarkan dan menjelaskan konflik kognitif, seperti ketidakcocokkan kognitif (*dissonance cognitive*), kesenjangan kognitif (*gap cognitive*),konflik konsep(*conceptual cognitive*),ketidaksesuaian(*discrepancy*), disequilibrium, konflik internal (*internal conflict*).

Dari beberapa pendapat yang dikemukakan para ahli maka dapat disimpulkan bahwa konflik kognitif adalah *keadaan dimana terdapat ketidak cocokan antara struktur kognitif(skemata) yang dimiliki atau dipunyai oleh seseorang dengan informasi yang baru dia dapat dari luar, jadi informasi baru yang diterimannya tidak cocok dengan struktur kognitif yang telah dia miliki*.

Ketidakyakinan, keraguan kebingungan, kontradiksi, keanehan suatu konsep, mengenali keganjilan dan keanehan yang bertentangan dengan hal yang diharapkan, maka hal ini menjadi tanda-tanda dari konflik kognitif.

Piaget menyatakan bahwa skemata (struktur kognitif) didalam otak manusia berkembang melalui interaksi dengan lingkungannya melalui asimilasi dan akomodasi. Asimilasi adalah struktur pengetahuan baru dibuat atau dibangun atas dasar struktur pengetahuan yang sudah ada. Akomodasi, adalah struktur pengetahuan yang sudah ada dimodifikasi untuk menampung dan menyesuaikan dengan hadirnya pengalaman baru. Jika asimilasi dan akomodasi terjadi secara bebas (tanpa konflik), maka dikatakan bahwa struktur kognitif barada dalam keadaan equilibrium dengan lingkungannya. Sebaliknya, jika hal ini tidak terjadi pada diri seseorang, maka dikatakan ia mengalami ketidakseimbangan kognitif atau mengalami konflik kognitif (cognititive disequilibrium).

Ketidakseimbangan kognitif atau terjadi konflik kognitif karena terjadi kekurangan data sehingga informasi yang didapat tidak cocok dengan pengetahuan atau struktur kognitif (skemata) yang dimiliki, sehingga informasi yang ada tidak dapat diasimilasi, akibatnya proses akomodasipun tidak terjadi terhadap informasi tersebut. Untuk mengakhiri konflik kognitif perlun adanya scafolding baik dari guru, maupun dari teman sebaya yang tidak mengalami konflik kognitif, disamping scafolding peranan metakognisi juga dapat membantu untuk mengakhiri konflik kognitif. Dengan adanya scafolding dan metakognisi maka terjadi equilibrium kognitif (re-equilibrium) dan rekonseptualisasi terhadap informasi sehingga terjadi keseimbangan baru dari apa yang sebelumnya bertentangan (konflik kognitif). Keseimbangan kognitif terjadi karena adanya intervensi (scafolding) yang dilakukan dengan sengaja oleh guru atau sumber

lain dan metakognisi, sehingga proses asimilasi dan akomodasi berlangsung dengan lancar. Berdasarkan hal ini, maka dapat dikatakan bahwa disequilibrium kognitif atau konflik kognitif perlu dikondisikan agar terjadi suatu equilibrium pada tingkat yang lebih tinggi daripada equilibrium yang sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, L . W.,& Bourke, S. F. (2000). Assesing *affective characteristics in the schools.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Berlyne, D. E. (1960). *Conflict, arousal, and curiosity*. New York: McGraw-Hill

Bodrakova, W. V. (1988). The role of external and cognitive conflict in children's conservation learning. Doctorial dissertation, City University of New York.

Baser, M. (2006). Fostering conceptual change by cognitive conflict based instruction on students understanding of heat and temperature concepts, *Eurasi Journal of Mathematics, Science, and Technology Education, Volume 2, Number 2, July 2006*

Chantor, G. N.(1983). Conflict, learning, and Piaget: comments on Zimmerman and Blom's " Toward an empirical test of the role of cognitive conflict in learning". *Developmental Review*. 3, 39-53

Damon, W.,& Killen, M. (1982).Peer interaction and the process of change in children's moral reasoning. Merrill-Palmer Quartely, 28, 347-367

Kwon J, Lee,G. What do we know about students' cognitive conflict in science classroom: a theoreticial model of cognitive conlict process, diakses dari http:/www.ed.psu.edu/C1/Journals/2001

Niaz, M. (1995). Cognitive conflict as a teaching strtegi in solving chemistry problems, *Journal of Research in Science Teaching, Volume 32, issue 9*, 959-970

Miller, N. E (1994). Experimental studies of conflict. In Hunt, J. M., *Personality and the behavior disorder (Vol 1)*, NY: Roland

Movshovitz & Hadas, R. (1990). Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 265-287.

Roy & Howe, (1996). Effect of cognitive conflict, socio-cognitive conflict and imitation on childre's socio-legal thingking, *European Journal of Social Psychology*. 20, 241-252

Sabandar, J (2005) . *Pendekatan Konflik Kognitif pada Pembelajaran Matematika dalam upaya mengembangkan Kemampuan Berfikir Kritis dan Kreatif*. National Seminar On Operrational Research , FMIPA UNPAD

Sigel, I. E. (1979). On becoming a thingker: A psychoeducational model. *Educational Psychologist*. 14, 70-78

Smedsland, J .(1961) The acquisition of conservation of substance and weigh in children. *Scandanavian Journal of Psychology*, 2, 156-160.

Strauss, S. (1972). Inducing cognitive development and learning: A review of short-term training experiments. *Cognition, 1*, 329-357

Ting, C. Y. & Chong, Y . K. (2003). *Enhancing Conceptual Change trough Cognitive Tools: An Animated Pedagogigal Agent Approach*, Third IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies.

Vygotsky , L.S. 1978. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Editor: Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, Ellen Souberman . Cambrigde, Massachusetts: Havard University Press.

Wadsworth, B. J,(1996). *Piaget's theory of cognitive and affective development*. N.Y. Longman

Zimmerman, B. J.,& Blom, D. E., (1983). Toward an empirical test of the role of cognitive conflict in learning. *Developmental Review*. 3, 18-38

Zohar, A., dan Aharon. (2005). Exploring the effect of conflict cognitive and direct teaching for students of different academic level. *Journal of Research in Science Teaching, 42*, 829-855

Peran Penalaran dalam Pemecahan Masalah Matematik[*)]

E. Elvis Napitupulu[**)]

Abstrak

KTSP mengamanatkan penalaran dan Pemecahan masalah sebagai dua dari lima kompetensi yang harus dipunyai anak didik dan menegaskan agar pembelajaran matematika fokus pada pemecahan masalah. Dalam proses pemecahan masalah diperlukan setidaknya tiga komponen kognitif penting yaitu pemahaman, penalaran, dan metakognitif. Tulisan ini menyoroti apa penalaran dan bagaimana peranannya dalam proses pemecahan masalah. Obyek matematika berkarakteristik abstrak dan penalaranlah alat utama untuk memahami dan melakukan absraksi. Oleh karena itu penalaran memiliki peran sentral dalam proses pemecahan masalah.

Kata kunci: Penalaran, pemecahan masalah

1. Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Seperti dimaklumi, kurikulum yang saat ini diberlakukan di sekolah pendidikan dasar dan menengah ialah Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP). Dua di antara lima tujuan KTSP (Depdiknas, 2006), yang berbasiskan kompetensi ini, untuk mata pelajaran matematika ialah (1) menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika dan (2) memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh. Ini artinya KTSP memberi penekanan pada penguasaan kompetensi penalaran dan pemecahan masalah matematik dalam pembelajaran matematika di sekolah.

Penekanan yang diberikan KTSP tersebut kiranya sudah tepat mengingat rendahnya kompetensi anak Indonesia dalam pemecahan masalah. Laporan penelitian Suryadi (2005) menegaskan kelemahan siswa SMP dalam menemukan pola atau bentuk umum dan dalam membuat perumuman. Hasil serupa sebelumnya ditemukan Dahlan (2004) meski siswa telah mampu menemukan keteraturan pola untuk tiga langkah. Kedua hasil di atas memperlihatkan kelemahan anak dalam penalaran matematik yang diduga berimbas pada ketidak-mampuannya menyelesaikan masalah.

Skor rataan yang diperoleh siswa SMP kelas 8 Indonesia dalam penelitian yang dilakukan TIMSS tahun 1999 dan 2003 adalah 403 dan 411(Gonzales et al., 2004). Nilai yang tentu masih jauh dari rataan internasional sebesar 467 untuk tahun 2003. Skor khusus untuk aspek penalaran adalah 406 (Mullis, et al., 2005). Pun angka ini jauh sangat berarti di bawah skor rataan internasional yakni 467. Bila dirujuk ke *benchmark* yang dibuat TIMSS (Mullis dan Martin, 2006) maka nilai tersebut masuk pada kategori **rendah** dan bermakna siswa kita hanya memiliki sejumput pengetahuan dasar. Keadaan ini sangat jauh dari kategori *advanced* (625) di mana pada kategori ini siswa dapat mengorganisasikan informasi, membuat perumuman, memecahkan masalah tak rutin, mengambil dan mengajukan argumen pembenaran simpulan. Patut digaris-bawahi kategori itu pulalah yang sebenarnya dirumuskan KTSP untuk diraih siswa sebagimana disitir di awal tulisan ini.

Singapura menempatkan pemecahan masalah sebagai sentral pembelajaran dalam kurikulumnya dan terbukti berhasil menduduki peringkat pertama dalam dua kali evaluasi yang dilakukan TIMSS tahun 1999 dan 2003 untuk kelas 4 dan kelas 8. Demikian juga, Jepang dengan pendekatan pembelajaran *open-ended* yang menekankan pada pemecahan masalah berhasil menempatkan diri di kelompok atas untuk mata pelajaran matematika. Hal ini jelas memperlihatkan betapa memberikan tekanan secara eksplisit pada pemecahan masalah dalam kurikulum dan mengimplementasikannya di dalam kelas merupakan sesuatu yang tak dapat ditawar-tawar lagi.

Untuk dapat memecahkan masalah maka ada beberapa komponen kognitif penting yang seyogianya dipunyai anak. Selain itu, masalah yang dihadapkan kepada mereka mestinya memang masih dalam jangkauan kognitifnya meski tidak serta merta ia dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan prosedur atau algoritma tertentu yang tinggal pakai.

Komponen pertama adalah pemahaman terhadap masalah. Anak seyogianya memahami fakta, konsep, atau prinsip yang dikandung masalah. Jika konteksnya adalah membangun pengetahuan baru melalui pemecahan masalah maka ia harus mencari pengertian konsep atau prinsip yang termuat dalam masalah tersebut. Pengertian baru yang ia peroleh ini lalu kemudian dihubungkan dengan pengetahuan dan pengalaman yang telah ia miliki sebelumnya untuk memilih dan menentukan strategi apa yang mesti ia jalankan untuk memecahkan masalah itu.

Pekerjaan menghubungkan atau membuat pengaitan antara konsep baru dengan pengetahuan dan pengalaman, dan menentukan strategi itu sangat bergantung pada kemampuan penalaran anak. Inilah komponen ke-dua yang sangat esensial dan dapat dikatakan sebagai motornya pemecahan masalah. Komponen ke-tiga adalah metakognitif. Yang terakhir ini berkenaan dengan kemampuan anak untuk memantau, mengendalikan, dan mengevaluasi kerjanya sepanjang pemecahan masalah berlangsung. Dari ketiga komponen itu maka tulisan ini fokus pada penalaran dan peranannya pada saat pemecahan masalah berlangsung.

1.2 Rumusan Masalah

Pusat perhatian tulisan ini ialah menjawab pertanyaan apa penalaran dan bagaimana penalaran terkait dengan serta apa peran penalaran dalam pemecahan masalah.

1.3 Tujuan

Sesuai dengan permasalahan yang dikemukakan maka tulisan ini bertujuan untuk menguraikan apa penalaran, bagaimana penalaran terkait dengan pemecahan masalah, dan apa peran penalaran dalam pemecahan masalah.

1.4 Manfaat

Melalui tulisan ini diharapkan guru matematika sebagai agen sekaligus fasilitator pembelajaran kian memahami apa penalaran, bagaimana kaitannya dengan dan apa perannya dalam pemecahan masalah. Dengan pemahaman itu diharapkan pula guru dapat mengimplementasikan pembelajaran yang mendorong untuk tumbuh dan kembangnya keterampilan bernalar anak bahkan sejak usia yang paling dini. Dengan demikian, tujuan yang dirumuskan dalam KTSP tersebut di atas pada gilirannya dapat diharapkan terwujud.

2. Pembahasan

2.1 Penalaran Matematik

Bernalar sebagai bagian dari berpikir merupakan kegiatan yang tak pernah berhenti - baik disadari maupun tidak - sepanjang orang masih menjalani kehidu-pannya dengan normal sebab berpikir itu sendiri melekat pada kehidupan dan merupakan berkah yang hanya tercurah untuk manusia.

Mengutip O'Daffler dan Thornquist, Artzt dan Yaloz-Femia (NCTM 1999, p.117), merumuskan bahwa penalaran matematik adalah bagian dari berpikir matematik yang meliputi membuat perumuman dan menarik simpulan sahih tentang gagasan-gagasan dan bagaimana gagasan tersebut saling terkait. Jika pemecahan masalah memainkan peran sentral dalam matematika, maka penalaran tampaknya memainkan peran serupa dalam pemecahan masalah.

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 1989) memberikan tanda-tanda proses penalaran sedang berlangsung, yaitu bila: (a) menggunakan coba-ralat dan bekerja mundur untuk menyelesaikan masalah, (b) membuat dan menguji dugaan, (c) menciptakan argumen induktif dan deduktif, (d) mencari pola untuk membuat perumuman, dan (e) menggunakan penalaran ruang dan logik. Dari standar pemecahan masalah oleh NCTM dan penjelasan ini tampak penalaran matematik merupakan bagian utuh dari pemecahan masalah. Penalaran mendasari semua aspek atau komponen tingkat tinggi dari pemecahan masalah.

Peressini dan Webb (NCTM, 1999, p.157) berpendapat penalaran dapat dipandang sebagai suatu kegiatan dinamis yang mencakup berbagai jenis cara berpikir. Mengutip O'Daffler dan Thornquist, kedua penulis selanjutnya mengatakan penalaran matematik, yang memainkan peran mutlak dalam proses berpikir, meliputi mengumpulkan fakta, membuat dugaan, membuat perumuman, membangun argumen, dan menarik (dan menyahihkan) simpulan logis mengenai beragam gagasan itu dan hubungan-hubungannya. Sehubungan dengan itu, keduanya mengatakan penalaran matematik mencakup, namun tidak terbatas pada, induktif (termasuk mengenali dan mengembangkan pola), deduktif, bersyarat, kesebandingan, grafikal, spasial, dan abstrak. Dapat ditambahkan, sebenarnya penalaran pula yang digunakan untuk melakukan abstraksi.

Russel (NCTM, 1999, p.1) mengatakan penalaran matematik adalah pusat belajar matematika. Ia berargumen, matematika adalah suatu disiplin berkenaan dengan obyek abstrak dan penalaranlah alat untuk memahami abstraksi. Ia tambahkan penalaranlah yang digunakan untuk berpikir tentang sifat-sifat sekumpulan obyek matematik dan mengembangkan perumuman yang dikenakan padanya. Kita melihat pernyataan Russel sejalan dengan pengertian penalaran matematik dari O'Daffler dan Thornquist di atas, bahwa penalaran melibatkan beberapa keterampilan penting seperti menyelidiki pola,

membuat dan menguji dugaan (*conjecture*), dan menggunakan penalaran deduktif dan induktif formal untuk memformulasikan argumen matematik.

Dominowski (2002, p.57) menyatakan penalaran adalah jenis khusus dari pemecahan masalah. Dengan kata lain, penalaran adalah bagian tertentu dari pekerjaan memecahkan masalah yang dengan demikian merupakan bagian dari bermatematika (*doing mathematics*). Semuanya sejalan. Intinya, penalaran adalah alat untuk memahami matematika dan pemahaman matematik itu digunakan untuk menyelesaikan masalah. Pengalaman menyelesaikan masalah pada gilirannya memperkuat pemahaman dan penalaran matematik yang kemudian kembali menjadi modal untuk memecahkan masalah baru atau masalah yang lain lagi yang tentunya lebih rumit dan kompleks sifatnya. Demikian siklus berlanjut (spiral) itu seharusnya berlangsung.

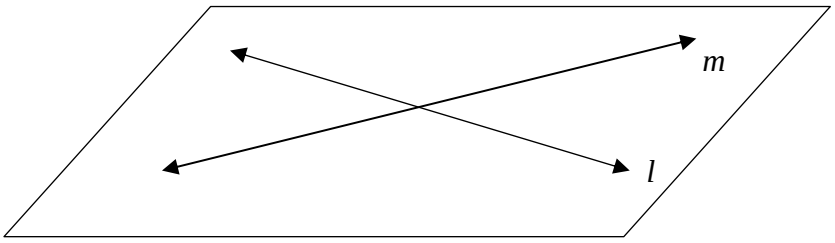
Bernalar merupakan suatu keterampilan yang dapat dilatih dan dikembangkan. Menurut NCTM (NCTM, 2000, p. 56), bernalar matematik adalah suatu kebiasaan, dan seperti kebiasaan lainnya, maka ia mesti dikembangkan melalui pemakaian yang konsisten dan dalam berbagai konteks. NCTM menambahkan, orang yang bernalar dan berpikir secara analitik akan cenderung mengenal pola, struktur, atau keberaturan baik di dunia nyata maupun pada simbol-simbol. Orang ini gigih mencari tahu apakah pola itu terjadi secara kebetulan ataukah ada alasan tertentu. Ia membuat dugaan dan menyelidiki kebenaran atau ketidakbenaran dugaan itu. Membuat dan menyelidiki dugaan adalah hal yang sangat penting dalam matematika, karena melalui dugaan berbasis informasilah penemuan matematik sering terjadi. Disposisi matematik seperti ini sangat diperlukan untuk menghadapi berbagai masalah terutama yang rumit untuk dipecahkan.

Menurut *Principles and Standards* (NCTM, 2000, p. 342), standar penalaran matematik meliputi (a) mengenal penalaran sebagai aspek mendasar dari matematika; (b) membuat dan menyelidiki dugaan matematik; (c) mengembangkan dan mengevaluasi argumen matematik; dan (d) memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran. Sehubungan dengan itu, dorongan dan kesempatan yang didapat anak di kelas untuk melakukan penalaran dalam kerangka memecahkan masalah matematik merupakan fondasi yang diperlukan untuk mencapai standar penalaran yang dirumuskan NCTM tersebut.

Membiasakan bernalar sejak hari-hari pertamanya di sekolah akan membuat anak sadar kalau tiap pernyataan yang dibuatnya memerlukan alasan pembenaran. Pertanyaan guru atau teman seperti, "mengapa bisa begitu", "bagaimana kita tahu itu benar", "adakah yang punya jawaban berbeda", atau "adakah cara lain mengerjakannya", dapat membantu anak melakukan penalaran untuk mengajukan argumentasi pendukung atau fakta yang berlawanan atau berpikir alternatif (divergen).

Sebagai contoh, guru dapat meminta siswa untuk membuktikan garis yang membagi dua sama besar sudut yang dibentuk dua garis yang saling berpotongan di satu bidang (gambar 1), berjarak sama terhadap kedua garis itu. Namun, penalaran anak akan lebih berkembang secara lentur bila tugas itu diungkap dengan menanyakan apakah ada garis (kalau ya, maka ada berapa banyak) yang berjarak sama terhadap dua garis yang berpotongan di sebuah bidang, dan kalau ya, bagaimana kita tahu itu.

Gambar 1.



Malloy (1999, p.13) mengatakan pertanyaan guru dan siswa merupakan suatu strategi untuk membantu anak menggunakan potensi kemampuan penalarannya terhadap obyek matematik. Dengan mengutip Wolf dan Sawada, Malloy menambahkan sewaktu guru meminta siswa untuk bernalar mengenai matematika lewat pertanyaan-pertanyaan menyelidik, maka anak pada dasarnya memiliki pemahaman matematik yang lebih baik dari yang kita bayangkan yang terlihat dari respon yang mereka berikan. Dalam hal ini perlu dicamkan bahwa bertanya (reflektif) merupakan bagian dari rangkaian pembelajaran. Oleh sebab itu, guru dituntut pula agar terampil mengajukan pertanyaan yang merangsang anak bernalar.

Untuk itu, pembelajaran di kelas mesti dirancang demikian rupa sehingga anak berani mengemukakan pikirannya tanpa harus merasa malu atau takut ditertawakan, dan tiap anak berkontribusi dengan cara menilai dan menanggapi pemikiran kawannya. Dengan demikian, seiring perjalanan proses pembelajaran berbagai ragam topik matematika

yang dilalui dan dialaminya di sekolah, maka penalaran aljabar, geometri, kesebandingan, peluang, statistika, dan sebagainya dari anak akan berkembang.

2.2 Pemecahan Masalah

Pemecahan masalah menempati kedudukan sentral dalam matematika. Jika matematika dipandang sebagai produk maka pemecahan masalah berada di jantungnya. Pandangan demikian didasarkan pada fakta bahwa berbagai konsep, prinsip, dan prosedur dicari dan ditemukan dengan tujuan agar dapat dimanfaatkan dan bermuara pada pemecahan masalah. Sementara itu, bila matematika dipandang sebagai suatu proses, maka pemecahan masalah juga berada di jantungnya. Demikian, karena pada umumnya kemunculan berbagai obyek matematik dimulai dan dipicu oleh adanya masalah yang harus diselesaikan atau adanya pertanyaan yang menuntut jawaban. Halmos (NCTM, 2000, p.341) mengatakan pemecahan masalah adalah jantungnya matematika.

De Corte, Depaepe, dan Verschaffel (2006) mencatat, di berbagai penjuru dunia sejak tahun tujuh puluhan berkembang suatu kecenderungan pemikiran bahwa pendidikan matematika seharusnya ditujukan pada pengembangan penalaran matematik, keterampilan memecahkan masalah, pembentukan sikap, dan kemampuan menggunakan keterampilan tersebut secara bermakna dalam situasi kehidupan nyata (aplikasi). Secara tajam *National Council of Supervisors of Mathematics* (Wilson, et al., 1997) menyatakan bahwa belajar memecahkan masalah merupakan alasan utama mengapa anak harus belajar matematika. Dalam konteks ini NCSM memandang pemecahan masalah sebagai tujuan belajar matematika. Keterampilan memecahkan masalah matematika diharapkan pada gilirannya dapat dialihkan ke dalam pemecahan masalah di luar matematika atau masalah yang terkait dengan keterampilan bermatematika.

Menyambut penegasan NCSM di atas, *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000, p.334) merumuskan standar pemecahan masalah. Rumusan tersebut menguraikan pembelajaran matematika harusnya memungkinkan siswa untuk (a) membangun pengetahuan yang baru baginya melalui pemecahan masalah; (b) menerapkan dan mengadaptasikan berbagai strategi yang bersesuaian untuk memecahkan masalah; (c) memonitor dan merefleksi proses pemecahan masalah matematik; dan (d) menyelesaikan masalah yang muncul dari matematika atau disiplin

lain. Jadi, melalui pemecahan masalah, siswa dengan bantuan kelompok dan/atau guru, membangun pengetahuan matematika yang baru baginya sambil belajar menggunakan strategi untuk memecahkan masalah berdasarkan pada pengetahuan yang sudah dipunyainya. Dalam konteks ini NCTM memandang memecahkan masalah sebagai sebuah proses untuk membangun pengetahuan.

Sehubungan dengan pemecahan masalah sebagai sebuah proses, maka basis pengetahuan matematika dan keterampilan mengelolanya memberi sumbangan berarti pada proses itu (Wilson, 1997). Telaah Wilson atas beberapa studi tentang pemecahan masalah matematik mengungkap siswa dengan basis pengetahuan yang baik adalah yang paling mampu menggunakan strategi huristik dalam belajar geometri. Selain itu, pemula fokus pada permukaan masalah sedang ahli mengategorikan masalah atas dasar prinsip dasar yang termuat dan ke struktur matematik mana yang paling mirip. Jadi pemecahan masalah dapat dipandang sebagai penerapan pengetahuan, pengalaman, dan keterampilan yang dipunyai pada situasi baru atau tidak dikenal untuk membangun pengetahuan baru.

Wilson (1997) melihat salah satu tujuan utama belajar matematika adalah mengembangkan kemampuan menyelesaikan berbagai ragam masalah matematik yang rumit. Dengan nada serupa Kilpatrick, et al. (2001, p. 420) menjelaskan studi di hampir setiap dari ranah matematika menunjukkan pemecahan masalah memberikan konteks penting di mana siswa dapat belajar beragam topik matematik. Kemampuan pemecahan masalah meningkat manakala anak berkesempatan menyelesaikan masalah dan melihat bagaimana masalah dipecahkan. Hal ini sejalan dengan studi Garofalo dan Lester dan juga oleh Schoenfeld (dalam NCTM, 2000) yang menemukan kegagalan siswa memecahkan masalah lebih disebabkan ketidak-tepatan strategi yang digunakan. Lebih jauh, pemecahan masalah menyediakan sarana mempelajari konsep baru dan melatih keterampilan yang sudah dipelajari.

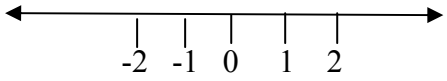
2.3 Penalaran dan Pemecahan Masalah Matematik

Penalaran analog atau induktif secara umum memainkan peran utama dalam penemuan matematik (Polya, 1954, p. v). Penalaran analog berfungsi sebagai sumber nyata (pasti) yang darinya anak dapat membangun model mental untuk konsep matematik (English, 1999). English melanjutkan, penalaran analog lebih menuntut kita melihat pada sifat-sifat yang berhubungan dari suatu fenomena atau ide ketimbang pernak-pernik

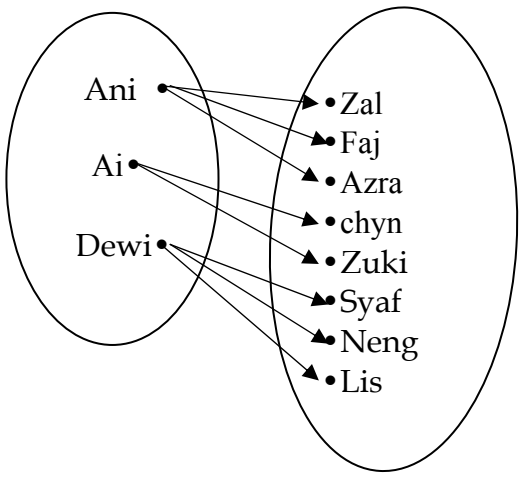
(features) di permukaan. Dan manakala hal ini gagal dilakukan, maka belajar anak menjadi tidak bermakna. English lebih lanjut mencontohkan bila kita menggunakan representasi matematik, maka kita sebetulnya meminta anak untuk bernalar analog.

Sebagai contoh, garis bilangan (Gambar 2a) dibuat untuk mencerminkan struktur konsep abstrak dari bilangan. Demikian pula dengan merepresentasikan sebuah relasi melalui diagram Venn (Gambar 2b).

Gambar 2a dan 2b



Garis bilangan ini adalah analog dari beberapa ide matematika. Artinya ia dirancang untuk mencerminkan struktur suatu konsep abstrak. Misalnya, "lebih besar", "negatif", dan lainnya.
Sementara diagram Venn di samping mencerminkan himpunan para ibu dan himpunan para anaknya yang relasi itu ditunjukkan oleh anak panah.



Untuk bernalar analogi pada garis bilangan misalnya, maka anak harus memetakan atau mengaitkan tiap bilangan dengan satu titik pada garis dan menempatkan bilangan nol pada titik tertentu. Selanjutnya, kedudukan bilangan di arah kanan dari nol adalah bilangan positif dan di arah kiri bilangan negatif. Selain itu, kaitan lain yang mesti dibuat anak adalah bilangan yang kian jauh ke kanan dari nol menunjukkan bilangan yang makin besar dan seterusnya. Apabila pengaitan ini gagal dilakukan maka itulah yang dikatakan English dan Halford dan juga oleh Hiebert dan Wearne belajar anak jadi tak bermakna.

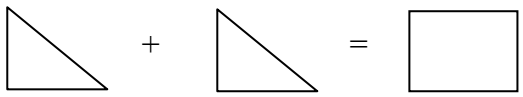
Novick (English, 1999, p. 25) menjelaskan penalaran analog dalam pemecahan masalah mencakup penggunaan suatu struktur masalah yang sudah diketahui (disebut sumber) untuk membantu memecahkan masalah baru terkait (disebut target). Maksud struktur di sini merujuk pada bagaimana gagasan matematik itu saling terkait tanpa melihat konteksnya. Dalam penelitiannya, English (1999)

menemukan banyak anak yang melihat masalah menurut pernik permukaannya, yaitu konteks yang serupa, dan bukannya pada keserupaan struktur. Untuk itulah, sangat perlu merancang masalah dari beragam konteks yang kaya dengan obyek matematik tetapi memiliki struktur serupa kepada anak untuk diselesaikan.

Russell (1999) menekankan empat aspek penalaran aktif di sekolah dasar. Yang pertama, esensi penalaran matematik adalah mengembangkan pembenaran (*justification*) dan menggunakan perumuman. Misalnya, pada saat anak menyelesaikan soal □ + 5 = 9, maka solusinya terkait langsung dengan perumuman di baliknya, yaitu □ = 9 + (-5), yang merupakan suatu prinsip dasar dalam menyelesaikan suatu persamaan struktur aljabar.

Ke-dua, penalaran matematik menuntun pada suatu jalinan dari pengetahuan matematik yang saling berhubungan dalam suatu ranah matematik. Misalnya dalam geometri, anak dapat menjalin hubungan yang didapatnya bila kedua bangun di bawah (Gambar 3) digabungkan, atau proses sebaliknya sewaktu hendak menemukan formula untuk menentukan luas daerah sebuah segitiga.

Gambar 3

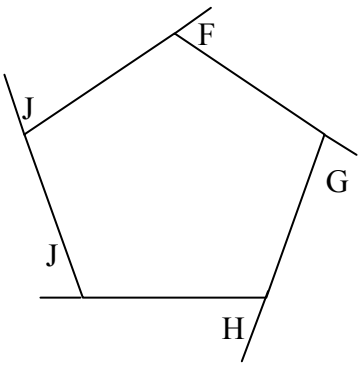


Ke-tiga, pengembangan jalinan pemahaman matematik seperti seperti di atas menjadi dasar dari kepekaan matematik yang menjadi basis untuk melihat ke intinya sewaktu anak berjumpa dengan masalah matematik. Misalnya, mencari faktor dari 120 selain 6 dan 20 atau sewaktu menghitung 6 x 20. Bukan hanya hasil 120 atau 6 dan 20 nya saja yang penting, melainkan juga berapa lagi faktor-faktor dari 120, dan perumuman apa yang dapat dibuat anak. Misalnya, dengan bertanya, apa kaitan hasil 6 x 20 dengan 6 x 10. Atau, apa ada faktor dari 120 diantara 120 dan 60, bagaimana mengetahuinya. Dengan pertanyaan terakhir ini bahkan guru telah dapat membawa anak pada penalaran bukti tak langsung selain mendorong anak untuk mulai mengembangkan kepekaan dan pendalaman matematik.

Ke-empat, perlu mengkaji penalaran keliru sebagai kawah menuju pengembangan mendalam pengetahuan matematik, karena bagaimanapun

penalaran cacat mesti terjadi di kelas. Artinya, tidak dapat diharapkan anak selalu bernalar dengan benar. Penalaran cacat selalu mengungkap isu penting matematik yang membuat orang lain (guru dan siswa lain, khususnya) turut memikirkannya sungguh-sungguh. Sebagai contoh, sewaktu anak menyelesaikan soal 36 x 17 = 40 x 20 – 4 – 3, maka guru, selain memikirkan cara jitu untuk menunjukkan penalaran anak tersebut keliru, perlu mengajak siswa lain memikirkannya. Dengan membiasakan anak bernalar secara benar sejak dini, maka kita dapat berharap anak yang meninggalkan bangku sekolah adalah anak yang bertanggung-jawab atas pemikirannya dan mereka yang mau dan sanggup menghadapi sekaligus menyelidiki masalah baru bagi mereka.

Di bagian lain, Russel (1999, p. 6) mengingatkan betapa penalaran membawa kita pada satu jenis ingatan yang berbeda dengan menghafal biasa (usaha untuk mengingat fakta tanpa ada hubungannya dengan jalinan penalaran). Menurutnya, dampak dari pengembangan dan penggunaan penalaran matematik lebih kuat, berupa ingatan yang lebih dapat dipercaya, yaitu ingatan tentang esensi hubungan matematik yang betul-betul mendasar. Misalnya, alih-alih menghafalkan rumus besar sudut dalam dari segi-n beraturan, maka akan jauh lebih bermakna bila pengetahuan anak tentang besar sudut keliling satu putaran dan sudut lurus digunakan dalam penalaran dan anak diajak untuk menyelidiki masalah tersebut. Berikut ini contoh untuk n = 5.



Gambar 5

Jumlah sudut-sudut (luar) F, G, H, I, dan J adalah 360^0 (gambar 5). Sudut yang besarnya akan dicari adalah sudut dalam (komplemen dari masing-masing sutu

itu). Maka kita tahu besar satu sudut luar itu adalah $\frac{360^0}{5}$. Dari itu diperoleh besar satu sudut dalam adalah 180^0 - $\frac{360^0}{5}$. Penalaran dapat dilanjutkan untuk mendapatkan rumus umum untuk segi-n.

3. Simpulan dan Saran

3.1 Simpulan

1. Pemecahan masalah menempati kedudukan sentral dalam matematika. Sejak tahun tujuh puluhan telah berkembang keinginan untuk menjadikan pemecahan masalah sebagai tujuan belajar matematika di samping sebagai suatu proses dalam pembelajaran.
2. Melalui pembelajaran dengan pemecahan masalah, siswa terkondisi terlibat membangun pengetahuan baru baginya berdasarkan pengetahuan dan pengalaman yang dipunyainya, menerapkan berbagai strategi untuk menyelesaikan masalah yang muncul dari matematika atau disiplin lain, dan menjalani proses berpikir reflektif (*know-how)*.
3. Pengetahuan dasar dalam ranah matematika yang berkaitan dan kemampuan menerapkan strategi yang sesuai adalah kunci keberhasilan dalam pemecahan masalah.
4. Merancang masalah yang baik dan sesuai kepentingan yang akan dijadikan pemicu belajar anak mutlak diperlukan agar tahapan belajar eksplorasi, formalisasi, dan asimilasi dapat dicapai.
5. Penalaran memainkan peran sentral dalam pemecahan masalah. Artinya penalaran merupakan tulang punggung tugas memecahkan masalah. Penalaran analog secara khusus berfungsi memediasi pembentukan model mental konsep matematik pada diri anak melalui representasi matematik.
6. Empat aspek panalaran yang perlu dikembangkan sejak anak di sekolah dasar ialah, pertama mengembangkan pembenaran (*justification*) dan menggunakan perumuman. Ke-dua, menuntun pada suatu jalinan dari pengetahuan matematik yang saling berhubungan dalam suatu ranah matematik. Ke-tiga, pengembangan jalinan pemahaman matematik akan menjadi dasar dari

kepekaan matematik yang menjadi basis untuk melihat ke intinya sewaktu anak berjumpa dengan masalah matematik. Dan terakhir, perlunya perlu mengkaji penalaran keliru sebagai kawah menuju pengembangan mendalam pengetahuan matematik.

7. Ingatan matematik yang didasarkan pada penalaran akan lebih kuat dan dapat dipercaya, yaitu ingatan tentang esensi hubungan matematik yang betul-betul mendasar dan berguna saat anak mesti memecahkan masalah baru lagi.

3.2 Saran

Sesuai dengan peran yang diambil oleh pemecahan masalah dan penalaran matematik dan dikaitkan dengan tujuan pembelajaran matematika di sekolah, maka sudah seyogianya implementasi pembelajaran yang mendorong tumbuh dan kembangnya kedua kemampuan di atas diwujudkan dan diperbaiki secara terus menerus. Untuk itu guru perlu terbuka menerima dan saling berbagi pengetahuan dan pengalaman dengan guru sejawatnya guna mendukung upaya tersebut. Jika sudah demikian maka perlahan namun pasti apa yang diharapkan diraih anak melalui pembelajaran matematika itu bukan lagi impian kosong yang hanya tersurat sebagai angan-angan.

Daftar Pustaka

Artzt, A.F. dan Yaloz-Femia, S. (1999). Mathematical Reasoning during Small-Group Problem Solving. Dalam Stiff dan Curcio (eds). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, Va: NCTM.

Dahlan, J.A., (2004). *Meningkatkan Kemampuan Penalaran dan Pemahaman Matematik Siswa Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama Melalui Pendekatan Pembelajaran* Open-Ended. Disertasi pada PPS UPI Bandung: Tidak Diterbitkan.

De Corte, E., F. Depaepe, dan L. Verschaffel. (2006). Investigating Social and Individual Aspects in Teachers' Approach to Mathematical Problem Solving. Dalam *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [Online], vol.2, pp.417-424. Tersedia: http:// www.emis.de/proceedings/PME30 [1 Desember 2007].

Depdiknas, (2006). *Permendiknas No.22 tahun 2006*. Jakarta : Depdiknas.

Dominowski, R. (2002). *Teaching Undergraduates*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates Publisher.

English, L.D., (1999). Reasoning by Analogy. Dalam Stiff dan Curcio (eds). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston: NCTM.

Gonzales, P., Guzmán, J.C., Partelow, L., Pahlke, E., Jocelyn, L., Kastberg, D., dan Williams. T., (2004). *Highlights From the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003 (NCES 2005–005)*. U.S. Department of Education. National Center for Education Statistics. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Kilpatrick, J. et al., (2001).*Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC : National Research Council.

Malloy, C.E., (1999). Developing Mathematical Reasoning in the Middle Grades: Recognizing Deversity. Dalam Stiff dan Curcio (eds). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, Va: NCTM.

Mullis, .V.S., Martin, M.O., dan Foy, P. (2005). *IEA's TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Mullis, I.V.S. dan Martin, M.O, (2006). *TIMSS in Perspective:Lessons Learned from IEA's Four Decades of International Mathematics Assessment*. TIMSS & PIRLS International Study Center Lynch School of Education, Boston College.

NCTM, (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston VA: NCTM.

NCTM, (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. Reston VA: NCTM.

Peressini, D. Dan Webb, N., (1999). Analyzing Mathematical Reasoning in Students' Response across Multiple Performance assessment Tasks. Dalam Stiff dan Curcio (eds). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, Va: NCTM.

Polya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference*: New Jersey: Princeton University Press.

Russell, S.J., (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. Dalam Stiff dan Curcio (eds). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Reston, Va: NCTM.

Suryadi, D. (2005). *Penggunaan Pendekatan Pembelajaran Tidak Langsung serta Pendekatan Gabungan Langsung dan Tidak Langsung dalam Rangka Meningkatkan Kemampuan Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP*. Disertasi pada FPS IKIP Bandung: Tidak diterbitkan.

Wilson, J.W. et al., (1997). *Mathematical Problem Solving* [Online]. Tersedia: http://jwilson.coe.uga.edu [10 Desember 2007].

MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA DENGAN MENERAPKAN PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE STAD PADA MATERI POKOK ALJABAR DAN ARITMATIKA SOSIAL DI KELAS 7C SMPN I PRINGSURAT TAHUN PELAJARAN 2008/2009

Abstrak

Oleh
Hidayati

Guru SMPNI Pringsurat
Jl.Kebumen,Kecamatan Pringsurat,Kabupaten Temangung 56272
E_MAIL: hdyt_tmg@yahoo.com

Bagi rata-rata peserta didik di Indonesia,matematika dengan pembelajarannya yang bersifat deduktif aksiomatik acapkali menyulitkan dan tidak mudah dicerna oleh pemahaman peserta didik.Oleh karena itu harus ada model pembelajaran yang dapat dipilih sebagai satu alternatif dari model-model pembelajaran yang lain.

Student Teams Achievemen Division(STAD) adalah sebuah aplikasi dari Pembelajaran Kooperatif seperti yang lainnya yaitu:Jigsaw,Group Investigation Tehnique,Structured Controversy,Team Goul Tornament,Numbered Heads Together dan yang lain-lainnya.STAD merupakan salah satu pembelajaran kelompok yang telah banyak diterapkan antara lain karena sederhana,mudah diterapkan,populer di kalangan ahli pendidikan matematika sebab paling awal ditemukan.

STAD memberikan kesempatan kepada masing-masing peserta didik untuk bertanggung jawab secara individual maupun kelompok.Dengan difasilitasi oleh STAD diharapkan interaksi yang terjalin mampu mendorong peserta didik satu sama lain didalam penguasaan materi pelajaran yang disajikan dan saling mendorong untuk menumbuhkan sebuah kesadaran bahwa kebersamaan dalam belajar mampu memberikan makna pembelajaran aktif yang menyenangkan yang penuh rasa kolegial antara peserta didik dan guru.

Key Words:Deduktif Aksiomatik,STAD,Kolegial.

A. PENDAHULUAN

Menurut Robert Edward Slavin(1997) Pembelajaran Kooperatif adalah Strategi Intruksional yang terstruktur serta sistematis dimana kelompok-kelompok kecil bekerjasama demi tercapainya suatu tujuan umum.Dua sifat kritikal yang dapat ditonjolkan dari pemebelajaran kooperatif adalah saling ketergantungan yang positif,dan akuntabilitas yang tinggi kelompok maupun individual.(Pamella Robinson at. all,2002).Dua sifat tersebut sangat penting didalam mengembangkan pencapaian prestasi yang signifikan.

Berbagai struktur mesti dimasukkan agar semua dapat merasakan tanggung jawab terhadap tim.Ada tiga hal yang perlu digarisbawahi didalam pembelajran kooperatif yaitu:

1. *Mareials Interdependence*

   Pemberian materi yang mesti dibagi antar kelompok.

2. *Task Interdependence*

   Memberikan tugas yang berbeda kepada anggota dari masing-masing kelompok diperlukan untuk mengembangkan masing-masing kelompok diperlukan untuk mengembangkan kohesi kelompok berupa sejumlah materi yang berlainan ,untuk dikasai dan selanjutnya mereka bagi dengan rekan-rekan sekelompok mereka.

3. *Goal Interdependence*gra

   Pada akhirnya sebagian kecil dari de(nilai) masing-masing peserta didik dapat bergantung pada masing-masing anggota tim yang meningkatkan kemampuan mereka dalam berbagai ujian.

Adapun ciri lainnya yang dapat dikemukakan disini adalah desakan akuntabilitas individual dalam pemberian grade yang dapat dikategorikan amat penting.

Meski banyak hal-hal positif seperti yang dituliskan diatas namun ada juga keluhan umum yang perlu diperhatikan adalah distribusi yang tidak merata dari muatan kerja terhadap para partisipan kelompok.

STAD (Student Achievment Division) adalah sebuah tipe dari Cooperative Learning yang dikembangkan oleh Robert Edward Slavin dkk merupakan tipe pembelajaran kooperatif yang paling populer di kalangan ahli pendidikan karena yang paling mula ditemukan dan banyak diterapkan karena paling mudah dan sangat sederhana yang lebih mengarahkan peserta didik kepada saling memberikan dorongan dan kerja sama yang membantu menguasai materi pelajaran dan akan sebuah kesadaran bahwa belajar itu amat penting dan suasana belajar yang menyenangkan sangat mendorong akan adanya kemampuan kepada penguasaan materi yang mantap. Rumusan Masalah diatas adalah:

Apakah penerapan model pembelajaran kooperatif tipe STAD dapat meningkatkan hasil belajar matematika di kelas 7c SMP N I Pringsurat tahun pelajaran 2008/2009 pada materi pokok Aljabar dan Aritmatika Sosial ?

Tujuan Penelitian:

1. Menumbuhkan kesadaran pada peserta didik akan sebuah pembelajaran aktif yang menyenangkan dan bermakna dari saling membantu dan mendorong timbulnya kemampuan penguasaan materi pelajaran bahwa belajar secara bersama-sama itu amat penting.
2. Meringankan beban pengajar didalam menghimpun aktifitas yang positif yang mendukung interaksi yang penuh kolegial antara pengajar dan peserta didik didalam menghela suatu pembelajaran yang sarat makna.
3. Memberikan wawasan yang lebih luas kepada para pengajar khususnya dapat dijadikan masukkan bagi yang akan memilih dan menggunakan model pembelajaran kooperatif tipe STAD.

B. METODE PENELITIAN

1. Rancangan penelitian ini adalah:

   X X0 X1

   Keterangan:

   X = test kemampuan awal

   X0 = pembelajaran dengan model cooperative learning tipe STAD

   X1 = test evaluasi akhir

2. Bahan /Subyek Penelitian adalah peserta didik kelas 7c SMPN I Pringsurat tahun pelajaran 2008/2009

3. Prosedur Penelitian

   Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

   1) Melakukan observasi-observasi
   2) Menetapkan materi pokok yang akan digunakan sebagai bahan penelitian
   3) Menyusun program satuan pelajaran

4) Membuat Instrument penelitian
5) Melakukan uji coba instrument penelitian
6) Melakukan kegiatan di kelas dengan langkah-langkah sebagai berikut.
   a. Memberikan test awal pada kelas yang digunakan sebagai penelitian
   b. Melaksanakan pembelajaran dengan model cooperative learning tipe STAD
   c. Melakukan observasi pada kelas
   d. Memberikan test evaluasi akhir
7) Mengumpulkan,mengolah,dan menganalisis data
8) Membuat kesimpulan dan saran berdasarkan hipotesis

4. Instrument Penelitian

Penelitian ini menggunakan instrument: catatan harian/jurnal,lembar observasi, lembar test kemampuan awal, lembar test evaluasi akhir

5. Teknik Analisis Data

1)Sumber Data:Seluruh peserta didik kelas 7c SMPN I Pringsurat tahun pelajaran 2008/2009,dengan suasana proses pembelajaran di kelas dan semua aktifitas peserta didik beserta peneliti

2)Jenis Data:Data observasi proses pembelajaran aktif,data proses belajar peserta didik,data hasil test kemampuan awal,data hasil test evaluasi akhir

3)Cara Pengambilan data:data-data dikumpulkan melalui catatan di lapangan dari peneliti dan observer,didalam kegiatan ini data diambil secara terus menerus.

4)Variabel yang diukur pada penelitian ini adalah :hasil test evaluasi akhir sesudah model pembelajaran dilaksanakan ,uji beda t digunakan sebagai pengolahan data,test mid semester digunakan sebagai pembanding.

5)Metode yang digunakan adalah: metode test

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada saat awal diskusi kebanyakan peserta didik masih belum mengerti bagaimana membagi materi pelajaran yang telah diperolehnya.Bahkan ketika mengerjakan lembar kerja siswa tampaknya mereka masih dalam keegoan masing-

masing.Begitu penjelasan diberikan oleh guru dan memantau dengan penuh "keariefan"maka para peserta didik mulai tertata pada suasana yang lebih hidup dan mendukung diskusi berjalan dengan lancar dan sejuk.Solusi pada setiap masalah yang diajukan dapat teratasi dengan baik.Skor-skor yang diperoleh secara individual meningkat dan mendukung tim dis kusi kelompok untuk bersaing dalam persaingan yang sehat terhadap kelompok lain.Penghargaan berupa buku dan alat-alat tulispun menambah semangat para peserta didik didalam meraih skor yang lebih tinggi lagi.Hal yang dapat diamati adalah saling kerjasama dan saling memotivasi yang timbul karena pemahaman peserta didik yang cukup mantap pada materi pelajaran memudahkan memperoleh skor yang lebih tinggi.Ditemukannya perbedaan yang sangat signifikan dengan t -82,342 dengan probabilitas .000 pada taraf kepercayaan 95 %.Fasilitasi dari STAD membantu dan memotivasi peserta didik untuk meningkatkan hasil belajar menjadi lebih tinggi.

D. Simpulan dan Saran

Simpulan

Dengan melihat hasil penelitian dan pembahasan diatas dapat dijadikan dasar juga untuk menjawab segala permasalahan yang ada serta dapat ditunjukkan bahwa model cooperative learning tipe STAD meningkatkan hasil belajar peserta didik menjadi lebih tinggi didalam pembelajaran materi pokok aljabar dan aritmatika sosial

Saran

Bagi yang akan menggunakan model pembelajaran kooperatif tipe STAD perlu dicermati hal-hal yang tidak mendukung misalnya peserta didik yang berpindah ke kelompok lain atau pemberian penghargaan yang tidak merata agar pemantapan(reinforcement) tetap melekat,memenuhi standard yang telah dicanangkan.

E. Daftar Pustaka

Dahlan,Jarnawi Afgani.2005.*Implementasi Pembelajaran Matematika Melalui Pendekatan Open-Ended Dalam Meningkatkan Kemampuan Penalaran Dan Pemahaman Matematika Siswa Sekolah Menengah Pertama (Studi*

*Eksperimen Pada SMP Negeri Di Kota Bandung).*Prosiding Seminar Nasional Matematika di UPI Bandung,tgl.25 Agustus 2005.ISBN:1693-0800

P.R.Teresia dan Jarnawi Afgani Dahlan.2005. *Implementasi Pembelajaran Matematika Melalui Model Kooperatif Tipe Student Achievement(STAD).Prosiding Seminar Nasion*al Matematika di UPI Bandung,tgl.20 Agustus 2005.ISBN:1693-0800

Hidayati.2006.Group *Investigation Dalam Cooperative Learning Untuk Meningkatkan Kemampuan Memecahkan Masalah Pada Pokok Bahasan Statistika Di Kelas II SLTP.Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIII di UNNES* tgl.24-27 Juli 2006.ISBN:979-704-457-2

Hidayati.2008.*Cooperative Learning tipe Contructive Controversy/Structured Controversy Untuk Merangsang Minat Belajar Peserta Didik Pada Materi Pokok Persamaan Linear Dua Variabel Di Kelas 8C SLTP N I Pringsurat(ARCR/Action Research Class Room).*Makalah Konferensi Nasional Matematika di UNSRI Palembang,tgl.24-27 Juli 2008.

Polya.G.1973.*How to Solve it.New Jersey*: Princetin University Press

Slavin,Robert E.1997.*Cooperative Learning: Theory , Research and Practice.*Boston:Allyn and Bacon

Sudjadi,R.2000.Kiat *Pendidikan Matematika di Indonesia(konstatasi keadaan masa kini menuju kehidupan masa depan).*Jakarta:Dirjen Dikti Depdiknas

Ruseffendi,ET.1988.*Pengantar kepada membantu guru mengembangkan kompetensinya dalam pengajaran matematika untuk meningkatkan CBSA*.Bandung:Tarsito

Rosyada,D.2004.*Paradigma Pendidikan Demokrasi*.Jakarta:Prenada Media

Turmudi.2002.*Belajarkan Matematika yang bermakna*.Jakarta:Buletin Pusat Pembukuan Diknas

REKONSTRUKSI
TINGKAT-TINGKAT BERPIKIR PROBABILISTIK
SISWA SEKOLAH MENENGAH PERTAMA

Oleh:
Imam Sujadi
Prodi. Pendidikan Matematika FKIP UNS
Email: imamsujadi@ymail.com

Abstraks

Pemikiran siswa dalam menjawab suatu permasalahan probabilistik, mempunyai tingkatan berpikir yang berbeda-beda Untuk mendeskripsikan pemikiran probabilistik siswa , Jones, dkk (1997,1999) mengajukan empat level atau empat tingkat berpikir probabilistik. Level-1 dihubungkan dengan berpikir non kuantitatif atau berpikir subjective. Level- 2 dipandang sebagai masa transisi antara berpikir subjectif dan berpikir kuantitatif yang alami . Level 3 berkaitan dengan berpikir kuantitatif secara informal. Level 4 memasukkan penalaran secara numeric. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa Siswa SMP di Indonesia yang secara formal belum mendapatkan pembelajaran peluang, terdapat penjenjangan dalam berpikir probabilistik, yang meliputi level-0 pra subjectif, level-1 subjectif, level-2 transisional, level-3 kuantitatif informal, dan level-4 numerik. Hasil penelitian ini juga menunjukkan bahwa dengan manipulasi benda kongrit serta penggunaan animasi komputer dalam memecahkan masalah probabilistik dapat membantu siswa yang berada pada tingkat berpikir pra subjectif untuk memahami hasil yang mungkin bila suatu percobaan dilakukan.

Kata kunci: berpikir probabilistik, tingkat berpikir, karakteristik level

A. PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Kata probabilitas/peluang banyak ditemui dalam matematika, dalam bidang ilmu lain, dan juga dalam kehidupan sehari-hari. Kata-kata lain yang diungkapkan dengan maksud yang sama dengan probabilitas/peluang, seperti kata kemungkinan, harapan, prediksi, atau kesempatan sering digunakan dalam masalah keseharian yang bersifat probabilistik. Yang dimaksud suatu masalah probabilistik (*a probability situation*) adalah masalah yang memuat unsur ketidakpastian (*a situation involving uncertainty)*. Masalah yang memuat unsur ketidakpastian adalah suatu masalah yang mengacu pada suatu aktivitas atau eksperimen random yang bisa mendapatkan berbagai hasil yang mungkin, tetapi hasil yang pasti tidak dapat ditentukan sebelumnya secara tepat. Istilah berpikir probabilistik akan digunakan untuk mendeskripsikan pemikiran siswa dalam merespon bermacam-macam masalah probabilistik.

Mengambil keputusan dalam merespon masalah probabilistik merupakan bagian integral dari kehidupan manusia. Dengan kata lain banyak informasi dalam kehidupan sehari-hari yang diekspresikan dalam bentuk-bentuk probabilistik, dan keputusan yang diambil bergantung pada respon yang diberikan

Pemikiran siswa dalam menjawab suatu permasalahan probabilistik, mempunyai tingkatan berpikir yang berbeda-beda. Pengetahuan siswa tentang peluang tersebut merupakan suatu pengetahuan informal yaitu pengetahuan yang dibangun dalam setting non-akademik, sehingga dimungkinkan berbeda dengan konsep peluang secara formal yaitu konsep peluang yang dibangun dalam setting akademik.

Hasil prasurvey yang dilakukan peneliti memberikan informasi bahwa, sebelum pembelajaran di sekolah tentang peluang dilakukan, siswa SMP ada yang mampu menginterpretasikan peluang secara kualitatif maupun secara kuantitatif, mampu membandingkan peluang dua buah kejadian. Siswa secara informal telah mempunyai pengetahuan tentang peluang.

Memperhatikan alasan masing-masing siswa dalam menjawab permasalahan peluang baik secara kualitatif maupun kuantitatif, dapat dipahami bahwa sangat sulit untuk mengetahui pemikiran siswa tentang probabilitas. Menurut Hirsch dan O'Donnell (2001) kesalahan dalam menalar probabilistik dapat terjadi karena miskonsepsi tentang peluang. Penelitian tentang berpikir probabilistik siswa telah diungkapkan oleh beberapa ahli. Salah satu ahli yaitu Amir dan Williams (1995) mengungkapkan bahwa kultur yang meliputi bahasa, keyakinan (keagamaan), dan pengalaman (contoh: permainan) berpengaruh terhadap pengetahuan probabilistik informal siswa. Pengetahuan probabilistik informal (seperti: konsep-konsep informal, intuisi, heuristic, pendekatan hasil, dll) berpengaruh terhadap pemikiran probabilistik siswa. Tingkat pemikiran probabilistik siswa akan mempengaruhi siswa dalam belajar pengetahuan probabilistik formal (seperti: konsep-konsep formal, skill, kombinatorik, dll).

Terkait dengan hasil penelitian tersebut, meneliti pengertian siswa tentang probabilitas merupakan masalah yang kompleks. Masalah probabilitas mempunyai kekhususan relatif dibandingkan topik lain dalam matematika. Sangat tidak mungkin untuk menunjukkan suatu teori probabilitas dengan menggunakan suatu percobaan atau kejadian dengan sedikit percobaan. Simulasi-simulasi berguna dalam membantu siswa untuk mengerti tentang ketidakpastian dan ketakterprediksian dari suatu kejadian

tunggal, tetapi untuk memvalidasi suatu teori probabilitas dibutuhkan sekumpulan simulasi-simulasi yang sangat banyak. Kurangnya pengalaman siswa mengenai percobaan yang memuat banyak simulasi akan menghambat pemikiran siswa tentang peluang. Situasi ini yang membuat masalah probabilitas menjadi kompleks, mengingat sekumpulan simulasi yang berbeda bisa mendapatkan hasil yang berbeda. Dalam penelitian ini keterbatasan percobaan diatasi dengan menyediakan benda konkrit berupa Gasing, serta program animasi komputer tentang Rolet.

Sangat sulit untuk mengetahui pemikiran siswa tentang probabilitas. Misalkan siswa diberi masalah yang terkait dengan peluang suatu kejadian, kita mungkin mendapatkan beberapa jawaban yang sama, tetapi pendekatan yang dipakai untuk menjawab masalah tersebut kemungkinan sangat berbeda, diantaranya mungkin terdapat kesalahan dalam menalar. Menurut Hirsch dan O'Donnell (2001) kesalahan dalam menalar probabilistik dapat terjadi karena miskonsepsi tentang peluang. Hal ini berarti bahwa untuk menginvestigasi pemikiran siswa, kita perlu berbincang-bincang dengan mereka agar mereka menjelaskan pemikirannya. Meskipun demikian karena pengalaman mereka tentang bahasa probabilistik sangat terbatas, mereka kemungkinan mempunyai kesulitan dalam menjelaskan dengan benar pemikiran mereka. Hal ini membuat penentuan secara rasional pemikiran mereka menjadi kompleks. Semua alasan tersebut dapat diartikan bahwa investigasi pemikiran siswa terkait dengan situasi probabilistik adalah tugas yang kompleks tetapi juga menarik untuk diteliti.

Untuk mendeskripsikan pemikiran probabilistik siswa , Jones, dkk (1997,1999) membuat kerangka kerja untuk menilai tingkat berpikir probabilistik. Jones, dkk mengajukan empat level atau empat tingkat berpikir probabilistik. Level 1 dihubungkan dengan berpikir non kuantitatif atau berpikir *subjective.* Level 2 dipandang sebagai masa transisi antara berpikir subjective dan berpikir kuantitatif yang alami (*naive quantitative*). Level 3 berkaitan dengan berpikir kuantitatif secara informal. Level 4 memasukkan penalaran secara numeric (*numerical)*

Jones dkk (1997, 1999) merekomendasikan bahwa penelitian lebih lanjut diperlukan untuk menyelidiki apakah kerangka kerja yang dibuat untuk mendeskripsikan pemikiran probabilistik siswa sesuai dengan anak-anak dari latar belakang bahasa dan budaya yang berbeda. Siswa sekolah menengah di Indonesia mempunyai kultur yang berbeda dengan kultur siswa sekolah menengah yang

digunakan sebagai subyek penelitian Jones dkk di Amerika Serikat. Dengan melakukan investigasi konsepsi siswa tentang probabilitas, peneliti dimungkinkan dapat mendeskripsikan tingkat berpikir siswa sekolah menengah di Indonesia yang terkait dengan masalah probabilistik. Dengan menganalisis pemikiran siswa atau jalan pikiran siswa yang digunakan untuk merespon bermacam-macam masalah probabilistik kemungkinan dapat diketahui tingkat berpikir probabilistik siswa sekolah menengah di Indonesia.

Sejauh ini peneliti belum pernah menemukan hasil penelitian tentang karakteristik berpikir probabilistik siswa di Indonesia. Pada sisi lain, sekolah di Indonesia yang mempunyai latar belakang budaya dan bahasa yang berbeda juga memperkenalkan kepada siswa tentang teori formal probabilitas. Oleh karena itu peneliti mencoba menginvestigasi pemikiran siswa dalam merespon masalah-masalah probabilistik dalam rangka merekonstruksi tingkat-tingkat berpikir probabilistik siswa sekolah menengah.

2. Pertanyaan Penelitian

Berdasar latar belakang yang diajukan pertanyaan penelitian ini adalah sebagai berikut: Apa saja tingkat-tingkat berpikir probabilistik siswa sekolah menengah pertama dalam memecahkan masalah yang memuat unsur ketidakpastian?

3. Tujuan Penelitian

Sesuai pertanyaan penelitian yang telah diajukan maka tujuan penelitian ini adalah untuk merekonstruksi tingkat-tingkat berpikir probabilistik siswa sekolah menengah pertama dalam memecahkan masalah yang memuat unsur ketidakpastian yang valid dan reliabel.

4. Kegunaan Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat mengonstruk kembali tingkat-tingkat berpikir probabilistik siswa SMP di Indonesia yang secara formal belum mendapat pembelajaran tentang peluang, dan menghasilkan karakteristik tingkat-tingkat berpikir probabilistik siswa SMP yang memenuhi kriteria kredibilitas dan dependabilitas.

B. METODE PENELITIAN

1. Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk penelitian kualitatif verifikatif yang berpusat pada wawancara berbasis tugas (*the task-based interview*) (Widada, 2003). Data utama penelitian ini berupa kata-kata tertulis dan/atau lisan. Peneliti mempelajari hakekat dari pemikiran probabilistik siswa yang diawali dengan meminta siswa menyelesaikan masalah probabilistik secara tertulis dan dilanjutkan dengan wawancara untuk mengetahui konsepsi siswa tentang masalah probabilistik, mengidentifikasi pemikiran yang digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah tersebut. Pemikiran probabilistik siswa dikategorikan berdasarkan karakteristik berpikir probabilistik siswa.

2. Subyek Penelitian

Karena materi peluang secara formal dipelajari mulai dari kelas IX SMP semester I dan dibahas lagi setelah siswa di kelas XI SMA semester II , sedangkan penelitian ini ingin mengungkap pemikiran siswa dalam menyelesaikan masalah probabilistik sebelum mereka mendapatkan pembelajaran formal tentang peluang, maka subjek penelitian ini adalah siswa kelas VIII SMP. Subjek dipilih tidak secara acak, namun diambil dengan mempertimbangkan kemampuan siswa melalui hasil tes tertulis (yaitu tes penjajakan) tentang interpretasi peluang

3. Instrumen Penelitian

Instrumen utama penelitian ini adalah pewawancara (dalam hal ini peneliti sendiri) dan dipandu dengan instrumen lain berupa soal tentang masalah probabilistik, pedoman wawancara, serta alat bantu berupa gasing, dan animasi program komputer berupa rolet.

4. Teknik Pengumpulan Data

Pengumpulan data penelitian ini dilakukan oleh peneliti sendiri dengan cara memberikan lembaran tugas dan melakukan interview. Sumber data utama penelitian ini adalah jawaban siswa dan respon siswa selama proses diwawancarai, dan dicatat melalui catatan tertulis atau melalui perekaman audio MP3.

Wawancara berbasis tugas dilakukan dengan cara subyek diberi tugas dan diberi waktu untuk menyelesaikan. Setelah itu diwawancarai berdasar pada pedoman umum wawancara (pedoman wawancara terlampir). Wawancara dengan subyek penelitian bisa dilakukan lebih dari satu kali wawancara bergantung pada kecepatan masing-masing

subyek dalam menyelesaikan masalah , dan munculnya pertanyaan tambahan untuk menyelidiki secara mendalam pemikiran probabilistik siswa. Waktu yang dibutuhkan untuk wawancara maksimal 1 jam . Pada saat diwawancarai dilakukan pengamatan langsung, dan membuat catatan-catatan, serta direkam

5. Analisis dan Penafsiran Data

Untuk menjawab pertanyaan penelitian dilakukan langkah-langkah sebagai berikut: Subyek yang telah dipilih sebagai sumber data diberi lembar tugas untuk dikerjakan. Berdasar tugas yang dikerjakan, jawaban siswa dianalisis. Hasil analisis tersebut digunakan sebagai dasar dalam melakukan wawancara.

Proses analisis data dalam penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut ini: (1) mentranskrip data verbal yang terkumpul, (2) menelaah seluruh data yang tersedia dari berbagai sumber, yaitu dari hasil pekerjaan tugas tertulis, wawancara, pengamatan yang sudah dituliskan dalam catatan lapangan, (3) menyusun dalam satuan-satuan yang selanjutnya dikategorisasikan dengan membuat coding, (4) mengadakan reduksi data dengan membuat abstraksi. Abstraksi merupakan usaha membuat rangkuman yang inti, proses, dan pernyataan-pernyataan yang perlu dijaga untuk tetap berada di dalamnya; (5) analisis hal-hal yang menarik, dan (6) penarikan kesimpulan. Proses pengkodingan pada penelitian ini menggunakan bantuan komputer menggunakan software Nvivo versi 2.0. Perumusan teori dalam penelitian ini menggunakan metode perbandingan tetap.

C. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Untuk memperoleh hasil penelitian yang memenuhi kriteria kredibilitas dan dependabilitas, pada bab ini akan diuraikan kegiatan yang dilakukan serta hasil yang diperoleh untuk masing-masing tahap yang meliputi: proses dan hasil pengumpulan data, proses dan hasil analisis data , serta diskusi temuan. Adapun analisis transkrip hasil wawancara pengerjaannya menggunakan bantuan software Nvivo.

1. Proses dan Hasil Pengumpulan Data.

Proses pengumpulan data untuk rekonstruksi tingkat berpikir probabilistik siswa yang secara formal belum mendapatkan pembelajaran tentang probabilitas asasee mengikuti tahap-tahap sebagai berikut:

a. Merumuskan teori awal berupa draf tingkat berpikir probabilistik (*draf-0*), berdasarkan kajian teori.

b. Melakukan pra-penelitian untuk menunjukkan keberadaan tingkat berpikir probabilistik tersebut.
c. Merevisi draf tersebut berdasar temuan di lapangan dan merumuskan teori hipotetik, yang dinamakan perbaikan tingkat berpikir probabilistik (*draf-1*).
d. Melakukan pengambilan data untuk mengetahui keberadaan tingkat sekaligus karakteristiknya (*draf-2*).

Uraian lebih lanjut masing-masing tahap adalah sebagai berikut.

a. Merumuskan teori awal (*draf-0 tingkat berpikir probabilistik)* berdasar kajian teori

Pada tahap ini peneliti mengkaji teori-teori yang berkaitan dan relevan dengan tingkat kemampuan berpikir probabilistik, sehingga dikonstruksi draf tingkat berpikir probabilistik, seperti pada tabel sebagai berikut.

Tabel 1: Tingkat berpikir probabilistik yang dikemukaakan Jones dkk (*draf-0*)

TBP	Karakteristik	Indikator
1. Subjektif	Pemikiran siswa secara terus menerus terikat pada alasan subjective	▪ Mendaftar suatu himpunan tidak lengkap hasil eksperimen satu tingkat. ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat subyektif ▪ Mengenali kejadian tidak mungkin dan pasti ▪ Membandingkan peluang suatu kejadian dalam dua ruang sampel yang berbeda, biasanya berdasar pada pendapat subyektif ▪ Tidak dapat membedakan situasi probabilistik yang ”fair” dari yang ”tidak fair”
2. Transitional	Merupakan masa transisi antara berpikir secara subjektif dan berpikir secara kuantitatif yang dicirikan oleh pemikiran siswa yang naive dan seringkali berubah dalam mengkuantifikasi peluang	▪ Mendaftar suatu himpunan lengkap hasil eksperimen satu tingkat ▪ Kadang-kadang mendaftar dengan lengkap hasil-hasil eksperimen dua tingkat menggunakan strategi yang terbatas dan tidak sistematis. ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif tetapi kembali pada pendapat subyektif ▪ Membuat perbandingan peluang berdasar pada pernyataan kuantitatif (mungkin tidak benar-benar kuantitatif, dan mungkin mempunyai keterbatasan dimana kejadian-kejadian yang berdekatan terlibat) ▪ Mulai membedakan situasi probabilistik yang ”fair” dari yang ”tidak fair”
3.Kuantitatif Informal	Pemikiran pada level ini ditunjukkan melalui penggunaan strategi generative dalam mendaftar hasil eksperimen 2 tahap, dan mempunyai kemampuan	▪ Mendaftar secara konsisten hasil eksperimen dua tingkat menggunakan sebagian dari strategi generative ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif termasuk didalamnya situasi-situasi yang memuat hasil-hasil yang tidak berdekatan (noncontiguous outcomes). ▪ Menggunakan bilangan secara informal untuk membandingkan

	menyelaraskan dan mengkuantifikasi pemikiran mereka tentang ruang sampel dan peluang	probabilitas ▪ Membedakan kejadian-kejadian pasti, tidak mungkin, dan mungkin, dan menjustifikasi pilihan secara kuantitatif. ▪ Membuat perbandingan peluang berdasar pada pendapat kuantitatif yang konsisten. ▪ Memberikan alasan dengan penalaran kuantitatif secara valid tetapi terbatas pada kejadian yang tidak berdekatan (noncontiguous events) ▪ Membedakan generator peluang ”fair” dari yang ”tidak fair” berdasar pada penalaran numeric secara valid
4. Numerik	Siswa mampu membuat hubungan yang tepat tentang ruang sampel dan peluangnya, dan mampu menggunakan ukuran secara numerik dengan tepat untuk mendeskripsikan peluang suatu kejadian	▪ Menerapkan dan menggunakan strategi generatif yang memungkinkan mendaftar secara lengkap hasil eksperimen dua atau tiga tingkat ▪ Memprediksi paling mungkin atau paling tidak mungkin untuk eksperimen satu tingkat atau dua tingkat . ▪ Menyebutkan dengan pasti peluang suatu kejadian secara numerik (baik peluang yang real atau yang berbentuk unik) ▪ Menentukan ukuran peluang secara numeric dan membandingkan kejadian ▪ Menggabungkan hasil yang berdekatan (contiguous outcomes) dan hasil yang tidak berdekatan (noncontiguous outcomes) dalam menentukan peluang ▪ Menentukan kesamaan peluang secara numeric untuk kejadian-kejadian yang berkemungkinan sama.

b. Melakukan pra-penelitian untuk menunjukkan keberadaan tingkat berpikir probabilistik tersebut.

Untuk menunjukkan keberadaan tingkat berpikir probabilistik sebagaimana tertuang *Draf-0* , kerangka kerja tersebut diimplementasikan pada 2 siswa (siswa R1 dan siswa R2) kelas VIII-A SMP Negeri 1 Tempel Slemen Yogyakarta dengan menggunakan masalah Gasing. Siswa R1 adalah siswa yang banyaknya kesalahan dalam tes penjajagan adalah sedang, dan siswa R2 adalah siswa yang banyaknya kesalahan dalam tes penjajagan adalah banyak. *Draf-0* tersebut juga diimplementasikan pada 2 siswa yang lain (siswa R3 dan siswa R4) kelas VIII-B SMP Negeri 1 Tempel Sleman Yogyakarta dengan menggunakan masalah yang sama yaitu masalah pada Gasing. Siswa R3 adalah siswa yang banyak kesalahan dalam tes penjajagan adalah sedang dan Siswa R4 adalah siswa yang banyak kesalahan dalam tes penjajagan adalah sedikit.

Dari hasil analisis data tersebut terlihat bahwa sebagian besar indikator ditemukan pada siswa SMP yang secara formal belum mendapat pembelajaran tentang probabilitas. Meskipun demikian ada beberapa indikator yang belum ditemukan pada siswa SMP tersebut. Indikator pada kategori ruang sampel yang belum ditemukan pada

siswa SMP adalah indikator **1.1.1 Mendaftar suatu himpunan hasil-hasil eksperimen satu tingkat tetapi tidak lengkap.** Pada kategori Peluang suatu kejadian terdapat 2 indikator yang belum ditemukan yaitu indikator **2.2.1. Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat kuantitatif meskipun kadang-kadang kembali pada pendapat subyektif**, indikator **2.3.2. Menggunakan bilangan secara informal untuk membandingkan probabilitas,** dan indikator **3.4.2 Menggabungkan hasil yang berdekatan (contiguous outcomes) dan tidak berdekatan dalam menentukan peluang.**

Dari hasil analisis tersebut ditemukan karakteristik siswa yang tidak termuat dalam indikator yang tertuang dalam *draf-0*. Subyek R2, dalam konstruk ruang sampel tidak dapat mendaftar secara lengkap hasil eksperimen 2 tingkat. Untuk itu perlu dihipotesiskan bahwa ada karakteristik siswa yaitu ***"tidak dapat mendaftar secara lengkap hasil eksperimen 2 tingkat***" sebagai indikator baru dalam kategori ruang sampel.

Subyek R1 dalam kategori peluang suatu kejadian mengalami kesulitan membedakan kejadian pasti dan mungkin Subyek R2, dalam kategori perbandingan peluang "tidak dapat membandingkan peluang kejadian dalam satu ruang sampel" Untuk itu perlu dihipotesiskan bahwa ada karakteristik siswa yaitu ***"tidak dapat membandingkan peluang kejadian dalam satu ruang sampel"*** sebagai indikator baru dalam konstruk perbandingan peluang.

c. Merevisi *draf-0* berdasar temuan di lapangan dan merumuskan teori hipotetik, yang dinamakan perbaikan tingkat berpikir probabilistik (*draf-1*).

Berdasarkan temuan diatas dihipotesiskan ulang tingkat berpikir probabilistik beserta kerangka kerja yang akan digunakan untuk menilai tingkat berpikir probabilistik siswa SMP yang dinamakan *draf-1* sebagai berikut ini.

Tabel 2: Perbaikan Tingkat berpikir probabilistik (*draf-1*)

TBP	Karakteristik	Indikator
		▪ Tidak dapat mendaftar secara lengkap hasil eksperimen 2 tingkat ▪ Kesulitan membedakan kejadian pasti dan mungkin ▪ Tidak dapat membandingkan peluang kejadian dalam satu ruang sampel
1. Subjektif	Pemikiran siswa secara	▪ Mendaftar suatu himpunan tidak lengkap hasil eksperimen satu tingkat.

	terus menerus terikat pada alasan subjective	▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat subyektif ▪ Mengenali kejadian tidak mungkin dan pasti ▪ Membandingkan peluang suatu kejadian dalam dua ruang sampel yang berbeda, biasanya berdasar pada pendapat subyektif ▪ Tidak dapat membedakan situasi probabilistik yang ”fair” dari yang ”tidak fair”
2. Transitional	Merupakan masa transisi antara berpikir secara subjektif dan berpikir secara kuantitatif yang dicirikan oleh pemikiran siswa yang naive dan seringkali berubah dalam mengkuantifikasi peluang	▪ Mendaftar suatu himpunan lengkap hasil eksperimen satu tingkat ▪ Kadang-kadang mendaftar dengan lengkap hasil-hasil eksperimen dua tingkat menggunakan strategi yang terbatas dan tidak sistematis. ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif tetapi kembali pada pendapat subyektif ▪ Membuat perbandingan peluang berdasar pada pernyataan kuantitatif (mungkin tidak benar-benar kuantitatif, dan mungkin mempunyai keterbatasan dimana kejadian-kejadian yang berdekatan terlibat) ▪ Mulai membedakan situasi probabilistik yang ”fair” dari yang ”tidak fair”
3.Kuantitatif Informal	Pemikiran pada level ini ditunjukkan melalui penggunaan strategi generative dalam mendaftar hasil eksperimen 2 tahap, dan mempunyai kemampuan menyelaraskan dan mengkuantifikasi pemikiran mereka tentang ruang sampel dan peluang	▪ Mendaftar secara konsisten hasil eksperimen dua tingkat menggunakan sebagian dari strategi generative ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif termasuk didalamnya situasi-situasi yang memuat hasil-hasil yang tidak berdekatan (noncontiguous outcomes). ▪ Menggunakan bilangan secara informal untuk membandingkan probabilitas ▪ Membedakan kejadian-kejadian pasti, tidak mungkin, dan mungkin, dan menjustifikasi pilihan secara kuantitatif. ▪ Membuat perbandingan peluang berdasar pada pendapat kuantitatif yang konsisten. ▪ Memberikan alasan dengan penalaran kuantitatif secara valid tetapi terbatas pada kejadian yang tidak berdekatan (noncontiguous events) ▪ Membedakan generator peluang ”fair” dari yang ”tidak fair” berdasar pada penalaran numeric secara valid
4. Numerik	Siswa mampu membuat hubungan yang tepat tentang ruang sampel dan peluangnya, dan mampu menggunakan ukuran secara numerik dengan tepat untuk mendeskripsikan peluang suatu kejadian	▪ Menerapkan dan menggunakan strategi generatif yang memungkinkan mendaftar secara lengkap hasil eksperimen dua atau tiga tingkat ▪ Memprediksi paling mungkin atau paling tidak mungkin untuk eksperimen satu tingkat atau dua tingkat . ▪ Menyebutkan dengan pasti peluang suatu kejadian secara numerik (baik peluang yang real atau yang berbentuk unik) ▪ Menentukan ukuran peluang secara numeric dan membandingkan kejadian ▪ Menggabungkan hasil yang berdekatan (contiguous outcomes) dan tidak berdekatan dalam menentukan peluang ▪ Menentukan kesamaan peluang secara numeric untuk kejadian-kejadian yang berkemungkinan sama.

d. Melakukan pengambilan data untuk mengetahui keberadaan tingkat sekaligus karakteristiknya.

Draf-1 tersebut diimplementasikan pada siswa yang telah terpilih untuk diwawancarai, (siswa R5 sampai dengan R9) menggunakan masalah yang sama yaitu gasing .Dari hasil analisis data tersebut terlihat bahwa sebagian besar indikator ditemukan pada siswa SMP yang secara formal belum mendapat pembelajaran tentang

probabilitas. Meskipun demikian ada indikator yang belum ditemukan pada siswa SMP tersebut. Indikator pada kategori ruang sampel yang belum ditemukan pada siswa SMP adalah indikator 2.3.2. menggunakan bilangan secara informal untuk membandingkan probabilitas. Untuk mengungkap apakah indikator itu ada pada siswa SMP *draf-1* tersebut diimplementasikan pada siswa lain yang telah terpilih untuk diwawancarai (siswa R10 sampai dengan R13) menggunakan masalah yang sama yaitu gasing .

Dari hasil analisis data tersebut terlihat bahwa pada siswa SMP yang secara formal belum mendapat pembelajaran tentang probabilitas sebagian besar indikator dari *draf-1* tentang Perbaikan tingkat berpikir probabilistik, sekurang-kurangnya terisi oleh 2 subyek yang menempati tiap-tiap indikator. Temuan karakteristik siswa pada konstruk ruang sampel yaitu "*tidak dapat mendaftar secara lengkap hasil eksperimen 2 tingkat*" , kategorinya lebih rendah dari "*Kadang-kadang mendaftar suatu himpunan hasil-hasil eksperimen dua tingkat secara lengkap menggunakan strategi yang terbatas dan tidak sistematis*". Karakteristik siswa yamg paling rendah adalah "*Mendaftar suatu himpunan hasil-hasil eksperimen satu tingkat tetapi tidak lengkap*". Untuk itu secara teoritis kerangka kerja untuk menilai tingkat berpikir probabilistik dengan konstruk ruang sampel dapat diperbaiki menjadi TBP pra subyektif

Temuan karakteristik siswa pada konstruk Peluang suatu kejadian yaitu "*Kesulitan membedakan kejadian pasti dan mungkin* " , kategorinya lebih rendah dari "*Mengenali kejadian-kejadian tidak mungkin dan pasti*". Pada penelitian ini juga ada indikator yang belum ditemukan pada siswa SMP tersebut. Indikator pada konstruk peluang suatu kejadian yang belum ditemukan pada siswa SMP adalah indikator 2.3.2. menggunakan bilangan secara informal untuk membandingkan probabilitas. Pencarian subyek yang menempati indikator itu dianggap cukup jenuh sehingga dihentikan. Indikator 2.3.2 dihilangkan dan indikator 2.3.3 ditempatkan sebagai indikator 2.3.2. Untuk itu secara teoritis kerangka kerja untuk menilai tingkat berpikir probabilistik dengan konstruk peluang suatu kejadian dapat diperbaiki menjadi TBP pra subyektif .

Temuan karakteristik siswa pada konstruk Perbandingan Peluang yaitu "*tidak dapat membandingkan peluang kejadian dalam satu ruang sampel* " , kategorinya lebih rendah dari "*Membandingkan peluang suatu kejadian dalam dua ruang sampel yang berbeda, berdasar pada pendapat subyektif* ". Untuk itu secara teoritis kerangka kerja

untuk menilai tingkat berpikir probabilistik dengan konstruk perbandingan peluang dapat diperbaiki menjadi TBP pra-subyektif

Pada saat siswa memecahkan masalah probabilistik, meskipun siswa kesulitan membedakan kejadian pasti dan mungkin, pada diri siswa terjadi proses memformulasi pengetahuan matematika. Proses memformulasi pengetahuan matematika tanpa disadari menghasilkan pengenalan tentang kepastian atau ketakpastian, verifikasi atau penyangkalan tanpa pembuktian, karena itu diasumsikan bahwa aktivitas mental seseorang terdiri atas kognisi formal (*formal cognition*) dan kognisi intuitif (*intuitive cognition*) dari pengetahuan matematika. Kognisi formal merujuk kepada kognisi yang dikontrol oleh logika matematika dan bukti melalui induksi matematika atau deduksi (Fischbein, 1994).

Kognisi formal menyediakan cara ketat memahami pengetahuan matematika. Akan tetapi kognisi formal tidak menjelaskan setiap langkah berpikir dalam aktivitas matematika. Pengembangan kemampuan memahami dan menggunakan pengetahuan formal tidak sama dengan kreativitas bermatematika yang sangat diperlukan dalam "*doing mathematics*", seperti membuat dugaan atau klaim pengetahuan baru.

Jadi pada tingkat berpikir subjektif, siswa dimungkinkan belum menggunakan kesadaran berpikir, bersifat intuitif, serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relefan. Siswa yang mempunyai karakteristik seperti itu, Fischbein (1987) menjelaskan bahwa intuisi merupakan kognisi yang secara subyektif kebenarannya terkandung di dalamnya, dapat diterima langsung, holistik, bersifat memaksa dan ekstrapolatif. Kognisi intuitif berbeda dengan kognisi secara analitik. Penjelasan kebenaran suatu pernyataan karena harus membuktikan merupakan kognisi yang bersifat non intuitif, tetapi kebenaran yang munculnya secara subyektif dan diterima secara langsung (tanpa pembuktian secara formal) merupakan kognisi secara intuitif.

Setiap anak pada awalnya berpikir matematika secara intuitif. Berdasarkan pengetahuan intuitifnya itu, dalam perkembangan berpikirnya anak membangun/ mengonstruksi model bagi gagasan matematika yang diperolehnya. Model ini berupa seperangkat struktur yang diinternalisasikan dalam pikiran si anak, yang merepresentasikan/mewakili gagasan matematika tersebut.

Fischbein (1999) telah menyajikan karakteristik umum dari kognisi intuitif dalam matematika, yang merupakan sesuatu yang mendasar dan yang sangat nampak

dari suatu kognisi intuitif. Karakteristik intuisi tersebut adalah (1) kognisi langsung, kognisi *self evident* (*direct, self evident cognitions*), yaitu merupakan kognisi yang diterima sebagai feeling individu tanpa membutuhkan pengecekan dan pembuktian lebih lanjut, (2) kepastian intrinsik (*intrinsic certainty*), yaitu intuisi feeling tertentu dari kepastian intrinsik. Intrinsik bermakna bahwa tidak ada pendukung eksternal yang diperlukan untuk memperoleh semacam kepastian langsung (baik secara formal atau empiris), (3) pemaksaan (*coerciveness*), yaitu intuisi yang menggunakan efek memaksa pada strategi penalaran individual dan pada seleksinya dari hipotesis dan penyelesaian. Hal ini berarti bahwa individu cenderung menolak interpretasi alternatif yang akan mengkontradiksi intuisinya, (4) *Extrapolativeness*, yaitu intuisi yang kaitannya dengan kemampuan untuk meramalkan di balik suatu pendukung empiris, (5) keseluruhan (*globality*) adalah intuisi yang berlawanan dengan kognisi yang diperoleh secara logika, berurutan dan secara analitis.

Dari pengertian intuisi diatas, diperoleh pengertian bahwa intuisi merupakan kognisi yang secara subyektif kebenarannya terkandung di dalamnya, dapat diterima langsung, holistik, bersifat memaksa dan ekstrapolatif. Jadi berfikir intuitif termasuk dalam berpikir subyektif. Dari karakteristik intuisi, ada intuisi yang merupakan feeling individu tanpa membutuhkan pengecekan dan pembuktian lebih lanjut, dan tidak ada pendukung eksternal yang diperlukan. Selain itu ada intuisi yang kaitannya dengan kemampuan untuk meramalkan dibalik suatu pendukung empiris.

Pada intuisi yang merupakan feeling seakan-akan siswa belum menggunakan kesadaran berpikir, bersifat intuitif, serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan. Sedangkan pada *Extrapolativeness* yaitu intuisi yang kaitannya dengan kemampuan untuk meramalkan di balik suatu pendukung empiris, siswa sudah menggunakan pemikiran, meskipun terikat pada alasan subyektif. Untuk itu peneliti mengajukan suatu teori hipotetik bahwa TBP subyektif, akan diawali oleh tingkat berpikir pra subjektif dengan karakteristik belum menggunakan kesadaran berpikir, bersifat intuitif, serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan. Siswa yang mempunyai karakteristik seperti itu pada penelitian ini dikelompokkan dalam "**tingkat berpikir Pra Subjektif"**. Namun demikian siswa dimungkinkan telah mampu meramalkan, menggunakan pemikiran meskipun selalu terikat pada alasan subyektif. Siswa yang mempunyai

karakteristik seperti itu, pada penelitian ini dikelompokkan dalam "**tingkat berpikir subjektif".**Berdasar uraian tersebut dapat disusun perbaikan tingkat berpikir probabilistik siswa SMP seperti pada tabel 5 berikut ini.

Tabel 3: Perbaikan Tingkat berpikir probabilistik (*draf-2*)

TBP	Karakteristik	Indikator
0 Pra Subjektif	Belum menggunakan kesadaran berpikir, bersifat intuitif, serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan	101. Mendaftar suatu himpunan tidak lengkap hasil eksperimen satu tingkat 201. Kesulitan membedakan kejadian pasti dan mungkin 301. tidak dapat membandingkan peluang kejadian dalam satu ruang sampel
1. Subjektif	Pemikiran siswa secara terus menerus terikat pada alasan subjective	111. Mendaftar suatu himpunan hasil-hasil eksperimen satu tingkat secara lengkap 112. tidak dapat mendaftar secara lengkap hasil eksperimen 2 tingkat 211. Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat subyektif 212. Mengenali kejadian tidak mungkin dan pasti 311. Membandingkan peluang suatu kejadian dalam dua ruang sampel yang berbeda, biasanya berdasar pada pendapat subyektif 312. Tidak dapat membedakan situasi probabilistik yang "fair" dari yang "tidak fair"
2. Transitional	Merupakan masa transisi antara berpikir secara subjektif dan berpikir secara kuantitatif yang dicirikan oleh pemikiran siswa yang naive dan seringkali berubah dalam mengkuantifikasi peluang	121. Kadang-kadang mendaftar dengan lengkap hasil-hasil eksperimen dua tingkat menggunakan strategi yang terbatas dan tidak sistematis. 221. Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif tetapi kembali pada pendapat subyektif 321. Membuat perbandingan peluang berdasar pada pernyataan kuantitatif (mungkin tidak benar-benar kuantitatif, dan mungkin mempunyai keterbatasan dimana kejadian-kejadian yang berdekatan terlibat) 322. Mulai membedakan situasi probabilistik yang "fair" dari yang "tidak fair"
3. Kuantitatif Informal	Pemikiran pada level ini ditunjukkan melalui penggunaan strategi generative dalam mendaftar hasil eksperimen 2 tahap, dan mempunyai kemampuan menyelaraskan dan mengkuantifikasi pemikiran mereka tentang ruang sampel dan peluang	131. Mendaftar secara konsisten hasil eksperimen dua tingkat menggunakan sebagian dari strategi generative 231. Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif termasuk didalamnya situasi-situasi yang memuat hasil-hasil yang tidak berdekatan (noncontiguous outcomes). 232. Membedakan kejadian-kejadian pasti, tidak mungkin, dan mungkin, dan menjustifikasi pilihan secara kuantitatif. 331. Membuat perbandingan peluang berdasar pada pendapat kuantitatif yang konsisten. 332. Memberikan alasan dengan penalaran kuantitatif secara valid tetapi terbatas pada kejadian yang tidak berdekatan (noncontiguous events) 333. Membedakan generator peluang "fair" dari yang "tidak fair" berdasar pada penalaran numeric secara valid
4. Numerik	Siswa mampu membuat hubungan yang tepat tentang	141. Menerapkan dan menggunakan strategi generatif yang memungkinkan mendaftar secara lengkap hasil eksperimen dua atau tiga tingkat

	ruang sampel dan peluangnya, dan mampu menggunakan ukuran secara numerik dengan tepat untuk mendeskripsikan peluang suatu kejadian	241. Memprediksi paling mungkin atau paling tidak mungkin untuk eksperimen satu tingkat atau dua tingkat . 242. Menyebutkan dengan pasti peluang suatu kejadian secara numerik (baik peluang yang real atau yang berbentuk unik) 341. Menentukan ukuran peluang secara numeric dan membandingkan kejadian 342. Menggabungkan hasil yang berdekatan (contiguous outcomes) dan tidak berdekatan dalam menentukan peluang 343. Menentukan kesamaan peluang secara numeric untuk kejadian-kejadian yang berkemungkinan sama.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa setiap indikator tingkat berpikir probabilistik yang dihasilkan dari kajian teoritik maupun indikator tingkat berpikir probabilistik yang dikembangkan terdapat sekurang-kurangnya 2 siswa yang menempati indikator tersebut. Dengan demikian validitas teori yang dikembangkan dipenuhi, artinya indikator-indikator tersebut ada pada siswa kelas VIII SMP, yang secara formal belum mendapatkan pembelajaran tentang probabilitas. Indikator-indikator tersebut mempunyai keajegan/reliabilitas, hal ini ditunjukkan dengan adanya sekurang-kurangnya ada dua siswa yang menempati masing-masing indikator tingkat berpikir probabilistik yang dikembangkan (*draf-2*).

Tabel. 4.. Teori Hipotetik Karakteristik Tingkat Berpikir Probabilistik (TBP)

No	TBP	Karakteristik (Teori Hipotetik)
1	0. Pra Subjektif	Belum menggunakan kesadaran berpikir, bersifat intuitif, serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan
2	1. Subjektif	Pemikiran siswa secara terus menerus terikat pada alasan subjective
3	2. Transitional	Merupakan masa transisi antara berpikir secara subjektif dan berpikir secara kuantitatif yang dicirikan oleh pemikiran siswa yang naive dan seringkali berubah dalam mengkuantifikasi peluang
4	3. Kuantitatif Informal	Pemikiran pada level ini ditunjukkan melalui penggunaan strategi generative dalam mendaftar hasil eksperimen 2 tahap, dan mempunyai kemampuan menyelaraskan dan mengkuantifikasi pemikiran mereka tentang ruang sampel dan peluang
5	4. Numerik	Siswa mampu membuat hubungan yang tepat tentang ruang sampel dan peluangnya, dan mampu menggunakan ukuran secara numerik dengan tepat untuk mendeskripsikan peluang suatu kejadian

4.2. Proses dan Hasil Analisis Data

Selanjutnya, dari 13 siswa yang dianalisis untuk mengetahui karakteristik tingkat berpikir probabilistik dan tahap berpikirnya diambil 10 siswa . Alasan pengambilan 10 orang, karena masing-masing tingkat sudah terwakili oleh dua siswa sebagaimana tertera dalam tabel 4.20. Dari tabel tersebut dapat diketahui bahwa level-level tingkat berpikir probabilistik yaitu pra-subyektif, subyektif, transisional, informal kuantitatif, dan numerik memenuhi validitas, karena level-level tersebut ada pada siswa SMP yang secara formal belum mendapatkan pembelajaran tentang probailitas. Selanjutnya perlu dilakukan analisis untuk mengetahui reliabilitas dari level yang dikembangkan dan karakteristik siswa pada tiap-tiap level.

Tabel. 5. Pasangan Siswa yang Memenuhi Tingkat Berpikir Probabilistik

Siswa	Indikator Tingkat Berpikir Probabilistik																							
	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	0	1	1	2	3	4	0	1	1	2	3	3	4	4	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4
	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	3	1	2	3
R-6	1	0	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
R-11	1	0	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
R-3	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
R-7	0	1	1	0	0	2	0	2	1	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
R-12	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
R-13	0	1	1	3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
R-4	0	2	0	1	1	1	0	1	2	0	1	1	1	2	0	0	0	0	1	1	1	1	3	0	2
R-8	0	2	0	0	1	1	0	2	1	1	1	0	0	2	0	0	0	1	1	1	1	2	0	0	0
R-9	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	2	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	2
R-10	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	5	2
Tot	2	11	6	6	2	6	2	11	9	3	4	2	3	9	5	7	4	2	4	3	3	5	7	6	6

TBP-0 TBP-1 TBP-2 TBP-3 TBP-4

Analisis data untuk mengetahui reliabilitas tingkat-tingkat berpikir probabilistik yang dikembangkan dilakukan dengan metode perbandingan tetap. Hasil dari analisis ini digunakan untuk merekonstruksi tingkat-tingkat berpikir probabilistik yang terdiri dari 5 tingkat, yaitu pra-subyektif, subyektif, transisional, informal kuantitatif, dan numerik. Antar tingkat berpikir probabilistik terdapat karakteristik yang berjenjang dan

mempunyai karakteristik pokok yang berbeda. Karakteristik pokok yang dimaksud adalah ciri-ciri yang dimiliki siswa ketika memecahkan masalah-masalah probabilistik. Selain itu juga didapat tahap berpikir probabilistik dalam memecahkan masalah probabilistik. Pada bagian ini akan ditunjukkan proses analisis masing-masing subjek penelitian untuk tiap tingkat kemampuan berpikir probabilistik dan proses analisis dengan metode perbandingan tetap untuk tiap tingkat tersebut. Kegiatan pertama dilakukan untuk menunjukkan validitas teori yang dikembangkan, sedang kegiatan kedua untuk menunjukkan reliabilitasnya.

Pertama kali seorang siswa diminta mengerjakan tugas tertulis (sebagaimana terlampir). Setelah Siswa selesai mengerjakan tugas tertulis, Peneliti melakukan wawancara mendalam untuk menggali informasi serta memperjelas apa yang telah diungkapkan siswa dalam bentuk hasil pekerjaan tertulis. Wawancara mendalam ini merupakan salah satu bentuk triangulasi cara yaitu membandingkan apa yang dikerjakan siswa dalam bentuk tulisan dan apa yang diungkapkan siswa melalui hasil wawancara. Setelah selesai melakukan wawancara peneliti menanyakan apakah Siswa meyakini jawaban yang ia tulis atau yang dia jawab saat wawancara, dengan tujuan melakukan ferifikasi terhadap jawaban yang diberikan. Hasil analisis untuk 10 siswa yang menempati tiap tingkat berpikir probabilistik, menunjukkan bahwa hasil pekerjaan siswa belum jelas menunjukkan karakteristik tingkat berpikir probabilistiknya. Untuk itu analisis data penelitian ini lebih banyak berdasar pada hasil wawancara berbasis tugas yang telah dikerjakan.

Berdasar hasil analisis tersebut dapat disimpulkan bahwa secara valid dan reliabel tingkat berpikir probabilistik siswa SMP yang secara formal belum mendapatkan pembelajaran tentang probabilitas, dapat dibuat penjenjangan menjadi 5 tingkat, yaitu tingkat berpikir probabilistik pra subjektif (TBP-0), tingkat berpikir probabilistik subjektif (TBP-1), tingkat berpikir probabilistik transisional (TBP-2), tingkat berpikir probabilistik kuantitatif informal (TBP-3), dan tingkat berpikir probabilistik numerik (TBP-4). Adapun karakteristik dari masing-masing tingkat berpikir probabilistik sebagaimana tertera dalam tabel berikut ini.

Tabel. 6. Karakteristik dan Indikator Tingkat Berpikir Probabilistik siswa SMP

NO	TBP	Karakteristik	Indikator
1	Pra Subjektif	Siswa belum menggunakan kesadaran berpikir, pemikirannya bersifat intuitif serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan. Siswa mampu mengenali kejadian yang mungkin namun pemikirannya dipengaruhi oleh hasil yang paling mungkin. Siswa mengakui bahwa kemungkinan dapat dinyatakan dengan bilangan dalam bentuk prosen, meskipun hanya menduga.	▪ Mendaftar suatu himpunan tidak lengkap hasil eksperimen satu tingkat ▪ Kesulitan membedakan kejadian pasti dan mungkin ▪ Tidak dapat membandingkan peluang kejadian dalam satu ruang sampel
2	Subjektif	Pemikiran siswa secara terus menerus terikat pada alasan Subjektif. Alasan yang dikemukakan biasanya berdasar pada pengalaman yang pernah dijumpai. Siswa belum bisa memaknai perbandingan antara suatu bagian dengan keseluruhan	▪ tidak dapat mendaftar secara lengkap hasil eksperimen 2 tingkat ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat subyektif ▪ Mengenali kejadian tidak mungkin dan pasti ▪ Membandingkan peluang suatu kejadian dalam dua ruang sampel yang berbeda, biasanya berdasar pada pendapat subyektif ▪ Tidak dapat membedakan situasi probabilistik yang ”fair” dari yang ”tidak fair”
3	Transisional	Merupakan masa transisi antara berpikir secara subjektif dan berpikir secara kuantitatif yang dicirikan oleh pemikiran siswa yang naive dan seringkali berubah dalam mengkuantifikasi peluang . Siswa dapat menyatakan kemungkinan munculnya suatu kejadian menggunakan bilangan dalam bentuk prosen. Siswa mulai bisa memaknai perbandingan antara suatu bagian dengan keseluruhan	▪ Kadang-kadang mendaftar dengan lengkap hasil-hasil eksperimen dua tingkat menggunakan strategi yang terbatas dan tidak sistematis. ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif tetapi kembali pada pendapat subyektif
4	Kuantitatif informal	Pemikiran siswa pada level ini ditunjukkan melalui penggunaan strategi generative dalam mendaftar hasil eksperimen dua tahap, dan mempunyai kemampuan menyelaraskan dan mengkuantifikasi pemikiran mereka tentang ruang sampel dan peluang . Siswa belum bisa memaknai besarnya kemungkinan terjadinya suatu kejadian menggunakan frekwensi relatif. Siswa mampu menentukan besarnya kemungkinan terjadinya suatu kejadian menggunakan perbandingan antara banyaknya kejadian yang muncul dengan banyaknya hasil yang mungkin	▪ Mendaftar secara konsisten hasil eksperimen dua tingkat menggunakan sebagian dari strategi generative ▪ Memprediksi kejadian yang paling mungkin atau paling tidak mungkin berdasar pada pendapat secara kuantitatif termasuk didalamnya situasi-situasi yang memuat hasil-hasil yang tidak berdekatan (noncontiguous outcomes). ▪ Membuat perbandingan peluang berdasar pada pendapat kuantitatif yang konsisten. ▪ Memberikan alasan dengan penalaran kuantitatif secara valid tetapi terbatas pada kejadian yang tidak berdekatan (noncontiguous events) ▪ Membedakan generator peluang ”fair” dari yang ”tidak fair” berdasar pada penalaran numeric secara valid
5	Numerik	Siswa mampu membuat hubungan yang tepat tentang ruang sampel dan peluangnya, dan mampu menggunakan ukuran secara numerik dengan tepat untuk mendeskripsikan peluang suatu kejadian . Siswa menyatakan besarnya kemungkinan munculnya suatu kejadian menggunakan perbandingan banyaknya kejadian dengan banyaknya hasil yang mungkin. Siswa mulai bisa memaknai frekwensi relatif	▪ Menerapkan dan menggunakan strategi generatif yang memungkinkan mendaftar secara lengkap hasil eksperimen dua atau tiga tingkat ▪ Memprediksi paling mungkin atau paling tidak mungkin untuk eksperimen satu atau dua tingkat . ▪ Menyebutkan dengan pasti peluang suatu kejadian secara numerik ▪ Menentukan ukuran peluang secara numeric dan membandingkan kejadian ▪ Menggabungkan hasil yang berdekatan (contiguous outcomes) dan tidak berdekatan dalam menentukan peluang ▪ Menentukan kesamaan peluang secara numeric untuk kejadian-kejadian yang berkemungkinan sama

4.3. Temuan-temuan Menarik Terkait dengan Pemikiran Probabilistik

Pada penelitian ini ditemukan bagaimana anak yang berada pada tahap ***berpikir pra subjektif*** membangun pengetahuan tentang ruang sampel. Siswa R6 yang berada pada tahap berpikir pra subjektif, pada awalnya berpikir bahwa gasing itu kalau diputar, lempengnya akan berjalan satu putaran penuh (360°), sehingga kalau ada gasing yang terdiri dari 4 bagian diputarhasil yang mungkin bergantung pada awal perputarannya.

Skema yang dipunyai siswa R6 tentang perputaran, bahwa menurut pengetahuan intuitifnya berputar itu identik dengan mengelilingi satu lingkaran penuh yang sudutnya 360°, sehingga hasil yang mungkin dari suatu gasing apabila diputar bergantung dari nomor awalnya memutar, sebagai contoh kalau awalnya nomor 1, gasing akan berhenti di nomor 1, dan yang menempel pada alas bisa nomor 1 atau 3 (karena berseberangan).

Setelah siswa R6 melakukan manipulasi dan interaksi aktif dengan cara siswa memutar gasing, dan mengamati hasilnya, siswa R6 telah mengalami proses akomodasi yaitu proses pengintegrasian stimulus baru ke dalam skema tentang perputaran yang telah terbentuk secara tidak langsung.

Siswa R6 dengan melakukan manipulasi benda konkrit telah mengetahui bahwa kalau gasing diputar kemungkinan bisa berhenti pada semua nomor yang dimiliki gasing. Siswa R6 telah mampu mengubah struktur/ skema tentang perputaran, namun siswa tetap belum dapat melakukan penyesuaian skema yang baru dalam mendaftar hasil yang mungkin secara lengkap. Manipulasi benda konkrit dalam percobaan probabilitas mempunyai beberapa keterbatasan. Untuk mengantisipasi kelemahan tersebut Siswa R6 dihadapkan pada animasi komputer tentang rolet, yang prinsip kerjanya hampir sama dengan gasing. Dengan menggunakan animasi komputer siswa R6 telah mampu mengubah skema tentang perputaran yang dimiliki .

Siswa R6 sudah bisa mengubah skema tentang perputaran, bahwa hasil putaran tidak bergantung dari awal muternya. Namun karena siswa R6 berada pada tingkat berpikir pra subjektif, maka siswa belum menggunakan kesadaran berpikir, pemikirannya bersifat intuitif serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan, sehingga siswa belum mampu melakukan proses penyesuaian skema dalam merespon lingkungan.

Meskipun siswa belum mampu melakukan proses penyesuaian skema dalam merespon lingkungan, namun dapat diketahui bahwa perkembangan skema anak berlangsung terus menerus melalui adaptasi dengan lingkungannya. Adaptasi adalah proses penyesuaian skema dalam merespon lingkungan melalui asimilasi dan akomodasi. Pemberian sejumlah bantuan (perancahan atau *scaffolding*) kepada seseorang anak dalam tahap-tahap awal proses memformulasi pengetahuan matematika, merupakan suatu cara untuk membantu siswa dalam zona perkembangan terdekatnya di mana orang yang lebih mengetahui memberikan petunjuk atau saran secara bertahap.

Pada penelitian ini ditemukan bagaimana anak yang berada pada tahap ***berpikir pra subjektif*** membangun pengetahuan tentang perbandingan peluang. Siswa R11 yang berada pada tahap berpikir pra subjektif, berpikir bahwa apabila gasing diputar yang paling mungkin berhenti pada bagian yang bernomor berapa, siswa berfikir intuitif dan terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan.

Alasan siswa bahwa yang paling mungkin gasing berhenti pada nomor 4 karena 4 adalah angka yang paling besar, dan yang paling tidak mungkin adalah angka 1 karena angka 1 adalah angka yang paling kecil, menunjukkan bahwa pemikiran siswa terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan.

Setelah siswa R11 melakukan manipulasi dan interaksi aktif dengan cara siswa memutar gasing, dan mengamati hasilnya, siswa R11 telah mengalami proses equilibrasi yaitu proses penyeimbangan antara asimilasi dan akomodasi ke dalam skema tentang perbandingan peluang yang telah terbentuk secara tidak langsung. Keguncangan pemikiran R11 disebabkan karena di satu sisi angka yang paling besar 4 ternyata angka yang paling banyak muncul, namun angka paling sedikit muncul bukan angka yang paling kecil yaitu 1.

Siswa R11 dengan melakukan manipulasi benda konkrit telah mampu mengubah struktur/ skema tentang hasil yang paling tidak mungkin, namun siswa tetap berpikir bahwa hasil yang mungkin karena faktor untung-untungan. Manipulasi benda konkrit dalam percobaan probabilitas mempunyai beberapa keterbatasan. Untuk mengantisipasi kelemahan tersebut siswa R11 dihadapkan pada animasi komputer tentang rolet, yang prinsip kerjanya hampir sama dengan gasing. Dengan menggunakan animasi komputer

siswa R11 mampu mengubah skema tentang hasil yang paling mungkin, bukan pada bilangan yang paling besar.

Siswa R11 belum mampu melakukan proses penyesuaian skema dalam merespon lingkungan, namun dapat diketahui bahwa perkembangan skema anak berlangsung terus menerus melalui adaptasi dengan lingkungannya. Siswa R11 masih belum menggunakan kesadaran berpikir, dengan memberikan jawaban keberuntungan. Siswa R11 masih belum mampu menentukan hasil yang mungkin dalam suatu percobaan. Hal ini yang menyebabkan siswa R 11 tidak dapat menentukan peluang suatu kejadian dan membandingkan peluang.

D. KESIMPULAN

1. Siswa SMP kelas VII yang secara formal belum mendapatkan pembelajaran tentang probabilitas mempunyai penjenjangan dalam berpikir probabilisti. Adapun tingkat dan karakteristik masing-masing tingkat adalah sebagai berikut

NO	TBP	Karakteristik
1	Pra Subjektif	Siswa belum menggunakan kesadaran berpikir, pemikirannya bersifat intuitif serta terfokus pada aspek-aspek yang tidak relevan. Siswa mampu mengenali kejadian yang mungkin namun pemikirannya dipengaruhi oleh hasil yang paling mungkin. Siswa mengakui bahwa kemungkinan dapat dinyatakan dengan bilangan dalam bentuk prosen, meskipun hanya menduga.
2	Subjektif	Pemikiran siswa secara terus menerus terikat pada alasan Subjektif. Alasan yang dikemukakan biasanya berdasar pada pengalaman yang pernah dijumpai. Siswa belum bisa memaknai perbandingan antara suatu bagian dengan keseluruhan
3	Transisional	Merupakan masa transisi antara berpikir secara subjektif dan berpikir secara kuantitatif yang dicirikan oleh pemikiran siswa yang naive dan seringkali berubah dalam mengkuantifikasi peluang . Siswa dapat menyatakan kemungkinan munculnya suatu kejadian menggunakan bilangan dalam bentuk prosen. Siswa mulai bisa memaknai perbandingan antara suatu bagian dengan keseluruhan
4	Kuantitatif informal	Pemikiran siswa pada level ini ditunjukkan melalui penggunaan strategi generative dalam mendaftar hasil eksperimen dua tahap, dan mempunyai kemampuan menyelaraskan dan mengkuantifikasi pemikiran mereka tentang ruang sampel dan peluang . Siswa belum bisa memaknai besarnya kemungkinan terjadinya suatu kejadian menggunakan frekwensi relatif. Siswa mampu menentukan besarnya kemungkinan terjadinya suatu kejadian menggunakan perbandingan antara banyaknya kejadian yang muncul dengan banyaknya hasil yang mungkin

5	Numerik	Siswa mampu membuat hubungan yang tepat tentang ruang sampel dan peluangnya, dan mampu menggunakan ukuran secara numerik dengan tepat untuk mendeskripsikan peluang suatu kejadian . Siswa menyatakan besarnya kemungkinan munculnya suatu kejadian menggunakan perbandingan banyaknya kejadian dengan banyaknya hasil yang mungkin. Siswa mulai bisa memaknai frekwensi relatif

2. Manipulasi benda konkrit maupun animasi komputer dapat membantu siswa memperbaiki skema siswa yang berada pada tingkat berpikir probabilistik pra subjektif terkait dengan pengertian hasil yang mungkin, serta mengurangi pengaruh aspek-aspek yang tidak relevan, meskipun pada akhirnya siswa tetap belum mampu mendaftar anggota ruang sampel dari eksperimen satu tingkat

DAFTAR PUSTAKA

Amir, and Williams. 1995. *Cultural Influences on Children's Probabilistik Thinking*. Di downloud dari http://www.gen.umn.edu.artist/ pada tanggal 15 Januari 2005

Fischbein, E. and Grossman, A.: 1997, '*Schemata and intuitions in combinatorial reasoning'*,*Educational Studies in Mathematics* 34, 27–47.

Fischbein, E. & Schnarch, D. 1997. *The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively based Misconseptions*. *Journal Reasearch Teacher and Mathematics Education. Vol No. Vol 28*.

Hirsch and O'Donnell. 2001. *Representativeness in Statistical Reasoning : Identifying and Assesing Misconceptions*, Journal of Statistics Education, Volume 9, Number 2

Jones, G.A, dkk, 1997. *A Framework For Assesing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability*. Educational Studies in Mathematics, 32, 101-125

Jones, G.A, dkk, 1999. *Student's Probabilistik Thinking in Instruction*. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 487-519

Jones, G.A, dkk, 1999. *Understanding Students' Probabilistik Reasoning*. Reston, Virginia: The NTCM

NCTM, 2000. *Principles and Standards for School Mathematics* .USA. The NTCM

Shaughnessy, 2003. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics :Research on Students' Understanding of Probability*, NTCM

MENGEMBANGKAN *BOARD GAME* LABIRIN MATEMATIKA BAGI SISWA KELAS RENDAH GUNA MENGHINDARI *MIND IN CHAOS* TERHADAP MATEMATIKA[*]

Maman Fathurrohman, Hepsi Nindiasari, dan Ilmiyati Rahayu

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,
Universitas Sultan Ageng Tirtayasa.
Jl. Raya Jakarta Km 4, Pakupatan, Serang, Banten.

e-mail: maman@mail.ugm.ac.id

ABSTRACT

Matematika adalah salah satu mata pelajaran yang penting bagi siswa di sekolah. Hanya sayangnya banyak siswa yang beranggapan bahwa materi pembelajaran matematika adalah materi yang sulit dan tidak menyenangkan. Mengacu pada Buxton (1984 :1) and (1984 :85) kondisi ini terjadi karena adanya mind in chaos yaitu suatu kekacauan fikiran terhadap sesuatu tertentu (dalam hal ini adalah matematika). Dan upaya mengatasi hal tersebut adalah melalui pengalaman dan kegiatan (aktivitas) yang bisa memberikan gambaran yang baik dan positif terhadap sesuatu yang mengacaukan fikiran tersebut.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah R & D (Research and Development). Dimana prosesnya dibagi dalam tiga fase yaitu : 1). Pre-Research (Survey), 2). Development (Including expert judgement and field test experiments), dan 3). Impact factor.

Hasil penelitian adalah dikembangkannya board game labirin matematika yang secara signifikan diharapkan bisa memberikan pengalaman yang baik dan positif bagi siswa

Keywords : R & D, mind in chaos, board game

A. PENDAHULUAN

Matematika adalah satu mata pelajaran yang dianggap sulit bahkan oleh sebagian pelajar dianggap menakutkan. Demikian itu terjadi karena adanya rasa takut akan matematika yang mendekam dalam fikiran (Buxton, 1984:1). Rasa takut ini terjadi dikarenakan adanya *Mind in Chaos* (Buxton, 1984:85), yaitu suatu kesan negatif yang dibiarkan terjadi sejak mereka masih kecil, yang pada akhirnya hingga dewasa kesan

[*] Penelitian ini didanai melalui Proyek Penelitian Dosen Muda, DP2M, Dikti.

negatif tersebut, yang menyatakan bahwa matematika itu sulit dan menakutkan tetap tertanam.

Pada sisi lain, secara psikologis, siswa kelas rendah masih berada pada jenjang antara bermain dan sekolah (Astuti, 2001:21) pada masa ini mereka masih mencoba meningkatkan kemampuan dirinya. Upaya pendidikan yang tepat bagi mereka adalah pendidikan yang cenderung menyenangkan (bermain), dan memotivasi untuk meningkatkan inisiatif dan kreatifitas yang kelak akan memberikan pengaruh yang cukup besar pada masa yang akan datang.

Dalam upaya mengarahkan proses pendidikan yang sesuai bagi siswa kelas rendah, perlu suatu alat atau media yang sesuai pula. Alat atau media ini hendaknya alat atau media yang bisa digunakan untuk menghindari *mind in chaos* terhadap matematika. Salah satu pemikiran yang dikemukakan adalah: alat atau media tersebut merupakan alat atau media yang berbentuk permainan bagi siswa kelas rendah.

Oleh karena itu perlu tindakan mengembangkan alat atau media permainan, yang bertujuan untuk menghindari mind in chaos terhadap matematika untuk siswa kelas rendah guna menghindari *mind in chaos.*

B. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah R & D (Research and Development method). Secara umum tahapan penelitian dibagi tiga yaitu:

1. Tahap *Pre-Research* (**Tahap I**)

   Tahap ini dilakukan menggunakan metode survey yang ditujukan untuk mengetahui kondisi awal sebelum penelitian pengembangan dilakukan. Tujuan dari tahap ini adalah mengetahui eksistensi kondisi sebelum penelitian dilakukan dan memutuskan bentuk umum dari media pembelajaran atau alat permainan yang akan dikembangkan.

2. Tahap Pengembangan Produk (**Tahap II**).

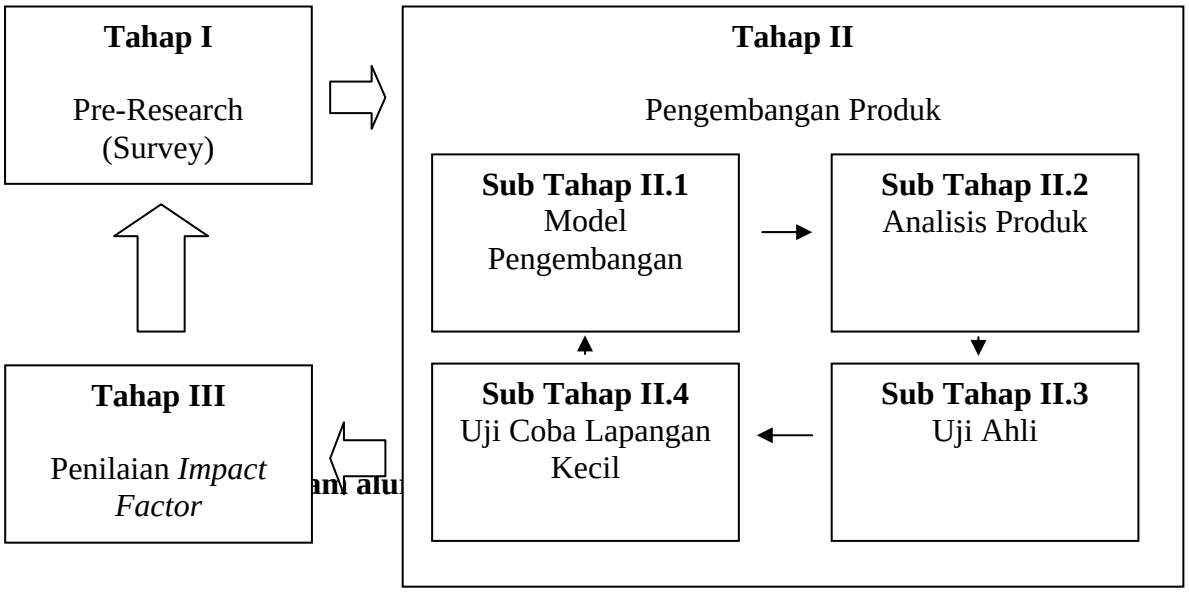
   Tahap ini merupakan kelanjutan dari tahapan sebelumnya. Tahap ini merupakan tahap inti yang bertujuan mengembangkan media pembelajaran atau alat permainan untuk menghindari mind in chaos terhadap matematika sesuai yang ditetapkan pada tahap sebelumnya. Tahapan ini, secara umum terdiri dari 1).

Model Pengembangan (**Tahap II.1**), 2). Analisis Produk (**Tahap II.2**), 3). Uji Ahli (**Tahap II.3**), 4). Uji Coba Lapangan Kecil (**Tahap II.4**).

3. Tahap Menilai *Impact Factor* (**Tahap III**)

   Tahap ini merupakan tahap terakhir dari tiga tahap yang direncanakan. Pada tahap ini produk yang dihasilkan dibawa ke sekolah dasar yang ditetapkan kemudian dilakukan proses penilaian impact factor produk yang dihasilkan.

Berikut ini diagram alur pengembangan yang direncanakan:



C. DESKRIPSI HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Tahap *Pre-Research*

a. Metode

Metode yang digunakan dalam tahap ini adalah metode survey. Pengambilan sampel dilakukan melalui *snow ball sampling method* dengan populasi utama adalah guru-*guru* sekolah dasar kelas rendah yang sedang mengikuti Studi S1 di PGSD Universitas Terbuka atau rekan guru di sekolahnya (Pada kasus guru yang di survey tidak mengajar di kelas rendah maka survey dilakukan terhadap rekan di sekolahnya yang mengajar di kelas rendah) pada Kelompok Belajar beberapa sekolah di Serang dan Anyer.

b. Deskripsi Hasil

Berikut ini adalah hasil dari survey yang telah dilakukan. Hasil survey ditekankan pada tiga hal pokok yaitu: **1). Identitas responden** untuk mengetahui validitas dan

reliabilitas data dilihat dari narasumbernya, **2). Deskripsi kebutuhan materi** untuk merumuskan materi yang akan menjadi materi pokok pada produk yang akan dikembangkan, dan **3). Deskripsi kebutuhan alat peraga dan alat permainan** untuk menjadi landasan pengembangan model produk alat peraga dan alat permainan yang akan dikembangkan:

- Identitas responden

Secara total ada tiga puluh dua (32) guru sekolah dasar yang berasal dari Serang dan Anyer yang menjadi responden pada kegiatan ini.

Tabel 1. Deskripsi Data Responden

Statistics

		Identitas Guru - Lama Menjadi Guru	Identitas Guru - Pendidikan Terakhir	Lama Mengajar Di Kelas Rendah	Semua Materi Tersampaikan
N	Valid	32	31	32	30
	Missing	0	1	0	2
Mean		16.6875	3.0323	4.6563	.9000
Median		17.5000	3.0000	3.0000	1.0000
Mode		20.00	3.00	1.00[a]	1.00
Std. Deviation		7.59642	.31452	4.12396	.30513
Variance		57.706	.099	17.007	.093
Range		24.00	2.00	19.00	1.00
Minimum		5.00	2.00	1.00	.00
Maximum		29.00	4.00	20.00	1.00

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown

Berdasarkan tabel di atas diketahui bahwa rata-rata lama mengajar para responden di Sekolah Dasar adalah 16 tahun (dengan pengalaman mengajar di kelas rendah sekitar 5 tahun). Kebanyakan responden menyatakan lama mereka mengajar di sekolah dasar adalah 20 tahun. Lama mengajar paling lama diantara responden adalah 29 tahun (dengan pengalaman mengajar di kelas rendah sekitar 20 tahun).

Ini memiliki makna bahwa para responden adalah guru-guru yang berpengalaman. Oelah karena itu mereka adalah orang-orang yang tahu persis tentang kondisi pembelajaran di Sekolah Dasar oleh karena itu secara logika dan rasional diharapkan informasi hasil yang mereka berikan terkait hasil survey ini adalah informasi yang nyata dan sesuai dengan kondisi lapangan.

Secara lebih detail, informasi mengenai lama menjadi guru dan pendidikan terakhir (lampiran 1) bahwa sebaran data lama mengajar responden adalah antara 5 tahun sampai 29 tahun. Jumlah para guru yang mengajar antara lama mengajar tersebut secara lengkap bisa dilihat pada tabel 2. Berdasarkan data juga diketahui, 12,5 %

responden memiliki lama mengajar sama yaitu 20 tahun. Adapun ditinjau dari pendidikan terakhirnya tampak bahwa 87,5 % responden berpendidikan D2.

- **Deskripsi Kebutuhan Materi**

Terkait dengan materi yang disampaikan (lihat lampiran 2). Sekitar 84,4 % responden menyatakan bahwa semua materi tersampaikan, lainnya menyatakan bahwa tidak semua materi tersampaikan.

Materi yang sulit dipahami siswa menurut responden cukup banyak dan bervariasi. Perlu diperhatikan bahwa untuk siswa SD kelas rendah calistung (membaca, menulis, berhitung) adalah materi yang amat perlu dikuasai. Tampak bahwa materi terkait berhitung (angka, bilangan, operasi penjumlahan, pengurangan, perkallian, dan pembagian) juga menurut hasil survey tergolong sulit dipahami oleh siswa.

Adapun untuk materi yang sulit diajarkan, tampak bahwa materi terkait berhitung (angka, bilangan, operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) juga menurut hasil survey tergolong sulit diajarkan ke siswa.

Oleh karena itu bisa direkomendasikan bahwa materi terkait berhitung (angka, bilangan, operasi penjumlahan, pengurangan, perkallian, dan pembagian) memerlukan alat permainan yang tepat agar mudah dipahami dan diajarkan ke siswa.

- **Deskripsi Kondisi Alat Peraga dan Alat Permainan**

Ditinjau dari alat peraga dan alat permainan yang telah digunakan di sekolah masing-masing, para responden memberikan informasi nama alat peraga dan alat permainan yang sudah (atau pernah) digunakan di sekolah. Berdasarkan hasil survey, Lampiran 3, tampak bahwa ada beberapa alat permainan yang sudah ternyata bisa digunakan. Beberapa diantaranya adalah monopoly, kartu, dadu, dan ular tangga. Tampak bahwa alat permainan-alat permainan tersebut bisa digunakan dalam pembelajaran matematika. Secara khusus alat permainan-alat permainan tersebut bisa digunakan adalah: 1). Mengenal angka dan bilangan, 2). Membaca dan menulis huruf dan lambang, dan 3). Berhitung.

Survey lebih mendalam tentang alat permainan memberikan gambaran yang lebih jelas tentang alat-alat permainan yang sudah ada dan bisa digunakan dalam pembelajaran matematika. Berdasarkan hasil survey, Lampiran 3, secara umum ada pandangan

bahwa alat permainan yang menggunakan sistem *board* game seperti monopoly dan ular tangga menurut hasil survey bisa digunakan dalam pembelajaran. Oleh karena itu, tampak bahwa sebenarnya bisa dilakukan inovasi alat permainan board game dengan secara khusus dipadukan dengan kartu dan dadu sebagai alat permainan yang mendukung pembelajaran matematika.

c. Simpulan Pre-Research

Berdasarkan hasil analisis kebutuhan alat permainan bagi siswa SD Kelas Rendah diketahui bahwa:

1. Dibutuhkan inovasi alat permainan tipe *board game* (yang sudah umum dikenal siswa, guru, dan sekolah) yang secara khusus dipadukan dengan kartu dan dadu, menjadi sebuah alat permainan inovasi yang mendukung pembelajaran matematika.
2. Alat permainan seperti yang direkomendasikan diatas sebaiknya alat permainan yang mendukung pembelajaran matematika pada materi yang penting bagi siswa kelas rendah tetapi sulit dipahami dan diajarkan ke siswa. Materi yang direkomendasikan untuk board game tersebut adalah materi terkait dengan berhitung (angka, bilangan, operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian).

2. Tahap Pengembangan Produk

Tahap ini merupakan kelanjutan dari simpulan tahap sebelumnya. Dalam tahap ini bisa diarahkan bahwa media atau alat permainan yang hendak dikembangkan adalah tipe *board game* (yang sudah umum dikenal siswa, guru, dan sekolah) yang secara khusus dipadukan dengan kartu dan dadu, menjadi sebuah alat permainan inovasi yang mendukung pembelajaran matematika. Sedangkan materi yang hendak didukung adalah materi pelajaran yang penting bagi siswa kelas rendah tetapi sulit dipahami dan diajarkan ke siswa. Materi yang direkomendasikan untuk board game tersebut adalah materi terkait dengan berhitung (angka, bilangan, operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian).

a. Model Pengembangan (Tahap II.1)

Menurut Soenarto (2005) ada tiga komponen yang diperhatikan dalam penelitian pengembangan yaitu: Model Pengembangan, Prosedur Pengembangan, dan Uji Coba Produk.

1). Model

Model pengembangan yang digunakan dalam penelitian ini adalah model pengembangan yang dikembangkan sutopo (2003) yaitu:

a). Konsep

Konsep board game yang dikembangkan didasarkan dari hasil survey kebutuhan alat permainan.

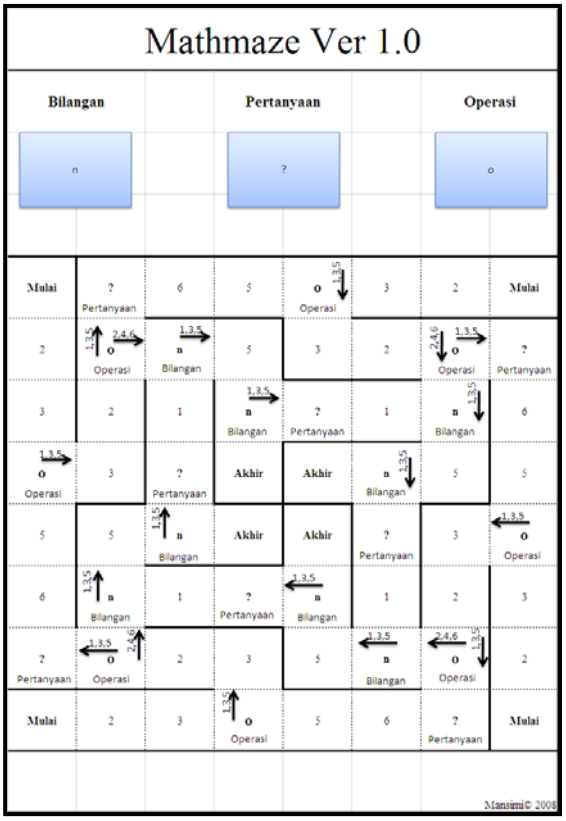
Berdasarkan hasil survey tersebut diketahui bahwa beberapa komponen yang umum board game lama (monopoly, halma, dan sebagainya) bisa dikembangkan agar proses permainannya mendukung kegiatan pembelajaran matematika.

Atas dasar itu, board game yang dikembangkan merupakan perpaduan konsep permainan monopoly, halma, permainan Maze dan ular tangga. Dengan dilengkapi proses dan aturan permainan yang mendukung kegiatan pembelajaran matematika.

b). Desain

Desain permainan disusun sebagai upaya mewujudkan ide abstrak menjadi wujud yang konkret. Yaitu board game matematika bernama Labirin Matematika[†] beserta aturan permainannya. Berikut ini desain board game yang dimaksud (Aturan Permainan bisa dilihat pada Lampiran 4):

[†] Nama saat ini (September 2008) adalah Labirin Matematika, sebelumnya board game ini bernama MathMaze, kemudian Matemaze. Perubahan nama didasarkan pada masukkan dan saran dari ahli agar nama mudah diingat siswa kelas rendah juga karena berdasarkan proses pengecekan di internet kata MathMaze sudah ada yang menggunakan.



Gambar 2. Desain Labirin Matematika

c). Pengumpulan Materi

Materi yang digunakan dalam permainan adalah materi matematika siswa kelas rendah (1, 2, dan 3).

d). Penyusunan

Penyusunan atau perpaduan antara desain dan pengumpulan materi diwujudkan dalam penggunaan kartu-kartu yang sifatnya paket sesuai dengan kelasnya, daftar lengkap paket kartu bisa dilihat pada Lampiran 4.

b. Analisis Produk (Tahap II.2)

Analisis Produk dilakukan oleh Tim Peneliti beserta Tim Dosen di FKIP Universitas Sultan Ageng Tirtayasa. Analisis produk dilakukan dengan cara uji penggunaan dan analisis permasalahannya untuk mewujudkan protitype

Prototype dikembangkan sebagai produk versi 1 Matemaze. Prototype ini direncanakan sebanyak dua belas buah produk.

Gambar 3. Prototype Labirin Matematika

c. Uji Ahli (Tahap II.3)

Validasi ahli dilakukan dengan bantuan Pakar Teknologi Pendidikan dan Pakar Media Pembelajaran. Dua ahli yang berkompeten adalah Dr. Budi Koestoro (Pakar Teknologi Pendidikan dan Dosen UNILA) dan Edi Prajitno, M.Pd (Pakar Media dan Dosen Universitas Negeri Yogyakarta).

d. Ujicoba Lapangan (Tahap II.4)

Uji coba lapangan telah dilakukan dua kali. Pertama dilaksanakan di FKIP Universitas Sultan Ageng Tirtayasa, sedangkan yang kedua dilaksanakan di rumah salah seorang peneliti.

Beberapa rekomendasi dari Tahap II (Pengembangan Produk) adalah sebagai berikut:

1. Perlu daftar kelengkapan permainan meliputi:
    a. Papan Permainan
    b. Dadu
    c. Pion
    d. Kartu (Disusun per paket kelas 1, 2, dan 3)
        i. Kartu Dasar (1,2,3,4,5,6)
        ii. Kartu Operasi (+,-,x,÷)
        iii. Kartu Bilangan (elain bilangan dasar)
    e. Daftar pertanyaan diperbanyak
2. Perbaikan aturan cara permainan
    a. Dibagi menjadi 1).Sebelum Permainan, 2).Selama Proses Permainan, 3).Sesudah Permainan
    b. Aturan pemain sebagai pemenang

c. Aturan mendapat mata dadu 6
d. Aturan pion sampai atau kembali pada kotak Akhir atau Mulai

3. Perbaikan Papan Permainan
   a. Pembuatan tanda arah persimpangan labirin (ganjil dan genap) menggunakan tanda panah
   b. Dinding labirin diperjelas (ketebalan dan perbedaannya dengan kotak biasa)
   c. Kotak langkah dibedakan dengan garis putu-putus (titik-titik)
4. Percobaan pada anak-anak SD secara langsung

c. Tahap Menilai *Impact Factor* (Tahap IV)

Proses penelitian ini turut difasilitasi oleh Program Studi Pendidikan Matematika. Kegiatan penilaian impact factor mulai dilaksanakan di SDN Wadasari sejak Agustus 2008. Kelas yang dipilih adalah kelas III dengan guru SD yang turut berpartisipasi adalah Muhayah, A.Md dan Ali Mahmudi, S.Pd.

Hasil *impact factor* menunjukan:

Alat permainan mungkin untuk digunakan oleh siswa di kelas maupun secara mandiri sebagai permainan diluar sekolah, dan berpotensi meningkatkan ketertarikan pada matematika melalui permainan ini.

Meskipun demikian:

1. Ada kesulitan penggunaan alat permainan. Karena itu perlu penyederhanaan alur labirin agar lebih mudah digunakan.
2. Perlu penggunaan warna merah untuk dinding labirin sebagai tanda tidak boleh dilewati oleh bidak siswa.

D. SIMPULAN

Berdasarkan hasil Simpulan sementara menunjukkan bahwa *board game* labirin matematika bisa diwujudkan dan mungkin untuk digunakan oleh siswa di kelas maupun secara mandiri sebagai permainan diluar sekolah,

Board game ini juga berpotensi meningkatkan ketertarikan pada matematika melalui permainan ini serta bisa mendukung upaya menghindari mind *in chaos* terhadap matematika.

DAFTAR PUSTAKA

Arikunto, Suharsimi. (2005). *Metodologi Penelitian Suatu Pendekatan Praktik*. Jakarta ; PT. Rineka Cipta

Astuti. 2000. Psikologi Peserta Didik. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta

Best, John W dan James V Khan (1986). *Research in Education.* London: Prentice Hall.

Buxton. 1984. Learning Mathematics . ….

Posamentier, Alfred S. dan Stepelman, Jay. (1999). *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment.* New Jersey : Prentice Hall.

Soenarto. (2003). *Metodologi Penelitian Pengembangan untuk Meningkatkan Kualitas Pembelajaran.* Jakarta: Dit PPTK dan KPT, Dikti, Depdiknas.

Suherman, E dkk. (2005). *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung : UPI.

Tim MKPBM. (2001). Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer. Bandung: JICA-Universitas Pendidikan Indonesia.

Lampiran 1

Identitas Guru - Lama Menjadi Guru

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	5.00	3	9.4	9.4	9.4
	6.00	1	3.1	3.1	12.5
	7.00	2	6.3	6.3	18.8
	8.00	1	3.1	3.1	21.9
	9.00	2	6.3	6.3	28.1
	10.00	1	3.1	3.1	31.3
	13.00	1	3.1	3.1	34.4
	14.00	1	3.1	3.1	37.5
	15.00	1	3.1	3.1	40.6
	17.00	3	9.4	9.4	50.0
	18.00	1	3.1	3.1	53.1
	20.00	4	12.5	12.5	65.6
	22.00	3	9.4	9.4	75.0
	23.00	1	3.1	3.1	78.1
	24.00	1	3.1	3.1	81.3
	25.00	2	6.3	6.3	87.5
	26.00	2	6.3	6.3	93.8
	28.00	1	3.1	3.1	96.9
	29.00	1	3.1	3.1	100.0
	Total	32	100.0	100.0	

Identitas Guru - Pendidikan Terakhir

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	SMA	1	3.1	3.2	3.2
	D II	28	87.5	90.3	93.5
	S1	2	6.3	6.5	100.0
	Total	31	96.9	100.0	
Missing	System	1	3.1		
Total		32	100.0		

Lampiran 2

Semua Materi Tersampaikan

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Tidak	3	9.4	10.0	10.0
	Ya	27	84.4	90.0	100.0
	Total	30	93.8	100.0	
Missing	System	2	6.3		
Total		32	100.0		

Materi yang sulit dipahami siswa

No	**Nama Materi**	**Keterangan**
1	Penjumlahan dan pengurangan	Misalkan puluhan dengan puluhan. Dengan cara meminjam
2	Soal cerita	
3	Menyelesaikan masalah sehari-hari	
4	Menuliskan angka	Misalkan, 87 = "Delapan puluh tujuh"
5	Bangun ruang dan bangun datar	
6	Satuan pengukuran waktu	
7	Menentukan nilai tempat	
8	Operasi pertukaran dan pengelompokkan	
9	Perkalian dan pembagian	
10	Pecahan	
11	Geometri	
12	Pengukuran	

Materi yang sulit diajarkan

No	Nama Materi	Keterangan
1	Menyelesaikan soal cerita	Anak belum lancar membaca
2	Menghitung penjumlahan dan pengurangan	
3	Menulis dan berhitung	
4	Nilai tempat penjumlahan dan pengurangan	
5	Menuliskan nama bilangan	
6	Perkalian	
7	Satuan pengukuran waktu	
8	Bangun ruang dan bangun datar	
9	Persamaan	
10	Pertukarang/ pengelompokkan pada sifat operasi hitung	
11	Sifat operasi hitung	
12	Perkalian dan pembagian	

Lampiran 3

Alat Peraga dan Permainan yang Sudah Digunakan

No	Nama	Penggunaan
1	Kartu bilangan	Mengenal angka 1 sampai 10, penjumlahan dan pengurangan
2	Kartu huruf dan angka	Membaca huruf, mengenal angka
3	Gambar-gambar	Menghitung jumlah bilangan
4	Karton gambar, angka, huruf	Mencocokkan
5	Dadu	Terkait bilangan
6	Lidi, sedotan	Penjumlahan, pengurangan, pembagian
7	Manik-manik	Berhitung
8	Monopoli	Pembelajaran matematika
9	Kelereng	Menghitung bilangan
10	Benda-benda di ruangan kelas	Mengenal bangung datar
11	Barang bekas	Mengenal bangung datar dan panjang
12	Timbangan	Terkait berat dan ringan
13	Kit Matematika	Bangun ruang
14	Segitiga, kerucut, lingkaran, persegi	Bangun datar dan geometri
15	Peta	Mengukur panjang
16	Jam dan nama bulan	Menghitung waktu
17	Sempoa	Penjumlahan dan pengurangan
18	Abacus	Nilai tempat
19	Bola	Bangun sederhana
20	Sapu tangan	Bangun datar sederhana
21	Batu	Menghitung
22	Jari	Pengukuran

23	Penggaris	Pengukuran
24	Tangan	Pengukuran
25	Botol	
26	Tabung	
27	Bangun ruang	Luas
28	Papan bilangan	Perkalian dan pembagian
29	Uang	Mengenal mata uang
30	Bedug dari bamboo	Bangun
31	Balok plastic	Membandingkan dua kumpulan benda
32	Ular tangga	Membaca dan menulis lambang
33	Kalender	Mengenal dan mengingat nama hari dan bulan
34	Jam dinding	Membaca jam

Alat Permainan yang Sudah Ada

No	**Nama Materi**	**Kemungkinan Penggunaan**
1	Ular tangga	Menghitung maju dan mundur, berhitung, penjumlahan, dan mengurutkan bilangan. Garis bilangan dan bangun datar sederhana. Mengurutkan angka
2	Tabel nama-nama	
3	Monopoli	Berhitung, soal cerita, jual beli. Mata uang. Pecahan
4	Congklak/ Dakon	Berhitung, penjumlahan dan pengurangan, menghitung dan membagi. Membandingkan kumpulan benda
5	Ludo	Berhitung, penjumlahan dan

		pengurangan. Garis bilangan
6	Papan catur	Soal cerita, kelipatan, menghitung dan mengenal bangun datar dan bangun ruang. Penukaran dan pengelompokkan. Bilangan cacah
7	Halma	Penjumlahan, pengurangan, dan menghitung loncat

Lampiran 4

Aturan Permainan

I. SEBELUM PERMAINAN

a. Masing-masing pemain (maksimum empat orang) mendapatkan dua puah pion yang keduanya diletakkan dikotak Mulai pada papan permainan.
b. Masing-masing pemain (maksimum empat orang) mendapatkan enam buah kartu dasar: 1,2,3,4,5,6 dan empat buah kartu =
c. **Semua** kartu operasi: +, -, = dan sebagainya (sesuai paket kelas), **semua** kartu pertanyaan: Pertanyaan 1, Pertanyaan 2, dan sejenisnya, **setengah jumlah** kartu dasar: 1,2,3,4,5,6 yang tersisa dan semua kartu bilangan lain: 7, 8, 9 (sesuai paket) diletakkan secara acak dan tertutup pada kotak yang sesuai pada papan permainan (kotak **bilangan**, **pertanyaan**, dan **operasi**)
d. Sisa kartu dasar: 1,2,3,4,5,6 yang tersisa diletakkan pada Bank Kartu (terpisah dari papan permainan.
e. Bank Soal disiapkan dan diletakkan tertutup di dekat Bank Kartu

II. SELAMA PROSES PERMAINAN

a. Ditentukan pemain yang akan terlebih dahulu melempar dadu dan menjalankan pion (bisa melalui suit atau dengan melempar dadu, yang tertinggi terlebih dahulu). Pemain berikutnya yang akan jalan ditentukan sesuai arah putaran jarum jam
b. Pemain yang telah melempar dadu menjalankan pion sesuai dengan jumlah mata dadu yang diperolehnya serta mengikuti aturan panah (1,3,5 atau 2,4,6) dalam memilih arah saat melalui persimpangan
c. Pemain yang mendapat mata dadu 6 mendapat kesempatan untuk jalan kembali
d. Setiap berhenti di salah satu kotak pada papan.
    i. **Apabila berhenti di kotak papan yang menunjukkan angka dasar**: maka pemain mengambil kartu pada Bank Kartu sesuai angka yang tertera pada kotak tempat pion berhenti

ii. **Apabila berhenti di kotak papan yang menunjukkan bilangan, pertanyaan, atau operasi**: maka pemain mengambil kartu teratas dari kumpulan kartu yang sesuai yang terletak terttutup di atas papan.

e. Pemain melepas kartu yang dimilikinya apabila:
   i. **Tersusun** beberapa kartu yang bisa dihubungkan dengan aturan operasi tertentu. Misalkan: 2 + 3 = 5
   ii. **Bisa** menjawab pertanyaan dari Bank Soal dan ada kartu yang bersesuai dengan jawabannya. Misalkan: 2 + 3 = (berapa jumlahnya), pemain menjawab 5, jawaban benar dan pemain mempunyai kartu 5 maka kartu tersebut bisa dilepas.
   iii. Salah satu pion mencapai kotak Akhir , dalam hal ini pemain boleh melepas satu buah kartu apapun yang dimilikinya.
   iv. Setiap kartu yang telah dilepas dikumpulkan pada tempat tersendiri, dalam kasus khusus (ada kartu yang habis (pada Bank Kartu, Kumpulan kartu bilangan, pertanyaan, atau operasi. Kartu yang telah dilepas boleh digunakan kembali).

f. Pemain boleh memilih menjalankan pion manapun yang dikehendakinya

g. Pion yang telah mencapai kotak Akhir dinyatakan pion tersebut telah menang dan tidak bisa digunakan kembali. (mencapai kotak akhir cukup dengan melewatinya, tidak perlu berhenti pada kotak tersebut).

III. SESUDAH PERMAINAN

a. Pemain yang menjadi pemenang adalah yang kedua pionnya telah mencapai kotak Akhir **atau** seluruh kartu bilangannya telah habis dilepas

b. Urutan pemenang berikutnya diurutkan dari seluruh kartu bilangan yang total jumlah bilangannya terkecil.

No	Jenis Kartu	Paket Kelas 1 (Jumlah)	Paket Kelas 2 (Jumlah)	Paket Kelas 3 (Jumlah)	Keterangan
1	Angka 1	12	12	16	
2	Angka 2	12	12	16	
3	Angka 3	12	12	16	
4	Angka 4	12	12	16	
5	Angka 5	12	12	16	
6	Angka 6	12	12	16	
7	Operasi +	8	8	12	
8	Operasi -	8	8	12	
9	Operasi x	8	8	12	
10	Operasi ÷	8	8	12	
11	=	24	24	36	
12	Pertanyaan ?	12	16	20	Termasuk lembar pertanyaan
13	Angka 7	0	8	12	
14	Angka 8	0	8	12	
15	Angka 9	0	8	12	
22	Kartu Bebas	4	4	7	Artinya angka boleh berapa saja

Pemahaman Konsep Matematik dalam Pembelajaran Matematika

Oleh
Nila Kesumawati
FKIP Program Studi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Palembang

Abstrak

Pemahaman konsep merupakan salah satu kecakapan atau kemahiran matematika yang diharapkan dapat tercapai dalam belajar matematika yaitu dengan menunjukkan pemahaman konsep matematika yang dipelajarinya, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah. Pemahaman matematik akan bermakna jika pembelajaran matematika diarahkan pada pengembangan kemampuan koneksi matematik antar berbagai ide, memahami bagaimana ide-ide matematik saling terkait satu sama lain sehingga terbangun pemahaman menyeluruh, dan menggunakan matematik dalam konteks di luar matematika.

Kata-kata kunci: *pemahaman, pemahaman konsep matematik, pembelajaran matematika*

Pendahuluan

Perkembangan matematika dari tahun ketahun terus meningkat sesuai dengan tuntutan zaman. Karena tuntutan zaman itulah mendorong manusia untuk lebih kreatif dalam mengembangkan atau menerapkan matematika sebagai ilmu dasar. Salah satu pengembangan yang dimaksud adalah masalah pembelajaran matematika. Pembelajaran matematika sangat diperlukan karena terkait dengan penanaman konsep pada peserta didik. Peserta didik itu yang nantinya ikut andil dalam pengembangan matematika lebih lanjut ataupun dalam mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Dalam proses pembelajaran anak kurang didorong untuk mengembangkan kemampuan berpikir. Khususnya dalam pembelajaran di dalam kelas, anak diarahkan pada kemampuan cara menggunakan rumus, menghafal rumus, matematika hanya untuk mengerjakan soal, jarang diajarkan untuk menganalisis dan menggunakan matematika dalam kehidupan sehari-hari. Akibatnya, ketika anak didik diberi soal aplikasi atau soal yang berbeda dengan soal latihannya, maka mereka akan membuat kesalahan. Contoh penggunaan matematika dalam kehidupan sehari-hari, yaitu “Apabila anda ke apotik untuk membeli obat, resep dokter tertulis 3 x 2. Bagaimana anda meminum obat itu? Apakah tiga tablet diminum sekaligus pada pagi hari dan 3 tablet diminum pada siang hari? Ataukah anda minum dua tablet pada pagi hari, 2 tablet pada siang hari dan 2

tablet pada malam hari?" Pastilah cara kedua yang betul, sehingga dapat sembuh. Jika cara pertama yang dilakukan, berarti minum obatnya *over dosis*. Contoh tersebut menunjukkan bahwa siswa belum memahami konsep perkalian jika siswa tersebut menjawab yang semua betul.

Prinsip utama dalam pembelajaran matematika saat ini adalah untuk memperbaiki dan menyiapkan aktifitas-aktifitas belajar yang bermanfaat bagi siswa yang bertujuan untuk beralih dari mengajar matematika ke belajar matematika. Keterkaitan siswa secara aktif dalam pembelajaran harus disediakannya aktifitas belajar yang khusus sehingga dapat melakukan *doing math* untuk menemukan dan membangun matematika dengan fasilitas oleh guru.

A. Pemahaman Konsep

Pemahaman diartikan dari kata *understanding* (Sumarmo, 1987). Derajat pemahaman ditentukan oleh tingkat keterkaitan suatu gagasan, prosedur atau fakta matematika dipahami secara menyeluruh jika hal-hal tersebut membentuk jaringan dengan keterkaitan yang tinggi. Dan konsep diartikan sebagai ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan sekumpulan objek (Depdiknas, 2003: 18).

Menurut Duffin & Simpson (2000) pemahaman konsep sebagai kemampuan siswa untuk: (1) menjelaskan konsep, dapat diartikan siswa mampu untuk mengungkapkan kembali apa yang telah dikomunikasikan kepadanya. Contohnya pada saat siswa belajar geometri pokok bahasan Bangun Ruang Sisi Lengkung (BRSL) maka siswa mampu menyatakan ulang definisi dari tabung, unsur-unsur Tabung, definisi kerucut dan unsur-unsur Kerucut., definisi bola. Jika siswa diberi pertanyaan " Sebutkan ciri khas dari BRLS?", maka siswa dapat menjawab pertanyaan tersebut dengan benar. (2) menggunakan konsep pada berbagai situasi yang berbeda, contohnya dalam kehidupan sehari-hari jika seorang siswa berniat untuk memberi temannya hadiah ULTAH berupa celengan kaleng yang telah dilapisi suatu bahan kain, kalengnya telah tersedia di rumah tetapi bahan kainnya harus dibeli. Siswa tersebut harus memikirkan berapa meter bahan kain yang harus dibelinya? Berapa uang yang harus dimiliki untuk membeli bahan kain? Untuk memikirkan berapa bahan kain yang harus dibelinya berarti siswa tersebut telah mengetahui konsep luas permukaan kaleng yang akan dilapisinya dan konsep aritmatika social. Dan (3) mengembangkan beberapa akibat dari adanya

suatu konsep, dapat diartikan bahwa siswa paham terhadap suatu konsep akibatnya siswa mempunyai kemampuan untuk menyelesaikan setiap masalah dengan benar.

Sejalan dengan hal di atas (Depdiknas, 2003: 2) mengungkapkan bahwa, pemahaman konsep merupakan salah satu kecakapan atau kemahiran matematika yang diharapkan dapat tercapai dalam belajar matematika yaitu dengan menunjukkan pemahaman konsep matematika yang dipelajarinya, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah.

Sedangkan menurut Skemp dan Pollatsek (dalam Sumarmo, 1987: 24) terdapat dua jenis pemahaman konsep, yaitu pemahaman instrumental dan pemahaman rasional. Pemahaman instrumental dapat diartikan sebagai pemahaman atas konsep yang saling terpisah dan hanya rumus yang dihafal dalam melakukan perhitungan sederhana, sedangkan pemahaman rasional termuat satu skema atau strukstur yang dapat digunakan pada penyelesaian masalah yang lebih luas. Suatu ide, fakta, atau prosedur matematika dapat dipahami sepenuhnya jika dikaitkan dengan jaringan dari sejumlah kekuatan koneksi.

Menurut NCTM (2000), untuk mencapai pemahaman yang bermakna maka pembelajaran matematika harus diarahkan pada pengembangan kemampuan koneksi matematik antar berbagai ide, memahami bagaimana ide-ide matematik saling terkait satu sama lain sehingga terbangun pemahaman menyeluruh, dan menggunakan matematik dalam konteks di luar matematika.

B. Pembelajaran Matematika Sekolah

Sagala (2008: 61), mendefinisikan pembelajaran ialah membelajarkan siswa menggunakan asas pendidikan maupun teori belajar merupakan penentu utama keberhasilan pendidikan. Pembelajaran merupakan proses komunikasi, komunikasi yang dilakukan antara guru ke siswa atau sebaliknya, dan siswa ke siswa. Dalam proses pembelajaran peranan guru bukan semata-mata memberikan informasi, melainkan juga mengarahkan dan memberi fasilitas belajar. Proses pembelajaran pada awalnya meminta guru untuk mengetahui kemampuan dasar yang dimiliki oleh siswa meliputi kemampuan dasarnya, motivasinya, latar belakang akademisnya, dan lain sebagainya. Pengenalan karakteristik siswa dalam pembelajaran merupakan hal yang terpenting

dalam penyampaian bahan ajar dan menjadi indikator suksesnya pelaksanaan pembelajaran.

Agar potensi siswa dapat dikembangkan secara optimal berdasarkan perkembangan aspek kognitif, menurut Ebbutt dan Straker (dalam Depdiknas, 2003:4) asumsi tentang karakteristik siswa dan implikasi terhadap pembelajaran matematika diberikan sebagai berikut:

1. **Siswa akan mempelajari matematika jika mereka mempunyai motivasi**. Implikasi pandangan ini bagi guru adalah: (1) menyediakan kegiatan yang menyenangkan, (2) memperhatikan keinginan siswa. (3) membangun pengertian melalui apa yang diketahui oleh siswa, (4) menciptakan suasana kelas yang mendukung kegiatan belajar, (5) memberikan kegiatan belajar yang sesuai dengan tujuan pembelajaran, (6) memberikan kegiatan yang menantang, (7) memberikan kegiatan yang memberikan harapan keberhasilan, dan (8) menghargai setiap pencapaian siswa.
2. **Siswa mempelajari matematika dengan caranya sendiri**. Implikasi pandangan ini adalah: (1) siswa belajar dengan cara yang berbeda dan dengan kecepatan yang berbeda, (2) tiap siswa memerlukan pengalaman tersendiri yang terhubung dengan pengalamannya diwaktu lampau, (3) tiap siswa mempunyai latar belakang social-ekonomi-budaya yang berbeda. Oleh karena itu guru perlu: (1) mengetahui kelebihan dan kekurangan para siswanya, (2) merencanakan kegiatan yang sesuai dengan tingkat kemampuan siswa, (3) membangun pengetahuan dan ketrampilan siswa, baik yang dia peroleh di sekolah maupun di rumah, (4) menggunakan catatan kemajuan siswa (*assessment*).
3. **Siswa mempelajari matematika baik secara mandiri maupun melalui kerja sama dengan temannya.** Implikasi pandangan ini bagi usaha guru adalah: (1) memberikan kesempatan belajar dalam kelompok untuk melatih kerjasama, (2) memberikan kesempatan belajar secara klasikal untuk memberi kesempatan saling bertukar gagasan, (3) memberi kesempatan kepada siswa untuk melakukan kegiatannya secara mandiri., (4) melibatkan siswa dalam pengambilan keputusan tentang kegiatan yang akan dilakukannya, dan (5) mengajarkan bagaimana cara mempelajari matematika.

4. **Siswa memerlukan konteks dan situasi yang berbeda-beda dalam mempelajari matematika.** Implikasi pandangan ini bagi usaha guru adalah: (1) menyediakan dan menggunakan berbagai alat peraga, (2) memberikan kesempatan belajar matematika diberbagai tempat dan keadaan, (3) memberikan kesempatan menggunakan matematika untuk berbagai keperluan, (4) mengembangkan sikap menggunakan matematika sebagai alat untuk memecahkan problematika baik di sekolah maupun di rumah, (5) menghargai sumbangan tradisi, budaya dan seni dalam pengembangan matematika, dan (6) membantu siswa menilai sendiri kegiatan matematikanya.

Berdasarkan kurikulum perlu kiranya dibedakan antara matematika dan matematika sekolah. Agar pembelajaran matematika dapat memenuhi tuntutan inovasi pendidikan pada umumnya. Ebbutt dan Straker (dalam Depdiknas, 2003:3) mendefinisikan matematika sekolah yang selanjutnya disebut sebagai matematika, sebagai berikut:

1. Matematika sebagai kegiatan penelusuran pola dan hubungan.
2. Matematika sebagai kreativitas yang memerlukan imajinasi, intuisi dan penemuan.
3. Matematika sebagai kegiatan pemecahan masalah.
4. Matematika sebagai alat berkomunikasi.

C. Pentingnya Pemahaman Konsep dalam Pembelajaran Matematika

Dalam proses pembelajaran matematika, pemahaman konsep merupakan bagian yang sangat penting. Pemahaman konsep matematik merupakan landasan penting untuk berpikir dalam menyelesaikan permasalahan matematika maupun permasalahan sehari-hari. Menurut Schoenfeld (1992) berpikir secara matematik berarti (1) mengembangkan suatu pandangan matematik, menilai proses dari matematisasi dan abstraksi, dan memiliki kesenangan untuk menerapkannya, (2) mengembangkan kompetensi, dan menggunakannya dalam dalam pemahaman matematik. Implikasinya adalah bagaimana seharusnya guru merancang pembelajaran dengan baik, pembelajaran dengan karakteristik yang bagaimana sehingga mampu membantu siswa membangun pemahamannya secara bermakna.

Pemahaman konsep merupakan kompetensi yang ditunjukkan siswa dalam memahami konsep dan dalam prosedur (algoritma) secara luwes, akurat, efisien dan tepat. Adapun indikator pemahaman konsep menurut Kurikulum 2006, yaitu:

1. menyatakan ulang sebuah konsep
2. mengklasifikasi objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya)
3. memberikan contoh dan non-contoh dari konsep
4. menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis
5. mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup suatu konsep
6. menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur atau operasi tertentu
7. mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah.

Adapun pemahaman konseptual manurut Kilpatrick, dkk; Hiebert, dkk; Ball (dalam Juandi, 2006:29), adalah pemahaman konsep-konsep matematika, operasi dan relasi dalam matematika. Beberapa indikator dari kompetensi ini antara lain: dapat mengidentifikasi dan menerapkan konsep secara algoritma, dapat membandingkan, membedakan, dan memberikan contoh dan contoh kontra dari suatu konsep, dapat mengintegrasikan konsep dan prinsip yang saling berhubungan.

Dalam NCTM 2000 disebutkan bahwa pemahaman matematik merupakan aspek yang sangat penting dalam prinsip pembelajaran matematika. Pemahaman matematik lebih bermakna jika dibangun oleh siswa sendiri. Oleh karena itu kemampuan pemahaman tidak dapat diberikan dengan paksaan, artinya konsep-konsep dan logika-logika matematika diberikan oleh guru, dan ketika siswa lupa dengan algoritma atau rumus yang diberikan, maka siswa tidak dapat menyelesaikan persoalan-persoalan matematika.

Siswa dikatakan memahami konsep jika siswa mampu mendefinisikan konsep, mengidentifikasi dan memberi contoh atau bukan contoh dari konsep, mengembangkan kemampuan koneksi matematik antar berbagai ide, memahami bagaimana ide-ide matematik saling terkait satu sama lain sehingga terbangun pemahaman menyeluruh, dan menggunakan matematik dalam konteks di luar matematika. Sedangkan siswa dikatakan memahami prosedur jika mampu mengenali prosedur (sejumlah langkah-langkah dari kegiatan yang dilakukan) yang didalamnya termasuk aturan algoritma atau proses menghitung yang benar.

D. Penutup

Pembelajaran ialah membelajarkan siswa menggunakan asas pendidikan maupun teori belajar merupakan penentu utama keberhasilan pendidikan. Pembelajaran merupakan proses komunikasi, komunikasi yang dilakukan antara guru ke siswa atau sebaliknya, dan siswa ke siswa.

Pemahaman konsep matematik merupakan bagian yang sangat penting dalam proses pembelajaran matematika. Pemahaman konsep matematik juga merupakan landasan penting untuk menyelesaikan persoalan-persoalan matematika maupun persoalan-persoalan dalam kehidupan sehari-hari.

Daftar Pustaka

Depdiknas. 2003. *Pedoman Khusus Pengembangan Sistem Penilaian Berbasis Kompetensi SMP*. Jakarta: Depdiknas.

Duffin, J.M.& Simpson, A.P. 2000. A Search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*. 18(4): 415-427.

Juandi, D. 2006. *Meningkatkan Daya Matematik Mahasiswa Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Berbasis masalah.* Disertasi Pascasarjana UPI Bandung: tidak diterbitkan.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sagala, S. 2008. *Konsep dan Makna Pembelajaran*. Bandung: Alfabeta.

Sanjaya, W. 2007. *Strategi Pembelajaran Berorientasi Standar Proses Pendidikan*. Jakarta: Kencana.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense of Mathematics., Dalam *Handbook of Reasearch on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334- 370). D. A. Grouws (Ed). New York: Macmillan.

Siswono, T. Y. E & Lastiningsih, N. 2007. *Matematika* 3 *SMP dan MTs untuk Kelas IX*. Erlangga: Jakarta.

Sumarmo, U. 1987. *Kemampuan Pemahaman dan Penalaran Matematik Siswa SMA Dikaitkan dengan Penalaran Logik Siswa dan Beberapa Unsur Proses Belajar Mengajar*. Disertasi pada Pascasarjana IKIP Bandung: tidak diterbitkan

Tim Pustaka Yustisia. 2007. *Panduan lengkap KTSP*. Yogyakarta: Pustaka Yustisia.

Meningkatkan Pemahaman Mahasiswa Pendidikan Matematika FKIP UPS Tegal pada Konsep Distribusi Peluang Khusus Melalui Pembelajaran Kooperatif Model STAD*)

Nina R. Chytrasari
Eleonora D. W.
Progdi PMTK FKIP UPS Tegal

Abstrak

Perkuliahan Statistika Matematika I dengan model pembelajaran konvensional dibantu dengan buku ajar pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UPS Tegal tidak signifikan meningkatkan pemahaman mahasiswa semester IV T.A 2007-2008. Mahasiswa cenderung pasif dalam proses pembelajaran, kesiapan mahasiswa mengikuti perkuliahan rendah, dan kurangnya tanggung jawab mahasiswa akan pembelajarannya menyebabkan hasil belajar mereka masih rendah. Dari hasil tes yang diberikan menunjukkan masih terdapat banyak kesalahan pada penerapan konsep, dan kesalahan dalam proses penyelesaian masalah.

Penelitian ini hendak mengatasi permasalahan pembelajaran Statistika Matematika I pada Progdi PMTK FKIP UPS Tegal dengan menerapkan pendekatan pembelajaran kooperatif model STAD, yang diimplementasikan pada pembelajaran konsep Distribusi Peluang Khusus. Prosedur penelitian mengacu pada model siklus Kemmis dan Mc Taggart, dan direncanakan sebanyak dua siklus Pengamatan meliputi aktivitasi mahasiswa dalam pembelajaran, motivasi belajar, dan hasil belajar. Instrumen penelitian menggunakan instrumen observasi peer evaluation, instrumen observasi kinerja kelompok, angket motivasi, dan tes. Data yang dikumpulkan pada setiap siklus penelitian kemudian dianalisis secara deskriptif dengan menggunakan persentase untuk melihat kecenderungan yang terjadi.

Implikasi pelaksanaan siklus kedua ditunjukkan dengan adanya peningkatan aktivitasi mahasiswa dalam pembelajaran Distribusi Peluang Khusus. Prosentase mahasiswa yang memberikan kontribusi pada kelompok minimal cukup memuaskan meningkat dari 68 % menjadi 83% , sementara prosentase kelompok dengan kinerja tinggi meningkat 60 %. Motivasi belajar mahasiswa meningkat dari 92% menjadi 96%, namun pada aspek tes anxienty tidak mengalami peningkatan. Hasil belajar mahasiswa meningkat terlihat dari banyaknya mahasiswa yang memahami konsep minimal mendekati sepenuhnya meningkat sebesar 73%, yang menggunakan strategi pemecahan masalah minimal mendekati sepenuhnya meningkat 53%, dan yang menggunakan prosedur minimal mendekati sepenuhnya meningkat 40%.

Kata kunci : pembelajaran kooperatif, STAD

A. Pendahuluan

Latar Belakang Masalah

Statistika Matematika I merupakan salah satu mata kuliah wajib tempuh yang diberikan di semester IV pada Program Studi Pendidikan Matematika (Progdi PMTK) FKIP UPS Tegal. Selama ini, perkuliahan Statistika Matematika I dilaksanakan menggunakan metode ceramah dengan materi yang telah dirancang dalam buku ajar.

Pembelajaran konvensional dengan buku ajar ternyata tidak signifikan meningkatkan pemahaman mahasiswa. Dari hasil quiz pada materi Peluang dan materi Variabel Random dan distribusinya yang diberikan pada 105 mahasiswa regular semester IV T.A 2007-2008, diperoleh hasil sebanyak 3,5 % mahasiswa memperoleh nilai 86 – 100; sebanyak 5,5 % mahasiswa memperoleh nilai 70 – 85; sebanyak 70,5% mahasiswa memperoleh nilai 56 – 69; dan sebanyak 20,5% mahasiswa memperoleh nilai 40 – 55. Dari jawaban mahasiswa, masih terdapat banyak kesalahan pada penerapan konsep, dan kesalahan dalam proses penyelesaian masalah.

Pengamatan pada empat tatap muka yang pertama dapat dicatat hal-hal berikut: kesiapan mahasiswa mengikuti perkuliahan rendah; cenderung pasif selama perkuliahan; pembelajaran berlangsung monoton dan berpusat pada dosen; mahasiswa membuat catatan dari penjelasan dosen, tetapi mereka jarang sekali bertanya maupun memberikan pendapat meski kesempatan selalu diberikan; mahasiswa cenderung menemui kesulitan mengkaitkan materi yang dipelajari dengan materi yang telah diberikan sebelumnya; mahasiswa sering menemui kesulitan dalam menyelesaikan soal yang diberikan dalam perkuliahan; pemberian tugas individu juga kurang mendorong mahasiswa untuk lebih mandiri dalam belajar.

Angket tentang bagaimana mahasiswa belajar diberikan kepada mahasiswa tersebut setelah diadakan quiz. Dari jawaban angket, diperoleh gambaran sebanyak 37 % mahasiswa belajar cenderung hanya untuk menyelesaikan tugas. Sebanyak 47 % mahasiswa belajar dengan menghafalkan rumus/ konsep, dan sebanyak 57 % mahasiswa mengalami kesulitan memahami ataupun mengkomunikasikan pemahaman.

Memperhatikan kondisi mahasiswa semester IV T.A 2007-2008, perlu dilakukan tindakan penanganan yakni dengan memilih pendekatan pembelajaran yang sesuai. Alternatif model pembelajaran yang sekiranya dapat mengatasi keprihatinan di Progdi PMTK FKIP UPS Tegal pada pembelajaran Statistika Matematika I adalah

pembelajaran kooperatif model STAD. Pendekatan kooperatif model STAD dalam penelitian ini akan diimplementasikan pada pembelajaran konsep Distribusi Peluang Khusus.

Perumusan Masalah

1. Apakah pendekatan kooperatif model STAD meningkatkan aktivitasi mahasiswa dalam pembelajaran Distribusi Peluang Khusus ?
2. Apakah pembelajaran kooperatif model STAD meningkatkan motivasi belajar mahasiswa ?
3. Apakah pembelajaran kooperatif model STAD meningkatkan pemahaman mahasiswa pada konsep Distribusi Peluang Khusus ?

Pemecahan Masalah

Pembelajaran kooperatif model STAD mengharuskan mahasiswa untuk terlibat aktif dalam kelompok kecil untuk menyelesaikan tugas yang diberikan. Ketergantungan positif, interaksi, tanggung jawab individu, dan ketrampilan berkolaborasi yang muncul dalam kelompok akan mendorong mahasiswa untuk bertanggung jawab terhadap pembelajaran serta mengkomunikasikan pemahaman, sehingga dapat meningkatkan motivasi belajar dan pemahaman mereka.

Hipotesis Tindakan

1. dengan diterapkan pembelajaran kooperatif model STAD dapat meningkatkan aktivitasi mahasiswa dalam pembelajaran Distribusi Peluang Khusus
2. dengan diterapkannya pembelajaran kooperatif model STAD dapat meningkatkan motivasi mahasiswa dalam mempelajari materi Distribusi Peluang Khusus
3. dengan diterapkannya pendekatan pembelajaran kooperatif dapat meningkatkan pemahaman mahasiswa pada materi Distribusi Peluang Khusus

Tujuan PTK

1. meningkatkan aktivitasi mahasiswa dalam pembelajaran Distribusi Peluang Khusus
2. meningkatkan motivasi belajar mahasiswa
3. meningkatkan pemahaman mahasiswa pada materi Distribusi Peluang Khusus

Manfaat Penelitian

Bagi Mahasiswa

1. Mendorong aktivasi mahasiswa dalam pembelajaran Statistika Matematika I
2. Mendorong interaksi positif antar mahasiswa
3. Mendorong keberanian mahasiswa untuk mengkomunikasikan pemikiran mereka
4. Mendorong tanggung jawab mahasiswa terhadap pembelajaran mereka
5. Memberikan pengalaman belajar yang berbeda sehingga mahasiswa dapat berlatih menjadi pembelajar yang fleksibel
6. Memberikan pengalaman implikasi model pembelajaran STAD sehingga menambah wawasan model pembelajaran bagi mahasiswa

Bagi Dosen

1. Meningkatkan kemampuan menyelesaikan masalah membelajarkan materi Statistika Matematika
2. Meningkatkan kolaborasi antara dosen dengan dosen dan dosen dengan mahasiswa dalam memecahkan masalah pembelajaran
3. Meningkatkan kompetensi dosen dalam penelitian.

Bagi Program studi

1. Meningkatkan variasi kegiatan pembelajaran
2. Meningkatkn kualitas pembelajaran

B Metode Penelitian

1. Setting Penelitian

Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Pancasakti Tegal, Jalan Halmahera Km. 1 Tegal

Waktu Penelitian

Penelitian dilaksanakan pada bulan Maret sampai dengan Juli 2008 dalam semester genap T.A 2007/2008.

Subyek Penelitian

Mahasiswa semester IV B tahun akademik 2007/2008 dengan jumlah mahasiswa sebanyak 25 orang, terdiri dari 9 mahasiswa laki-laki dan 16 mahasiswa perempuan.

2. Sasaran Penelitian

Dengan model pembelajaran kooperatif STAD yang dilaksanakan, akan diamati peningkatan motivasi, aktivasi, dan hasil belajar mahasiswa dalam mengikuti kuliah Statistika Matematika I pada setiap siklusnya.

3. Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian mengacu pada model siklus Kemmis dan Mc Taggart yang meliputi perencanaan, pelaksanaan, observasi, evaluasi dan refleksi. Siklus yang direncanakan sebanyak dua siklus, dengan indikator keberhasilan :

(1) minimal sebanyak 75% mahasiswa berpartisipasi dalam kelompok minimal 'cukup memuaskan', ditunjukkan dengan skor rata-rata *peer evaluation* minimal 30 dan jumlah skor kinerja kelompok minimal 32

(2) minimal sebanyak 85% mahasiswa mempunyai motivasi belajar positif yang ditunjukkan dengan jumlah skor angket motivasi lebih dari 186

(3) minimal sebanyak 75% mahasiswa mempunyai pemahaman materi Distribusi Peluang Khusus mendekati sepenuhnya, ditunjukkan dengan skor tes minimal 4

4. Sumber Data

Sumber data dalam penelitian ini adalah mahasiswa, dosen, dan teman sejawat.

5. Instrumen

a. Instrumen observasi aktivitasi mahasiswa, meliputi:

(1) Instrumen observasi partisipasi oleh kelompok (*peer evaluation*)

Setiap mahasiswa melakukan evaluasi keterlibatan setiap mahasiswa lain dalam kelompoknya kecuali dirinya sendiri. Instrumen observasi partisipasi berbentuk angket tertutup, terdiri dari 9 pertanyaan dengan 5 skala tingkatan jawaban, yaitu "sangat memuaskan" (5), "memuaskan" (4), "cukup memuaskan" (3), "kurang memuaskan" (2), dan "tidak memuaskan" (1). Penilaian meliputi

kehadiran, sumbangan pemikiran, ketrampilan berkomunikasi, komitmen dengan tujuan kelompok, mendengarkan dengan efektif, menjalankan tanggungjawab dengan serius, menyelesaikan tugas tepat waktu, cara menerima kritik, dan menyelesaikan tugas yang penting.

(2) Instrumen observasi kinerja kelompok

Digunakan untuk mengamati interaksi mahasiswa dalam kelompok.. Aspek pengamatan meliputi ketergantungan yang positif, tanggung jawab personal, pengolahan kelompok, dan pengembangan interaksi. Kriteria penilaian meliputi tingkatan "rendah" (1), "cukup" (2), dan "tinggi" (3). Untuk setiap pertemuan, pengamatan dilakukan sebanyak empat kali dengan interval waktu 10 menit.

b. Instrumen angket motivasi belajar

Digunakan untuk memperoleh gambaran motivasi belajar mahasiswa. Angket berbentuk tertutup dan terdiri dari 31 item pernyataan. Respon dilakukan dengan teknik diferensiasi semantik dengan skala 1 sampai 7 yang menunjukkan arah dan intensitas jawaban mahasiswa dari "sangat tidak sesuai" sampai "sangat sesuai" dengan kondisi mahasiswa.

c. Instrumen tes

Digunakan untuk mengukur hasil belajar mahasiswa. Tes berbentuk *open ended problem*.

d. Instrumen observasi performa dosen

Digunakan untuk melihat implementasi pembelajaran kooperatif model STAD. Pengamatan pada performa dosen dalam pembelajaran yang terbagi dalam kegiatan awal, inti, dan penutup. Item pengamatan berjumlah 10, dengan kriteria “baik”, “cukup” ,dan “kurang’.

4. Analisa Data

a. Aktivitasi mahasiswa

Dengan menghitung rata-rata skor dari *peer evaluation* kemudian diklasifikasikan menurut tingkatan interpretasi "sangat memuaskan" (39 – 45),

"memuaskan" (32 – 36), "cukup memuaskan" (25 – 31), "kurang memuaskan" (18 – 24), dan "tidak memuaskan" (9 – 17), serta menganalisis jumlah skor kinerja kelompok kemudian diklasifikasikan menurut tingkatan interpretasi "rendah" (16 – 26), "cukup" (27 – 37), "tinggi" (38 – 48).

b. Motivasi belajar

Dengan menghitung jumlah skor jawaban angket motivasi untuk setiap aspek maupun keseluruhan yang melebihi skor netral 16 (aspek orientasi intrinsik, ekstrinsik, dan control pada keyakinan belajar), 22 (aspek menilai tugas), 32 (aspek control diri dan performa), 20 (aspek *test anxienty*), dan 124 (keseluruhan aspek).

c. Hasil belajar

Dengan memberi skor pada jawaban tes mahasiswa untuk setiap aspek pengamatan. Skor yang digunakan adalah 5 (sepenuhnya memahami/menggunakan), 3 (tidak sepenuhnya memahami/menggunakan), dan 1 (tidak memahami/menggunakan), Skor 4 dan 2 tidak dinyatakan secara eksplisit. Skor 4 bila jawaban mahasiswa belum sepenuhnya mencapai 5 dan skor 2 bila jawaban mahasiswa belum sepenuhnya mencapai 3.

d. Implementasi pembelajaran kooperatif model STAD

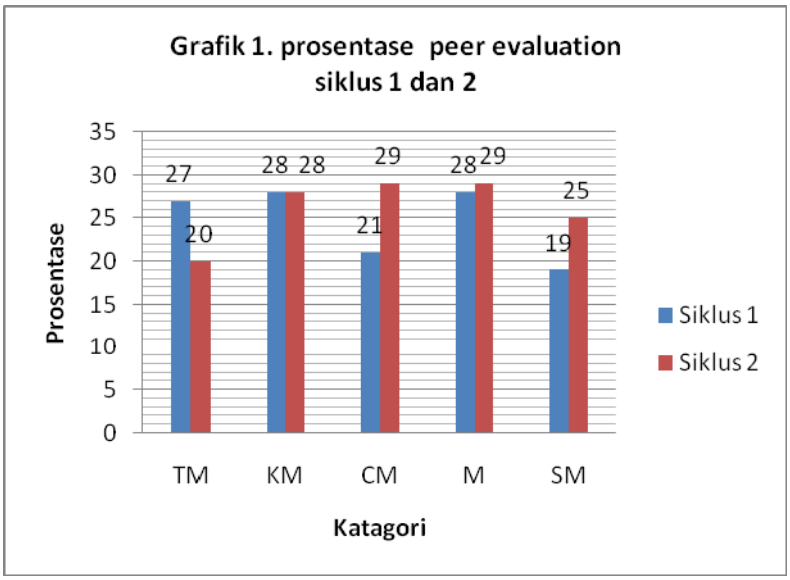
Dengan menghitung jumlah perolehan setiap kriteria.

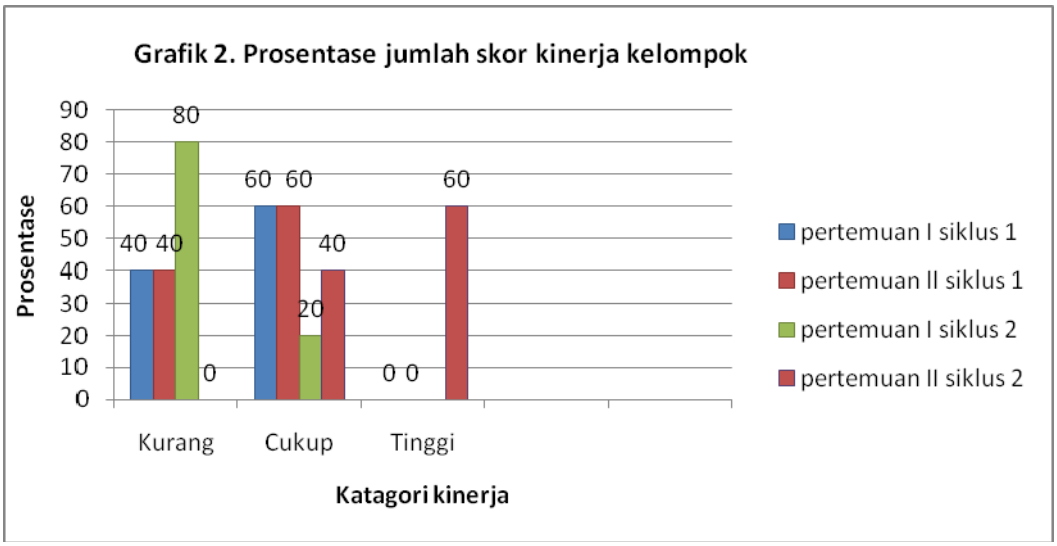
Data yang dikumpulkan pada setiap siklus penelitian kemudian dianalisis secara deskriptif dengan menggunakan persentase untuk melihat kecenderungan yang terjadi.

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

(1) aktivitasi mahasiswa

perbandingan prosentase kontribusi mahasiswa pada kelompok dan kinerja kelompok dapat dilihat pada grafik berikut.





Sampai pada siklus ke 2, prosentase banyaknya mahasiswa yang memberikan kontribusi pada kelompok minimal "cukup memuaskan" sebanyak 83% , seperti terlihat pada grafik 1. Sementara, kinerja kelompok minimal "cukup memuaskan" sebanyak 100 %.

(2) motivasi belajar mahasiswa

Pembelajaran kooperatif model STAD pada siklus ke 2 meningkatkan motivasi belajar sebagian besar mahasiswa. Pada mahasiswa tertentu, model pembelajaran ini tidak meningkatkan motivasi belajar. Peningkatan jumlah mahasiswa yang mempunyai motivasi ke arah tinggi berturut-turut pada aspek orientasi intrinsik pada tujuan (16%), menilai tugas, kontrol pada keyakinan

belajar, serta control diri dan performa (8%), orientasi ekstrinsik pada tujuan (4%), control diri dan performa (8%). Secara keseluruhan, pelaksanaan siklus 1 memberi dampak jumlah mahasiswa yang mempunyai motivasi ke arah tinggi sebesar 92 %, dan pelaksanaan siklus 2 menaikkan hasil tersebut sebesar 4%, sebagaimana terlihat pada table 1.

Table 1. jumlah dan prosentase mahasiswa yang mempunyai kecenderungan positif untuk setiap aspek pengamatan motivasi

Aspek pengamatan	Siklus 1		Siklus 2	
	Jumlah	Prosentase	Jumlah	Prosentase
Orientasi intrinsic pada tujuan	19	76	23	92
Orientasi ekstrinsik pada tujuan	23	92	24	96
Menilai tugas	22	88	24	96
Kontrol pada keyakinan belajar	22	88	24	96
Kontrol diri dan performa	21	84	23	92
Test anxienty	18	72	18	72
Keseluruhan	**23**	**92**	**24**	**96**

(3) Performa dosen dalam pembelajaran

Dari pengamatan teman sejawat, performa dosen pada katagori baik untuk siklus ke 1 mencapai sebesar 84% dan pada siklus ke 2 mencapai sebesar 95%.

(4) Evaluasi hasil belajar

Evaluasi hasil belajar mahasiswa dievaluasi dalam aspek pemahaman konsep, strategi pemecahan masalah, dan pengetahuan prosedur. Hasil evaluasi untuk siklus 1 dan 2 tersaji pada tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. prosentase skor tes pada siklus 1 dan 2 untuk setiap aspek pengamatan

Skor	Aspek Pengamatan					
	Pemahaman Konsep		Strategi Pemecahan Masalah		Pengetahuan Prosedur	
	Siklus 1	Siklus 2	Siklus 1	Siklus 2	Siklus 1	Siklus 2
1	5	0	5	0	12	0
2	40	12	56	16	36	9
3	51	11	16	23	16	15
4	4	52	23	58	36	40
5	0	25	0	18	0	36

Pembahasan

Pembelajaran kooperatif yang dilaksanakan mendorong aktivasi mahasiswa dalam pembelajaran. Ini terlihat dari hasil peer evaluation maupun dari kinerja kelompok.

Interaksi yang dikembangkan didukung dengan ditingkatkannya ketrampilan berkolaborasi dan pengelolaan kelompok mendorong munculnya ketergantungan yang positif dalam kelompok-kelompok kecil. Ketergantungan yang positif ini mendorong keyakinan setiap individu dalam kelompok untuk bertanggung jawab terhadap pembelajaran dan hasilnya sehingga pembelajaran yang dilakukan mendorong motivasi belajar mahasiswa pada materi Distribusi Peluang Khusus. Peningkatan motivasi belajar mahasiswa dapat terlihat pada orientasi instriksik, orientasi ekstrinsik, menilai tugas, control pada keyakinan belajar, dan kontrol diri dan performa.

Hanya pada mahasiswa tertentu dimana kecenderungan belajar secara individual sangat kuat atau yang memiliki kepribadian tertutup, pembelajaran model kooperatif yang dilaksanakan secara terus menerus tidak memberi peningkatan motivasi. Oleh karenanya, dibutuhkan pendampingan khusus bagi mahasiswa dengan kecenderungan belajar individual sangat kuat dan mahasiswa dengan kepribadian yang tertutup serta dibutuhkan variasi dalam pelaksanaan pembelajaran koooperatif untuk mengakomodir perbedaaan gaya belajar mahasiswa.

Secara umum, hasil belajar mahasiswa mengalami peningkatan. Dari hasil tes pada siklus kedua diperoleh sebanyak 77 % mahasiswa memahami konsep minimal mendekati sepenuhnya, sebanyak 76 % mahasiswa menggunakan strategi pemecahan masalah minimal mendekati sepenuhnya, dan sebanyak 76 % mahasiswa menggunakan prosedur minimal mendekati sepenuhnya.

Pelaksanaan pembelajaran kooperatif model STAD untuk pembelajaran materi Distribusi Peluang Khusus pada akhir siklus ke 2 telah mencapai indikator keberhasilan yang ditentukan. Namun, pengembangan penerapan model ini masih diperlukan untuk mengoptimalkan peningkatan hasil belajar mahasiswa.

E. Simpulan dan Saran

Simpulan

Dari pelaksanaan siklus 1 dan siklus 2 pembelajaran kooperatif model STAD, dapat disimpulkan terjadi peningkatan sebagai berikut:

1. Aktivitasi mahasiswa dalam pembelajaran meningkat. Hal ini terlihat dari prosentase mahasiswa yang memberikan kontribusi pada kelompok minimal cukup memuaskan meningkat dari 68 % menjadi 83% , sementara prosentase kelompok dengan kinerja tinggi meningkat 60 %.
2. Motivasi belajar mahasiswa meningkat dari 92 % menjadi 96 %, namun pada aspek *test anxienty* tidak mengalami peningkatan
3. Hasil belajar mahasiswa meningkat. Hal ini terlihat dari banyaknya mahasiswa yang memahami konsep minimal mendekati sepenuhnya meningkat sebesar 73%, yang menggunakan strategi pemecahan masalah minimal mendekati sepenuhnya meningkat 53%, dan yang menggunakan prosedur minimal mendekati sepenuhnya meningkat 40 %.

Saran

Pendekatan kooperatif model STAD yang diterapkan dapat meningkatkan aktivitasi, motivasi, dan hasil belajar mahasiswa pada pembelajaran Distribusi Peluang Khusus, oleh karena itu pembelajaran kooperatif model STAD dapat dijadikan alternatif pembelajaran Statistika Matematika Pengembangan penerapan model ini masih diperlukan untuk mengoptimalkan peningkatan hasil belajar mahasiswa.

F. Daftar Pustaka

1. Anthony, R. A. Jr. (2006). *A Review of the Motivated Strategies for Learning Questionaire.* Dapat diakses pada : //www.coe.uga.edu/smq. Diakses pada tanggal 30 Juli 2007
2. Cobb, G. (1992) *"Teaching Statistics", in Heeding the Call for Change.* Dapat diakses pada http: //www.amstat.org/publications/jse/v1n1/garfield.html. Diakses pada tanggal 31 Juli2007.

3. Johnson, D. , Johnson R., dan Smith, K. (1991). *Cooperative Learning: Increasing College Faculty Instructional Productivity,* ASHE-ERIC. Higher Education Report No 4, Washington DC ; The George Washington University. Dapat diakses pada http://www.amstat.org/publication/jse/v1n1/garfield.html. Diakses pada tanggal 31 Juli 2007.
4. McIntosh, R. dan Jarrett, D. (2000). *Teaching Mathematical Problem Solving: Implementation the Vision.* Tersedia pada www.nwrel.org/msec/image/pdf/monograph.pdf. Diakses pada tanggal 31 Juli 2007.
5. Roger T. dan Johnson, D. W., *cooperative Learning : Two Head Learn Better than One*. Dapat diakses pada http: //www.context.org/ICLIB/IC18/Johnson.htm. Diakses pada tanggal 31 Juli 2007.
6. The Foundation Coalition. *Positive Interdependence, Individual Accountability, Promotive Interaction:Three Pillars of Cooperative Learning.* Dapat diakses pada http: www.foundationcoalition.org. Diakses pada tanggal 31 Juli 2007.

Pembelajaran Kooperatif Tipe *Teams-Games-Tournaments* (TGT) Guna Meningkatkan Kemandirian Belajar Mahasiswa Statistika Matematika Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNTIRTA

Oleh

Nurul Anriani, Novaliyosi, Maman fathurahman
Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,
Universitas Sultan Ageng Tirtayasa
Nurul_rolib@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian ini di latar belakangi oleh adanya masalah yang terjadi pada perkuliahan Statistika Matematika yakni rendahnya nilai mahasiswa dalam mata kuliah ini setiap tahunnya (data terlampir). Permasalahan lain yang juga ditemui adalah 1).Rendahnya keinginan mahasiswa untuk membahas soal dan bertanya di kelas, 2).Kecenderungan mahasiswa untuk hanya menerima materi dari dosen, 3).Jika ada pekerjaan rumah saling mencontek, dan 4).Kurang aktif berdiskusi. Permasalahan-permasalahan di atas diduga terjadi karena rendahnya kemandirian mahasiswa dalam mempelajari statistika matematika.

Penelitian ini bertujuan meningkatkan kemandirian belajar mahasiswa pada perkuliahan Statistika Matematika
mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika
FKIP UNTIRTA melalui model pembelajaran kooperatif tipe *Teams-Games-Tournaments (TGT)* . enelitian ini merupakan penelitian tindakan kelas *(classroom action research).* Penelitian ini dilaksanakan pada perkuliahan Statistika Matematika semester ganjil tahun akademik 2008/2009. Instrumen Instrumen yang digunakan adalah: 1). Soal Game, 2). Soal Turnamen, 3). Lembar Observasi Kegiatan Pembelajaran, 4). Angket Respon Siswa, 5). Angket Kemandirian Belajar Mahasiswa, 6). Lembar Wawancara, dan 7). Lembar Catatan Lapangan. Hasil dari penelitian ini adalah pelaksanaan model pembelajaran kooperatif tipe TGT pada perkuliahan Statistika Matematika bisa digunakan untuk meningkatkan kemandirian belajar mahasiswa.

Kata kunci : *Teams-Games-Tournaments(TGT),* Statistika Matematika, Kemandirian Belajar Mahasiswa

I. Pendahuluan

Statistika Matematika merupakan salah satu mata kuliah yang diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa. Mata kuliah ini adalah mata kuliah wajib dengan beban dua (2) satuan kredit semester bagi mahasiswa semester VII di program studi ini.

Pada kenyataannya, berdasarkan pengalaman dan kegiatan observasi terhadap proses pembelajaran dalam mata kuliah ini diketahui bahwa ada masalah yang terjadi. Masalah tersebut adalah rendahnya nilai mahasiswa dalam mata kuliah ini setiap tahunnya (data terlampir). Permasalahan lain yang juga ditemui adalah 1).Rendahnya keinginan mahasiswa untuk membahas soal dan bertanya di kelas, 2).Kecenderungan mahasiswa untuk hanya menerima materi dari dosen, 3).Jika ada pekerjaan rumah saling mencontek, dan 4).Kurang aktif berdiskusi. Permasalahan-permasalahan di atas diduga terjadi karena rendahnya kemandirian mahasiswa dalam mempelajari statistika matematika.

Ii. Tinjauan Pustaka

A. Pembelajaran Kooperatif

Menurut Johnson, Jonhson, and Smith (1991) yang dikutip oleh Felder dan Bren t dalam www.ncsu.edu menyatakan bahwa:

''Cooperative learning (CL) is instruction that involves students working in teams to ac complish a common goal, under conditions that include the following elements:

1) Positive interdependence; 2) Individual accountability; 3) Face-to-ace promotive

2) interaction; 4) Appropriate use of collaborative skills; 5) Group processing".

Selain itu, *cooperative learning* mempunyai tiga karakterisrik yaitu; (1) peserta didik bekerja dalam tim belajar yang kecil (4-6 orang anggota); (2) peserta didik didorong untuk saling membantu dalam mempelajari bahan yang bersifat akademik atau dalam melakukan tugas kelompok; (3) peserta didik diberi imbalan atau hadiah atas dasar prestasi kelompok (Slavin, 1995). Muslimin Ibrahim, dkk (2000: 6-7) mengemukakan ciri-ciri pembelajaran kooperatif sebagai berikut:

(1) Peserta didik bekerja dalam kelompok secara kooperatif untuk menuntaskan materi belajarnya,

(2) Kelompok dibentuk dari eserta didik yang memiliki kemampuan tinggi, sedang, dan rendah,

(3)Bilamana mungkin, anggota kelompok berasal dari ras, budaya, suku, jenis kelamin berbeda,dan

(4) Penghargaan lebih berorientasi kelompok ketimbang individu.

Dalam pembelajaran kooperatif peran guru atau dosen adalah melakukan pemantauan terhadap kegiatan belajar peserta didik, mengarahkan keterampilan kerjasama dan memberi bantuan pada saat diperlukan. Aktivitas belajar berpusat pada peserta didik, sedangkan guru atau dosen sebagai fasilisator dan dinamisator.

Pembelajaran Kooperatif Tipe *Teams-Games-Tournaments* (TGT)

TeamsGamesTounaments (TGT) merupakan bagian dari pembelajaran kooperatif yang menggabungkan kelompok belajar dengan kompetisi kelompok, dan bisa digunakan untuk meningkatkan pembelajaran beragam fakta, materi pokok atau keterampilan. TGT menggunakan pertandingan atau kompetisi akademik, di mana para perwakilan peserta didik yang memiliki kemampuan akademis yang sama dari setiap kelompok akan saling berkompetisi Dalam TGT keberhasilan lebih diorientasikan pada keberhasilan kelompok dari pada keberhasilan individu.

Menurut Slavin (1995: 84-86) tahapan dalam TGT yang perlu ikan adalah :

1. Presentasi Kelas

Dalam presentasi guru atau dosen memyampaikan materi pembelajaran secara garis besarnya saja. Kegiatan ini bertujuan untuk mempersiapkan kondisi peserta didik dalam mengikuti pembelajaran.

2. Belajar Kelompok

Kelompok terdiri atas empat sampai lima orang yang heterogen misalnya akademik dan jenis kelamin, jika memungkinkan suku, ras atau kelas sosial. Belajar kelompok bertujuan untuk semua anggota mempersiapkan diri untuk mengikuti game dan turnamen dengan sebaiknya. Diharapkan tiap anggota kelompok melakukan hal yang terbaik bagi kelompoknya dan adanya usaha kelompok untuk membantu anggo ta -anggota kelompoknya sehingga dapat meningkatkan kemampuan akademik dan menumbuhkan pentingnya kerjasama diantara peserta didik serta meningkatkan rasa percaya diri peserta didik.

3. Game (Permainan)

Permainan (game) dibuat dengan isi pertanyaan-pertanyaan untuk mengetahui pengetahuan dan pemahaman peserta didik setelah presentasi kelas dan belajar kelompok.Ketika pelaksanaan game peserta didik mengambil kartu bernomor dan berusaha untuk menjawab pertanyaan sesuai dengan nomor. Aturan dalam game

membolehkan setiap peserta game untuk merebutpertanyaan yang tidak dapat dijawab ataupun pertanyaan yang dapat dijawab namun masih belum benar dari pemain.

4. Tournament (kompetisi)

Turnamen (kompetisi) biasanya diselenggarakan akhir minggu, setelah guru melakukan presentasi kelas dan kelompok-kelompok mempraktikan tugas-tugasnya.

Untuk turnamen pertama guru atau dosen memberikan peserta didik permainan mejatiga , peserta didik dengan kemampuan tertinggi di meja 1, meja 2, dan seterusnya.

Kompetisi ini merupakan sistem penilaian kemampuan perorangan dalam TGT, memun gkinkan bagi peserta didik dari semua level di penampilan sebelumnya untuk memaksi malkan nilai kelompok mereka menjadi yag terbaik.

5. Penghargaan Kelompok

Setelah mengikuti game dan turnamen, setiap kelompok akan memperoleh poin.Rata-rata poin kelompok yang diperoleh dari game dan turnamen akan digunakan sebagai penentu penghargaan kelompok. Apabila rata-rata poin kelompok yang diperoleh telah melewati kriteria yang ditentukan maka kelompok tersebut berhak memperoleh penghargaan. Penghargaan kelompok dapat berupa hadiah, sertifikat, dan sebagainya.

Kemandirian Belajar

Kadang orang mengasumsikan bahwa mandiri dalam belajar berarti Mahasiswa bekerja sendiri. Menurut Broadley et al. (1996) dalam Mynard et al (2004) mengatakan bahwa belajar sendiri tidak otomatis mengembangkan kemandirian belajar mahasiswa dalam belajar mandiri mahasiswa boleh bertanya, diskusi, atau minta penjelasan dari orang lain. Sedangkan menurut Knowless 1975 dalam Anung H(2004) menyatakan bahwa mahasiswa yang belajar mandiri artinya tidak menggantungkan diri pada bantuan, pengawasan, dan arahan orang lain termasuk dosen, secara terus menerus. Mahasiswa harus mempunyai kretaivitas dan inisiatif sendiri serta mampu bekerja sendiri dengan merujuk pada bimbingan yang diperolehnya.

Ada beberapa istilah tentang kemandirian belajar yakni *learner autonomy indep endent learning, lifelong learning, learning to learn, thinking skills* (Sinclair, 2001) dala m Mynard et al (2004). Semua istilah tersebut menyatakan konsep bahwa pebelajar atau mahasiswa terlibat dalam proses pembelajaran mereka sendiri. Dalam hal ini mahasisw

a mempunyai tanggung jawab terhadap proses berfikir dan belajar mereka dan tidak hanya menggantungkan para dosen saja.

Kemandirian belajar diindikasikan oleh pebelajar yang mandiri. Menurut Kesten (1987) pebelajar yang mandiri memilki karakteristik: (1) Mempunyai motivasi sendiri dalam belajar, (2) Mempunyai minat dan strategi belajar untuk mencari pemaknaan dan penyelesaian, dan (3) Dapat belajar secara efektif di luar kelas. Beberapa hal ang dapat mempengaruhi kemandirian belajar mahasiswa antara lain (Kesten, 1987):(1) Bagaimana pengajar menciptakan lingkungan yang mendukung kemandirian belajar mahasiswa, (2) Kesempatan untuk membimbing mahasiswa agar aktif dan mandiri, (3) Mengenal faktor yang menaikkan motivasi, men ciptakan bahwa pengajaran revolve atau mengenalkan bahwa yang dipelajari merupakan kebutuhan di lingkungan sehari dari mahasiswa,(4) Memandang mahasiswa sebagai partner dalam proses pembelajaran dan menciptakan lingkungan agar mahasiswa dapat menerapkan belajar secara mandiri.Menurut Hermann Holstein(1 996) kemandirian disebut juga keswakaryaan (kegiatan sendiri).

III. Metode Penelitian

1. Subjek dan Lokasi Penelitian

Subyek penelitian ini adalah mahasiswa tahun akademik 2008/2009 yang mengontrak mata kuliah Statistika Matematika sebanyak 37 orang. Adapun lokasi penelitian di Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa di Serang Banten.

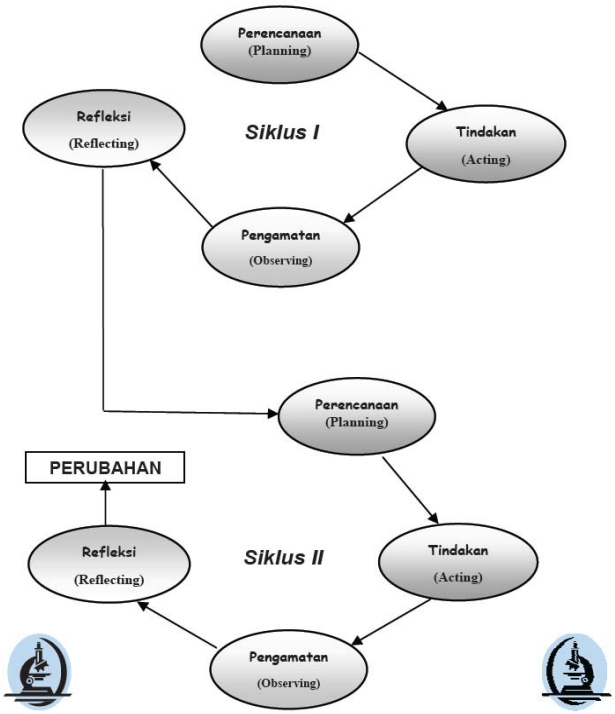
2. Instrumen Penelitian

Instrumen yang digunakan adalah: 1). Soal Game, 2). Soal Turnamen, 3). Lembar Observasi Kegiatan Pembelajaran, 4). Angket Respon Siswa, 5). Angket Kemandirian Belajar Mahasiswa, 6). Lembar Wawancara, dan 7). Lembar Catatan Lapangan.

3. Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian tindakan kelas yang memuat dua siklus. Setiap siklus terdiri dari perencanaan tindakan, pelaksanaan tindakan dan observasi, serta refleksi. Siklus I terdiri dari dua pertemuan dan siklus II terdiri dari dua pertemuan.

Untuk melakukan siklus PTK menggunakan empat langkah di atas. Keempat langkah dalam setiap siklus dapat digambarkan menurut Model Kurt Lewin dan Kemmis & Taggart sebagai berikut :



Gambar 1.
Alur Penelitian Tindakan kelas

IV. Hasil Dan Pembahasan

Dari hasil pengamatan pada pembelajaran siklus 1, tampak bahwa kemandirian belajar mahasiswa dapat dikatakan masih kurang. Pada saat pembelajaran mahasiswa terkesan masih pasif, kurang persiapan, lambat untuk memahami materi, enggan bertanya, dan masih banyak menunggu pengarahan dosen. Namun, untuk pelaksanaan diskusi sudah berjalan cukup lancar. Sedangkan pada pembelajaran siklus lanjutan, menunjukkan bahwa mahasiswa tampak lebih siap sehingga peran mahasiswa dalam kegiatan pembelajaran lebih aktif dan mahasiswa sdah tampak lebih mandiri. Dengan *game* yang kompetitif setiap mahasiswa dalam kelompoknya terdorong untuk saling bekerjasama dan saling membantu dalam meahami pertanyaan dan menjawab pertanyaan. Adanya *reward* yang diberikan oleh dosen dalam *game* mendukung peningkatan semangat belajar mahasiswa. *Reward* berupa nilai yang diberikan pada setiap kelompok setelah mengikuti *game*, pujian dan *applause* yang diberikan kepada kelompok yang berhasil memperoleh poin tertinggi.

Dalam hal ini nilai, pujian dan *applause* yang diberikan sebagai penghargaan mempunyai peranan yang sangat penting dalam meningkatkan semangat belajar mahasiswa. Hal ini didukung oleh pendapat Saiful Bahri Djamarah dan Aswan Zain (2002 : 167) yang menyatakan pemberian ganjaran terhadap prestasi yang dicapai peserta didik dapat merangsang untuk mendapat prestasi yang ebih baik dikemudian hari. Selain *game,* komponen lain dalam TGT yang untuk menguji kemampuan siswa adalah turnamen (kompetisi). Pada TGT turnamen (kompetisi) inilah yang merupakan sistem penilaian kemampuan perorangan, memungkinkan bagi setiap mahasiswa dari semua level di penampilan sebelumnya untuk memaksimalkan nilai kelompok mereka menjadiyang terbaik. Dalam turnamen setiap mahasiswa akan mempunyai kesempatan yang sama untuk menyumbangkan poin tertinggi bagi kelompoknya masingmasing, sehingga mahasiswa akan termotivasi untuk berusaha sebaik mungkin. Penghargaan kelompok ditentukan oleh nilai kelompok. Perhitungan nilai kelompok berdasarkan nilai *game* dan nilai turnamen yang diperoleh setiap

kelompok. Selain pujian dan nilai, dosen juga memberikan hadiah untuk semakin meningkatkan semangat belajar mahasiswa. Hal ini sesuai dengan pendapat Saiful Bahri Djamarah dan Aswan Zain (2002: 169) hadiah berupa benda seperti buku tulis, pensil, pena, bolpoint, penggaris, dan sebagainya dapat dimanfaatkan untuk kepentingan belajar peserta didik.

Dari hasil angket kemandirian belajar mahasiswa yang dapat dilihat pada Tabel 1 dan 2, tampak bahwa secara keseluruhan pada siklus lanjutan terjadi peningkatan kemandirian belajar mahasiswa yakni dari 64,08% pada siklus 1 menjdi 84,42% pada siklus lanjutan. Dari hasil wawancara dengan mahasiswa yang dilakukan peneliti diakhir siklus 1 dan siklus lanjutan, peneliti menyimpulkan bahwa kemandirian belajar mahasiswa cukup mengalami peningkatan dibandingkan sebelum pelaksanaan pembelaaran dengan menggunakan model kooperatif tipe TGT. Mahasiswa merasa senang, tertarik, dan bersemangat dalam mengikuti pembelajaran. Menurut mahasiswa, pembelajaran menjadi tidak membosankan dan dengan model ini mahasiswa menjadi lebih mandiri karena harus senantiasa siap sebelm mengikuti perkuliahan. Hal ini ternyata juga didukung hasil angket respons mahasiswa yang ternyata menunjukkan bahwa 86,30% mahasiswa merespon positif kegiatan pembelajaran yang dilakukan.

V. Kesimpulan Dan Saran

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa pelaksanaan model pembelajaran kooperatif tipe TGT pada perkuliahan Statistika Matematika bisa digunakan untuk meningkatkan kemandirian belajar mahasiswa.

B. Saran

Adapun saran berdasar kan hasil penelitian yang telah dilakukan adalah

- Model pembelajaran kooperatif tipe TGT berperan sangat penting terhadap peningkatan kemandirian mahasiswa, maka penggunaan model pembelajaran kooperatif tipe TGT dalam pembelajaran matematika hendaknya dijadikan pertimbangan oleh dosen sebagai salah satu alternative model pembelajaran

- Dengan model pembelajaran kooperatif TGT mahasiswa diharapkan lebih aktif dalam meningkatkan kemandirian dalam belajar sehingga dapat mengoptimalkan hasil pembelajaran.

VI. Daftar Pustaka

Anita lie. (2005). *Cooperative Learning: Mempraktikkan Cooperative Learning di Ruang-Ruang Kelas*. Jakarta: Grasindo

Anonim. ”Cooperative Learning“. http://www.co-cooperation.org/pages/cl.html diakses Selasa, 14 Februari 2006

Erman Suherman, Turmudi, Didi Suryadi, Tatang Herman, Suhendra, Sufyani Prabawanto, Nurjanah, Ade Rohayati. (2003). *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Pendidikan Indonesia

Felder, Richard M and Brent, Rebecca. (1994). “Cooperative Learning in Technical Courses: Procedures, Pitfalls, and Payoffs“. http://www.ncsu.edu/felder-public/Papers/Coopreport.html diakses Senin, 20 Februari 2006

Janet Trineke Manoy. (2001). *Pembelajaran Kooperatif dengan Portofolio. Matematika Siswa*. Prosiding Seminar Nasional Matematika. Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta

Muslimin Ibrahim, Fida Rachmadiarti, Mohamad Nur, Ismono. (2000). *Pembelajaran Kooperatif*. Surabaya: UNESA

Rochiati Wiriaatmadja. (2005). *Metode Penelitian Tindakan Kelas: Untuk Meningkatkan Kinerja Guru dan Dosen.* Bandung: Remaja Rosdakarya

Rouviere W. Carolyn. “Continuous Evaluation Using Cooperative Learning”. http://www.maa.org/saum/maanotes49/140.html diakses Selasa, 14 Februari 2006

Pengembangan Bahan Ajar Berdasarkan Perkembangan Kognitif untuk Meningkatkan Hasil Belajar Matematika Siswa SD*

Oleh : Rasiman**

ABSTRAK

Masalah utama yang dihadapi dalam pembelajaran matematika di Sekolah Dasar utamanya pada kelas-kelas tinggi (Kelas IV - VI) adalah kurangnya pemahaman murid-murid tentang konsep-konsep matematika. Kebanyakan murid hanya memahami secara algoritmis dengan menerapkan rumus-rumus yang telah diajarkan oleh guru tanpa memahami esensi dan konsep yang terkandung pada setiap topik.

Hal ini diduga penyebabnya adalah materi matematika pada kelas tersebut disajikan secara abstrak dengan penggunaan proposisi-proposisi logik-formal yang terlalu rumit. Guru matematika mengajar hanya berdasarkan/mengikuti buku paket yang ada tanpa terlebih dahulu menyederhanakan/mengkonkretkan materi yang akan diajarkan. Pada umumnya buku pelajaran matematika Sekolah Dasar yang beredar dan digunakan sebagai bahan ajar sudah menggunakan pendekatan formal sehingga sulit dimengerti oleh murid-murid yang berusia sekitar 10-12 tahun yang perkembangan intelektualnya masih berada pada tahap operasi konkret. Untuk itu perlu disusun buku ajar matematika SD yang dirancang/dikonstruksi dengan pendekatan induktif dan pembelajarannya dengan menggunakan metode induksi.

Untuk menyusun buku ajar yang dimaksud ditempuh langkah-langkah sebagai berikut: (1) mengiventarisasi konsep-konsep matematika yang akan diajarkan pada kelas tinggi berdasarkan kurikulum matematika SD, (2) menginventarisasi kompetensi dasar, (3) menyusun bahan pembelajaran setiap konsep dengan menggunakan pendekatan induktif.

Kata Kunci : ***buku ajar, kognitif, induksi***

PENDAHULUAN

a. Latar Belakang

Pengajaran matematika di sekolah dasar perlu dibahas dan mendapatkan perhatian yang sungguh-sungguh. Perhatian tersebut terutama ditujukan pada penerapan pengajaran matematika di sekolah dasar agar dilakukan secara cermat dan lebih hati-hati, baik pemilihan materi yang akan diajarkan maupun strategi pembelajaran yang akan digunakan. Apalagi jika dalam pelaksanaan proses pembelajaran, para guru belum mampu menyajikan materi-materi abstrak tersebut ke dalam bentuk-bentuk nyata melalui penggunaan benda-benda konkret.

---

*) Disajikan dalam Seminar Nasional Di UNY Yogyakarta, 28 November 2008
**). Dosen IKIP PGRI Semarang.

Anak-anak Sekolah Dasar berada pada stadium operasional kongkret, hal ini menyebabkan mereka mengalami kesulitan dalam mempelajari konsep-konsep abstrak. Oleh karena itu banyak keluhan yang muncul di masyarakat antara lain rendahnya daya serap dalam pelajaran matematika di sekolah dasar, berkurangnya kemampuan berhitung anak lulusan sekolah dasar (USBN Matematika Kota Semarang tahun 2006/2007 sebesar 6,2 dan tahun 2007/2008 sebesar 6,16) , masalah kemampuan mengajar guru, dan keluhan-keluhan orang tua yang merasa kesulitan dalam membantu anaknya mempelajari matematika.

Penyajian konsep-konsep matematika di sekolah dasar, terutama konsep-konsep abstrak yang menggunakan proposisi-proposisi logik-formal sedapat mungkin dilakukan dengan pendekatan yang menggunakan benda-benda konkret yang diajarkan secara induktif, karena tanpa pendekatan ini materi-materi abstrak tersebut tidak akan bermakna bagi siswa dan selanjutnya sangat sulit untuk dapat diserap dengan baik.

Berdasarkan pemikiran dan masalah-masalah yang telah dikemukakan, maka strategi pembelajaran yang sesuai dengan perkembangan kesiapan intelektual anak usia sekolah dasar adalah sangat penting, karena strategi tersebut diharapkan akan efektif untuk meningkatkan minat dan prestasi belajar matematika di sekolah dasar yang pada gilirannya akan memberikan masukan yang berarti bagi upaya peningkatan mutu pendidikan, khususnya peningkatan mutu pengajaran matematika di sekolah dasar.

Masalah utama yang dihadapi dalam pembelajaran matematika di Sekolah Dasar utamanya pada kelas-kelas tinggi (Kelas IV dan Kelas VI) adalah kurangnya pemahaman murid-murid tentang konsep-konsep matematika. Kebanyakan murid hanya memahami secara algoritmis dengan menerapkan rumus-rumus yang telah diajarkan oleh guru tanpa memahami esensi dan konsep yang terkandung pada setiap topik. Hal ini diduga penyebabnya adalah materi matematika pada kelas tersebut disajikan secara abstrak dengan penggunaan proposisi-proposisi logik-formal yang terlalu rumit. Guru matematika mengajar hanya berdasarkan/mengikuti buku paket yang ada tanpa terlebih dahulu menyederhanakan/mengkonkretkan materi yang akan diajarkan. Pada umumnya buku pelajaran matematika yang beredar dan digunakan sebagai bahan ajar sudah menggunakan pendekatan formal sehingga sulit dimengerti oleh murid-murid yang berusia sekitar 10-12 tahun yang perkembangan intelektualnya masih berada pada tahap operasi konkret. Untuk itu perlu disusun buku ajar matematika Kelas IV dan Kelas VI

SD yang dirancang/dikonstruksi dengan pendekatan induktif dan pembelajarannya dengan menggunakan metode induksi.

b. Rumusan Masalah

Bagaimanakah cara mengembangkan bahan ajar matematika SD berdasarkan perkembangan kognitif siswa.

c. Tujuan dan Manfaat

Tujuan :

1. Menyusun dan mengembangkan buku ajar matematika Kelas IV dan Kelas VI Sekolah Dasar dengan pendekatan induksi
2. Menerapkan penggunaan buku ajar yang disusun berdasarkan pendekatan induksi pada Sekolah Dasar se Kota Semarang.

Manfaat :

1. Dapat meningkatkan pemahaman murid dan belajar menjadi lebih bermakna.
2. Menggunakan pendekatan induksi baik dalam penyusunan buku ajar maupun dalam pelaksanaan pembelajarannya di kelas dalam upaya memperbaiki hasil belajar matematika.

PEMBAHASAN

a. Hasil Belajar Matematika

Belajar Matematika merupakan suatu aktifitas mental untuk memahami arti dari hubungan-hubungan dan simbol-simbol yang terkandung dalam Matematika secara sistematik, cermat dan tepat, kemudian menerapkan konsep-konsep yang dihasilkan untuk memecahkan masalah dalam berbagai hal/ keadaan/ situasi nyata.

Hasil belajar yang dicapai oleh siswa ditunjukkan oleh perubahan-perubahan dalam bidang pengetahuan/ pemahaman, keterampilan, analisis, sintesis, evaluasi, serta nilai dan sikap. Perubahan yang dihasilkan dari belajar dapat berupa perubahan persepsi dan pemahaman, yang tidak selalu dilihat sebagai tingkah laku (Soekamto dan Winataputra, 1997: 21). Adanya perubahan itu tercermin dalam prestasi belajar yang diperoleh siswa.

Romiszowski membagi hasil belajar menjadi empat ranah yaitu: (1) kognitif, (2) psikomotorik, (3) reaksi emosional, dan (4) interaksi yaitu merupakan keterampilan menerima dan menyampaikan informasi (1981: 253). Gagne & Briggs (79:49-50)

membagi hasil belajar dalam lima kategori yaitu: (1) keterampilan intelektual, (2) strategi kognitif, (3) informasi verbal, (4) keterampilan motorik, dan (5) sikap.

Merrill & Twitcell (1994: 106) mengelompokkan hasil belajar ke dalam dua dimensi yaitu (1) tingkat unjuk kerja, dan (2) tipe isi. Bloom (1981:7) membagi hasil belajar ke dalam tiga ranah yaitu (1) kognitif, (2) afektif, dan (3) psikomotor. Ranah kognitif terbagi menjadi enam tingkatan yaitu: (a) ingatan, (b) pemahaman, (c) penerapan, (d) analisis, (e) sintesis, dan (f) evaluasi. Gronlund (1982: 3) menyatakan bahwa hasil belajar di ranah kognitif dibagi menjadi dua bagian besar yaitu (1) pengetahuan, dan (2) kemampuan intelektual serta keterampilan.

Batasan mengenai hasil belajar yang telah dikemukakan oleh para ahli tersebut di atas sesuai dengan hasil belajar Matematika yang diharapkan pada jenjang pendidikan menengah umum yang meliputi tiga aspek yaitu kognitif, afektif dan psikomotorik. Tetapi dalam penulisan ini, hasil belajar Matematika yang hendak dibahas dan diukur dibatasi hanya pada hasil belajar di ranah kognitif. Dengan demikian dapat dirumuskan bahwa hasil belajar Matematika pada ranah kognitif yang dimiliki siswa sebagai hasil dari proses belajar mengajar Matematika selama kurun waktu tertentu berdasarkan tujuan instruksional tertentu yang mengacu pada garis besar program pengajaran Matematika Sekolah Dasar Kelas IV dan Kelas IVI.

b. Metode Induktif

Dalam proses pembelajaran dikenal berbagai macam metode, antara lain metode: ceramah, ekspositori, demonstrasi, penemuan, penugasan, diskusi, induktif, deduktif, dan lain-lain. Struktur matematika yang bersifat deduktif-aksiomatik menjadikan matematika sebagai pelajaran yang disegani/ditakuti oleh sebagian besar siswa. Apalagi pada jenjang Sekolah Dasar dimana tingkat perkembangan kognitif siswa masih berada pada stadium operasi konkret. Dengan demikian struktur materi pengajaran maupun metode mengajar matematika di Sekolah Dasar perlu disusun dan disajikan dengan menggunakan pendekatan yang sesuai dengan tingkat perkembangan kognitifnya.

Penyusunan materi maupun metode mengajar matematika di sekolah dasar terutama pada kelas tinggi pada umumnya menggunakan metode deduktif, hal ini biasanya dirasakan sulit bagi murid untuk menerima pelajaran matematika. Untuk itu perlu dirancang dan disusun bahan ajar matematika dan metode mengajar matematika

yang sesuai dengan tingkat perkembangan kognitif murid. Pendekatan/ metode yang tepat dalam hal ini adalah metode induksi.

Metode induksi adalah salah satu metode mengajar yang dikembangkan berdasarkan logika induktif, yaitu berjalan mulai dari yang konkret menuju yang abstrak, dari yang khusus menuju yang umum dan dari contoh-contoh menuju ke aturan umum. Tekanan metode ini adalah pada penyusunan rumus umum, dengan bantuan contoh-contoh konkret, yang jumlahnya cukup untuk menurunkan rumus umum itu (Murtadho dan Tambunan, 1987: 6.2).

Penalaran induktif adalah proses penalaran yang menyimpulkan bahwa prinsip umum itu bernilai benar, sebab kasus-kasus khusus yang dilihat bernilai benar (Spencer, 1999: 1). Penalaran induktif merupakan bagian dari proses penemuan dengan cara mengobservasi kasus-kasus khu-sus untuk menyimpulkan prinsip umum yang bernilai benar.

Ada tiga ciri pokok dari penalaran induktif yaitu: (1) premis-premis dari induktif ialah proposisi empirik yang langsung kembali kepada suatu observasi indera atau proposisi dasar (*basic statement*) yang menunjuk kepada fakta, yaitu observasi yang dapat diuji kecocokannya dengan tangkapan indera, (2) konklusi pena-laran induktif lebih luas dari pada apa yang dinyatakan di dalam premis-premisnya, dan (3) konklusi induktif memiliki kredibilitas rasional (Soekadidjo, 1991: 132-133).

Prinsip induktif dapat diterapkan dalam proses pembelajaran. Prinsip induktif kelihatannya lebih mudah dipahami oleh siswa karena dimulai dari contoh-contoh nyata, kemudian baru dibawa kepada penarikan kesimpulan yang biasanya berupa pernyataan umum (generalisasi) atau rumus-rumus (formula-formula).

Metode induktif dapat diterapkan pada proses pembelajaran Matematika, walaupun struktur Matematika itu sendiri bersifat deduktif. Memahami suatu rumus Matematika dapat dicapai melalui proses nalar dan penyelesaian problem yang meyakinkan. Sesudah beberapa keadaan konkret telah dipahami, selanjutnya diharapkan para siswa dapat berhasil untuk mencapai generalisasi.

Tujuan penerapan metode induktif dalam pembelajaran Matematika adalah untuk mempermudah siswa sebelum diberikan rumus-rumus formal yang biasanya bersifat abstrak dan sulit untuk dipahami. Untuk memahami rumus-rumus Matematika yang

bersifat formal, siswa perlu diberikan beberapa contoh yang dapat membangun struktur kognitifnya, sehingga sampai kepada pemahaman akan rumus formal tersebut.

Beberapa keunggulan mengajar dengan menggunakan metode induktif adalah sebagai berikut: (1) dapat meningkatkan pemahaman, karena prinsip Matematika lebih mudah dipahami melalui contoh-contoh khusus, (2) metode induktif adalah logika, oleh karena itu cocok dengan Matematika, (3) memberi kesempatan kepada murid untuk berpartisipasi aktif dalam menemukan rumus atau generalisasi, (4) dapat mengobati kecenderungan belajar menghafal, dan mengurangi pekerjaan rumah, (5) berdasarkan observasi, berpikir, dan eksperimen sebenarnya (aktual), (6) menghilangkan keragu-raguan, karena berdasarkan fakta. Selanjutnya, kelemahan metode induktif adalah sebagai berikut: (1) mempunyai keterbatasan dalam ruang lingkup, berisi proses penemuan rumus dengan pertolongan beberapa contoh konkret, tetapi selanjutnya tidak diberikan, seolah-olah kesimpulan itu diambil secara menduga, (2) nalar induktif tidak memberikan konklusi absolut, (3) kemungkinan dapat memakan waktu dan pekerjaan yang melelahkan, (4) tidak dapat dipakai pada tahap lanjut, karena ada keterangan yang detail yang tidak perlu, sehingga dapat menimbulkan kebosanan (Murtadho & Tambunan, 1987: 6.3).

Berdasarkan uraian tersebut di atas, dapat disimpulkan bahwa metode induktif adalah metode mengajar yang dilakukan dengan pemberian fakta-fakta (contoh-contoh) khusus menuju ke rumus-rumus umum, dari hal yang sederhana menuju ke hal yang kompleks, dan dari bentuk yang konkret ke bentuk yang abstrak, yang bertujuan untuk memudahkan siswa dalam menerima pelajaran matematika yang bersifat formal.

Sebaliknya, metode deduktif bekerja dari atas ke bawah, merupakan suatu teori yang kelihatannya logis, dengan dasar *a priori*. Kemudian teori itu diuji dengan melakukan eksperimen-eksperimen yang sifatnya ditentukan oleh teori tersebut. Dalam teori semacam ini mula-mula dirumuskan sekumpulan asumsi-asumsi dasar atau postulat-postulat, dengan memperhatikan faktor-faktor tertentu yang telah dikenal. Dari postulat-postulat ini dibangun hipotesis-hipotesis atau teorema-teorema. Hipotesis-hipotesis itu kemudian diuji, dan hipotesis yang terbukti benar, dipertahankan sehingga selama periode tertentu teori itu mengalami koreksi sendiri. Inilah yang merupakan ciri dari teori deduktif (Dahar, 1996: 6).

Preston (1999:1) menyatakan bahwa penalaran deduktif dimulai dari bentuk umum dan dilanjutkan dengan menarik kesimpulan berdasarkan bentuk umum tersebut, atau dapat juga dilakukan melalui cara yang berlawanan dengan penalaran induktif.

Penalaran deduktif merupakan kumpulan dari silogisme-silogisme yang telah dinyatakan; selanjutnya prinsip-prinsip umum, definisi-definisi dan aksioma-aksioma, digunakan sebagai permulaan pembuktian (Copi & Gould, 1968: 270). Di dalam pembuktian teorema Matematika, dikenal dengan adanya istilah "trik", yaitu suatu langkah/ cara membuktikan dengan menggunakan ketajaman intuisi, sehingga langkah yang diambil itu tepat. Untuk itu seseorang dalam membuktian teorema memerlukan banyak latihan.

Metode deduktif merupakan kebalikan dari metode induktif. Metode deduktif berangkat dari hal yang umum ke yang khusus, dari hal yang abstrak ke yang konkret, dan dari rumus ke contoh-contoh. Rumus yang telah terbentuk, diberitahukan kepada siswa dan mereka diminta menyelesaikan problem yang relevan, dengan pertolongan rumus itu. Rumus diterima oleh siswa sebagai kebenaran yang tidak diragukan lagi.

c. Karakteristik Buku Ajar

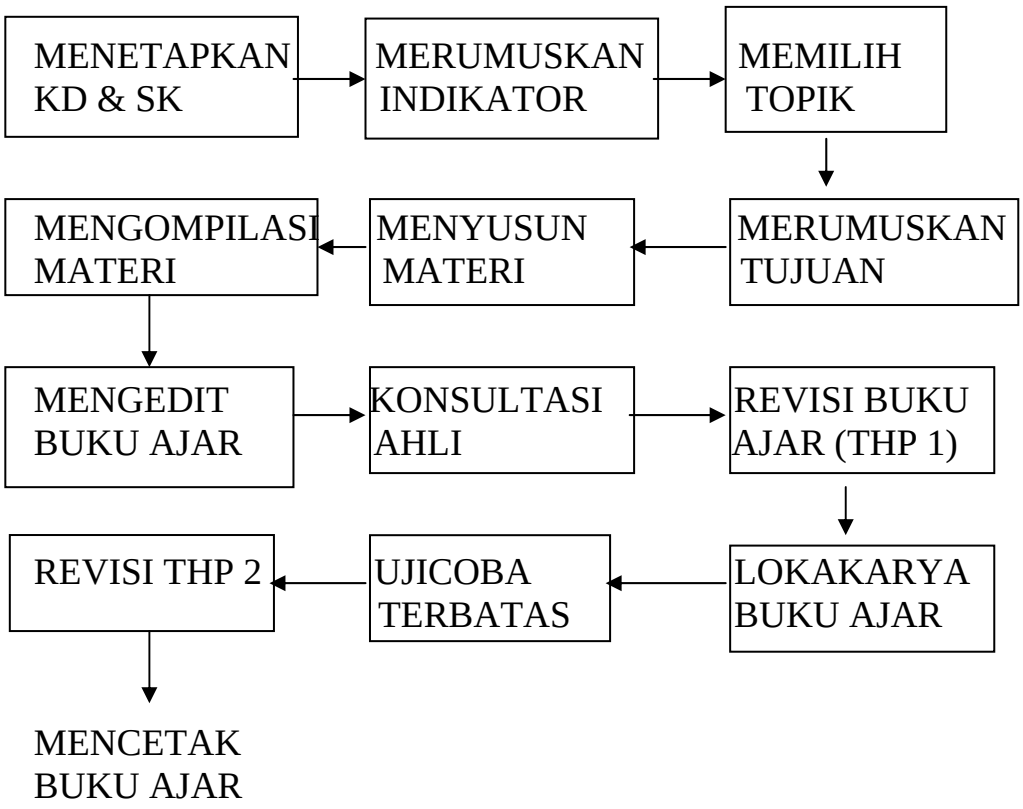
Komponen	**Karakteristik**
1. Teori Belajar	Kognitivisme
2. Pendekatan	Induktif
3. Urutan penyajian	Konkrit ke abstrak; sederhana ke kompleks; contoh-contoh ke rumus umum; hal-hal khusus ke bentuk umum yang kontekstual
4. Pengorganisasian	Materi terurut dan sistematis berdasarkan analisis instruksional
5. Ilustrasi	Gambar, tabel/daftar, diagram; skema; foto, grafik, dll
6. Bahasa	Sederhana, jelas, benar, sesuai dengan tingkat perkembangan kognitif

Untuk menyusun buku ajar yang dimaksud ditempuh langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diskusi yang terdiri dari ahli bidang pendidikan matematika, bidang matematika terapan, dan bidang penelitian dan evaluasi pendidikan.
2. Inventarisasi konsep-konsep matematika yang akan diajarkan pada Kelas IV dan Kelas VI berdasarkan kurikulum, silabus, standar kompetensi dan kompetensi dasar serta indikator yang relevan.
3. Inventarisasi kompetensi dasar yang harus dimiliki oleh murid Kelas IV dan VI.

4. Menentukan topik dan kompetensi dasar.
5. Merumuskan tujuan pembelajaran.
6. Menyusun materi pembelajaran setiap konsep dengan menggunakan pendekatan induksi.
7. Mengumpulkan semua materi pembelajaran yang telah disusun dan mengedit menjadi buku ajar.
8. Mengkonsultasikan hasil kerja tim (buku ajar) dengan pakar pendidikan matematika.
9. Revisi buku ajar berdasarkan masukan dari pakar pendidikan matematika.
10. Lokakarya membahas tentang buku ajar yang dihasilkan.
11. Ujicoba buku ajar secara terbatas.
12. Revisi buku ajar (tahap 2) berdasarkan masukan dari hasil seminar.
13. Mencetak buku ajar yang akan digunakan untuk penelitian tahun kedua.

d. Langkah-Langkah Penyusunan Buku Ajar



PENUTUP

Pembelajaran matematika di SD merupakan dasar bagi siswa untuk menerima konsep-konsep matematika secara benar. Oleh karena itu siswa dan guru sudah seharusnya mempunyai komitmen yang tinggi untuk brperan dalam upaya meningkatkan hasil belajar siswa. Salah satu hal yang sangat urgen untuk dibahas tentang keberadaan buku ajar yang digunakan siswa dan guru. Hal ini dimungkinkan karena buku ajar yang ada saat ini cenderung berpola pikir deduktif, hal ini kontradiksi dengan pola pikir anak SD yang masih dalam taraf operasi konkret. Untuk mengatasi hal ini perlu dibuat buku ajar yang sesuai dengan taraf berpikir siswa SD yaitu dengan pendekatan induktif.

DAFTAR PUSTAKA

Aiken, Lewis R. 1991. *Psychological Testing and Assessment.* Boston: Allyn and Bacon.

Baum, Robert and David T. 1981. Wieck. *Logic*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Begle, Edward G. 1979. *Critical Variables in Mathematics Education.* Washington: Published by Mathematical Association of America and NCTM.

Bell, Frederick H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics.* USA: Wm. C. Brown Publisher.

Bloom, Benjamin S. 1981. *Taxonomy of Educational Objectives.* New York: Longman Inc.

Bloom, B.S., G. F. Madaus, and J. T. Hastings. 1981. *Evaluation to Improve Learning.* New York: McGraw-Hill Book Company.

Copi, Irving M. and James A. Gould. 1968. *Readings on Logic.* New York: The Macmillan Company.

Cronbach, L.J. 1984. *Essential of Psychological Testing.* New York: Harper and Row Publisher.

Dahar, Ratna Wilis. 1996. *Teori-Teori Belajar*. Jakarta: Erlangga.

David, Merrill M. and David G. Twitcell. 1994. *Instructional Design Theory.* New Jersey: Educa-tional Technology Publication Englewood Cliffs.

Gagne, Robert M. and L.J. Briggs. 1979. *Principles of Instructional Design.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Gagne, Robert M. 1985. *The Conditions of Learning and Theory of Instruction.* New York: CBS College Publishing.

Gie, The Liang. 1994. *Cara Belajar yang Efisien, Jilid I.* Yogyakarta: Penerbit dan Percetakan Liberty.

Grassmann, W. K. and Jean Paul Tremblay. 1998. *Logic and Discrete Mathematics.* Singapore: Simon and Schuster Pte. Ltd.

Hudojo, Herman. 1998. *Mengajar Belajar Matematika.* Jakarta: P2LPTK Depdikbud.

Huitt, B., J. Hummel, and D. Kaeck. 2000. *Assessment, Measurement, Evaluation and Research.* http://chiron.valdosta.edu// whuitt/col/intro/sciknow. html.

Joyce, Bruce and Marsha Weil. 1992. *Models of Teaching.* Boston: Allyn and Bacon.

Kline, Morris. 1997. "Matematika." *Ilmu dalam Perspektif, ed.* Jujun S. Suriasumantri. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.

Lindquist, E. F. 1953. Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education. Boston: Houghton Mifflin Company.

Murtadho, Sutrisman dan G. Tambunan. 1987. *Pengajaran Mate-matika.* Jakarta: Penerbit Karunika.

Musser, Gary L. and William F. Burger. 1994. *Mathematics for Elementary Teachers.* New York: MacMillan Collage Publishing Company.

Preston, Cynthea. 1999. *Inductive/ Deductive Reasoning.* http://www. ltcc.cc.ca.us/ programs/english/ induct. htm.

Romiszowski, A. J. 1981. *Designing Instruction Systems Decision in Course Planning.* New York: Nicholag Publishing Company.

Rusyan, Tabrani, Atang Kusnidar dan Zainal Arifin. 1994. *Pendekatan dalam Proses Belajar Mengajar.* Bandung: Remaja Rosdakarya.

Silverius, Suke. 1991. *Evaluasi Hasil Belajar dan Umpan Balik.* Jakarta: Gramedia Widiasarana.

Soekadidjo, R.G. 1991. *Logika Dasar :Tradisional, Simbolik, dan Induktif.* Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Soekamto, Toeti dan Udin S. Winataputra. 1997. *Teori Belajar dan Model-Model Pembelajaran.* Jakarta: Dirjen Dikti-Depdikbud.

PROBLEM-BASED LEARNING DAN KEMAMPUAN BERPIKIR REFLEKTIF DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Oleh
Sri Hastuti Noer
FKIP Universitas Lampung

ABSTRAK

Salah satu harapan yang ingin dicapai dalam pembelajaran matematika di sekolah di setiap jenjang adalah dimilikinya kemampuan berpikir matematis. Kemampuan berpikir matematis khususnya berpikir matematis tingkat tinggi sangat diperlukan siswa. Hal ini terkait dengan kebutuhan siswa untuk memecahkan masalah yang dihadapinya dalam kehidupan sehari-hari.

Berpikir reflektif sebagai bagian dari berpikir matematis tingkat tinggi, secara mental melibatkan proses-proses kognitif untuk memahami faktor-faktor yang menimbulkan konflik pada suatu situasi. Oleh karena itu berpikir reflektif merupakan suatu komponen kritis dari proses pembelajaran. Hasil keterlibatan mental ini mengakibatkan seseorang aktif membangun pengetahuan untuk mengembangkan suatu strategi untuk merespon situasi itu.

Problem Based Learning (PBL) dinyatakan sebagai sebuah strategi yang menjanjikan dapat meningkatkan kemampuan berpikir matematis siswa. Oleh karena itu, uraian berikut akan mengkaji tentang PBL, berpikir reflektif, dan kaitan PBL dengan berpikir reflektif.

Kata Kunci: Berpikir reflektif, *Problem Based Learning*

A. PENDAHULUAN

Salah satu harapan yang ingin dicapai dalam pembelajaran matematika di sekolah di setiap jenjang adalah dimilikinya kemampuan berpikir matematis. Kemampuan berpikir matematis khususnya berpikir matematis tingkat tinggi (*higher order thinking*) sangat diperlukan siswa. Hal ini terkait dengan kebutuhan siswa untuk memecahkan masalah yang dihadapinya dalam kehidupan sehari-hari.

Menurut Resnick (1987), *higher order thinking* bersifat non algoritmik, kompleks, melibatkan kemandirian dalam proses berpikir, sering melibatkan suatu ketidakpastian sehingga membutuhkan pertimbangan dan interpretasi, melibatkan kriteria yang beragam yang kadang menimbulkan konflik dan menghasilkan solusi yang bisa beragam, serta membutuhkan suatu usaha yang sungguh-sungguh dalam melakukannya.

Sementara itu, berpikir reflektif adalah berpikir yang bermakna, yang didasarkan pada alasan dan tujuan. Ini merupakan jenis pemikiran yang melibatkan pemecahan masalah, perumusan kesimpulan, memperhitungkan hal-hal yang berkaitan, dan membuat keputusan-keputusan di saat seseorang menggunakan ketrampilan yang bermakna dan efektif untuk konteks tertentu dan jenis dari tugas berpikir. Dengan melakukan refleksi, siswa dapat mengembangkan ketrampilan-ketrampilan berpikir tingkat tinggi melalui dorongan untuk menghubungkan pengetahuan baru pada pemahaman mereka yang terdahulu, berpikir dalam terminologi abstrak dan konkrit, menerapkan strategi spesifik untuk tugas-tugas baru, dan memahami proses berpikir mereka sendiri dan belajar strategi. Dengan demikian berpikir reflektif ditujukan untuk meningkatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi.

Menurut Sumarmo (2005), pembelajaran matematika diarahkan untuk mengembangkan (1) kemampuan berfikir matematis yang meliputi: pemahaman, pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, dan koneksi matematis; (2) kemampuan berfikir kritis, serta sikap yang terbuka dan obyektif, serta (3) disposisi matematis atau kebiasaan, dan sikap belajar berkualitas yang tinggi.

Sementara itu dokumen kurikulum matematika terbaru secara internasional, pada umumnya mempromosikan pendekatan berorientasi perubahan dan mengenalkan pentingnya melibatkan para siswa dalam memanfaatkan matematika melalui suatu proses. Sebagai contoh, Standar NCTM (NCTM, 2000) termasuk pemecahan masalah, penalaran dan pembuktian, komunikasi, koneksi, dan representasi. Menurut Anderson, J. dan Bobis, J. (2005), proses serupa juga tercakup dalam silabus matematika yang terakhir untuk para siswa sekolah dasar di New South Wales (BOSNSW, 2002). Dalam pembelajaran matematika proses *Working Mathematically* menyertakan lima proses yang saling berhubungan yaitu *questioning, applying strategies, communicating, reasoning and reflecting*.

Hasil penelitian Sumarmo, dkk (dalam Hulukati, 2005) menunjukkan gambaran bahwa pembelajaran matematika dewasa ini masih berlangsung secara tradisional yang antara lain memiliki karakteristik sebagai berikut: Pembelajaran berpusat pada guru, pendekatan yang digunakan lebih bersifat ekspositori, guru lebih mendominasi proses aktivitas kelas, latihan-latihan yang diberikan lebih banyak yang bersifat rutin.

Padahal dalam proses pembelajaran matematika, siswa perlu dibiasakan untuk memecahkan masalah, menemukan sesuatu yang berguna bagi dirinya, dan bekerja dengan ide-ide. Karena pada dasarnya, guru tidak akan mampu memberikan semua pengetahuan pada siswa. Siswa harus dapat mengkonstruksikan pengetahuan dalam pikiran mereka sendiri. Hal ini sesuai dengan esensi dari teori konstruktivisme yang menekankan bahwa siswa harus menemukan dan mentransformasikan suatu informasi kompleks kepada situasi lain, sehingga informasi itu menjadi milik mereka sendiri.

Hiebert et al. (dalam Erickson, 1999) menjelaskan satu prinsip esensial yang berfokus pada membangun pemahaman matematika siswa adalah "*Make the subject problematic*." Pembelajaran harus memberi kesempatan kepada siswa untuk berpikir "mengapa", melakukan inkuiri, mencari solusi, dan memverifikasi solusi. Ini berarti, pembelajaran harus dimulai dengan masalah, dilema, atau pertanyaan bagi siswa. Dengan dasar itu, pembelajaran matematika harus dikemas menjadi proses mengkonstruksi bukan menerima pengetahuan. Dalam proses pembelajaran matematika sangat diharapkan siswa membangun sendiri pengetahuan mereka melalui keterlibatan aktif dalam proses belajar dan mengajar (Labinowicz,1985; Confrey,1994). Sementara guru berperan sebagai mediator dan fasilitator.

Sebagai fasilitator guru berperan dalam mengembangkan kesadaran siswa mengenai apa yang harus dilakukan dalam belajar matematika, berusaha melibatkan siswa sehingga diharapkan siswa terpacu untuk aktif belajar dan terlibat langsung dalam proses pembelajaran, siswa mengkonstruksi pengetahuannya sendiri, siswa mengalami sendiri, menemukan sendiri dan tidak hanya sekadar menghapal.

Titik awal dari *Problem-Based Learning* (PBL) adalah masalah (*problem*). Dalam PBL siswa didorong untuk menganalisis suatu permasalahan dan mempertimbangkan analisis alternatif. Oleh karena itu PBL menempatkan siswa sebagai pemeran utama dalam pembelajaran dan keterampilan berpikir. Siswa dilatih untuk berpikir mandiri dan mengembangkan kepercayaan diri dan menghargai aktivitas yang sedang terjadi.Dengan demikian, PBL menciptakan suasana yang mendukung siswa dalam meningkatkan kemampuan berpikir mereka.

B. PEMBAHASAN

B.1 *Problem-Based Learning*

Dalam proses pembelajaran perolehan pengetahuan diawali dengan adanya konflik kognitif (Karli dan Yuliartiningsih, 2000). Konflik kognitif adalah stimulus untuk memahami dan menentukan organisasi serta sifat alami dari apa yang dipelajari. Perolehan pengetahuan siswa diawali dengan diadopsinya hal baru sebagai hasil interaksi dengan lingkungannya. Kemudian hal baru tersebut dibandingkan dengan konsep awal yang telah dimiliki sebelumnya. Jika hal baru tersebut tidak sesuai dengan konsepsi awal siswa, maka akan terjadi konflik kognitif yang mengakibatkan adanya ketidakseimbangan dalam struktur kognitifnya.

Melalui proses akomodasi dalam kegiatan pembelajaran, siswa dapat memodifikasi struktur kognitifnya menuju keseimbangan sehingga terjadi asimilasi (Kusdwiratri-Setiono, 1983; Suparno, 1997; Oakley, 2004; Suryadi, 2005). Pada akhir proses belajar, pengetahuan akan dibangun sendiri oleh siswa melalui pengalamannya dari hasil interaksi dengan lingkungannya (Bell, Driver, dan Leach, dalam Karli dan Yuliartiningsih, 2000: 2-3).

Ada beberapa klaim mengenai pengajaran dengan mengadopsi paham konstruktivisme yang dikemukakan oleh beberapa peneliti yaitu:

(1) Pengetahuan tidak dapat ditransfer hanya oleh guru saja, pengetahuan dapat dikonstruksi siswa melalui pembelajaran. Cobb, Yackel, and Wood, 1992 (Anderson, *et al*., 2000: 11) menyatakan bahwa, pembelajaran dilakukan sebagai suatu aktivitas, proses pengkonstruksian yang dilakukan siswa dengan tujuan untuk menyelesaikan permasalahan yang muncul dan dilakukan siswa sebagai aktivitas matematika di kelas. Proses belajar-mengajar ditekankan pada proses interaktif alamiah dan memuat negosiasi eksplisit dan implisit dari pengertian matematika. Makna negosiasi di sini adalah guru dan siswa bekerjasama dalam memberi dan menerima pemahaman matematika sebagai suatu aturan dan dasar dalam proses komunikasi mereka.

(2) Pengetahuan tidak dapat disajikan secara simbolik saja.

Hal ini berarti bahwa pengetahuan tersebut tidak sekedar disajikan dalam bentuk pernyataan berpola menurut suatu aturan tertentu. ‘Anderson, *et al*. (2000: 15) menyatakan kemampuan kognitif (dalam hal ini berkaitan dengan matematika)

tergantung pada kemampuan struktur simbolik (seperti pemolaan atau imajinasi) yang dikreasikan dalam respon sebagai suatu pengalaman.

(3) Pengetahuan dapat diberikan dalam situasi pembelajaran yang bervariasi.

Penugasan yang bervariasi memungkinkan siswa yang mengalami kesulitan dalam belajar, menjadi lebih mudah. Selanjutnya keberhasilan dalam menyelesaikan bagian dari permasalahan tersebut akan meningkatkan kepercayaan siswa terhadap diri sendiri. Geary (Anderson, *et al.*, 2000: 17) mencatat bahwa, ada banyak cara memotivasi siswa untuk memahami matematika secara bervariasi dalam suatu konteks.

Siswa perlu dibiasakan untuk mampu mengkonstruksi pengetahuannya dan mampu mentranformasikan pengetahuannya dalam situasi lain yang lebih kompleks sehingga pengetahuan tersebut akan menjadi milik siswa itu sendiri. Proses mengkonstruksi pengetahuan dapat dilakukan sendiri oleh siswa berdasarkan pengalaman yang telah dimiliki sebelumnya, dan juga dapat berupa hasil penemuan yang melibatkan lingkungan sebagai faktor dalam proses perolehan pengetahuannya.

Dengan dasar itu, pembelajaran matematika harus dikemas menjadi proses mengkonstruksi bukan menerima pengetahuan. Dalam proses pembelajaran matematika sangat diharapkan siswa membangun sendiri pengetahuan mereka melalui keterlibatan aktif dalam proses belajar dan mengajar (Labinowicz,1985; Confrey,1994). Salah satu pendekatan pembelajaran yang didasari oleh pandangan konstruktivisme adalah *Problem-based learning* (PBL).

Menurut Savery dan Duffy (1996) PBL berlandaskan pada asumsi bahwa: 1) pemahaman timbul melalui interaksi dengan lingkungan; 2) konflik kognitif adalah stimulus untuk memahami dan menentukan organisasi dan sifat alami tentang apa yang dipelajari, dimana konflik kognitif selalu diupayakan terjadi dalam pembelajaran; 3) pengetahuan berkembang melalui interaksi sosial dan negosiasi.

Dalam PBL, siswa diharapkan dapat merumuskan masalah dari suatu situasi matematis, yang memuat suatu prosedur yang tidak rutin atau yang tidak terstruktur dengan baik. Kemudian, siswa dapat menggali informasi terkait dengan masalah, membuat konjektur, dan menggeneralisasi tentang konsep dan prosedur matematika. Di samping itu, siswa diharapkan dapat membuat koneksi antar ide-ide matematis dengan menyelesaikan masalah yang baru bagi mereka dalam berbagai cara penyelesaian

(Erickson,1999). Oleh karena itu tugas-tugas yang diberikan kepada siswa harus memperlihatkan suatu situasi yang prosedur atau algoritmanya belum diketahui siswa. Masalah dalam tugas harus merupakan suatu aktivitas yang memfokuskan perhatian siswa pada suatu konsep matematika, generalisasi, prosedur atau cara berpikir tertentu.

Dari uraian mengenai PBL di atas terlihat bahwa PBL memberikan suatu lingkungan pembelajaran dimana masalah yang menjadi basis dalam pembelajaran, artinya pembelajaran dimulai dengan masalah kontekstual yang harus dipecahkan. Masalah dimunculkan sedemikian hingga siswa perlu menginterpretasi masalah, mengumpulkan informasi yang diperlukan, mengevaluasi alternatif solusi, dan mempresentasikan solusinya. Ketika siswa mengembangkan suatu metode untuk mengkonstruksi suatu prosedur, mereka mengintegrasikan pengetahuan konsep dengan keterampilan yang dimilikinya. Dengan demikian secara keseluruhan siswa yang mengkonstruk pengetahuan mereka, dengan bantuan pengajar selaku fasilitator.

Format PBL didasarkan pada langkah yang disarankan oleh Barrow & Tamblyn (1980) yakni:

1. Masalah diberikan di awal pembelajaran sebelum persiapan atau saat belajar.
2. Situasi masalah disajikan kepada siswa dengan cara yang sama tetapi nantinya harus disajikan sendiri dengan cara yang nyata.
3. Siswa bekerja dengan masalah yang sesuai dengan tingkat pengetahuan mereka sehingga memungkinkan bagi mereka untuk memberi alasan dan menerapkan pengetahuan untuk menjawab tantangan dan untuk dinilai.
4. Diperlukan identifikasi permasalahan yang harus digali yang merupakan pembimbing dalam studi individual.
5. Keterampilan dan pengetahuan yang diperoleh dalam studi individual diaplikasikan dalam masalah untuk mengevaluasi efektifitas pembelajaran dan untuk menguatkan pembelajaran.
6. Pembelajaran yang diperoleh dari bekerja dalam masalah dan pengaturan diri dalam belajar diintegrasikan dalam keterampilan dan pengetahuan siswa.

B.2 Berpikir Reflektif

John Dewey adalah salah seorang ahli teori pendidikan yang pertama dan paling berpengaruh dalam menjelajah proses dan produk dari berpikir reflektif. Dewey

memulai eksplorasinya tentang berpikir reflektif dengan mendiskusikan proses mental tertentu yaitu memfokuskan dan mengendalikan pola pikiran. Dewey menamai hal ini denganistilah "berpikir reflektif,". Ia mengatakan bahwa dalam hal ini proses yang dilakukan bukan sekedar suatu urutan dari gagasan-gagasan, tetapi suatu proses yang berurutan sedemikian hingga masing-masing ide mengacu pada ide terdahulu untuk menentukan langkah berikutnya. Dengan demikian, semua langkah yang berurutan saling terhubung. Mereka tumbuh satu sama lain, saling mendukung satu sama lain, dan berperan untuk keberlanjutan perubahan menuju suatu kesimpulan yang umum.

Sejak itu banyak penulis mendukung debat dengan mendefinisikan dan mendefinisikan kembali aspek dari berpikir reflektif. Menurut Teekman (1999: 2), Kolb dan Fry (1975) menyatukan berpikir reflektif dalam satu model pembelajaran *experiential* yang secara umum dikenal sebagai siklus belajar Kolb. Sementara itu Boyd dan Fales (1983) menggambarkan refleksi sebagai: ". . .proses menciptakan dan menjelaskan arti dari pengalaman (saat ini atau masa lampau) dalam kaitan dengan diri sendiri (diri sendiri dalam hubungan dengan diri sendiri dan diri sendiri dalam hubungan dengan dunia)". Pusat perhatian mereka adalah menguraikan sifat yang penting, atau prosesnya refleksi. Penulis-penulis itu menekankan bahwa hasil refleksi adalah suatu perspektif konseptual yang diubah.

Berpikir reflektif dan berpikir kritis sering digunakan secara bersinonim. Berpikir kritis digunakan untuk menguraikan. Halpern (1996) mengatakan bahwa penggunaan ketrampilan atau strategi kognitif yang dapat meningkatkan perolehan yang diharapkan adalah berpikir yang bermakna, yang didasarkan pada alasan dan tujuan. Ini merupakan jenis pemikiran yang melibatkan pemecahan masalah, perumusan kesimpulan, memperhitungkan hal-hal yang berkaitan, dan membuat keputusan-keputusan di saat pemikir itu sedang menggunakan ketrampilan yang bermakna dan efektif untuk konteks tertentu dan jenis dari tugas berpikir. Berpikir kritis disebut berpikir terarah karena memusat pada suatu yang diinginkan.

Berpikir reflektif, di lain pihak, menjadi bagian dari proses berpikir kritis yang menunjuk secara khusus pada proses-proses dan pembuatan pertimbangan tentang yang telah terjadi. Dewey (dalam Song, 2005) menyatakan bahwa berpikir reflektif adalah suatu pertimbangan yang aktif, gigih, dan seksama tentang suatu keyakinan atau bentuk seharusnya dari pengetahuan, tentang alasan-alasan yang mendukung pengetahuan itu,

dan kesimpulan-kesimpulan yang merupakan muara dari pengetahuan itu. Siswa-siswa yang menyadari dan mengendalikan proses belajar mereka dengan aktif mengambil bagian dalam berpikir reflektif –menilai apa yang mereka ketahui, apa yang mereka perlukan untuk mengetahui, dan bagaimana mereka menjembatani kesenjangan selama proses belajar.

Salah satu studi yang penting dalam berpikir reflektif dilakukan oleh Schön, meskipun ia tidak pernah menghasilkan suatu definisi konsep berpikir reflektif. Schön (1983, 1987) menemukan teori-teorinya dalam pekerjaan Dewey, tetapi memperkenalkan istilah yang baru. Ia menamainya dengan situasi keraguan dan kebingungan. Dewey menggambarkan konsep refleksi sebagai metoda yang unggul bagi para profesional untuk belajar melalui situasi-situasi praktis. Sedangkan menurut Schön (1983: 15-16) situasi-situasi praktis bukanlah masalah untuk dipecahkan tetapi situasi-situasi masalah yang ditandai oleh ketidak-pastian, kekacauan dan keadaan yang tak dapat dipastikan.

Berpikir reflektif, secara mental melibatkan proses-proses kognitif untuk memahami faktor-faktor yang menimbulkan konflik pada suatu situasi. Oleh karena itu berpikir reflektif merupakan suatu komponen kritis dari proses pembelajaran (Atkins &Murphy, 1993; Boyd &Fales, 1983; Davis dan Dewey, dalam Song, 2005; Moon, 1999; Schön, 1991). Hasil keterlibatan mental ini mengakibatkan seseorang aktip membangun pengetahuan tentang suatu situasi untuk mengembangkan suatu strategi untuk berproses dalam situasi itu.

Sebagai contoh, setelah suatu rangkaian instruksional pembelajaran tentang beberapa metode penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel (SPLDV), para siswa bisa diberi tugas untuk menentukan metode SPLDV manakah yang paling tepat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang diberikan dan mengapa mereka memilih metode itu. Para siswa harus merefleksi pemahaman mereka yang sebelumnya dengan pengetahuan mereka yang baru saja diperoleh untuk menanggapi hal itu. Pada hakekatnya, mereka harus memikirkan situasi dan merefleksi bagaimana pengetahuan mereka yang baru dapat digunakan untuk situasi itu, pada akhirnya mereka mengembangkan suatu solusi pada isu tersebut.

Dengan demikian, refleksi membantu para siswa untuk mengembangkan ketrampilan-ketrampilan berpikir tingkat tinggi melalui dorongan mereka untuk:

a)menghubungkan pengetahuan baru kepada pemahaman mereka yang terdahulu, b)berpikir dalam terminologi abstrak dan konkrit, c)Menerapkan strategi spesifik untuk tugas-tugas baru, dan d)memahami proses berpikir mereka sendiri dan belajar strategi. Hal ini sesuai dengan pendapat Hmelo &Ferrari (1997) yang menyatakan bahwa berpikir reflektif ditujukan untuk meninggkat kemampuan berpikir tingkat tinggi.

Menurut Given (dalam Vezzuto, 2005: 1), berpikir reflektif melibatkan pertimbangan pribadi seseorang tentang proses belajarnya. Dalam hal ini mempertimbangkan keberhasilan dan kegagalan pribadi dan menanyakan apa yang sudah dikerjakan, apa yang tidak, dan apa yang memerlukan perbaikan. Berpikir reflektif meminta siswa untuk memikirkan tentang proses berpikir mereka.

Menurut Shermis (1999: 4-5), berpikir reflektif melibatkan pencarian fakta-fakta, pemahaman gagasan-gagasan, aplikasi prinsip-prinsip, analisis, sintesis dan evaluasi. Singkatnya, berpikir reflektif dan pengajaran reflektif melibatkan semua tingkat taksonomi Bloom. Selanjutnya dikatakan oleh Shermis bahwa daftar ketrampilan-ketrampilan reflektif yang paling lengkap bisa ditemukan pada Weast (1996) yaitu: 1) mengidentifikasi kesimpulan penulis, 2) mengidentifikasi alasan dan bukti, 3) mengidentifikasi bahasa yang rancu dan samar-samar, 4) mengidentifikasi asumsi dan konflik yang bernilai, 5) mengidentifikasi asumsi-asumsi deskriptif, 6) mengevaluasi penalaran statistik, 7) mengevaluasi sampling dan pengukuran, 8) mengevaluasi penalaran logis, 9) mengidentifikasi informasi yang dihilangkan, 10) melafalkan nilai-nilai yang dimilikinya dengan penuh pengertian, tanpa prasangka.

Surbeck, Han, dan Moyer (1991) mengidentifikasi tiga tingkat refleksi yaitu: 1) *Reacting*: bereaksi dengan perhatian pribadi terhadap peristiwa/situasi/masalah, 2) *Elaborating*: membandingkan reaksi dengan pengalaman yang lain, seperti mengacu pada suatu prinsip umum, suatu teori, 3) *Contemplating***:** mengutamakan pengertian pribadi yang mendalam yang bersifat membangun terhadap permasalahan atau berbagai kesulitan.

Sedangkan Liston dan Zeichner (dalam Anonim, 2000) menggambarkan lima bagian taksonomi dari refleksi, dengan refleksi atas penyelesaian suatu tindakan yang hanya satu jenis: 1) Cepat selama melakukan suatu tindakan, 2) Penuh pertimbangan selama melakukan suatu tindakan, 3) Uraian singkat sebagai suatu tinjauan ulang setelah melakukan tindakan, 4) Sistematis setelah jangka waktu tertentu setelah

melakukan tindakan, 5) Jangka panjang sebagai suatu usaha untuk mengembangkan teori formal atau informal.

Dari uraian tentang berpikir reflektif di atas, maka dapat disimpulkan bahwa kemampuan berpikir reflektif dalam belajar adalah kemampuan seseorang dalam memberi pertimbangan tentang proses belajarnya. Apa yang mereka ketahui, apa yang mereka perlukan untuk mengetahui, dan bagaimana mereka menjembatani kesenjangan selama proses belajar. Dalam prosesnya melibatkan pemecahan masalah, perumusan kesimpulan, memperhitungkan hal-hal yang berkaitan, dan membuat keputusan-keputusan. Langkah-langkah yang dilakukan dapat dibagi dalam 3 fase yaitu:1) *Reactin*, 2) *Elaborating*, 3) *Contemplating*.

Menurut Shemis (1999: 4-5), ketrampilan reflektif dalam enam atau tujuh dekade terakhir, cenderung untuk ditekankan oleh para pendukung berpikir dan mengajar reflektif. Mereka terus menekankan hal itu. Penekanan yang berkelanjutan ini adalah suatu indeks yang valid yang memberikan fakta bahwa berpikir reflektif masih belum ada di sekolah-sekolah.

Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa tidak ada kursus, usia, atau kelas yang menyebabkan teori reflektif tidak bisa diterapkan. Teori reflektif hanya mengatakan bahwa jika kita ingin menghasilkan suatu masalah yang membuat siswa berpikir reflektif dan kita ingin mengetahui dari para siswa kita, maka tanyakanlah mereka pertanyaan-pertanyaan yang menciptakan konflik dan kebingungan. Kemudian bantulah mereka untuk menjangkau satu jawaban. Oleh karena itu sebagai seorang pendidik kita perlu melakukan upaya untuk meningkatkan kemampuan berpikir reflektif pada diri siswa.

Menurut Shermis (1999: 2) refleksi dalam suatu kelas dapat berlangsung hanya ketika strategi tanya jawab dipromosikan. Paradigma dan model tanya jawab sudah berkembang terus menerus. Semua dimulai dengan asumsi bahwa ada pertanyaan yang tidak produktif, yaitu pertanyaan yang memadamkan pikiran siswa. Wasserman (1992) membahas tentang "pertanyaan bodoh" yang mengabaikan gagasan-gagasan siswa, adalah pertanyaan yang "tidak dapat merasakan gagasan yang sedang dinyatakan," atau bersifat tidak relevan.

Pertanyaan yang mempromosikan berpikir dimulai dengan asumsi bahwa para siswa tidak berpikir kecuali jika mereka mempunyai sesuatu untuk dipikirkan. Masih

menurut Shermis (1999), Dewey, Hullfish dan Smith, Hunt dan Metcalf, Bigge, dan Bayles mengatakan bahwa "sesuatu" itu hanya dapat berupa suatu masalah. Tetapi masalah harus riil, yaitu yang dirasakan oleh para siswa. "*Pseudo problems*" terjadi ketika pentingnya masalah itu diabaikan atau ketika suatu masalah diasumsikan ada karena guru menganggapnya sebagai suatu masalah.

Bagaimana caranya memunculkan permasalahan. Suatu masalah ada ketika seorang siswa curiga, merasa bingung, kacau, atau tidak mampu untuk memutuskan satu isu. Pada tahun-tahun terakhir, banyak ahli mencoba menawarkan model generik dari pengaturan masalah antara lain dengan cara: 1) meminta para siswa untuk memikirkan alternatif cara untuk menyajikan informasi selain dari teks atau guru, 2) membandingkan nilai yang berbeda dari suatu kejadian, gagasan, atau gejala yang sama, 3) menyediakan alternatif penyelesaian, menuliskan hasil-hasil yang berbeda, 4) bermain peran, peran balikan, mencoba untuk melihat apa yang dihilangkan, apa yang tidak konsisten, 5) menyisipkan gagasan-gagasan yang tidak muncul pada suatu teks, 6) menghapus atau menghilangkan informasi, 7) mengajukan pertanyaan " bagaimana jika", 8) mencoba untuk mengidentifikasi asumsi.

KaAMS mengajukan karakteristik-karakteristik dari lingkungan dan aktivitas yang mendukung berpikir reflektif yaitu: 1)Sediakan waktu yang cukup bagi para siswa untuk merefleksi ketika menanggapi suatu penyelidikan. 2) Sediakan lingkungan yang mendukung secara emosional di dalam kelas untuk memberi harapan siswa mengevaluasi kembali kesimpulan-kesimpulan. 3) Tinjauan ulang dari situasi pembelajaran, apa yang diketahui, apa yang belum diketahui, dan apa yang telah dipelajari. 4) Sediakan tugas-tugas otentik yang disertai data *ill-structured* untuk mendorong berpikir reflektif selama aktivitas pembelajaran. 5) Bangkitkan refleksi siswa dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan untuk mencari bukti dan pertimbangan. 6) Sediakan beberapa penjelasan untuk memandu proses-proses berpikir siswa selama eksplorasi-eksplorasi. 7) Sediakan suatu lingkungan pembelajaran yang sedikit terstruktur yang memungkinkan para siswa untuk menjelajah apa yang mereka pikir penting. 8) Sediakan lingkungan sosial pembelajaran sebagaimana tidak bisa dipisahkan dalam kerja kelompok dan aktivitas kelompok kecil yang memungkinkan para siswa melihat pandangan lain.

Lingkungan pembelajaran yang demikian dapat tercipta apabila kita mengarahkan aktivitas pembelajaran di kelas melalui masalah. Hal ini dapat difasilitasi oleh pembelajaran berbasis masalah atau *Problem Based Learning* (PBL). Dalam PBL, kebiasaan-kebiasaan positif yang setidak-tidaknya sedang dibentuk antara lain kebiasaan-kebiasaan mempelajari berbagai hal dengan hati-hati, menggantungkan keputusan hingga kesimpulan-kesimpulan pada bukti yang telah teruji.

Dalam PBL kita sering cemas akan seberapa besar suatu masalah boleh jadi menjurus kepada berpikir reflektif. Tentu saja kita tidak menghendaki suatu masalah yang sangat berlimpah dan kompleks yang membuat siswa tidak bisa terlibat. Dewey (dalam Hollister, 1998) memberi nasihat kepada kita dalam hal ini: "Bagian terbesar dari kesukaran dalam permasalahan baru adalah masalah yang terlalu besar untuk menantang berpikir, atau terlalu kecil sehingga menambah kebingungan. Untuk itu kita perlu menghadirkan unsur-unsur baru sehingga mudah dipahami. Dengan cara ini sara-saran yang sangat membantu dapat muncul."

C. PENUTUP

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Dalam PBL, siswa diharapkan dapat merumuskan masalah dari suatu situasi matematis, yang memuat suatu prosedur yang tidak rutin. Kemudian, siswa harus menggali informasi yang terkait dengan masalah, membuat konjektur, dan menggeneralisasi konsep dan prosedur matematika. Di samping itu, siswa diharapkan dapat membuat koneksi antar ide-ide matematis dengan menyelesaikan masalah yang baru bagi mereka dalam berbagai cara penyelesaian.
2. Lingkungan pembelajaran yang mendukung berpikir reflektif dapat tercipta apabila kita mengarahkan aktivitas pembelajaran di kelas melalui masalah. Hal ini dapat difasilitasi oleh pembelajaran berbasis masalah atau *Problem Based Learning* (PBL). Kemampuan berpikir reflektif dapat terlatih bila kemampuan itu diterapkan dalam situasi diskusi kelas yang membahas konsep matematika tertentu. Dari pertanyaan dan debat antara siswa dan melalui sejumlah langkah penyelesaian masalah, siswa memulai suatu diskusi yang bermakna.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, J. dan Bobis, J. (2005). In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Reform-Oriented Teaching Practices: A Survey Of Primary School Teachers: Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 65-72. Melbourne: Australia.

Anderson, J.R., Reder, L.M. dan Simon, H.A. (2000). *Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. Texas Educational Review*. [online]. Tersedia: http://act-r.psy.cmu.edu/people/ja/misapplied.html-101k.

Anonim. (2000). *Critical Reflection.* [Online]. Tersedia: http:// www.nwlink.com/ ~donclark/hrd/ development/reflection.html

Atkins, S., & Murphy, K. (1993). Reflection: A review of literature. *Journal of Advanced Nursing*, *18*, 1188-1192.

Barrows, H.S. & Tamblyn, R.M. (1980). *Problem-Based Learning: An approach to Medical Education.* New York: Springer.

Boyd, E., & Fales, A. (1983). Reflective learning: Key to learning from experience. *Journal ofHumanistic Psychology*, *23*(2), 99-117.

Confrey, J. (1994). A Theory of Intellectual Development (Part. I). *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), XIV, 2-8.

Erickson, D.K. (1999). A Problem-Based Approach to Mathematics Instruction. *The Mathematics Teacher*. Reston, VA: NCTM.

Halpern, D. F. (1996). Thought and knowledge: an introduction to critical thinking (3rd ed.). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates

Hmelo, D., & Ferrari, M. (1997). The problem-based learning tutorial: Cultivating higher order thinking skills. *Journal for the Education of the Gifted, 20*(4), 401-422.

Hulukati, E. (2005). *Mengembangkan Kemampuan Komunikasi dan Pemecahan Masalah Matematik Siswa SMP melalui Model Pembelajaran Generatif*. Bandung: Disertasi PPs UPI. Tidak diterbitkan.

KaAMS. *Reflective Thinking*. [Online],. Tersedia: ide.ed.psu.edu/kaams/kaams/ resource/ reflection.htm

Karli, H dan Yuliariatiningsih, M.S. (2002). *Implementasi KBK 1*. Jakarta: Bina Media Informasi.

Kusdwiratri-Setiono (1983). *Teori Perkembangan Kognitif*. Bandung: Fakultas Psikologi Universitas Padjadjaran.

Labinowicz, E.(1985). *Learning from Children: New Beginnings for Teaching Numerical Thinking: A Piagetian Approach.* Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Moon, J. (1999). *Reflection in learning & professional development: Theory and practice*. London: Kogan Page.

NCTM (2000). *Defining Problem Solving*. [Online]. Tersedia: http://www.learner.org/channel/courses/teachingmath/gradesk_2/session_03/sectio_03_a.html

Oakley, L. (2004). *Cognitive Development*. London: Routledge.

Resnick, L. B. (1987).*Education and Learning to Think*. Committee on Research in Mathematics, Science, and Technology Education. [online] Tersedia: National Academies Press at: http://www.nap.edu/catalog/1032.html.

Savery, J.R. dan Duffy, T.M. (1996). PBL: An Instructional Model and is Constructivist Framework. In *Contructivist Learning Environments: Case Studies in Instructional Design*. B.G. Wilson (ed). Englwood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Shermis, S. S. (1999). *Reflective Thought, Critical Thinking*. [Online]. Tersedia: http://www.indiana.edu/~eric_rec/ieo/digests/d143.html

Schön, D. A. (1991). *The Reflective practitioner*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Song, H.D., Koszalka, T. A., dan Grabowski, B. (2005). Exploring Instructional Design Factors Prompting Reflective Thinking in Young Adolescents. In *Canadian Journal of Learning and Technology*, Vol 31, No. 2, 49-68.

Sumarmo, U. (2005). *Pengembangan Berfikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP dan SMU serta Mahasiswa Strata Satu (S1) Melalui Berbagai Pendekatan Pembelajaran*. Laporan Penelitian Hibah Pascasarjana Tahun Ketiga. UPI Bandung.

Suparno, P. (1997). *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius.

Suryadi, D. (2005*). Penggunaan Pendekatan Pembelajaran Tidak Langsung serta Pendekatan Gabungan Langsung dan Tidak Langsung dalam Rangka Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP*. Bandung: Disertasi SPs UPI. Tidak diterbitkan.

Teekman, B. (1999). A Sense-Making Examination Of Reflective Thinking In Nursing Practice. In The Electronic Journal of Communication Volume 9 Numbers 2, 3, 4 1999. Tersedia [online] http://communication.sbs.ohio-state.edu/sense making /zennezejoc/ zennezejoc99teekman.html

Vezzuto, L. A. (2005). ReflektiveThinking. Tersedia [online]. http://charactered.ocde.us/ICE/lessons_html/reflective.html

Wasserman, S. (1992). Asking the right question: The essence of teaching. Phi Delta Kappa Fastback 343. Bloomington, Indiana: Phi Delta Kappa Educational Foundation.

Weast, D. (1996). Alternative teaching strategies: The case for critical thinking. Teaching Sociology,24, 189-194.

PENGARUH PENILAIAN PORTOFOLIO DAN KECERDASAN EMOSIONAL TERHADAP HASIL BELAJAR MATEMATIKA TOPIK DIMENSI TIGA SISWA KELAS X SMA NEGERI 4 KENDARI TAHUN 2006

Sunandar[1]

ABSTRACT

Portofolio evaluation is one of alternative assessment considered can give a big contribution to mathematics learning result, as well as student's emotional intelligency is assumed have atigh relation with mathematics learning result, specially in three dimension. This research problems are: (1) Is there any difference in learning result between a student with portofolio evaluation and a student with conventional evaluation at SMA 4 Kendari?(2) Is there any difference in learning result between a student with low emotional intelligency and a student with hight emotional intelligency? (3) Is there any interactional effect between the kind of evaluation and the emotional intelligency toward student's learning result? (4) For a student with a hight emotional intelligency, is there any difference in learning result between a student with portofolio evaluation and student with conventional evaluation? (5) For a student with a low emotional intelligency, is there any difference in learning result between a student with portofolio evaluation and student with conventional evaluation? This research's conclution are: (1) The mathematics learning result of student with portofolio evaluation is higher than the result of student with conventional evaluation; (2) The mathematics learning result of student with higher emotional intelligency is higher than the result of student with low emotional intelligency; (3) There is a very significant interaction effect between the kind of evaluation and the emotional intelligency toward student's learning result; (4) For a student with a hight emotional intelligency, the learning result student with portofolio evaluation is higher than the learning result student with conventional evaluation; (5) For a student with a low emotional intelligency, the learning result student with portofolio evaluation is lower than the learning result student with conventional evaluation.

Keywords: portofolio evaluation, emotional intelligency, mathematics learning result

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Kebijakan pembangunan bidang pendidikan mengandung tiga aspek penting yang harus dicapai yaitu pemerataan kesempatan memperoleh pendidikan bagi segenap bangsa .

[1] *Dr. Sunandar, M.Pd., Dosen Pendidikan Matematika & Ketua Lembaga Penelitian FMIPA IKIP PGRI Semarang*

Indonesia dan peningkatan kualitas hasil pendidikan, serta relevansi dari hasil pendidikan tersebut untuk kebutuhan pembangunan bangsa. Dalam rangka memenuhi kebutuhan pembangunan di segala bidang maka sistem pendidikan perlu disesuaikan dengan kebutuhan pembangunan di segala bidang yang memerlukan jenis-jenis keahlian dan keterampilan serta dapat sekaligus meningkatkan produktivitas, kreativitas, mutu dan efisiensi kerja.

Dalam usaha mengembangkan ilmu dan teknologi, diperlukan pendekatan interdisipliner, dimana matematika memegang peranan penting, baik sebagai sarana untuk mengkaji keilmuan maupun sebagai sarana berpikir ilmiah. Karena begitu pentingnya, maka matematika diajarkan pada semua jenjang pendidikan yaitu dari Sekolah Dasar, SLTP, SMA/SMK, sampai beberapa program studi di Perguruan Tinggi.

Di sisi lain, hasil belajar matematika siswa belum begitu menggembirakan, bahkan boleh dikatakan mengecewakan. Hal tersebut diungkapkan oleh beberapa guru matematika SMA di Kendari dan didukung oleh fakta yang menunjukkan bahwa rata-rata nilai Ujian Akhir Nasional (UAN) pelajaran matematika SLTP dari siswa kelas I SMA Negeri 4 Kendari tahun 2005 adalah sebesar 5,18 dan rata-rata nilai ulangan sumatif matematika semester ganjil untuk kelas I sebesar 6,15 dan untuk kelas II sebesar 6,20 (Sumber: Bagian Tata Usaha SMA Negeri 4 Kendari).

Melihat kenyataan tersebut, perlu dilakukan suatu pengkajian secara cermat dan mendalam mengenai faktor-faktor yang diduga mempengaruhi hasil belajar matematika siswa dan sekaligus merancang dan menerapkan strategi untuk mengatasi permasalahan tersebut di atas. Pada garis besarnya faktor yang mempengaruhi hasil belajar terdiri dari dua bagian besar yaitu faktor internal dan faktor eksternal.

Faktor internal yaitu faktor yang berasal dari dalam diri siswa yang meliputi (1) faktor fisiologis baik yang bersifat bawaan maupun yang diperoleh, (2) faktor psikologis yang terdiri dari faktor intelektual dan non intelektual, antara lain adalah sikap, minat, motivasi, emosi, dan lain-lain. Faktor eksternal yaitu faktor yang berasal dari luar diri siswa, seperti kurikulum, guru, metode, penilaian, faktor sosial, faktor budaya, dan faktor lingkungan (Rusyan, at.al., 1994: 63).

Pendapat tersebut di atas mencakup banyak faktor yang mempengaruhi hasil belajar siswa. Untuk itu perlu dilakukan seleksi dalam menentukan faktor-faktor yang diduga besar pengaruhnya terhadap hasil belajar matematika. Dari hasil diskusi dengan

beberapa guru matematika SMA Negeri 4 Kendari teridentifikasi beberapa faktor yang diduga mempunyai hubungan dengan hasil belajar siswa. Faktor tersebut antara lain adalah minat siswa dalam belajar matematika, motivasi siswa dalam belajar matematika, **kecerdasan emosional** siswa, kemampuan awal yang dimiliki siswa dalam pelajaran matematika, perhatian orang tua siswa, metode/ cara mengajar guru, dan kurikulum yang syarat muatan, serta **jenis alat evaluasi** yang digunakan guru baik dalam meningkatkan proses belajar mengajar maupun sebagai pengukur keberhasilan siswa.

Faktor utama yang diduga berpengaruh terhadap prestasi belajar adalah faktor penggunaan jenis penilaian (evaluasi). Evaluasi didefinisikan sebagai proses yang sistematik untuk menentukan tercapainya tujuan pengajaran yang telah diberikan/ ditetapkan (Gronlund and Linn, 1990: 19). Evaluasi adalah suatu alat yang berguna untuk mengetahui efektivitas penerapan prosedur-prosedur dalam pendidikan dan untuk mengetahui prestasi belajar siswa pada akhir pengajaran (Bloom, at.al., 1981: 5).

Faktor lain yang dipandang sebagai faktor yang dapat dijadikan dasar untuk mengikuti proses belajar mengajar dengan baik adalah faktor kecerdasan emosional. Kecerdasan emosinal adalah suatu dimensi kemampuan manusia yang berupa keterampilan emosional dan sosial yang kemudian membentuk watak atau karakter, yang di dalamnya terkandung kemampuan-kemampuan seperti kemampuan mengendalikan diri, empati, motivasi, kesabaran, ketekunan, keterampilan sosial, dll.

Jenis alat evaluasi yang digunakan oleh guru matematika dalam mengungkapkan seluruh kemampuan yang dimiliki oleh siswa secara komprehensif, dan kecerdasan emosional yang dimiliki oleh siswa diduga mempunyai pengaruh yang besar terhadap hasil belajar matematika siswa.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut di atas, maka dapat dikemukakan rumusan masalah dalam peneltian ini sebagai berikut:

1. Apakah terdapat perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang diberi penilaian portofolio dengan siswa yang diberi penilaian konvensional?
2. Apakah terdapat perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi dengan siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah?

3. Apakah terdapat pengaruh interaksi antara jenis penilaian dan kecerdasan emosional terhadap hasil belajar matematika siswa pada topik dimensi tiga?
4. Bagi siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi, apakah terdapat perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang mendapat penilaian portofolio dengan penilaian konvensional?
5. Bagi siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah, apakah terdapat perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang mendapat penilaian portofolio dengan penilaian konvensional?

1.3. Tujuan Penelitian

Secara umum penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan menjelaskan apakah jenis penilaian dan kecerdasan emosional siswa mempunyai pengaruh terhadap hasil belajar matematika siswa pada topik dimensi tiga. Secara rinci penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan:

1. Adanya perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang diberi penilaian portofolio dengan siswa yang diberi penilaian konvensional.
2. Adanya perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi dengan siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah.
3. Adanya pengaruh interaksi antara jenis penilaian dan kecerdasan emosional terhadap hasil belajar matematika siswa pada topik dimensi tiga.
4. Bagi siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi, apakah ada perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang mendapat penilaian portofolio dengan penilaian konvensional.
5. Bagi siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah, apakah ada perbedaan hasil belajar matematika topik dimensi tiga antara siswa yang mendapat penilaian portofolio dengan penilaian konvensional.

2. LANDASAN TEORI

2.1. Asesmen/ Evaluasi Portofolio

Evaluasi didefinisikan sebagai proses yang sistematik untuk menentukan tercapainya tujuan pengajaran yang telah diberikan/ ditetapkan (Gronlund and Linn, 1990: 19). Evaluasi adalah suatu alat yang berguna untuk mengetahui efektivitas

penerapan prosedur-prosedur dalam pendidikan dan untuk mengetahui prestasi belajar siswa pada akhir pengajaran (Bloom, at.al., 1981: 5).

Evaluasi berkenaan dengan membandingkan antara data dengan standar (acuan) yang telah ditetapkan dalam tujuan atau menetapkan kualitas. Pendidikan merupakan proses yang melibatkan tiga komponen yang berbeda yaitu: (1) tujuan pendidikan, (2) pengalaman belajar, dan (3) pengujian. Tujuan pendidikan, yang secara sempit disebut dengan tujuan instruksional ditetapkan sesuai dengan silabus setiap bidang studi. Pengalaman belajar dirancang dan digunakan untuk meningkatkan pencapaian tujuan yang telah ditetapkan. Ujian dimaksudkan untuk mengetahui sejauh mana tujuan tercapai. Jadi ujian yang dimaksudkan di sini adalah evaluasi yang digunakan untuk menguji kemampuan/ prestasi apakah tujuan-tujuan pendidikan yang telah ditetapkan itu tercapai atau tidak.

Proses evaluasi dapat efektif bila didasari oleh prinsip-prinsip umum. Prinsip-prinsip tersebut adalah (1) menjelaskan secara spesifik apa yang hendak diteliti/ dievaluasi, (2) memilih teknik evaluasi yang relevan, (3) menggunakan satu jenis teknik evaluasi, (4) memberi tahu batas-batas materi yang hendak dievaluasi, dan (5) memberi tahu kapan berakhirnya evaluasi (Gronlund and Linn, 1990: 19). Dengan demikian diharapkan evaluator dalam melaksanakan tugasnya harus memperhatikan secara seksama prinsip-prinsip yang ada, sehingga hasil evaluasi mencerminkan keadaan yang sebenarnya.

Evaluasi yang diuraikan di atas telah lazim digunakan, yaitu dengan memberikan tes pada pertengahan atau akhir perkuliahan. Evaluasi dengan menggunakan tes biasanya dapat mempengaruhi psikologi siswa sehingga dapat mengakibatkan nilai yang diperoleh siswa tidak optimal. Untuk itu perlu dicarikan alternatif lain metode/ teknik evaluasi yang diduga dapat membangkitkan minat belajar siswa sehingga diharapkan dapat meningkat hasil belajar siswa. Teknik evaluasi yang dimaksudkan adalah evaluasi portofolio.

Portofolio diartikan sebagai kumpulan sistematis atas pekerjaan atau hasil karya siswa. Penilaian portofolio merupakan bentuk alternatif penilaian pembelajaran, dimana selama ini terlalu berorientasi penilaian hasil dengan menggunakan tes. Penilaian portofolio termasuk dalam penilaian autentik. Evaluasi portofolio adalah penilaian yang

menuntut siswa untuk mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan yang sudah dipelajari dalam bentuk karya nyata dan bukan dalam suasana testing.

Ciri-ciri evaluasi portofolio adalah: (1) menggambarkan penilaian dengan rentang yang cukup antara memahami tugas atau soal dan menyelesaikannya sehingga dapat menggambarkan penampilan kemampuan siswa yang sesungguhnya; (2) menyertakan siswa dalam menilai kemajuan belajarnya atau prestasinya dan menunjukkan tujuan penilaian yang berkelanjutan atau berkesinambungan; (3) Mengukur prestasi tiap siswa dengan memperhatikan perbedaan individu antar siswa; (4) Menggambarkan sebuah penilaian dengan pendekatan yang kolaboratif antara guru dan siswa; (5) Bertujuan agar siswa mampu menilai sendiri kemajuan belajarnya; (6) Memusatkan perhatian pada perbaikan, usaha, dan prestasi siswa; dan (7) Menggabungkan penilaian dengan proses pembelajaran.

Dalam dunia pendidikan, portofolio diartikan sebagai kumpulan sistematis atas pekerjaan atau hasil karya siswa. Penilaian portofolio merupakan bentuk alternatif penilaian pembelajaran, dimana selama ini terlalu berorientasi penilaian hasil dengan menggunakan tes. Penilaian portofolio termasuk dalam penilaian autentik. Penilaian portofolio adalah penilaian yang menuntut siswa untuk mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan yang sudah dipelajari dalam bentuk karya nyata dan bukan dalam suasana testing.

Slavin (1997: 508) menyatakan bahwa penilaian pembelajaran dengan portofolio merupakan penilaian terhadap koleksi pekerjaan siswa dalam rangka menunjukkan perkembangan belajar dan perbuatan melalui refleksi diri dan prestasi.

Tujuan penilaian portofolio antara lain adalah: (1) meningkatkan kemampuan para siswa dalam mengevaluasi kemajuan belajar mereka, (2) bagi guru untuk menilai siswa, bagi siswa untuk refleksi terhadap proses dan kemajuan belajarnya, (3) koleksi dari karya siswa dapat membantu guru dan siswa dalam menentukan perkembangan/kemajuan belajar siswa yang sesungguhnya secara berkesinambungan.

Penilaian portofolio mempunyai kelebihan dan sekaligus mempunyai kekurangan. Kelebihan penilaian portofolio antara lain: (1) memberi pengakuan pada gaya belajar individu, (2) dapat menggambarkan keadaan siswa yang jelas, mudah dipahami oleh guru, siswa, orang tua, atau unsur lain yang terkait, (3) dapat meminimalkan perasaan tidak puas, diperlakukan tidak adil, (4) waktu penyelesaian

yang longgar, perbaikan karya, bukti atas kinerja siswa, selain pengetahuan yang dimiliki, (5) prinsip belajar sepanjang hayat, (6) membantu siswa dalam memperbaiki citra diri dan kemandirian. Adapun kekurangan dari penilaian portofolio adalah: (1) sulit diterapkan pada kelas besar, karena terdapat respon atau karya siswa yang sangat bervariasi untuk diakomodir, (2) reliabilitasnya rendah, (3) kriteria penilaian harus disepakati antara guru dan siswa, (4) masalah biaya dan manajemen sekolah (Far dalam Popham, 1995: 165).

Beberapa unsur kunci dalam penilaian portofolio antara lain adalah: (1) siswa memahami makna portofolio dalam kaitannya dengan pencapaian dan kemajuan belajarnya, (2) menentukan topik pekerjaan siswa yang akan dikoleksi sebagai portofolio, (3) mengumpulkan dan menyimpan pekerjaan siswa yang telah dipilih sebagai portofolio, (4) memilih kriteria untuk menilai pekerjaan pada portofolio siswa, (5) mendorong dan membantu siswa agar selalu mengevaluasi dan memperbaiki hasil-hasil portofolio mereka, (6) menjadwalkan dan melaksanakan pertemuan portofolio denngan siswa, (7) melibatkan para orang tua dan unsur lain yang terkait dalam menilai portofolio siswa (Popham, 1995: 169).

Penerapan evaluasi portofolio pada pembejaran matematika diduga dapat meningkatkan minat dan motivasi siswa, karena melalui evaluasi portofolio seluruh aspek kemampuan (kognitif, afektif, dan psikomotorik) siswa dapat teramati dengan jelas, memberikan kebebasan dalam memilih gaya belajar, penyelesaiannya dengan waktu yang longgar, dapat menyempurnakan karyanya, dan dapat memandirikan siswa.

2.2. Kecerdasan Emosional

Faktor lain yang dipandang sebagai faktor yang dapat dijadikan dasar untuk mengikuti proses belajar mengajar dengan baik adalah faktor kecerdasan emosional. Kecerdasan emosinal adalah suatu dimensi kemampuan manusia yang berupa keterampilan emosional dan sosial yang kemudian membentuk watak atau karakter, yang di dalamnya terkandung kemampuan-kemampuan seperti kemampuan mengendalikan diri, empati, motivasi, kesabaran, ketekunan, keterampilan sosial, dll.

Salovey (1997) mengungkapkan bahwa kecerdasan emosional terdiri dari lima dimensi utama yaitu: (1) mengenali emosi diri, (2) mengelola emosi, (3) memotivasi diri sendiri, (4) mengenali emosi orang lain, dan (5) membina hubungan.

Goleman (1995) dan Shapiro (1997) mengungkapkan bahwa secara neuroanatomis otak manusia terdiri atas milyaran sel yang memainkan peranan berbeda-beda, ada bagian untuk berpikir konvergen dan ada pula yang berkenaan dengan emosi, yang selanjutnya dikenal sebagai konsep kecerdasan emosi atau *emotional intelligence*.

Kecerdasan emosi adalah suatu dimensi kemampuan manusia yang berupa keterampilan emosional dan sosial yang kemudian membentuk watak atau karakter, yang di dalamnya terkandung kemampuan-kemampuan seperti kemampuan mengendalikan diri, empati, motivasi, kesabaran, ketekunan, keterampilan sosial, dll. Salovey (1997) mengungkapkan bahwa kecerdasan emosional terdiri dari lima dimensi utama yaitu: (1) mengenali emosi diri, (2) mengelola emosi, (3) memotivasi diri sendiri, (4) mengenali emosi orang lain, dan (5) membina hubungan.

Mengenali emosi diri yaitu kesadaran diri untuk mengenali perasaan sewaktu perasaan itu terjadi merupakan dasar kecerdasan emosional. Kesadaran diri merupakan prasyarat bagi keempat wilayah utama lainnya. Hal itu dapat diartikan sebagai pintu masuk pada rumah emosi. Ketidakmampuan untuk mencermati perasaan kita yang sesungguhnya membuat kita berada dalam kekuasaan perasaan. Orang yang memiliki keyakinan yang lebih tentang perasaannya adalah pilot yang andal bagi kehidupan mereka, karena mempunyai kepekaan lebih tinggi akan perasaan mereka yang sesungguhnya atas pengambilan keputusan-keputusan masalah pribadi, mulai dari masalah siapa yang akan dinikahi sampai ke pekerjaan apa yang akan diambil.

Mengelola emosi adalah salah satu pekerjaan yang cukup sulit. Sebagai ilustrasi adalah bagaimana sakitnya hati kita dan sulitnya meredakan kemarahan yang meluap ke ubun-ubun jika kita dipersalahkan atas hal yang merupakan kesalahan orang lain. Namun jika emosi dapat dikuasai tentu emosi dapat dikelola dengan baik, artinya dapat tercipta keseimbangan emosi atau pengendalian emosi yang berlebihan.

Dimensi selanjutnya adalah memotivasi diri sendiri. Motivasi merupakan perubahan energi dalam diri seseorang yang ditandai dengan timbulnya perasaan dan reaksi yang mencapai tujuan. Motivasi dimulai dari adanya perubahan energi di dalam diri pribadi. Selanjutnya motivasi ditandai oleh timbulnya perasaan effective arousal, dan juga ditandai dengan reaksi-reaksi untuk mencapai tujuan.

Mengenali empati orang lain merupakan salah satu dimensi yang penting dari emosi. Empati merupakan kemampuan untuk mengenali perasaan dan keinginan orang

dari kacamata orang tersebut. Di samping itu empati merupakan kemampuan yang bergantung kepada kesadaran diri emosional, merupakan keterampilan bergaul dasar, dan juga dapat menciptakan kebahagiaan dalam kehidupan asmara.

Dimensi terakhir dari emosi adalah membina hubungan. Seni membina hubungan dengan orang lain erat kaitannya dengan keterampilan memahami emosi orang lain. Agar terampil membina hubungan dengan orang lain, kita harus mampu mengenal dan mengelola emisi mereka. Untuk mengelola emosi orang lain kita perlu lebih dahulu mampu mengendalikan diri, mengendalikan emosi yang mungkin berpengaruh buruk dalam hubungan sosial, menyimpan dulu kemarahan dan bebas stres tertentu, dan mengekspresikan perasaan diri.

Dengan menerapkan evaluasi portofolio dalam pembelajaran dan dengan pengelolaan kecerdasan emosional yang tepat diharapkan dapat meningkatkan hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa.

3. METODE PENELITIAN

3.1. Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang diukur terdiri dari dua macam variabel utama yaitu variabel terikat dan variabel bebas, dengan rincian:

Variabel terikat dalam penelitian ini disebut dengan variabel kriteria (*criterion variable*). Variabel kriteria yang diobservasi yaitu hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa kelas X SMA Negeri 4 Kendari.

Variabel bebas dalam penelitian ini ada dua yaitu: (1) penilaian portofolio; dan (2) kecerdasan emosional.

3.2. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada kelas X SMA Negeri 4 Kendari. Waktu pelaksanaan penelitian yaitu pada semerter genap tahun ajaran 2005/2006.

3.3. Definisi Operasional Variabel Penelitian

Hasil belajar matematika topik dimensi tiga adalah skor Matematika yang dicapai siswa dari hasil proses belajar mengajar Matematika semester genap yang diukur dengan menggunakan instrumen penilaian proses dan hasil belajar matematika topik dimensi tiga disusun berdasarkan tujuan instruksional yang telah ditetapkan.

Penilaian portofolio adalah penilaian yang menuntut siswa untuk mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan yang sudah dipelajari dalam bentuk karya nyata, dan merupakan penilaian terhadap koleksi pekerjaan siswa dalam rangka menunjukkan perkembangan belajar dan perbuatan melalui refleksi diri dan prestasi, yang diskor dengan menggunakan rubrik.

Kecerdasan emosional adalah skor kemampuan manusia yang berupa keterampilan emosional dan sosial yang membentuk watak atau karakter, yang di dalamnya terkandung kemampuan yang terdiri dari lima dimensi utama yaitu: (1) mengenali emosi diri, (2) mengelola emosi, (3) memotivasi diri sendiri, (4) mengenali emosi orang lain, dan (5) membina hubungan, yang diukur dengan instrumen yang memuat 5 dimensi tersebut.

3.4. Rancangan/ Disain Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian Quasi Eksperimen yang menggunakan disain "*Pretest and Posttest Control Group Design*" (Ary, 1982) dengan matriks rancangan **"faktorial 2 x 2"** yang terlihat pada tabel berikut ini.

Matriks Rancangan Penelitian

	A1	A2	JML
B1	A1 B1	A2 B1	B1
B2	A1 B2	A2 B2	B2
JML	A1	A2	

Keterangan:

A1B1 = Kelompok siswa yang diberi penilaian portofolio dan yang mempunyai kecerdasan emosional tinggi

A2B1 = Kelompok siswa yang diberi penilaian konvensional dan yang mempunyai kecerdasan emosional tinggi

A1B2 = Kelompok siswa yang diberi penilaian portofolio dan yang mempunyai kecerdasan emosional rendah

A2B2 = Kelompok siswa yang diberi penilaian konvensional dan yang mempunyai kecerdasan emosional ren dah

A1 = Kelompok siswa yang diberi penilaian portofolio

A2 = Kelompok siswa yang diberi penilaian konvensional

B1 = Kelompok siswa yang mempunyai kecerdasan emosional tinggi

B2 = Kelompok siswa yang mempunyai kecerdasan emosional rendah

5. Populasi dan Sampel Penelitian

Populasi penelitian ini adalah seluruh siswa kelas X SMA Negeri 4 Kendari tahun akademik 2005/2006 sebanyak 320 siswa tersebar pada 8 kelas secara acak. Adapun sampelnya adalah diambil dua kelas dari 8 kelas secara *cluster random*

sampling, terpilih kelas X-2 dan X-5. Kemudian secara random kelas, diperoleh kelas X-2 sebagai kelas eksperimen yaitu diberi perlakuan penilaian portofolio; sedangkan kelas X-5 sebagai kelas kontrol yaitu diberi penilaian konvensional. Siswa pada kedua kelas tersebut terlebih dahulu diberikan angket kecerdasan emosional.

6. Instrumen Penelitian

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah ada tiga yaitu (1) penilaian portofolio; (2) penilaian konvensional berupa tes hasil belajar matematika topik dimensi tiga, dan (2) angket kecerdasan emosional.

7. Teknik Analisis Data dan Hipotesis

Analisis deskriptif dan analisis varians dua jalur. Uji normalitas digunakan Uji Liliefors, dan untuk uji homogenitas varians digunakan uji Barlett.

Hipotesis statistik yang akan diuji adalah sebagai berikut.

1. Ho : $\mu_{A1} = \mu_{A2}$

   H1 : $\mu_{A1} > \mu_{A2}$

2. Ho : $\mu_{B1} = \mu_{B2}$

   H1 : $\mu_{B1} > \mu_{B2}$

3. Ho : A x B = 0

   H1 : A x B > 0

4. Ho : $\mu_{A1B1} = \mu_{A1B2}$

   H1 : $\mu_{A1B2} > \mu_{A1B1}$

5. Ho : $\mu_{A2B1} = \mu_{A2B2}$

   H1 : $\mu_{A2B1} > \mu_{A2B2}$

4. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

4.1. Deskripsi Data

1) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga Siswa yang Diberi Penilaian Portofolio

Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio dapat dipaparkan sebagai berikut. Banyaknya responden (n) = 38, skor minimum = 45, skor maksimum = 92, dengan demikian rentangnya = 92 – 45 = 47; serta rentang teoretisnya adalah 0 - 100. Selanjutnya data tersebut disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dengan banyak kelas = 7, lebar interval = 7, rata-rata = 65,2 simpangan baku = 12,1, modus = 66,5 dan median = 64,9.

2) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang Diberi Penilaian Konvensional

Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional dapat dipaparkan sebagai berikut. Banyaknya responden (n) = 38, skor minimum = 39, skor maksimum = 87, dengan demikian rentangnya = 87 – 39 = 48; serta rentang teoretisnya adalah 0 - 100. Selanjutnya data tersebut disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dengan banyak kelas = 7, lebar interval = 7, rata-rata = 60,3, simpangan baku = 11,3, modus = 61,7, dan median = 62,2.

3) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga Siswa yang Kecerdasan Emosionalnya Rendah

Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah dipaparkan sebagai berikut. Banyaknya responden (n) = 38, skor minimum = 46, skor maksimum = 86, dengan demikian rentangnya = 86 – 46 = 40; serta rentang teoretisnya adalah 0 - 100. Selanjutnya data tersebut disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dengan banyak kelas = 7, lebar interval = 6, rata-rata = 59,3, simpangan baku = 10,2, modus = 58,2, dan median = 60,2.

4) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga Siswa yang Kecerdasan Emosionalnya Tinggi

Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi dipaparkan sebagai berikut. Banyaknya responden (n) = 38, skor minimum = 40, skor maksimum = 90, dengan demikian rentangnya = 90 - 40 = 50; serta rentang teoretisnya adalah 0 - 100. Selanjutnya data tersebut disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dengan banyak kelas = 7, lebar interval = 8, rata-rata = 63,4, simpangan baku = 12,1, modus = 64,5, dan median = 65,1.

4.2. Pengujian Hipotesis

Hipotesis dalam penelitian ini secara inferensial diuji dengan menggunakan Analisis Varian (ANAVA) dua jalur. Dalam penelitian ini terdapat satu variabel kriteria (terikat) dan dua variabel bebas. Varibel kriteria yang dimaksud adalah hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa, sedangkan variabel bebas yang dimaksud adalah (1) Teknik Penilaian (portofolio/ konvensional), dan (2) Kecerdasan Emosional (tinggi/ rendah).

Ringkasan Analisis Varians Dua Jalur

Sumber Variansi	Dk	JK	KT	Fh	F tabel	
					0,05	0,01
Jenis Penilaian (A)	1	265,6	265,6	**4,61** *	3,97	6,98
Kecerdasan Emosional (B)	1	432,4	432,4	**7,51 ***	3,97	6,98
Interaksi (A X B)	1	3326,3	3326,3	**57,75****	3,97	6,98
Kekeliruan (Dalam sel)	72	4145,4	**57,6**			
Total	75	8169,7				

Keterangan:
dk : derajat kebebasan
JK : jumlah kuadrat
KT : kuadrat tengah
Fh : F hitung
* : signifikan
** : sangat signifikan

Dari hasil pengujian hipotesis dengan Uji F dan Uji Tukey tersebut di atas, maka dapat dibuat ikhtisar hasil penelitian sebagai berikut:

1) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio **lebih tinggi** dari pada hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional.
2) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi **lebih tinggi** dari pada hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah.

3) Terdapat pengaruh interaksi yang **sangat signifikan** antara jenis penilaian dengan kecerdasan emosional terhadap hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa.
4) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa diberi penilaian portofolio dan kecerdasan emosionalnya tinggi **lebih tinggi** dari hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio dan kecerdasan emosionalnya rendah.
5) Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional dan kecerdasan emosionalnya rendah **lebih tinggi** dari hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional dan kecerdasan emosionalnya tinggi.

4.3. Pembahasan Hasil Penelitian

Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio lebih tinggi dari pada hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional. Kenyataan empiris tersebut dapat dijelaskan dengan beberapa argumen sebagai berikut. Penilaian portofolio adalah penilaian yang menuntut siswa untuk mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan yang sudah dipelajari dalam bentuk karya nyata, dan merupakan penilaian terhadap koleksi pekerjaan siswa dalam rangka menunjukkan perkembangan belajar dan perbuatan melalui refleksi diri dan prestasi, yang diskor dengan menggunakan rubrik. Evaluasi portofolio menggambarkan penilaian dengan rentang yang cukup antara memahami tugas atau soal dan menyelesaikannya sehingga dapat menggambarkan penampilan kemampuan siswa yang sesungguhnya. Pada kenyataannya bahwa pemberian evaluasi portofolio topik dimensi tiga pada siswa dengan diberikan waktu yang cukup longgar guna memahami dan menyelesaikan soal yang diberikan membuat siswa dapat berpikir secara jernih, tenang, dan dapat menyelesaikan soal dengan baik. Pelaksanaan evaluasi portofilio menyertakan siswa dalam menilai kemajuan belajarnya atau prestasinya dan menunjukkan tujuan penilaian yang berkelanjutan atau berkesinambungan. Dengan menyertakan siswa dalam menilai kemajuan belajarnya sendiri, siswa menjadi lebih mengerti, sadar diri akan kemampuannya, memahami tentang obyektivitas penilaian, dan manfaat penilaian yang berkelanjutan dan selalu dapat diperbaiki. Dengan penilaian

ini siswa mempunyai motivasi yang tinggi untuk menyelesaikan tugas-tugas secara sempurna.

Hal yang lebih baik pada penilaian portofolio adalah dapat mengukur prestasi tiap siswa dengan memperhatikan perbedaan individu antar siswa. Dengan demikian setiap siswa merasa diperlakukan secara adil dan mendapatkan layanan secara individual sesuai dengan kemampuan setiap siswa. Penilaian portofolio dapat memberikan suasana yang akrab, saling terbuka antara guru dan siswa, karena penilaian ini mengutamakan prinsip penilaian dengan pendekatan yang kolaboratif antara guru dan siswa. Siswa diberikan kesempatan untuk menilai karya atau tugasnya sendiri dengan menggunakan rambu-rambu yang telah ditentukan. Guru hanya mengarahkan siswa untuk dapat menilai secara benar dengan menggunakan rambu-rambu tersebut. Selanjutnya guru dan siswa berdiskusi dan mencocokkan satu persatu untuk mendapatkan keselarasan penilaian sesuai dengan rambu-rambu dan kaidah penyelesaian soal yang benar. Dengan demikian hasil penilaian atas karya/ tugas siswa dapat diterima secara bersama antara guru dan siswa.

Penilaian portofolio bertujuan agar siswa mampu menilai sendiri kemajuan belajarnya. Dengan cara menilai dirinya sendiri siswa dapat bersikap jujur dan obyektif untuk dapat menerima kenyataan atas hal-hal yang salah, demikian pula dapat mengerti dan merasa puas atas hal-hal yang telah dikerjakannya secara benar. Dengan demikian penilaian ini melatih siswa untuk mampu mengakui atas kekurangan dan kelebihannya, sehingga siswa dapat memperbaiki diri pada kesempatan berikutnya. Kenyataan menunjukkan bahwa setelah siswa memahami atas kekurangan dan kelebihannya, selanjutnya guru membimbing siswa agar mampu melakukan perbaikan pada bagian-bagian yang masih salah, dan selanjutnya diberikan motivasi untuk terus berusaha agar dapat meraih prestasi yang lebih baik. Pelaksanaan penilaian portofolio ini tidak terpisah dari pembelajaran, tetapi penilaiannya terintegrasi pada proses pembelajaran.

Dengan demikian, penilaian portofolio merupakan jenis penilaian yang komprehensif, terstruktur dan dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas berbentuk portofolio secara maksimal. Penilaian ini sangat cocok untuk dapat mengungkapkan seluruh kemampuan siswa yang tidak dapat diungkapkan dengan penilaian konvensional. Dengan diterapkannya penilaian portofolio dalam pembelajaran matematika khususnya topik dimensi tiga, para siswa

merasa tertantang untuk menyelesaikan tugas secara sempurna, dengan tumbuh minat dan motivasi yang tinggi untuk menyelesaikan tugas-tugas portofio yang diberikan oleh gurunya. Hal ini berimplikasi kepada peningkatan kemampuan siswa yang pada akhirnya meningkatkan hasil belajar matematika pada topik dimensi tiga.

Secara umum siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi lebih baik hasil belajar matematika topik dimensi tiganya jika dibandingkan dengan siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah. Fakta empiris tersebut memang sejalan dengan konsep teoretik yang dikemukakan oleh para ahli. Hal ini wajar terjadi karena orang yang mempunyai kecerdasan emosional tinggi mampu: (1) mengenali emosi diri, (2) mengelola emosi, (3) memotivasi diri sendiri, (4) mengenali emosi orang lain, dan (5) membina hubungan dengan baik dan efektif.

Kemampuan siswa untuk mengenali emosi diri sendiri merupakan kemampuan yang penting, karena dengan itu siswa dapat mengendalikan emosinya secara baik sehingga dapat mengikuti proses pelajaran dengan baik. Pengelolaan emosi menjadi bagian yang penting pada saat siswa mengikuti proses pembelajaran, karena dengan emosi yang terkelola dengan baik, siswa tidak akan mengalami banyak masalah dalam berinteraksi dengan sesama siswa maupun dengan guru terutama pada saat prosesw pembelajaran. Dengan demikian materi pelajaran yang disajikan di kelas dapat diterima dengan baik.

Kebanyakan siswa yang memahami akan dirinya dengan baik, dapat memotivasi diri sendiri untuk melakukan pekerjaan dengan sebaik-baiknya, sehingga dapat meraih hasil belajar yang optimal. Motivasi diri yang dimiliki oleh para siswa mempunyai hubungan yang cukup tinggi dengan stabilitas emosi yang dimiliki oleh siswa tersebut. Selanjutnya dengan mengenali emosi orang lain dengan baik, menjadi kunci kesuksesan dalam berkarya maupun belajar. Hubungan baik sesama teman dengan bisa memahami kondisi dan keberadaan teman secara apa adanya menjadikan modal yang besar untuk berkolaborasi dalam penyelesaian tugas maupun memecahkan berbagai masalah sekolah. Demikian pula membina hubungan baik dan efektif dengan siapapun merupakan salah satu pintu kesuksesan belajar, karena kesulitan apapun yang dialami oleh seorang siswa bila hubungannya baik dengan semua orang, akan mudah mendapatkan jalan penyelesaian.

Dengan memiliki lima kemampuan ini seorang siswa mampu mengatur cara belajarnya dengan baik, termasuk bagaimana menumbuhkan motivasi belajar

matematikanya. Bila seorang siswa dapat mengenali emosi dan membina hubungan baik dengan temannya berarti dia dapat mengkomunikasikan kepada temannya kesulitan-kesulitan yang dihadapi dalam mempelajari matematika. Hal ini sangat membantu siswa dalam meningkatkan hasil belajar matematika topik dimensi tiga.

Interaksi antara pemberian jenis penilaian dengan kecerdasan emosional siswa memberikan suatu fakta yang lain bahwa penilaian portofolio lebih cocok untuk kelompok siswa yang mempunyai kecerdasan emosional tinggi. Sedangkan penilaian konvensional lebih cocok diterapkan pada siswa yang mempunyai kecerdasan emosional rendah. Siswa yang mempunyai kecerdasan emosional tinggi senantiasa mempunyai sikap yang terbuka, suka tantangan, senang mengerjakan hal-hal yang rumit, senang bekerja dengan sempurna, dan tidak mudah putus asa. Dengan demikian siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi lebih cocok diberikan penilaian portofolio, sedangkan siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah lebih cocok diberikan penilaian konvensional.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang telah dikemukakan pada bab di atas, berikut ini dapat dikemukakan beberapa kesimpulan:

1. Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio **lebih tinggi** dari pada hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional.
2. Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang kecerdasan emosionalnya tinggi **lebih tinggi** dari pada hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang kecerdasan emosionalnya rendah.
3. Terdapat pengaruh interaksi yang **sangat signifikan** antara jenis penilaian dengan kecerdasan emosional terhadap hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa.
4. Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio dan kecerdasan emosionalnya tinggi **lebih tinggi** dari hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian portofolio dan kecerdasan emosionalnya rendah.

5. Hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional dan kecerdasan emosionalnya rendah **lebih tinggi** dari hasil belajar matematika topik dimensi tiga siswa yang diberi penilaian konvensional dan kecerdasan emosionalnya tinggi.

5.2. Saran

1. Perlu penerapan penilaian portofolio pada pembelajaran matematika di Sekolah Menengah Atas untuk dapat mengungkapkan seluruh kemampuan siswa secara komprehensif dan berkesinambungan.
2. Pada proses pembelajaran matematika, guru perlu mengetahui tingkat kecerdasan emosional siswanya agar dapat mengelola proses pembelajaran secara optimal.
3. Terjadinya pengaruh interaksi antara jenis evaluasi dan tingkat kecerdasan emosional, maka guru perlu mengidentifikasi kelompok siswa yang mempunyai kecerdasan emosional yang tinggi dan yang rendah. Hal ini sangat diperlukan untuk menentukan kombinasi yang paling efektif dan efisien dari kedua variabel tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Ary, Donald, Lucy Cheser Jacobs and Asghar Razavieh. 1990. *Introduction to Research in Education.* Fort Worth: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Asmawi Zainul dan Noehi Nasution, 1994, *Penilaian Hasil Belajar*,Depdikbud, Jakarta

Asmawi Zainul, 2001, *Alternativ Assessment,* Depdiknas, Jakarta

Bell, Frederick H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics.* USA: Wm. C. Brown Publisher.

Bell Gredler, M.E. 1994. *Belajar dan Membelajarkan.* Terjemahan Munandir. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.

Bloom, B.S., G. F. Madaus, and J. T. Hastings. 1981. *Evaluation to Improve Learning.* New York: McGraw-Hill Book Company.

Fraenkel, Jack R. and Norman E. Wallen. 1993. *How to Design and Evaluate Research in Education.* New York: McGraw-Hill, Inc.

Gagne, Robert M. 1985. *The Conditions of Learning and Theory of Instruction.* New York: CBS College Publishing.

Hamalik, Oemar. 1989. *Teknik-Teknik Pengukuran dan Evaluasi Pendidikan.* Bandung: Penerbit Mandar Maju.

Hudojo, Herman. 1988. *Mengajar Belajar Matematika.* Jakarta: P2LPTK-Depdikbud.

Huitt, B., J. Hummel, and D. Kaeck. 2000. *Assessment, Measurement, Evaluation and Research.* http://chiron.valdosta.edu//whuitt/col/intro/sciknow.html,.

Joyce, Bruce and Marsha Weil. 1992. *Models of Teaching.* Boston: Allyn and Bacon.

Popham, W. James. 1995. *Classroom Assesment: What Teacher Need to Know*. USA: Allyn and Bacon.

Popham, W. James. 1981. *Modern Educational Measurement.* Englewood Cliifs, N. J.: Prentice-Hall, Inc.

Rusyan, Tabrani, Atang Kusnidar dan Zainal Arifin. 1994. *Pendekatan dalam Proses Belajar Mengajar*. Bandung: Remaja Rosdakarya.

Silverius, Suke. 1991. *Evaluasi Hasil Belajar dan Umpan Balik.* Jakarta: Gramedia Widiasarana.

Slavin, R.E. 1997. *Educational Psychology: Theory and Practice.* USA: Allyn and Bacon.

Yansen Marpaung, 2002. *Evaluasi Proses.* Jakarta: Ditjen Dikdasmen-Depdiknas.

PROSES PEMBELAJARAN *STUDENT CENTERED* PADA MATA KULIAH STATISTIK NONPARAMETRIK (PENERAPAN STRATEGI *INSTANT ASSESSMENT*, *INDEX CARD MATCH*, *PRACTICE REHEARSAL PAIRS*, DAN *CASE STUDY*)

Yuliana Susanti
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret Surakarta
Email: yulsusan@yahoo.com (yulisst@yahoo.com)

ABSTRAK. Mata kuliah Statistik Nonparametrik merupakan salah satu mata kuliah pilihan bidang statistika yang diberikan pada semester IV. Standar kompetensi mata kuliah Statistik Nonparametrik adalah menerapkan teknik nonparametrik untuk menganalisis data baik secara manual maupun dengan paket program Minitab dan SPSS, dan membuat interpretasi dari hasil analisis data. Aspek yang dikembangkan adalah pembelajaran *student centered* dengan menggunakan strategi *instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs,* dan *case study. Instant assessment* adalah strategi menarik yang dapat digunakan untuk memotivasi mahasiswa untuk aktif sejak awal perkuliahan, *index card match* digunakan untuk mereview materi yang telah dibahas, *practice-rehearsal pairs* merupakan strategi sederhana untuk mempraktekkan dan melatih suatu ketrampilan atau prosedur dengan teman atau kelompok lain, dan *case study* adalah strategi yang banyak digunakan di berbagai bidang dan merupakan salah satu metode pembelajaran terbaik. Berdasarkan evaluasi penerapan metode pembelajaran diperoleh kesimpulan bahwa metode *student centered* dengan strategi *instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs,* dan *case study* dapat meningkatkan hasil belajar mahasiswa. Selain itu, strategi-strategi yang diterapkan juga dapat meningkatkan keaktifan mahasiswa dalam perkuliahan, meningkatkan kemampuan mengemukakan pendapat, serta merangsang daya pikir dan sifat kritis mahasiswa.

Kata kunci: instant assessment, index card, practice-rehearsal pairs, case study

ABSTRACT. Nonparametric Statistic course is a minor course in statistics field given in 4th semester. Competency standard of this course is the student can apply nonparametric technique to analyze data, either manually or using Minitab and SPSS, as well as to interpret the result of data analysis. We develop student centered learning process with instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs, and case study strategies. Instant assessment is a fun, nonthreatening strategy to get to know the students, index card match is an active, fun way to review class material, practice-rehearsal pairs is a simple strategy for practicing and rehearsing any skill or procedure with a learning partner, and case study is widely heralded as one of the best learning methods. Based on the evaluation of learning process, we conclude that the student centered method using instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs, and case study strategies can increase student's study result. These strategies can also increase student's activity in the course, increase student's ability in proposing opinion and stimulate student's power of thinking and critical attitude.

Key words: instant assessment, index card, practice-rehearsal pairs, case study

1. PENDAHULUAN

Mata kuliah Statistik Nonparametrik merupakan mata kuliah pilihan bagi mahasiswa S1 Matematika FMIPA UNS, yang diberikan pada semester IV dengan bobot 3 SKS, sebagai kelanjutan mata kuliah Metode Statistika. Mata kuliah ini merupakan salah satu mata kuliah pilihan bidang statistika, dan akan menunjang mahasiswa dalam mempelajari bidang statistika lebih lanjut, khususnya untuk analisis data-data nonparametik pada ilmu-ilmu sosial. Untuk menambah wawasan mahasiswa dalam melakukan inferensi statistika nonparametrik, maka mata kuliah ini didukung oleh pratikum dengan menggunakan paket program Minitab dan SPSS untuk membantu penyelesaian tugas lapangan kelompok.

Standar kompetensi mata kuliah Statistik Nonparametrik adalah menerapkan teknik nonparametrik untuk menganalisis data baik secara manual maupun dengan paket program Minitab dan SPSS, dan membuat interpretasi dari hasil analisis data. Kompetensi dasarnya adalah:

a. menerapkan uji hipotesis dan selang kepercayaan pada distribusi Binomial
b. mengidentifikasi limit toleransi dan menerapkan uji tanda
c. menerapkan uji hipotesis untuk probabilitas pada tabel kategorik
d. menerapkan uji hipotesis untuk median populasi
e. menentukan ukuran dependensi
f. menentukan uji kecocokan Chi-kuadrat
g. menerapkan uji hipotesis untuk dua atau lebih sampel independen
h. menerapkan uji hipotesis untuk kesamaan variansi
i. menentukan ukuran korelasi rank
j. menerapkan uji hipotesis untuk satu sampel atau dua sampel berpasangan
k. menerapkan uji kecocokan Kolmogorov
l. menerapkan uji hipotesis untuk dua sampel independen dengan uji Smirnov

2. PENGEMBANGAN PROSES PEMBELAJARAN

Seiring dengan pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang disertai dengan arus globalisasi yang semakin cepat, maka dosen sebagai satu-satunya sumber informasi tidak mungkin lagi dipertahankan. Oleh karena itu

pembelajaran *teacher centered* (berpusat pada dosen) tidak lagi sesuai dengan perkembangan yang dihadapi oleh universitas (Dimiyati dan Mudjiono, [2]).

Aspek yang dikembangkan adalah pembelajaran ***student centered*** atau pembelajaran berpusat pada mahasiswa dengan tujuan meningkatkan kemampuan mahasiswa untuk memproses, menemukan, dan menggunakan informasi bagi pengembangan dirinya dalam konteks lingkungannya. Sedangkan strategi yang diterapkan adalah ***instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs,*** dan ***case study*** (Silberman, [3]).

- *Instant assesment* merupakan salah satu strategi yang digunakan agar mahasiswa aktif sejak awal. Strategi ini dapat meningkatkan suasana akademik, memotivasi mahasiswa untuk aktif, dan meningkatkan ketertarikan mahasiswa terhadap materi kuliah. Langkah-langkahnya adalah
    a. menyusun kartu *responder* untuk setiap mahasiswa, kartu ini dapat berupa pilihan ganda, benar-salah, atau tingkat kesukaan (misal 1 – 5); jika mahasiswa terlalu banyak, kartu dapat diganti dengan kartu kosong yang nantinya mahasiswa menuliskan jawabannya sendiri
    b. menyusun pernyataan yang berkaitan dengan kartu *responder;* pernyataan dapat berupa pengalaman mahasiswa atau harapan mahasiswa terhadap mata kuliah atau materi kuliah
    c. membaca pernyataan dan mahasiswa diminta untuk menjawab dengan cara menunjukkan kartu *responder* sesuai dengan pilihan mereka
    d. menunjuk beberapa mahasiswa unutk mengungkapkan alasan pilihan mereka.
- *Index card match* merupakan salah satu strategi menarik yang digunakan untuk mereview materi yang telah dibahas. Langkah-langkahnya sebagai berikut:
    a. menuliskan pertanyaan pada kertas sejumlah setengah dari jumlah mahasiswa
    b. jawaban pertanyaan tersebut dituliskan pada kertas lain
    c. kertas-kertas pertanyaan dan jawaban tersebut diberikan secara acak kepada setiap mahasiswa

d. mahasiswa diminta untuk menentukan pasangan kertas pertanyaan-jawaban tersebut, jika menemukan diminta untuk membentuk kelompok atau duduk berdekatan
e. jika semua pasangan pertanyaan-jawaban sudah ditemukan, setiap kelompok yang terbentuk diminta untuk membaca pertanyaan beserta jawabannya secara keras dan mahasiswa lain menanggapinya.

- *Practice-rehearsal pairs* merupakan strategi sederhana untuk mempraktekkan dan melatih suatu ketrampilan atau prosedur dengan teman/kelompok lain (sebagai pasangannya). Tujuannya adalah untuk meyakinkan bahwa pasangan ini dapat melakukan ketrampilan atau prosedur tertentu. Langkah-langkahnya adalah
    a. menentukan ketrampilan atau prosedur praktikum materi tertentu (dalam hal ini analisis data dengan bantuan komputer program Minitab/SPSS), kemudian menyusun pasangan-pasangan yang akan mempraktekkannya, pada setiap pasangan satu sebagai *explainer* atau *demonstrator* dan yang lain sebagai *checker*
    b. *explainer* atau *demonstrator* menjelaskan prosedur praktikum dan *checker* mengomentari atau mengkritisi penjelasan tersebut, apakah sudah benar atau belum, jika belum bagaimana yang benar, dan seterusnya
    c. pasangan berubah posisi kemudian dilakukan langkah b.
- *Case study* (tugas lapangan*)* banyak digunakan di berbagai bidang dan merupakan salah satu metode pembelajaran yang terbaik. Dengan strategi ini mahasiswa diberi kesempatan untuk menentukan kasus yang sesuai dengan materi yang telah diberikan. Langkah-langkahnya sebagai berikut:
    a. membagi kelas menjadi kelompok-kelompok yang masing-masing terdiri dari 4 – 5 orang
    b. menjelaskan tujuan *case study* adalah untuk mempelajari materi melalui permasalahan real kemudian menjelaskan kasus-kasus yang dapat diambil, sesuai dengan materi yang telah diberikan
    c. memberikan waktu kepada kelompok mahasiswa untuk berdiskusi tentang penyelesaian kasus beserta analisisnya

d. setiap kelompok diminta untuk mempresentasikan makalah tentang penyelesaian kasusnya di kelas untuk didiskusikan.

Media pembelajaran menggunakan OHP, LCD Projector, komputer, papan tulis, dan modul praktikum.

Learning bukan sekedar kegiatan monoton. Mahasiswa tidak hanya mendengarkan dosen, menghafalkan teori, dan menjawab pertanyaan. Mereka harus dapat menjelaskan hal-hal yang mereka pelajari, menuliskan kembali, mengkaitkan dengan pengalaman sebelumnya, dan mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari-hari. Mereka harus membuat apa yang mereka pelajari menjadi bagian dari diri mereka [1]. *Student centered learning* merupakan suatu strategi pembelajaran yang berpusat dan melibatkan mahasiswa untuk berbuat sesuatu dan berfikir tentang hal-hal yang mereka kerjakan .

Teknis pelaksanaan kuliah dengan strategi *instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs,* dan *case study* sebagai berikut. Pada awal perkuliahan, dilakukan kontrak perkuliahan dan dengan strategi *instant assessment* diberikan motivasi yang berkaitan dengan mata kuliah Statistik Nonparametrik. Kuliah tatap muka disampaikan sesuai dengan urutan kompetensi dasar. Tutorial dan praktikum diberikan setiap selesai satu kompetensi dasar. Untuk mereview materi digunakan strategi *index card match* sedangkan untuk meningkatkan keaktifan dan kemampuan mahasiswa dalam praktikum analisis data dengan komputer digunakan strategi *practice-rehearsal pairs.*

Dengan adanya strategi-strategi ini, diharapkan pembelajaran menjadi lebih bervariasi dan menarik. Dengan *instant assessment* diharapkan mahasiswa termotivasi untuk aktif dalam kuliah, sedangkan dengan *index card match,* selain menguasai materi, mahasiswa juga termotivasi untuk berinteraksi dengan yang lain sehingga suasana menjadi lebih “hidup”. Selain itu, dengan *practice-rehearsal pairs* dapat meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam analisis data dengan komputer, sedangkan *case study* menjadikan mahasiswa bisa lebih memahami penerapan matematika/statistika di bidang lain, khususnya tentang penerapan nonparametrik untuk menyelesaikan permasalahan real. Selanjutnya dengan adanya presentasi baik dalam tugas lapangan maupun praktikumakan melatih mahasiswa untuk

mengemukan pendapat dan mengkomunikasikan pengetahuan yang telah diperoleh dengan orang lain.

3. EVALUASI PENERAPAN/PELAKSANAAN

3.1. Bentuk/jenis evaluasi

Evaluasi hasil meliputi tes tertulis (berupa kuis, ujian mid semester dan ujian akhir semester), tugas (makalah pada *case study)*, serta diskusi. Evaluasi proses berupa angket, yang diberikan pada saat minggu ke-8 dan minggu ke-16. Untuk mengevaluasi kemampuan mahasiswa tahap demi tahap, setiap hasil penilaian (kuis, mid semester, ujian akhir semester, dan tugas lapangan (makalah) diberikan kepada mahasiswa sehingga mahasiswa yang mempunyai kemampuan di bawah rata-rata mempunyai kesempatan untuk meningkatkan pemahamannya tentang materi terkait.

3.2.Alat Evaluasi

Evaluasi yang diberikan memenuhi kriteria pengetahuan, pemahaman, aplikasi, analisis, sintesis, dengan alat evaluasi berikut:

a. Tes tertulis, terdiri dari : kuis (2 kali) dengan bobot penilaian 20%, ujian mid dan ujian akhir semester masing-masing dengan bobot penilaian 20%
b. Tugas, berupa tugas lapangan (1 kali) dengan bobot penilaian 20%
c. Diskusi, berupa diskusi pada waktu tatap muka, praktikum, dan presentasi makalah oleh setiap kelompok, dengan penilaian meliputi keaktifan dan kemampuan mahasiswa dalam memahami materi, sedang bobot penilaian 20%

3.3. Teknik analisis hasil evaluasi

Berdasarkan alat evaluasi, teknik analisis hasil evaluasi berdasarkan rumus: Nilai akhir = 20% tugas + 20 kuis + 20% diskusi + 20% ujian mid + 20% ujian akhir. Nilai yang masuk berupa angka (skala 100) kemudian dikonversikan ke dalam skala 4 dengan menggunakan aturan PAP, dengan batas kelulusan 60.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Mata kuliah Statistik Nonparametrik telah dilaksanakan pada semester IV tahun 2008 dan diikuti oleh 54 mahasiswa. Namun demikian, mahasiswa yang aktif mengikuti

kuliah sampai dengan akhir semester sebanyak 53 orang, sedangkan 1 orang mahasiswa lainnya hanya kuliah beberapa kali sebelum mid semester (tidak aktif).

Proses pembelajaran *student center* dengan penerapan strategi *instant assessment, index card match, practice-rehearsal pairs,* dan *case study* telah dilaksanakan sesuai dengan rencana,

Untuk mengevaluasi penerapan metode pembelajaran, angket diberikan kepada seluruh mahasiswa. Dari 53 mahasiswa, 49 mahasiswa yang mengisi dan mengembalikannya. Komponen-komponen yang dievaluasi dalam angket meliputi bahan kuliah dan referensi, peran mahasiswa dalam perkuliahan, penyajian kuliah oleh dosen, tugas lapangan *(case study)*, praktikum, dan seminar/presentasi.

Ditinjau dari bahan kuliah dan referensi, 47 mahasiswa (96%) menyatakan bahwa bahan kuliah disajikan langkah demi langkah secara urut, sedangkan 2 orang (4%) menyatakan tidak setuju. Sebagian besar mahasiswa (41 orang atau 84%) menyatakan bahwa materi kuliah cukup mudah, dan 8 mahasiswa (16%) menyatakan bahwa materi kuliah terlalu sulit untuk mereka. Jika dilihat dari peran mahasiswa dalam perkuliahan, 26 mahasiswa (53%) menyatakan bahwa mereka mempelajari terlebih dahulu materi yang akan diberikan dan 23 mahasiswa (47%) menyatakan tidak mempelajari terlebih dahulu materi yang akan diberikan. Besarnya presentase mahasiswa yang tidak mempelajari materi terlebih dahulu mempengaruhi pemahaman mereka tentang materi kuliah. Tentang latihan yang diberikan oleh dosen, sebanyak 41 mahasiswa (84%) menyatakan mereka telah mencoba mengerjakannya dan 8 mahasiswa (16%) menyatakan belum mencobanya. Selain itu terlihat juga bahwa sebagian besar mahasiswa (40 orang atau 82 %) telah mempelajari buku referensi. Besarnya presentase ini menunjukkan bahwa mahasiswa tidak sekedar mengandalkan catatan kuliah tetapi mereka sudah mulai merasakan pentingnya referensi pendukung. Meskipun demikian, masih ada 9 mahasiswa (18%) yang belum pernah membaca buku referensi.

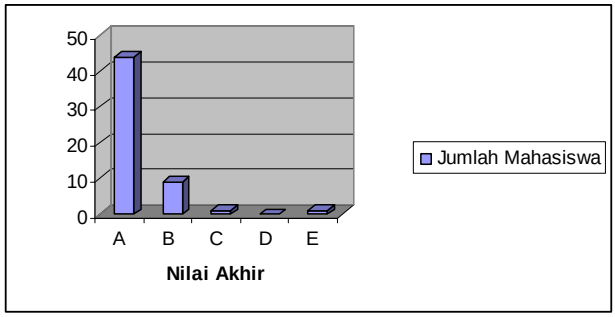
Ditinjau dari penyajian kuliah oleh dosen, sebagian besar mahasiswa (40 orang atau 82%) menyatakan bahwa dosen cukup baik dalam memberikan motivasi, 35 mahasiswa (71%) menyatakan bahwa dosen cukup memberikan wawasan tentang kaitan mata kuliah Statistik Nonparametrik dengan mata kuliah lain, dan 47 mahasiswa (96%) menyatakan bahwa dosen cukup mempersiapkan diri dalam memberi kuliah. Selain itu, 37 mahasiswa (76%) menyatakan bahwa bahasa dan cara penyajian kuliah mudah

dimengerti, 36 mahasiswa (74%) menyatakan bahwa *strategi instant assessment* menarik dan dapat memotivasi untuk lebih aktif, 44 mahasiswa (90%) menyatakan bahwa strategi dengan *index card match* menarik dan dapat memotivasi saya untuk aktif, sebanyak 43 mahasiswa (88%) merasa mempelajari sesuatu yang baru, dan 47 mahasiswa (96%) menyatakan bahwa mereka mempelajari sesuatu yang penting dan bermanfaat. Tentang metode pembelajaran, dan 33 mahasiswa (67%) menyatakan bahwa diskusi cukup menarik dan merangsang daya pikir atau sifat kritis mereka, sedangkan 44 mahasiswa (90%) menyatakan bahwa simulasi dengan *index card match* membantu pemahaman materi kuliah. Seluruh mahasiswa menyatakan bahwa dosen cukup membantu usaha belajar (memberi kesempatan bertanya di kelas dan konsultasi di luar jam kuliah). Sebanyak 47 mahasiswa (96%) menyatakan bahwa kehadiran kuliah memang membantu dalam pemahaman materi kuliah. Hal ini ditunjukkan juga dari presensi rata-rata kehadiran mahasiswa yang lebih dari 90 % (93.7%) . Tentang soal ujian, 40 mahasiswa (82%) menyatakan bahwa soal ujian sesuai dengan materi yang telah diberikan.

Jika dilihat dari pelaksanaan praktikum, 27 mahasiswa (55%) menyatakan bahwa mereka membaca materi terlebih dahulu sebelum praktikum, 45 mahasiswa (92%) menyatakan bahwa modul praktikum mudah dipelajari, 43 mahasiswa (88%) menyatakan bahwa strategi pada diskusi dan presentasi praktikum dapat meningkatkan ketrampilan dan 29 mahasiswa (59%) menyatakan bahwa alokasi waktu yang disediakan cukup memadai. Selain itu, 35 mahasiswa (71%) menyatakan bahwa asisten cukup membantu pelaksanaan praktikum dan 42 mahasiswa (86%) menyatakan bahwa praktikum memang bermanfaat dan diperlukan.

Ditinjau dari *case study* , 44 mahasiswa (90%) menyatakan bahwa *case study* membantu pemahaman materi kuliah dan 45 mahasiswa (92%) menyatakan bahwa mereka selalu mendiskusikannya dengan teman. Selanjutnya jika ditinjau dari seminar/presentasi makalah, 43 mahasiswa (88%) menyatakan bahwa dosen cukup membantu mereka dalam menyusun makalah dan mereka juga menyatakan bahwa presentasi makalah membantu mereka dalam memahami konsep statistik nonparametrik. Selain itu, 44 mahasiswa (90%) menyatakan bahwa presentasi makalah cukup menarik dan merangsang daya pikir atau sifat kritis serta menyatakan bahwa presentasi makalah bermanfaat dan diperlukan.

Berdasarkan evaluasi sampai dengan ujian mid semester, semua mahasiswa dapat mencapai kompetensi yang telah ditetapkan atau memiliki nilai rata-rata di atas 60. Berdasarkan evaluasi hasil belajar keseluruhan dengan sistem PAP, dari 54 mahasiswa yang aktif mengikuti kuliah, semuanya lulus dengan nilai (angka) rata-rata 3.81, lebih tinggi dari pada nilai (angka) rata-rata tahun 2007 (3.09). Distribusi nilai akhir mahasiswa dapat dilihat pada Gambar 1. Sebagian besar mahasiswa (44 orang atau 83%) memperoleh nilai A, 8 orang (15%) memperoleh nilai B, dan 1 orang (2%) memperoleh nilai C. Ada 1 orang yang memperoleh nilai E (penilaian tidak lengkap).

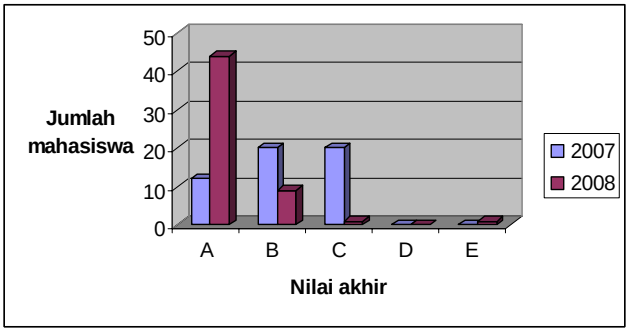


Gambar 1. Distribusi nilai akhir mahasiswa

Perbandingan nilai mahasiswa yang memperoleh nilai A, B, C, D, dan E pada tahun 2007 dan 2008 dapat dilihat pada Tabel 1. dan Gambar 2.

Tabel 1. Nilai Statistik Nonparametrik tahun 2007 dan 2008

	Nilai					Rata-rata
	A	B	C	D	E	
Th 2007	12	20	20	0	0	3.09
Th 2008	44	8	1	0	1	3.81



Gambar 2. Perbandingan jumlah dan nilai mahasiswa tahun 2007 dan 2008

Dari tabel 1 dan gambar 2 di atas, menunjukkan bahwa ada kenaikan nilai rata-rata mata kuliah statistik nonparametrik dari tahun 2007 ke 2008.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa metode *student centered* dengan penerapan strategi *instant assessment, index card match , pracitice researhal pairs,* dan *case study* dapat meningkatkan: hasil belajar mahasiswa, keaktifan mahasiswa dalam perkuliahan, kemampuan mengemukakan pendapat, merangsang daya pikir dan sifat kritis mahasiswa baik dalam presentasi praktikum maupun *case study*, dan mendapat respon yang positif dari mahasiswa.

DAFTAR PUSTAKA

[1].Anonim, 2007 *Good Practice Uses Active Learning Techniques*, http://cte.udel.edu/ pbl.htm , 2007

[2].Dimiyati dan Mudjiono, 1999, Belajar dan Pembelajaran, Rineka Cipta, Bandung

[3].Silberman, M., 1996, *Active Learning, 101 Strategies to Teach Any Subject*, Allyn & Bacon, A Simon & Schuster Company, Massachussets.

MENGEMBANGKAN KETERAMPILAN BERFIKIR MATEMATIKA[1]

Oleh : Sehatta Saragih[2]

ABSTRAC

Tujuan utama dalam belajar matematika adalah kemampuan pemecahan masalah dan salah satu karakteristik utama matematika adalah memiliki struktur yang saling terkait. Oleh sebab itu, dalam mempelajari matematika seseorang harus mampu mengorganisasikan pengetahuan yang dimilikinya untuk memecahkan suatu permasalahan matematika yang dihadapinya. Kegiatan atau proses berfikir yang dijalani seseorang dalam belajar matematika (memecahkan masalah) merupakan pengorganisasian kemampuan mengingat, melihat hubungan, menyadari adanya hubungan sebab akibat, hubungan analogi atau perbedaan yang kemudian dapat memunculkan gagasan-gagasan yang original dan membuat sebuah keputusan secara tepat dan cepat. Konteks ini menunjukkan bahwa pengajuan masalah dalam belajar matematika akan mendorong siswa mengembangkan kemampuan atau ketrampilan berfikirnya dalam berbagai bentuk dan level. Dengan kata lain, kemampuan atau keterampilan berfikir matematika siswa akan berkembang jika guru sudah mampu menghadirkan suasana belajar yang penuh tantangan yang menarik bagi siswa. Intinya apa yang harus perhatikan dan bagaimana cara seorang guru dalam mengambangkan kemampuan berfikir matematika siswa.

A. Pendahuluan

Dalam paradigma baru pembelajaran matematika, siswa senantiasa diberdayakan dalam membangun pengetahuannya secara lebih bermakna. Mengajar matematika di sekolah tidak hanya sebatas membantu siswa agar mereka mampu memahami materi matematika yang diajarkan. Masih, terdapat tujuan-tujuan lain seperti kemampuan-kemampuan ataupun ketrampilan serta perilaku tertentu yang harus siswa peroleh setelah ia mempelajari matematika. Pilar utama dalam mempelajari matematika adalah pemecahan masalah

Pemecahan masalah sebagai muara dari kemampuan matematika, memberikan dasar bagi setiap aktivitas pembelajaran matematika agar dapat memberi perhatian khusus dalam melatih dan mengembangkan kemampuan bernalar, berpikir kritis, logis, sistimatis dan memiliki sifat obyektif. Disisi lain melalui pemecahan masalah siswa akan memiliki kemampuan representasi dan komunikasi matematika yang lebih baik.

---

[1] ***Dipresentasikan pada seminar nasional Pendidikan Matematika di UNY, Jogyakarta 28 -12-2008***

[2] ***Dosen Pendidikan Matematika FKIP UNRI***

Memahami hal ini maka kegiatan pembelajaran matematika yang dikelola guru harus mampu menghadirkan suasana belajar yang penuh dengan tantangan menarik bagi siswa yang dijadikan sebagai sarana dalam upaya melatih siswa untuk mengembangkan dan meningkatkan kemampuan dan ketrampilan berpikir matematika.

Yang menjadi pertanyaan adalah apa yang perlu diperhatikan dan bagaimana cara seorang guru mengelola pembelajaran agar siswa menjadi terampil berfikir secara matematis tidak hanya ketika siswa berusaha memahami suatu situasi matematika ataupun ketika siswa harus berhadapan dengan masalah yang memerlukan solusi? Dengan kata lain, jika siswa harus dilatih untuk berpikir maka ia harus dihadapkan pada suatu situasi ataupun masalah yang menantang serta menarik untuk diselesaikan.

Karena berfikir kritis merupakan sebuah kemampuan dan keterampilan maka dapat dilatih dalam berbagai kesempatan melalui proses belajar mengajar. Selanjutnya maka guru harus memiliki kemampuan untuk merencanakan kegiatan pembelajaran yang dapat memberikan situasi atau suasana lingkungan belajar yang penuh dengan tantangan ataupun penuh sumber yang dapat dirujuk oleh siswa. Untuk itu, maka guru perlu langkah-langkah ataupun tindakan yang tepat untuk membuat proses pembelajaran matematika ataupun proses menyelesaikan suatu soal matematika di kelas menjadi suatu tempat serta kesempatan dimana siswa dapat meningkatkan kemampuan ataupun ketrampilan berpikirnya. Ada yang berpendapat bahwa aktivitas berpikir ini secara otomatis terjadi dalam setiap pembelajaran matematika di kelas, atau terintegrasi dalam pembelajaran, sehingga ketrampilan berpikir ini harus berlangsung dan merupakan bagian dalam setiap pembelajaran matematika. Namun pertanyaannya adalah: “sampai sesering apakah dan pada level manakah berpikir itu terjadi?”.

B. Keterampilan Berfikir.

Secara umum berfikir dapat didefnisikan sebagai suatu proses kognitif atau kegiatan mental yang dapat menghasilkan pengetahuan. Dalam proses berfikir, terjadi penggabungan antara pesepsi dan unsur-unsur yang ada dalam pikiran, serta manipulasi atau kombinasi kegiatan mental yang membentuk suatu pemikiran, Presseisen (dalam Costa, 1985). Lebih lanjut Presseisen, mengemukakan bahwa secara umum ketrampilan berfikir terdiri dari ketrampilan berfikir dasar (rendah) dan kompleks (tinggi).

Keterampilan atau kemampuan berpikir yang paling rendah adalah *mengingat.* Kemampuan ini yang sejak awal umumnya dilatihkan kepada siswa misalnya mengingat fakta perkalian bilangan 1-10, kuadrat bilangan-bilangan tertentu dan jumlah ukuran tiga sudut dalam sembarang segitiga adalah 180^0 , *log ab = log a + log b,* dan sebagainya. Sekalipun berada pada level rendah, namun peranan mengingat tetap penting, antara lain untuk mempermudah dan memperlancar seseorang dalam menyelesaikan suatu masalah. Oleh karena itu melatih ketrampilan mengingat pun seyogyanya mendapat perhatian yang proporsional. Kebanyakan siswa pada tahun-tahun pertama mereka dilatih untuk menghafal agar mereka bisa mengingat walaupun tanpa mengerti mengapa harus demikian.

Kemampuan berpikir pada level berikutnya adalah kemampuan memahami konsep-konsep matematika, kemampuan untuk mengenal ataupun menerapkan konsep tersebut untuk meyelesaian masalah yang dihadapi. Misalnya, dalam mencari panjang sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku jika diketahui panjang sisi miring dan salah satu sisi penyikunya maka siswa tahu bahwa ia dapat menggunakan rumus Pythagoras.

Kemampuan problem solving adalah kemampuan atau kompetensi esensial atau utama dalam mempelajari matematika, yang direkomendasikan untuk dilatihkan serta dimunculkan sejak anak belajar matematika dari Sekolah Dasar sampai seterusnya (NCTM, 2000). Artinya, setiap siswa dalam segala level kemampuan matematika maupun jenjang pendidikan perlu mengalami dan dilatih dalam kemampuan pemecahan masalah. Jika kita mengacu pada tujuan pembelajaran matematika, maka keterampilan berfikir kompleks merupakan tujuan utama yang ingin dicapai sebagaimana yang dimuat dalam kurikulum 2006. Sehubungan dengan itu, maka guru sebagai pengelola pembelajaran diharapkan mengetahui cara yang harus mereka tempuh agar keterampilan berfikir siswa secara matematika dapat berkembang dengan optimal. Novak (1979) mengemukakan, keterampilan berifikir rasional dapat dikembangkan dalam kegiatan pembelajaran. Ada empat hal yang penting dilakukan guru untuk meningkatkan keterampilan berfikir rasional dalam proses pembelajaran, yaitu:

1. Buat peta konsep materi pelajaran agar siswa memiliki pemahaman yang utuh dan menyeluruh terhadap materi yang dipelajarinya;

2. Bersama siswa, guru harus mengedepankan belajar bermakna dan dalam hal ini peta konsep sangat membantu untuk memahami konsep apa yang akan dikuasai dan bagaimana konsep iitu digunakan untuk mempelajari informasi baru;
3. Suasana psikologis yang dapat membangun pengalaman belajar dan hubungannya interpersonal yang posistif dan hal ini dinyatakan antara lain dalam tujuan-tujuan pembelajaran yang dikemukakan sebelum mmemulai pembelajaran;
4. Strategi evaluasi yang lebih menekankan pada criterion referenced test serta evaluasi dengan wawancara klinis untuk merekkam hal yang tidak tercakup dalam tes tertulis.

C. Berfikir Replektif.

Kemampuan berpikir reflektif dalam matematika memuat kemampuan berpikir kritis dan berpikir kreatif sama seperti kemampuan berpikir lainnya. Kedua kemampuan berfikir ini dipandang sangat essensial dalam mengembangkan kemampuan-kemampuan lain dalam belajar matematika dan dapat dikembangkan ketika siswa sedang berada dalam proses yang intens tentang pemecahan masalah. Dengan kata lain, pembelajaran matematika di kelas sedapat mungkin menyentuh aspek pemecahan masalah dan dilakukan secara sengaja dan terencana. Misalnya dalam pemecahan masalah, langkah *looking back* dari Polya adalah suatu tahap berpikir reflektif, yaitu secara sengaja belajar dari pengalaman, tetapi sering tidak dilakukan secara efektif dan tersulit diperkenalkan pada orang (Masson, 2002).

C.1. Berpikir Kritis

Krulik dan Rudnick (NCTM, 1999) mengemukakan bahwa yang termasuk berpikir kritis dalam matematika adalah berpikir yang *menguji, mempertanyakan, menghubungkan, mengevaluasi* semua aspek yang ada dalam suatu situasi ataupun suatu masalah. Sebagai contoh, ketika seseorang sedang membaca suatu naskah ataupun mendengarkan suatu ungkapan atau penjelasan ia akan berusaha memahami dan coba menemukan atau mendeteksi adanya hal-hal yang istimewa dan yang perlu ataupun yang penting. Demikian juga dari suatu data ataupun informasi ia akan dapat membuat

kesimpulan yang tepat dan benar sekaligus melihat adanya kontradiksi ataupun ada tidaknya konsistensi atau kejanggalan dalam informasi itu. Jadi dalam berpikir kritis itu orang menganalisis dan merefleksikan hasil berpikirnya.

Menurut Ennis (1996), berpikir kritis sesungguhnya adalah suatu proses berpikir yang terjadi pada seseorang serta bertujuan untuk membuat keputusan-keputusan yang masuk akal mengenai sesuatu yang dapat ia yakini kebenarannya serta yang akan dilakukan nanti. Sedangkan Desmita (2006:161) mengemukakan berfikir kritis adalah pemahaman atau refleksi terhadap permasalahan secara mendalam, mempertahankan pikiran agar tetap terbuka bagi berbagai pendekatan dan perspektif yang berbeda, tidak mempercayai begitu saja informasi-informasi yang datang dari berbagai sumber (lisan atau tulisan) dan berfikir secara reflektif dan evalutif. Berdasarkan kedua pendapat di atas maka dapat disimpulkan bahwa berfikir kritis ditandai dengan mampu memberikan alasan ketika mengemukakan pendapat dan mengapa hal ini demikian (terjadi) tatkala menerima atau mendapatkan suatu informasi. Dengan demikian tujuan berfikir kritis adalah mengevaluasi tindakan yang terbaik dan diyakini.

C.2. Berpikir Kreatif

Berpikir kreatif sesungguhnya adalah suatu kemampuan berpikir yang berawal dari adanya kepekaan terhadap situasi yang sedang dihadapi, bahwa di dalam situasi itu terlihat atau teridentifikasi adanya masalah yang ingin atau harus diselesaikan. Selanjutnya ada unsur originalitas gagasan yang muncul dalam benak seseorang terkait dengan apa yang teridentifikasi. Hasil yang dimunculkan dari berpikir kreatif itu sesungguhnya merupakan suatu yang baru bagi yang bersangkutan serta merupakan sesuatu yang berbeda dari yang biasanya dia lakukan. Untuk mencapai hal ini orang harus melakukan sesuatu terhadap permasalahan yang dihadapi, dan tidak tinggal diam saja menunggu.

Dalam keadaan yang ideal, manakala siswa dihadapkan (oleh guru) pada suatu situasi, siswa diminta untuk melakukan suatu observasi, eksplorasi, dengan menggunakan intuisi serta pengalaman belajar yang mereka miliki, dengan hanya sedikit panduan atau tanpa bantuan guru (Sobel, dan Maletsky, 1988). Tetapi pendekatan seperti ini khususnya tidak hanya cocok bagi siswa yang pandai, namun memberikan suatu pengalaman yang diperlukan bagi mereka di kemudian hari dalam

melakukan penelitian. Berpikir kreatif juga nampak dalam bentuk kemampuan untuk menemukan hubungan-hubungan yang baru, serta memandang sesuatu dari sudut pandang yang berbeda dari yang biasanya (Evans, 1999).

Evans (1991) mengemukakan bahwa berpikir kreatif terdeteksi dalam empat bentuk yaitu : kepekaan (*sensitivity*), kelancaran (*fluency*), keluwesan (*flexibiliy*), dan keaslian (*originality*). *Kepekaan* terhadap suatu situasi masalah menyangkut kemampuan mengindentifikasi adanya masalah, mampu membedakan fakta yang tidak relevan dan yang relevan dengan masalah, termasuk konsep-konsep yang relevan. Kepekaan ini akan muncul lebih jelas jika ada semacam rangsangan yang disediakan dalam masalah atau *cue* serta tantangan yang diberikan oleh guru, kemudian memicu individu untuk meneruskan upayanya untuk melakukan kegiatan observasi, explorasi sehingga dapat muncul gagasan-gaasan. Kepekaan juga menyangkut apa yang dipikirkan atau digagas orang lain (Mason, Burton, Stacey, 1985) sehingga memicu individu untuk memunculkan ide atau gagasannya.

Kelancaran dalam memunculkan gagasan atau pertanyaan yang beragam serta menjawabnya, ataupun merencanakan dan menggunakan berbagai strategi penyelesaian pada saat menghadapi masalah yang rumit serta kebuntuan. Dalam situasi seperti ini dimana tersedia berbagai kemungkinan untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi, kelenturan dalam memilih dan menggunakan strategi yang lain, sering harus muncul. Artinya, ketika tertumbuk pada kebuntuan, seseorang tidak segan dan memutuskan untuk mengganti strateginya dengan strategi yang lain.

Kelenturan dapat dipandang juga sebagai suatu variasi yang sesungguhnya menunjukkan kekayaan ide atau alternatif dan usaha dari yang bersangkutan dalam membangun gagasan menuju pada solusi yang diharapkannya. Kadang-kadang ia ingin memperoleh solusi cara yang singkat atau praktis informal, tetapi juga ia dapat menginginkan cara yang formal. Keaslian atau originalitas dipandang sebagai munculnya gagasan dari yang bersangkutan tanpa memperoleh bantuan dari orang lain. Keaslian ini muncul dalam berbagai bentuk, dari yang sederhana atau yang informal untuk kemudian dapat dikembangkan menjadi lebih lengkap. Originalitas dalam hal ini adalah relatif. Karena bagi yang bersangkutan hal tersebut adalah sesuatu yang original (baru bagi dirinya), namun untuk orang lain tidaklah sesuatu yang baru.

Berkaitan dengan kepekaan, keaslian, kelenturan serta kelancaran dalam proses berpikir yang melahirkan gagasan (kreatif) dipandang perlu adanya suatu tindakan lanjut untuk membenahi serta menata dengan baik atau teratur dan rinci apa yang telah dihasilkan. Hal ini perlu dilaksanakan agar individu tidak kehilangan momentum dalam suasana belajar, terutama sebelum ia sempat lupa akan ide-ide yang bagus yang muncul. Penantaan yang teratur dan rinci ini membuka kesempatan padanya untuk sewaktu-waktu dapat mengulangi atau membaca serta mengkaji kembali apa yang ia hasilkan.

C.3. Hubungan antara berpikir kritis dan berpikir kreatif

Aktifitas berpikir kritis dan berpikir kreatif merupakan kemampuan yang diperlukan ketika seseorang sedang berada dalam keadaan kritis dimana ia sedang berusaha memecahkan suatu masalah yang rumit dan memerlukan cara-cara penyelesaian yang tidak seperti biasanya. Kedua kemampuan berpikir ini akan saling menunjang satu dengan yang lainnya. Misalnya, ketika seseorang sedang berpikir kreatif untuk menghasilkan gagasan dalam upaya penyelesaian suatu soal matematika, dari pengamatan dan eksplorasi yang ia lakukan serta mengkaitkan situasi yang dihadapinya dengan pengetahuan matematika yang ia miliki, maka ia juga harus kritis dalam memilih strategi serta mengontrol pemikirannya, apa yang ia dapat lakukan ataupun yang telah ia lakukan. Dalam hal ini, proses metakognitifnya harus diberdayakan, yaitu memonitor, mengontrol serta membuat keputusan yang tepat. Dan ini sesungguhnya adalah apa yang dikemukakan oleh Tang dan Ginsburg (NCTM, 1999) kemampuan metakognitif, yaitu “seseorang yang berpikir mengenai pikirannya sendiri”. Dalam hal ini ia harus berani mengambil resiko serta bertanggung jawab terhadap pilihan atau keputusannya. Ia belajar untuk tidak ragu membuat keputusan. Secara umum dapat dikatakan bahwa berpikir kritis dan kreatif saling menunjang dalam upaya seseorang menyelesaikan suatu masalah.

D. Bagaimana Mengembangkan Kemampuan Berfikir Kritis dan Kreatif.

Berfikir kritis dan kreatif merupakan aspek yang penting dalam pembelajaran matematika modern, sehingga para pemerhati pendidikan dan pendidik tertarik untuk mengembangkan hal ini kepada semua siswa. Oleh sebab itu, jika ada pandangan bahwa

kemampuan berfikir hanya miliki siswa-siswa yang cerdas adalah keliru, namun jika pandangan bahwa siswa yang cerdas lebih cepat berkembang dalam berfikir adalah benar. Oleh sebab itu, bukan hal yang mustahil bahwa siswa yang kurang cerdas akan memiliki kemampuan berfikir yang baik. Berangkat dari hal ini yang menjadi perhatian kita adalah bagaimana mengembangkan atau memberdayakan kemampuan berfikir tersebut agar optimal bagi semua siswa.

Santrock (Desmita, 2006:162) mengemukakan untuk mampu berfikir secara kritis siswa harus mengambil peran aktif dalam proses belajar. Sehubungan dengan itu, maka peran guru dalam menciptakan suasana pembelajaran yang memungkinkan atau memberikan kesempatan siswa untuk berfikir kritis. Oleh sebab itu, maka guru perlu mengetahui fase-fase dalam mengembangkan berfikir kritis agar kemampuan tersebut dapat optimal. Ada beberapa pendapat para ahli tentang fase-fase berfikir kritis, namun jika didalami dengan baik semua fase-fase tersebut pada dasarnya tidak berbeda. Dari pendapat-pendapat tersebut dapat disarikan bahwa fase-fase berfikir kritis adalah fase memicu kejadian (konfik kognitif), eksplorasi (menggali atau menemukan), menarik kesimpulan, klarifikasi dan resolusi.

Konfik kognitif, merupakan awal dari siswa menerapkan kemampuan berfikirnya untuk memahami dan menyelesaikan permasalahan yang dihadapkan kepadanya. Oleh sebab itu, permasalahan yang diajukan guru harus mampu membangkitkan keinginan atau motivasi siswa untuk menyelesaikannya. Hal penting yang menjadi perhatian guru dalam pemilihan masalah ini adalah upayakan permasalahan tersebut dikenal baik oleh siswa atau menyentuh masalah-masalah rell yang dihadapi siswa dan pastikan siswa telah memiliki kemampuan dasar untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Eksplorasi, memberikan kesempatan kepada siswa untuk memahami, menggali, dan menemukan penyelesaikan masalah yang dihadapkan. Guru memberikan fasilitas yang optimal kepada siswa dalam upaya mereka melakukan eksplorasi, sehingga mereka merasakan makna dari belajar membangun pengetahuan. ***Menarik kesimpulan,*** merupakan inti dari suatu kegiatan eksplorasi. Dorong siswa dalam hal ini dengan memberikan fasilitas yang optimal dan kembangkan keterampilan personal mereka agar berani untuk mengungkapkan apa yang mereka peroleh dengan mengedepankan sikap bahwa kesalahan adalah sebuah pembelajaran menuju hal yang benar.

Klarifikasi dan resolusi, memastikan kebenaran apa yang disimpulkan siswa adalah hal yang sangat penting. Hal ini dimaksudkan agar siswa tidak belajar dari kesimpulan yang salah dan menggunakan hal tersebut untuk menyelesaikan masalah lain yang terkait. Oleh sebab itu, sebelum siswa menggunakan hal yang mereka simpulkan lebih jauh, guru senantiasa mengklarifikasinya agar tidak menimbulkan dampak negative bagi siswa dalam belajar matematika.

Dalam uraian sebelumnya sudah disinggung bahwa siswa akan menggunakan kemampuan berfikirnya secara optimal jika mereka memberikan respon yang optimal terhadap masalah yang diajukan. Sehubungan dengan itu, ada empat hal yang perlu dipertimbangkan agar siswa memberikan respon yang optimal, diantaranya adalah:

1. ***Pengalaman siswa.***

Dalam keseharian siswa hidup dilingkungannya, banyak pengalaman mereka yang menarik. Fakta pengalaman ini sangat baik dalam memotivasi siswa untuk mempelari materi bahan ajar yang disajikan guru. Kita yakin bahwa siswa tidak akan pernah berfikir kritis dan kreatif jika masalah yang dihadapkan tidak direspon dengan baik. Sebagai contoh, kepada anak yang tidak memiliki pengetahuan atau tidak pernah melihat kereta api, ditanya "***Apa yang terjadi jika rel kereta api lepas?***". Mudah untuk ditebak, sebagian besar siswa akan diam dan tidak akan berfikir tentang itu. Oleh sebab itu, maka dalam mengembangkan kemampuan berfikir kritis siswa, guru harus mampu merancang topic atau bahan pembicaraan yang sesuai dengan pengalaman siswa. Pengalaman dalam hal ini dapat berarti pengetahuan yang dimiliki atau konteks nyata yang pernah dialami. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut:

Contoh-1.

Topik : Penjumlah suku dua dalam aljabar SMP Kelas II

G : 2 Mangga + 2 Mangga = ……..
S : 4 Mangga
G : 3 Pensil + 2 Pensil = ……..
S : 5 Pensil
G : 3 @ + 2 @ = ……..
S : 5 @
G : 2 x + 4 x = ….
S : 6 x
G : Mengapa ?
S : ???????

Konteks seperti ini dapat memberikan inspirasi bagi siswa dalam menemukan solusi yang didahului dengan sebuah analisis dan identifikasi kemudian mencari persamaan atau perbedaan, fakta yang relevan atau yang tidak relevan kemudian membuat generalisasi atas induksi yang dilihatnya serta berakhir pada membuat keputusan sebagai jawaban pertanyaan tersebut.

Disamping itu, siswa akan tertarik atau terdorong untuk mencari alternatif solusi lain dengan mengorganisasikan pengetahuannya. Jika kita cermati dengan baik, dengan permasalahan yang sesederhana ini, guru dapat mengembangkan keterampilan berfikir matematika siswa yang sebenarnya. Hal ini menunjukkan bahwa mengembangkan keterampilan berfikir matematika siswa bukanlah hal yang susah bagi seorang. Fakta ini sedikit memberikan asumsi kepada kita bahwa kurangnya perhatian guru berkaitan dengan hal ini merupakan salah satu factor penyebab kemampuan berfikir kritis siswa lemah.

2. ***Waktu***.

Berfikir kritis adalah salah satu dari jenis berfikir tingkat tinggi, yang ditandai dengan pengorganisasi sejumlah kemampuan-kemampuan yang kompleks. Sehubungan dengan itu, dalam prosesnya berfikir kritis membutuhkan kosentrasi yang cukup tinggi. Oleh sebab itu, jika sebelumnya siswa telah terkosentarsi dalam banyak hal maka untuk mengembangkan kemampuan berfikir kritis cukup sulit untuk dilakukan. Sehubungan dengan hal ini, jika guru ingin melatih siswa untuk berfikir matematika siswa sebaiknya dilakukan pada awal-awal pembelajaran dimana siswa belum banyak menggunakan proses berfikirnya. Walaupun demikian bukan tertutup kemungkinan guru untuk mengembangkan kemampuan berfikir matematika siswa diakhir-akhir pembelajaran, namun porsinya perlu dipertimbangkan.

3. Berikan Penguatan Selama Mereka Berkerja.

Pemberian penguatan diyakin merupakan pendorong bagi siswa agar tetap eksis dalam bekerja. Pemberian penguatan selama siswa mengembangkan kemampaun berfikir kritisnya akan memberikan kekuatan bagi mereka untuk mau dan tetap bekerja. Berikanlah pengahargan yang mendorong, bagi setiap respon yang diberikan siswa agar mereka berani dan tetap bersemangat melakukan espolarasi sebagai upaya mengembangkan kemampuan berfikir kritisnya.

Telah dikemukakan bahwa situasi pemecahan masalah merupakan tantangan dan saat kritis bagi siswa dalam upaya mencari solusi. Polya menyarankan heuristic, dimana pada heuristic yang terakhir, *looking back* (Polya 1975) hanya menguji jawab dan menggunakan hasil yang diperoleh untuk menyelesaikan soal lain. Dalam upaya mencari solusi, siswa sudah harus berpikir kritis dan kreatif. Namun, jika mereka berhenti ketika jawaban ditemukan, maka mereka kehilangan saat yang berharga dalam proses belajar yang sedang mereka jalani. Dengan kerja keras mereka membangun rancangan serta memilih beragam strategi untuk menyelesaikan soal. Oleh karena pada saat menyelesaikan soal itu mereka sedang termotivasi kemudian senang dengan hasil yang dicapai, maka rasa senang dan termotivasi ini harus tetap dipertahankan, dengan memberikan tugas baru kepada siswa, yaitu : "***Menyelesaikan soal itu dengan cara yang lain", "Mengajukan pertanyaan ... bagaimana jika", "Apa yang salah", dan "Apa yang akan kamu lakukan***"(Krulik dan Rudnick , 1999).

1. Menyelesaikan masalah dengan **cara yang lain**, sesungguhnya dimungkinkan, karena guru dengan sengaja atau tidak sengaja sudah memilih soal yang penyelesaiannya dapat diperoleh dengan berbagai cara (strategi), ataupun beragam jawaban. Selain itu, hal ini amat direkomendasikan, dikarenakan konsep-konsep di dalam matematika saling terkait, dan kemampuan koneksi matematika siswa juga perlu diberi kesempatan untuk dikembangkan. Hal ini mencerminkan kekayaan matematika, dan diharapkan menimbulkan kekaguman atau apresiasi siswa (disposisi) terhadap matematika. Tuntutan bagi siswa untuk menyelesaikan soal itu dengan cara lain, sesungguhnya menuntut dan melatih siswa untuk berpikir kreatif serta memberdayakan pengetahuan serta pengalaman yang ada pada mereka.

2. Mengajukan pertanyaan "**...bagaimana jika"** sesungguhnya memberi peluang untuk siswa kreatif dalam menciptakan soal-soal baru dengan mengacu pada soal yang tadi diselesaikannya. Misalnya, informasi pada soal semula diganti, ditambah atau dikurangi. Soal ini juga dapat merupakan tantangan baru bagi siswa dan mereka harus menganalisisnya. Disini mereka selain kreatif, mereka juga akan kritis, untuk memastikan apakah informasi yang dikurangi atau ditambahkan itu dapat mempengaruhi terdapat tidaknya solusi, atau malahan akan memunculkan soal-soal yang benar-benar baru atau bersifat tidak rutin.

3. **"Apa yang salah"** merupakan pertanyaan yang memberi peluang untuk siswa menggunakan kemampuan berpikir kritis, misalnya menemukan kesalahan, ketika kepada mereka disajikan suatu situasi konflik, ataupun solusi yang mengandung kesalahan apakah secara konsep atau perhitungan. Tugas siswa

adalah untuk menemukan kesalahan itu serta memperbaikinya, dan kemudian menjelaskan apa yang salah , mengapa salah.

4. **"Apa yang akan kamu lakukan"** termasuk suatu pertanyaan yang menstimulasi berpikir kreatif. Karena disini aspek tantangannya kuat sekali. Siswa diminta untuk membuat suatu keputusan, yang didasarkan pada ide individu ataupun pada pengalaman individu. Siswa harus menganalisis situasi kemudian membuat keputusan. Siswa dapat diminta untuk, dalam satu alinea mengungkapkan secara tertulis apa yang dipikirkannya.

Contoh: 1.
Andi dan Lian diberikan tugas dari guru untuk membaca buku. Andi membaca 16 halaman dalam satu jam, dan Lian dapat membaca 12 halaman dalam satu jam. Jika mereka membaca ta berhenti, dan A ndi mulai membaca pada jam 13.00, sedangkan Lian mulai jam 12.00, pada jam berapa mereka sama sama menghabiskan halaman bacaan yang sama banyaknya.

Jawab:

Jam	Halaman	
	Andi	Lian
12.00 – 13.00	0	12
13 .00 – 14.00	16	24
14 .00 – 15.00	32	36
15 .00 – 16.00	48	48

Dengan memperhatikan table ini, jelaslah mereka akan sama-sama membaca jumlah halaman yang sama pada pukul 16.00.

A. Cara lain:
Situasi pada soal ini dapat disajikan dengan cara lain. Misalnya dengan menyusun tabel yang memuat informasi yang tersedia pada soal, sbb:

	H a l a m a n					
Andi		0	16	32	48	64
Lian	0	12	24	36	48	60
Jam	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***

Dari table ini ternyata bahwa pada jam 16.00 Andi dan Lian telah membaca jumlah halaman yang sama .

Cara lain:

Soal ini dapat diungkapkan dalam bentuk pertanyaan lain, misalnya:
Setelah berapa jam membaca, Andi akan menghabiskan jumlah halaman yang sama dengan yang dibaca oleh Lian?.

Misalkan setelah ***x*** jam, Andi membaca sejumlah halaman yang sama dengan yang dibaca Lian. Tetapi Lian akan membaca selama *(x+1)* jam. Dalam 1 jam Andi membaca 16 halaman, dan Lian 12 halaman.
Dengan demikian, terjadi hubungan berikut:

$x \cdot 16 = (x + 1) \cdot 12$
$16x = 12x + 12$
$4x = 12$
$x = 3.$

Jadi mereka menghabiskan halaman yang sama banyak setelah Andi membaca 3 jam, dan Lian membaca 4 jam. Hal itu terjadi pada pukul 16.00.

Catatan: Tentu dalam penyelesaian soal ini, orang yang memahami konsep Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dapat saja menggunakan konsep tersebut untuk menjawab soal ini. KPK dari 12 dan 16 adalah 48. Jadi Andi akan memerlukan 3 jam dan Lian memerlukan 4 jam. Sehingga 48 halaman akan selesai dibaca oleh mereka pada jam 16.00, yaitu 4 jam sesudah Lian mulai membaca pada jam 12.00, yaitu pada jam 16.00 Atau 3 jam setelah Andi membaca yaitu 3 jam setelah jam 13.00, adalah jam 16.00.

B. Bagaimana jika ....

Contoh 2.
Dari soal pada contoh 1 tadi, situasi ini dapat diubah, dengan mengajukan pertanyaan "bagaimana jika...?", misalnya:

i. Bagaimana jika mereka mulai membaca pada saat yang sama, akankah mereka menyelesaikan sejumlah halaman yang sama pada jam tertentu?
ii. Jika mereka membaca seterusnya, dapatkah mereka menyelesaikan jumlah halaman yang sama pada kali kedua, atau ketiga?

C. Apa yang salah

Contoh 3
Pada suatu saat ada siswa yang menunjukkan hubungan-hubungan berikut kepada guru:

1. 16/64 = ¼, dengan cara menghapuskan saja 4
2. 19/95 = 1/5, dengan cara menghapuskan 9

3. 26/65 = 2/5, dengan cara menghapuskan 6, atau
4. 49/98 = 4/8 = ½ dengan cara menghapuskan 9.

Dengan caranya, atau algoritmanya sendiri ia akan mengklaim bahwa 12/23 = 1/3 adalah benar. Jelaskan apa yang salah dengan alasannya, dan mengapa salah, apa yang harus dilakukan untuk mengoreksi kesalahan itu.

Jawab siswa 1.

Memperoleh jawaban ¼ sebagai bentuk sederhana dari 16/64 dengan cara menghapuskan (mengeliminasi) 6 pada pembilang dan penyebut sesungguhnya adalah suatu kesalahan konsep. Sebab 16 tidak sama dengan 1.6 (baca satu kali enam). Pada 16 dan 64, 6 bukanlah faktor. Soal ini dapat diselesaikan dengan benar, jika 16/64 ditulis sebagai 1.(16)/ 4.(16) . Bentuk ini disederhanakan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan 16, sehingga diperoleh ¼.

Jawab siswa 2.

16/64 = 2.8/2.32 = 8/32 = 4/16 = ¼. Jadi, untuk mengoreksi akan kesalahan yang dibuat , maka proses penyederhanaan suatu pecahan harus dilakukan dengan membagi pembilang dan penyebut dari pecahan itu dengan bilangan yang sama, dan tidak sama dengan nol, sampai diperoleh suatu pecahan yang tidak bisa disederhanakan lagi.

Akan lebih baik, jika setelah siswa menjawab 16/64 = ¼ dengan cara mengeliminasi 6 pada pembilang dan penyebut, hendaknya ia tidak berhenti sampai di situ saja. Seandainya siswa telah mengetahui tentang perananan pertanyaan “bagaimana jika?”, maka setelah 16/64 = ¼ ia dapat memperhatikan bentuk: 61/64. Jika ia konsisten dengan caranya tadi, maka ia akan mendapatkan bahwa 61/64 = ¼. Diharapkan hasil ini akan menarik perhatiannya, sehingga sudah cukup membuatnya untuk mulai waspada. Selanjutnya, ia dapat “digiring” untuk menuliskan suatu hubungan dari apa yang ia hasilkan, yaitu :

16/64 = 61/64 = ¼.

Timbul konflik baru, yaitu 16/64 = 61/64. Penyebut-penyebut dari kedua pecahan ini sama, tetapi pembilang-pembilangnya berbeda, lalu mengapa hasilnya (kedua pecahan itu) bisa sama? Langkah ini membuat siswa memperoleh kesempatan untuk berpikir kritis, karena ia mulai menggunakan penalarannya, sehingga pemahamannya mengenai cara menyederhanakan pecahan menjadi lebih jelas. Perhatikan bahwa, keputusan untuk memperhatikan 61/64 dapat dipandang sebagai suatu pemikiran yang kreatif dalam menguji kebenaran jawaban yang

ditemukan dalam penyelesaian suatu soal. Dalam hal ini, proses belajar tidak terhenti hanya karena telah ditemukan suatu jawab.

Contoh 3.2.
Perhatikanlah uraian berikut ini, kemudian tentukanlah pada langkah mana terletak kesalahan. Jelaskan mengapa hal itu salah.

Jika diketahui $a = b$
Maka:

$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a + b)(a - b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$
$$a + a = b$$
$$2a = b$$
$$2a = a$$
$$2 = 1$$

Siswa mulai menyadari adanya suatu konflik, atau suatu yang janggal ketika ia mengamati lima baris terakhir. Tentu, ada kesalahan pada baris-baris sebelumnya. Dengan adanya tanda garis (coretan) pada baris ke 6 dari bawah, ia dapat menebak kemungkinan dimana awal terjadinya kesalahan tersebut. Sebab baris-baris sebelumnya tidak memuat kesalahan apapun. Ia juga dapat mengobservasi adanya ketidak konsistenan antara baris pertama dan baris ketiga dari akhir, yaitu a = b, dan 2a = b), demikian juga baris pertama dengan baris ke empat dan kelima dari akhir. Terlihat bahwa a = b, tetapi a + b = b. Ini artinya a = 0, dan kalau a = 0, maka b = 0, karena a = b. Jika ia jeli maka ia dapat melihat bahwa baris ketiga sesungguhnya merupakan suatu bentuk 0 = 0.

D. Apa yang akan kamu lakukan

Ini merupakan suatu langkah perluasan dari aktifitas belajar pasca ditemukannya penyelesaian suatu soal. Pertanyaan ini dirancang untuk merangsang berpikir kreatif sekaligus kritis. Siswa diminta untuk membuat suatu pilihan yang didasarkan pada pikiran serta pengalamannya. Siswa harus memberi kejelasan konsep atau sifat

matematika apakah yang ia gunakan dalam membuat keputusan sehubungan dengan soal yang dihadapi.

Contoh 4.
Di suatu toko dilaksanakan suatu obral. Aturan yang berlaku adalah ada pemotongan harga 10 % dan dilanjutkan dengan dikenakan pajak pembelian sebesar 15% terhadap tiap barang yang dijual. Ani membeli suatu kalkulator yang dijual seharga Rp. 200.000,00 Jika ia mendapat potongan harga 10 % dan membayar pajak pembelian, berapa dana yang Ani harus keluarkan untuk membeli kalkulator itu?

Jawab Siswa.
Potongan 10% berarti Rp 200.000,00 – 10% x Rp.200.000,0 =
Rp. 200.000,00 - Rp. 20.000,00 = Rp. 180.000,00. Selanjutnya ia harus membayar pajak 15%, jadi yang harus dibayar adalah Rp.180.000,00 + 15%xR.180.000,00 = Rp. 180.000,00 + Rp.27.000,00 = Rp. 207.000,00.

Jika selanjutnya, disampaikan kepada calon pembeli bahwa pada saat mereka membeli suatu barang, mereka akan membayar barang sekaligus pajaknya 15%, selanjutnya dikenakan potongan 10 % terhadap harga pembelian.

Kemudian siswa diminta untuk membuat pilihan dari dua alternatif penjualan ini, apakah jika ia sebagai pembeli akankah memilih cara pertama tadi atau cara pembelian kedua.

Alternatif penjualan kedua ini menyajikan suatu tantangan pada siswa untuk berpikir secara kreatif atau pun kritis untuk menjamin ia dalam membuat keputusan yang benar tanpa ragu. Dalam hal ini siswa diminta untuk mengungkapkan pilihan mereka yang didasarkan pada perhitungan matematika, serta sifat matematika apa yang menjadi andalan mereka untuk membuat keputusan. Keputusan ini diharapkan dibuat berdasarkan uraian terhadap masalah ini secara tertulis.

E. Kesimpulan

Pengembangan kemampuan atau keterampilan berpikir matematika (berfikir kritis dan kreatif) siswa pada dasarnya dapat dikembangkan dengan mudah melalui pembelajaran dengan melakukan pembiasaan memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengembangkan kemampuan berfikirnya. Kemudian menciptakan suasana

pembelajaran yang dapat memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengembangkan kemampuan berpikirnya bukanlah hal yang sulit, namun perlu perencanaan yang baik dari seorang guru agar dapat optimal.

Dalam parkteknya, guru sebenarnya sudah memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengembangkan kemampuan berpikirnya namun belum dilakukan secara rutin atau ditangani dengan baik sehingga belum optimal. Guru perlu menaruh perhatian yang serius terhadap hal ini, karena dengan hanya mementingkan hasil tanpa membekali kemampuan berfikir matematika yang sebenarnya belajar hanya sampai pada ingatan saja sehingga kurang mampu dalam penyelesaian masalah.

DAFTAR BACAAN

Bullen, M. (1997). *A Case Study of Participation and Critical Thinking in a University Level Course Delivered by Computer Conferencing.* Tersedia: http://www2.cstudies.ubc.ca/~bullen/Diss/thesis.doc

Desmita, 2002. *Meningkatkan kemampuan berfikir Kritis dan Hasil Belajar IPA SMPN-6 Bandung Melalui Pembelajaran Generatif*. Tesis, UPI Bandung, Tidak diTerbitkan.

Norris, S.P. & Ennis, R. (1989). *Evaluating Critical Thinking* (dalam R. J. Schwartz & D. N. Perkins (Eds), The Practitioners' Guide to Teaching Thinking Series. Pacific Grove, California: Midwest Publications.

Sumarmo, U, (2005). *Pengembangan Berfikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP dan SMU serta Mahasiswa Strata Satu (S1) Melalui Berbagai Pendekatan Pembelajaran*. Laporan Penelitian Hibah Pascasarjana Tahun Ketiga. UPI Bandung.

Sabandar, J. (2005). *Pertanyaan Tantangan dalan Memunculkan Berpikir Kritis dan Kreatif dalam Pembelajaran Matematika*. Makalah Disajikan dalam Seminar Nasional FMIPA UPI, Oktober 2005.

Sabandar, J. (2008). *Berpikir Replektif dalam Matematika*. Makalah Disajikan dalam Kuliah Umum Pendidikan Matematika FKIP UNRI, November 2005.

Pembelajaran Matematika dengan Melibatkan Manajemen Otak

(Suatu Alternatif Pembalajaran Interaktif) [1]

Oleh : Somakim[2]

Abstrak

Tulisan ini bertujuan mengembangkan pembelajaran interaktif dalam pelajaran matematika melalui manajemen otak. Pembelajaran dengan melibatkan Manajemen Otak (*Brain Management*) merupakan kegiatan pembelajaran yang memperhatikan keaktifan otak kiri dan otak kanan. Agar pembelajaran matematika dapat melibatkan manajemen otak, maka dalam pembelajaran matematika dapat dilakukan antara melalui: menggunakan warna, alat peraga, imajinasi, pendekatan Pembelajaran Matematika Realistik, Komputer, dan Mind Map.

Kata Kunci : Pembelajaran Matematika, Manajemen Otak, Interaktif

A. Pendahuluan

Pelajaran matematika sampai saat ini masih dirasakan sebagian besar siswa adalah pelajaran yang sulit dan membosankan. Hal ini dipicu oleh bentuk pembelajaran matematika yang tidak interaktif. Pembelajaran hanya didominasi oleh kegiatan menghitung, bernalar, analisis. Bentuk kegiatan pembelajaran ini cenderung hanya mengaktif peran otak kiri. Ini berarti kemampuan otak belum dioptimal karena fungsi otak kanan belum sepenuhnya ikut aktif. Pada hal kemampuan otak kiri hanya mengingat atau menyimpang memori yang sifatnya jangka pendek sedangkan otak kanan mempunyai memori daya ingat jangka panjang. Oleh karena itu, apabila hanya otak kiri yang dominan maka ada kemungkinan anak didik dalam menyerap pelajarannya mudah lupa. Karena lupa, tentu menyebabkan siswa sulit menjawab soal-soal ujian.

Manusia mempunyai kemampuan otak yang luar biasa. Ini dapat dilihat bahwa manusia mempunyai otak dengan kapasitas satu triliun sel otak. Menurut penelitian, rata-rata manusia mempergunakan kurang dari 1% kemampuan otaknya (Windura, 2008). Apa jadinya kalau manusia bisa mempergunakan 10% kemampuan otaknya? Kecenderungan menggunakan otak kiri dapat dilihat fenomena yang paling sering

[1] **Makalah Dipresentasikan pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika di UNY tanggal 28 Nopember 2008**

[2] **Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sriwijaya**

terjadi dalam belajar adalah mementingkan apa yang dipelajari (*what to learn*), bukan bukan bagaimana cara belajarnya (*how to learn*).

Pelajaran matematika sampai saat ini masih menjadi momok dan kurang disenangi oleh siswa. Hal ini disebabkan dalam pelajaran matematika yang didominasi pada penalaran, analisis, perhitungan yang lebih terkait dangan otak kiri. Agar membelajaran dapat mengfungsi otak kiri dan kanan siswa, maka diperlukan suatu proses pembelajaran yang interaktif. Melalui pembelajaran yang interaktif diharapkan guru dapat mengkondisikan berfungsinya kedua belahan otak atau lebih dikenal dengan manajemen otak (*Brain Management*) siswa. Pembelajaran matematika dengan melibatkan manajemen otak sangat diperlukan dalam pelajaran matematika. Melalui manajemen otak diharapkan pelajaran matematika menjadi menyenangkan bagi siswa. Hal dimungkinkan, karena dengan melibat otak kanan, berarti dalam pelajaran matematika, guru akan menggunakan gambar, warna, dan imajinasi siswa.

Belajar dengan melibatkan kedua belahan otak lebih disenang anak, hal ini dapat ditunjukan bahwa anak lebih senang membaca komik, nonton film kartun atau main game dibanding dengan belajar. Anak memilih baca komik, nonton film kartun atau main game karena di dalam ketiga kegiatan tersebut melibatkan kedua belahan otak. Dalam baca komik, kegiatan membaca berarti otak kiri, sedangkan gambar dan imajinasi dalam komik berarti otak kanan, begitu juga dalam nonton film kartun dan main game.

Tulisan ini akan mengkaji bagaimana pelajaran matematika di sekolah dapat melibatkan manajemen otak. Pembelajaran dengan melibatkan manajemen otak anak diharapkan akan menjadi pembelajaran interaktif. Dengan pembelajaran matematika yang interaktif, anak diharapkan menyenangi pelajaran matematika.

Pembelajaran Interaktif merupakan kegiatan guru menciptakan situasi agar siswa belajar. Bagaimanapun baiknya guru mengajar, apabila tidak terjadi proses belajar pada siswa, maka hasil belajar tidak optimal. Meskipun metode yang digunakan sederhana, tetapi bila mendorong para siswa banyak belajar, maka pengajaran tersebut dianggap berhasil (efektif) (Sukahdiyah, 2008). Pembelajaran interaktif sangat diharapkan dapat dikembangkan oleh guru matematika. Hal ini disebabkan proses pembelajaran interaktif

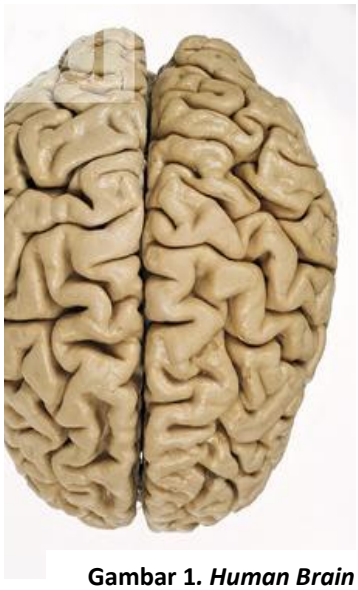
ini didukung oleh beberapa dasar hukum, yaitu (1) UU RI nomor 20 tahu 2003 Bab I ,pasal 1 ayat 20. Pembelajaran adalah ***proses interaksi*** peserta didik dengan pendidik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar**; (2)** PP RI NO 19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan,Bab IV Pasal 19 ayat (1). Proses Pembelajaran pada satuan pendidikan diselenggarakan secara ***interaktif,*** inspiratif, menyenangkan, menantang, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreatifitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik.

B. Manajemen Otak (*Brain Management*)

Brain management atau Manajemen Otak adalah kegiatan memahami dan meningkatkan kemampuan otak untuk selalu dapat meng-*upgrade* potensi dan kapasitas setiap saat (Windura, 2008). Dengan kata lain yang lebih sederhana, manajemen otak adalah upaya kita meningkatkan Hardware atau otak kita, bukan pada soflware atau ilmu-ilmu semata.

Otak kita secara mental terbagi atas dua belahan atau hemisfer, yaitu hemisfer kiri dan hemisfer kanan. Masing-masing hemisfer ini mempunyai fungsi yang berbeda dan sifat yang bertolak belakang. Berikut perbedaan karakteristik kedua belahan otak tersebut.

Otak Kiri		**Otak Kanan**
Bahasa		Kreativitas
Angka		Konseptual
Analisis		Seni/Musik
Logika		Gambar/Warna
Urutan		Dimensi
Hitungan		Emosi
Detial		Imajinasi
⇩		Melamun
INGATAN JANGKA PENDEK		⇩ **INGATAN JANGKA**



Gambar 1. ***Human Brain***

Hal-hal yang berhubungan dengan aktivitas berbahasa, seperti menulis, membaca, berbicara, dan mendengarkan dilakukan dengan menggunakan otak kiri. Saat kita menghitung, seperti menggunakan logika untuk memecahkan masalah, kita juga menggunakan otak kiri. Sifat memori otak kiri adalah jangka pendek.

Sebaliknya, saat menyusun balok-balok *lego,* kita menggunakan otak kanan. Saat kita diminta menceritakan kembali isi suatu buku dalam waktu beberapa menit, berarti daya konseptual kita sedang bekerja, ini berarti kita sedang menggunakan otak kanan. Begitu juga saat kita menikmati pemandangan alam, lukisan dan musik. Sifat memori otak kanan adalah jangka panjang. Hal ini dapat ditunjukkan, kita lebih mudah mengingat wajah orang yang pernah bertemu dengan kita dari pada mengingat namanya karena adalah tulisan (bahasa), berarti dalam hal ini otak kiri yang terlibat. Sedangkan wajah orang adalah 'gambar' yang dimengerti oleh otak kanan, begitu pula pengalaman masa lalu, yang banyak melibatkan banyak emosi.

Mengapa belajar bukan hal yang menyenangkan bagi anak? Hal ini disebabkan dominannya otak kiri yang dihadapi anak dalam setiap kegiatan yang berhubungan dengan belajar. Untuk itu dapat dilihat analisis yang terjadi dari kegiatan belajar anak berikut ini.

Tabel 1. Keadaan Belajar Anak

No.	Keadaan	Ya	Tidak
1.	Ukuran buku tulis untuk mencatat sama (hampir sama)	√	
2.	Ukuran buku cetak pelajaran sama (hampir sama)	√	
3.	Isi buku catatan anak sekilas sama saja walaupun untuk subjek pelajaran yang berbeda-beda	√	
4.	Fomat tulisan-tulisan pada buku cetak pelajaran sekilas sama saja walaupun untuk subjek pelajaran yang berbeda-beda	√	
5.	Warna tulisan pada buku catatan hanya satu warna saja	√	
6.	Warna tulisan pada buku cetak hanya satu warna saja	√	
7.	Buku catatan menggunakan buku tulis bergaris-garis lurus	√	
8.	Garis-garis lurus pada buku tulis yang dipakai mencatat sama jaraknya	√	
9.	Jarak spasi antara tulisan di buku cetak pelajaran sama	√	
10.	Tidak ada atau tidak banyak gambar pada buku catatan anak	√	
11.	Anak selalu menulis dari kiri ke kanan	√	

(Windura, 2008:12)

Dari tabel 1 dapat dilihat bahwa semuanya adalah aktivitas otak kiri saja. Oleh karena itu, belajar jadi membosankan. Agar belajar menyenangkan kalau kegiatan pembelajaran melibatkan kedua belahan otak, yaitu otak kiri dan otak kanan.

Aktivasi Fungsi Otak

Dalam keadaan tertentu, kita kadang-kadang ingin mengaktifkan beberapa fungsi otak secara khusus. Contohnya saat mengerjakan soal-soal matematika, tentunya kita harus konsentrasi dalam mengerjakannya. Untuk itu kita mengaktifkan fungsi otak kiri, karena dalam mengerjakan soal matematika berkaitan dengan menghitung, analisis, dan penalaran. Contoh lain misalnya saat kita sedang menikmati konser musik atau opera. Karena berkaitan dengan seni, fungsi tubuh yang paling berperan adalah yang terletak di belahan otak kanan.

Berikut ini ada bebera cara praktis untuk mengaktif salah satu belahan otak kita. Otak kiri dapat kita aktifkan dengan berbagai cara, antara lain:

- **Mencubit punggung tangan kanan.** Mencubit punggung tangan memang paling mudah dilakukan. Saraf motorik dan sensorik bagiana tubuh sebelah kanan diatur oleh otak kiri. Jadi saat mencubit tangan kanan otak kiri akan mendapat rangsangan dan seluruh fungsi otak kiri akan aktif.
- **Lakukan perhitungan ringan.** Seperti membilang 10 bilangan prima pertama, 10 bilangan kuadrat pertama, atau membilang mundur dari 20 ke 0. Lebih baik tidak hanya membayangkan saja, tapi juga dituliskan di kertas. Karena kegiatan menulis adalah kegiatan otak kiri (bahasa), sedangkan membayangkan adalah otak kanan.

Selanjutnya otak kanan dapat kita aktifkan dengan berbagai cara, antara lain:

- Mencubit punggung tangan kiri.
- Mendengarkan musik kesukaan
- Menggambar apa saja
- Bangkitkanlah emosi secara positif, misalnya dengan mengingat-ingat hal menyenangkan dalam hidup.

- Melamunlah. Melamun adalah salah satu kegiatan otak kanan yang manfaatnya sangat dahsat.

C. Pembelajaran Matematika dengan Melibatkan Manajemen Otak

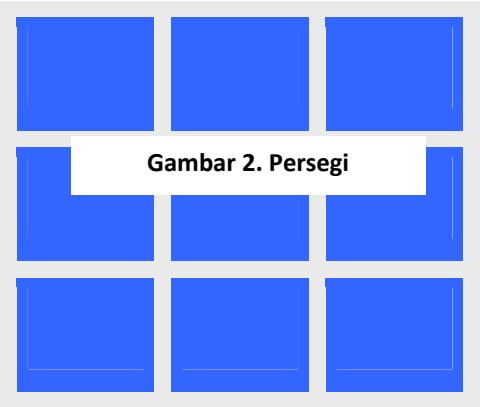
Pelajaran matematika pada umumnya melibatkan angka, operasi hitung, penalaran logis, dan analisis yang kesemuanya itu kecenderungan hanya mengfungsi otak kiri. Pelajaran yang monoton lebih menggunakan otak kiri saja tentu berakibat pada rasa kebosanan pada pelajaran matematika. Rasa bosan dan tidak menyukai pelajaran matematika berakibat pada hasil belajar peserta didik menjadi rendah. Hal ini berkaitan bahwa otak kiri mempunyai daya ingat jangka pendek. Karena daya ingat jangka pendek ini menyebabkan siswa mudahkan lupa, sehingga sewaktu ujian/ulangan yang diberikan guru akan sulit mengerjakan soal yang diberikannya. Untuk itu perlu diciptakan suatu bentuk pembelajaran matematika interaktif yang dapat melibatkan fungsi otak kiri dan otak kanan. Berikut ada beberapa alternatif yang dapat digunakan dan dikembangkan oleh guru matematika dalam pembelajaran matematika yang melibatkan otak kiri dan otak kanan atau dikenal dengan manajemen otak (*Brain Manejement*).

1. **Gunakan warna.** Warna-warni merupakan aktif otak kanan. Oleh karena itu, guru matematika dalam pembelajarannya dapat menggunakan kapur/spidol warna-warni untuk menjelaskan bagian-bagian yang penting. Apalagi dapam dalam menggambar bentuk-bentuk geometri baik bidang maupun ruang. Dengan menggunakan warna, berarti otak kiri akan aktif, yaitu berkaitan dengan materi matematikanya, sedangkan otak kanan akan aktif, tak kalah melihat gambar-gambar yang berwarna. Pada buku catatan atau cetak siswa juga diberikan kesempatan untuk memberikan warna denga stabilo pada bagian yang menurutnya penting.
2. **Gunakan alat peraga.** Pelajaran matematika agar mudah dipahami dapat menggunakan alat peraga terutama pada tingkat pendidikan dasar. Dengan menggunakan alat peraga siswa dapat melakukan visualisasi dan lebih memahami materi matematika, terutama pada topik geometri. Alat peraga yang digunakan sebaniknya yang dapat dimanipulasi oleh siswa, sehingga secara fisik dan mental

siswa terlibat dalam belajar. Dengan alat peraga ini, berarti kedua belahan otak anak akan aktif dan pelajaran matematika tidak membosankan, tetapi menyenangkan.

3. **Imajinasi.** Kemampuan imajinasi atau khayal sebaik dapat dibangkaikan saat belajar matematika. Imajinasi akan mengaktifkan otak kanan. Misalnya, saat guru menerangkan tentang lingkaran, siswa diminta membayangkan lingkaran tersebut. Proses membayangkan lingkaran dapat diikuti dengan menggambar lingkaran dengan jari tangan. Begitu juga, apabila menbahas soal-soal cerita/ memecahan masalah, siswa dibawa untuk membayangkan kondisi yang sebenarnya. Berikanlah contoh-contoh soal yang nonrutin, misalkan soal geometri berikut:

   Berapa banyak Persegi bangun di bawah ini?



Gambar 2. Persegi

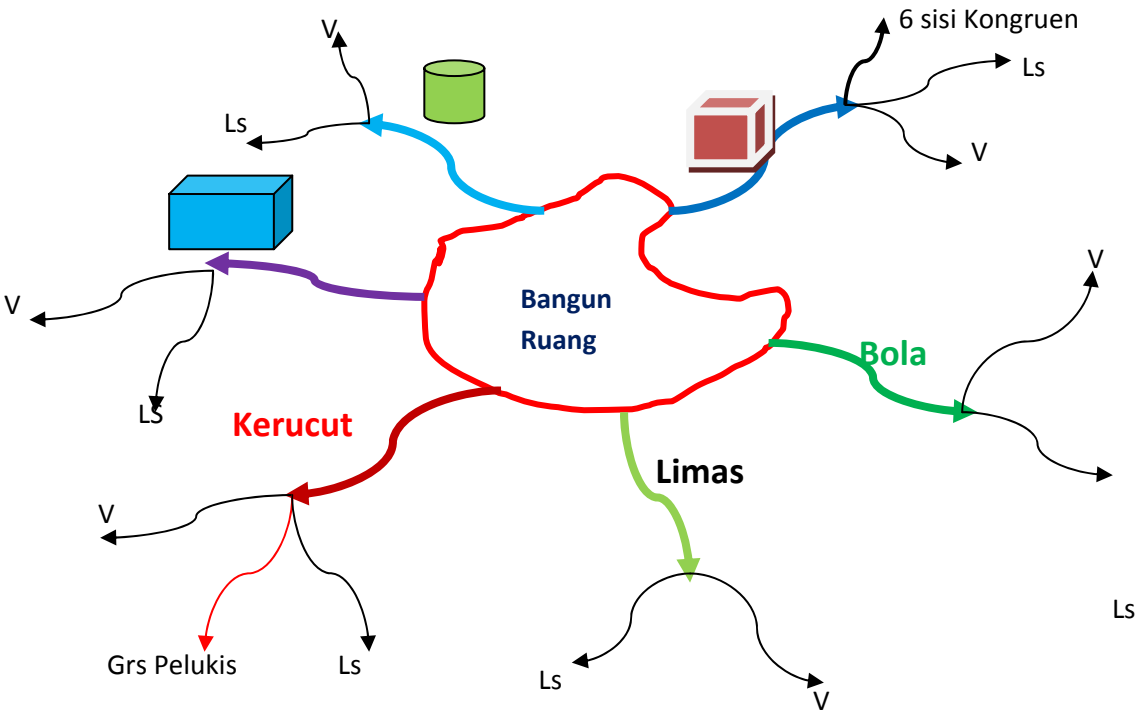
Proses menjawab soal ini, siswa akan melibat otak kiri, yaitu saat mengingat definisi persegi dan proses menghitung banyak persegi, sedang saat melihat gambar dan berbagai bentuk persegi melibatkan otak kanan.

4. **Memberikan kesempatan anak untuk pengeluarkan pendapat.** Apabila anak dapat mengemukakan pendapatnya, ini berarti anak telah mampu memahami konsep. Mengemukakan secara konseptual merupakan aktifnya otak kanan, sedang proses diskusi dan membaca adalah aktifnya otak kiri. Jadi, dalam pembelajaran tersebut telah melibatkan otak kiri dan otak kanan. Untuk dapat mengembangkan pembelajaran matematika yang memungkinkan anak dapat mengemukakan pendapatnya diperlukan pendekatan pembelajaran tertentu. Salah satu pendekatan pembelajaran yang dapat digunakan oleh guru adalah pendekatan pembelajaran matematika realistik (*Realistic Mathematics Education*). Hal ini dikarenakan pendekatan Pembelajaran Matematika Realistik

(PMR) mempunyai prinsif dan karakteristik yang mengharuskan siswa terlibat dalam proses penemuan konsep. Adapun prinsif dan karakteristik PMR menurut Gravemeijer (1994), yaitu sebagai berikut: prinsif PMR (a) *Guided Reinvention and Progressive Mathematization* (Penemuan terbimbing dan Bermatematika secara Progressif, (b) *Didactical Phenomenology* (Penomena Pembelajaran); (c) *Self-developed Models* (Pengembangan Model Mandiri), dan karateristik PMR adalah: (a) menggunakan masalah kontekstual; (b) menggunakan model; (c) menggunakan kontribusi dan produksi siswa; (d) interaktif; (e) keterkaitan.

5. **Komputer.** Dalam pembelajaran matematika dengan komputer, bahan ajar dibuat dengan desain khusus sehingga interaksi antara siswa dan komputer berlangsung secara dinamis dalam bentuk stimus-respon. Kelebihan teknologi komputer adalah desain pembelajaran matematika dapat disajikan dalam bentuk gambar, suara/musik, warna, dan animasi. Materi matematika dan pengetahuan tentang komputer merupakan otak kiri, sedangkan adanya gambar, suara/musik, warna, dan animasi merupakan otak kanan. Ini berarti dengan pembelajaran matematika dengan komputer dapat kengaktifkan sekaligus kedua belahan otak sehingga pelajaran akan menyenangkan. Jenis pembelajaran berbasis komputer (*computer-based instruction*) merupakan eksekusi program yang didasarkan pada tujuan-tujuan instruksional (Hatfield, dalam Kusumah, 2008).
6. **Mind Map.** Mind map adalah suatu teknis grafis yang memungkinkan kita untuk mengeksplorasi seluruh kemampuan otak kita untuk keperluan berpikir dan belajar (Windura, 2008:16). Sedangkan menurut Busan, mind map adalah alternatif pemikiran keseluruhan otak terhadap pemikiran linear. Mind map menggapai ke segala arah dan menangkap berbagai pikiran dari segala sudut. Main map sebenarnya tak jauh berbeda dengan peta konsep. Mind map dibuat dengan grafis yang berwarna dan menarik, sehingga dalam main map tersebut fungsi kedua belahan otak aktif. Menurut Michael Michaiko (Busan, 2008:6) melalui Mind Map anak akan: (1) Mengaktifkan seluruh otak; (2) Membereskan akal dari kekusutan mental; (3) Memungkinkan kita berfokus pada pokok bahasan; (4) Membantu menunjukkan hubungan antara bagian-bagian informasi yang saling terpisah; (5) Memberi gambaran yang jelas pada keseluruhan dan

perincian; (6) Memungkinkan kita mengelompokkan konsep, membantu kita membandingkannya. Berikut contoh *Mind Map* topik Bangun Bidang Ruang.



Gambar 3. Mind Map Bangun Ruang

D. Penutup

Manajemen Otak atau *Brain Management* merupakan kemampuan menggunakan fungsi otak secara seimbang antara otak kiri dan otak kanan. Pembelajaran matematika dengan melibatkan manajemen otak akan memgembangkan pembelajaran yang interaktif, sehingga pelajaran matematika menjadi menyenangkan bagi siswa.

Daftar Pustaka

Busan, Tony. 2008. *Buku Pintar Mind Map*. Jakarta : Gramedia Pustaka Utama.

Gravemeijer, Koeno. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD-b Press. The Netherlands.

Human Brain. Tersedia [Online]

http://images.search.yahoo.com/images/view?back=http%3A%2F%2Fimages.search.yahoo.com. 11 Nopember 2008.

Kusumah, Yaya. S. 2008. *Konsep, Pengembangan, dan Implementasi computer-Based Learning dalam Peningkatan Kemampuan High-Order Mathematical Thinking*. Pidato Pengukuhan Jabatan Guru Besar dalam Bidang Pendidikan Matematika UPI.

Windura, Sutanto. 2008. *Brain Management*. Jakarta : Elex Media Komputindo.

Windura, Sutanto, 2008. *Mind Map, Langkah Demi Langkah*. Jakarta : Elex Media Komputindo.

BRAIN HEMISPHERE DOMINANCE TEST

No.	Pertanyaan	Dipilih(√)
1	Saya selalu melihat jam atau memakai arloji.	
2	Saya selalu menulis jurnal atau diary untuk mencurahkan pikiran saya.	
3	Saya percaya ada cara yang benar dan salah dalam melakukan sesuatu.	
4	Saya merasa sulit mengikuti petunjuk dengan tepat.	
5	Saya lebih suka membaca cerita non-fiksi (tentang kisah nyata/kenyataan) daripada cerita fiktif (karangan).	
6	Saya sering engubah dan terpaku bahwa jadwal itu membosankan.	
7	Lebih mudah bagi saya untuk menggambar peta daripada memberi tahu seseorang mengenai arah jalan yang harus dia lalui.	
8	Untuk mencari barang yang hilang, saya mencoba untuk membayangkan di mana terakhir saya melihat benda itu.	
9	Saya sering mengikuti perasaan saya.	
10	Saya mudmah belajar matematika.	
11	Saya selalu membawa petunjuk sebelum membuat sesuatu	
12	Orang-orang berkata bahwa saya selalu terlambat sampai di tempat.	
13	Orang-orang pernah mengatakan saya ini bisa meramal masa depan.	
14	Saya selalu membuat target untuk saya sendiri agar tetap pada jalurnya.	
15	Dalam memutuskan sesuatu saya lebih percaya pada pengalaman saya daripada sekedar fakta-fakta yang ada.	
16	Ketika saya akan memutuskan sesuatu, saya menulis kelebihan dan kekurangannya.	
17	Saya mungkin adalah detektif yang baik.	
18	Saya mudah belajar musik.	
19	Untuk memecahkan masalah, saya memikirkan masalah yang serupa yang pernah saya hadapi dimasa lalu.	
20	Saya banyak menggunakan bahasa tubuh.	
21	Saya lebih suka pertanyaan pilihan berganda (multiple choicee) daripada esai (open-ended question).	
22	Saya percaya ada dua cara untuk melihat semua hal.	
23	Saya bisa melihat seseorang berbohong atau bersalah hanya dengan melihat.	
24	Saya selalu menulis apa harus dikerjakan.	
25	Saya dapat langsung menerangkan pendapat saya dengan kata-kata.	
26	Dalam berdebat, saya selalu objektif dan melihat fakta sebelum mengeluarkan pendapat.	
27	Saya lebih memilih menjadi penyair, politikus, arsitek, atau penari.	
28	Selalu selalu kehabisan waktu.	
29	Ketika saya lupa mengingat nama, saya mengurutkan alfabet sampai saya ingat.	
30	Saya suka menggambar.	
31	Ketika sedang bingung, saya biasanya mengikuti perasaan.	
32	Saya pernah bercita-cita menjadi pengacara, wartawan, atau dokter.	

Petunjuk pengisian:

- Berilah tanda check (√) untuk kolom "dipilih (√)" untuk pernyataan yang cocok dengan Anda

Jawaban kuesioner:

No.	Dominance	No.	Dominance
1	**L**	17	**L**
2	**L**	18	**R**
3	**L**	19	**R**
4	**R**	20	**R**
5	**L**	21	**L**
6	**R**	22	**R**
7	**R**	23	**R**
8	**L**	24	**L**
9	**R**	25	**L**
10	**L**	26	**L**
11	**L**	27	**R**
12	**R**	28	**R**
13	**R**	29	**L**
14	**L**	30	**R**
15	**R**	31	**R**
16	**L**	32	**L**

KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIK DAN KETERAMPILAN SOSIAL SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA [1]

Kadir, S.Pd., M.Si.
Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Unhalu Kendari
Email: kadir168@yahoo.com

Abstrak: Artikel ini membahas tentang kemampuan komunikasi matematik dan keterampilan sosial siswa dalam pembelajaran matematika. Kedua kemampuan ini penting dikembangkan karena semakin kompleksnya permasalahan kehidupan yang akan dihadapi siswa pada masa mendatang. Siswa dapat mengatasi masalah tersebut jika mampu menempatkan dirinya secara baik dalam berinteraksi dengan orang lain. Ketika berinteraksi, siswa membutuhkan sikap dan pola pikir yang logis, konsisten dan sistematis. Nilai-nilai ini dapat diperoleh siswa ketika mengikuti pembelajaran matematika. Oleh karena itu, pembelajaran matematika harus dirancang sedemikian rupa sehingga mendorong partisipasi aktif siswa untuk berinteraksi dengan guru, siswa lainnya, dan dengan materi matematika. Interaksi maksimal ketiga komponen ini berdampak pada meningkatnya efektifitas pembelajaran. Pembelajaran dikatakan efektif jika dapat memaksimalkan partisipasi aktif siswa dalam proses pembelajaran sehingga pemahaman, daya serap, dan keterampilan berpikir mereka meningkat. Pembelajaran seperti ini dapat dilaksanakan dengan: (1) pembelajaran kelompok kecil; (2) memberikan masalah yang menarik dan menantang; (3) merancang strategi diskusi untuk dapat memaksimalkan interaksi siswa di kelompok dan di kelas; (4) memberi perhatian kepada siswa yang kurang memiliki keterampilan berbagi, keterampilan berpartisipasi, keterampilan menyusun kata-kata, dan keterampilan mendengar; dan (5) menggunakan teknik *scaffolding* untuk membimbing siswa memecahkan masalah.

Kata kunci: kemampuan komunikasi matematik, keterampilan sosial, pembelajaran matematika yang efektif, interaksi, pembelajaran yang efektif

PENDAHULUAN

Kelas matematika merupakan miniatur masyarakat. Berbagai karakter yang dibawa siswa dari luar kelas memberikan warna dalam proses interaksi siswa di kelas. Keragaman tersebut dapat memunculkan banyak masalah jika tidak diorganisir melalui suatu proses pembelajaran matematika yang efektif. Jika pembelajaran tidak memanfaatkan dan mengorganisir potensi berupa nilai-nilai dan kebiasaan siswa secara baik, maka proses pencapaian tujuan pembelajaran akan terganggu.

Potensi siswa perlu diorganisir dan dimanfaatkan dalam proses pembelajaran matematika sehingga dapat dikolaborasi dengan nilai-nilai matematika yang logis, konsisten, dan sistematis. Nilai-nilai matematika ini akan menjadi modal utama siswa untuk mempersiapkan diri menghadapi berbagai permasalahan hidup. Untuk memanfaatkan

[1] *Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, pada Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, Yogyakarta, Jumat, 28 Nopember 2008*

keragaman siswa tersebut dapat dikembangkan pembelajaran matematika dengan model interaktif. Melalui pembelajaran dengan model interaktif siswa dapat melatih diri untuk berkomunikasi dan terampil dalam menjalani kehidupan sosial di kelas.

Makalah ini disusun untuk membahas pentingnya komunikasi dan keterampilan sosial siswa dalam pembelajaran matematika. Kedua kemampuan ini penting dikembangkan karena semakin kompleksnya permasalahan hidup yang akan dihadapi siswa pada masa mendatang. Siswa dapat mengatasi masalah tersebut jika mampu menempatkan dirinya secara baik dalam berinteraksi dengan orang lain. Ketika berinteraksi, siswa membutuhkan sikap dan pola pikir yang logis, konsisten dan sistematis. Nilai-nilai ini dapat diperoleh siswa dalam proses pembelajaran matematika. Oleh karena itu, pembelajaran matematika harus dirancang untuk mendorong partisipasi siswa berinteraksi dengan guru, siswa lainnya, dan dengan materi matematika. Interaksi maksimal ketiga komponen ini berdampak pada meningkatnya efektifitas pembelajaran.

KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIK

1. Pengertian dan bentuk komunikasi

Menurut Effendy (2007: 10), komunikasi adalah proses penyampaian pesan oleh komunikator kepada komunikan melalui media yang menimbulkan efek. Pendapat ini didasarkan pada pendapat Laswell yang membagi komunikasi dalam lima unsur, yaitu komunikator (pengirim pesan), pesan, media, komunikan (penerima pesan), dan efek. Sebagai proses penyampaian pesan, komunikasi dibagi dalam tiga bentuk, yaitu komunikasi linear atau komunikasi satu arah (*one way communication*), komunikasi *relational* dan interaktif yang disebut "*Model Cybernetics*", dan komunikasi konvergen yang bercirikan multi arah.

Pada kedua jenis komunikasi pertama, peran guru dalam proses pembelajaran masih dominan. Pada komunikasi konvergen, peran guru sudah dikurangi dan lebih bertindak sebagai fasilitator dan manajer. Komunikasi konvergen muncul ketika dalam diskusi interaktif antar siswa dengan guru atau antar siswa di kelas tidak berjalan mulus. Dalam proses ini, guru mengatur kelas agar siswa dapat menyelesaikan masalah yang didiskusikan dengan seminimal mungkin mengharapkan bantuan guru. Komunikasi konvergen ini dapat digunakan dalam proses pembelajaran matematika.

Dalam *the National Council of Teachers of Mathematics (*NCTM) (2000: 60), dijelaskan bahwa komunikasi adalah suatu bagian esensial dari matematika dan pendidikan matematika. Pendapat ini mengisyaratkan pentingnya komunikasi dalam pembelajaran

matematika. Melalui komunikasi, siswa dapat menyampaikan ide-idenya kepada guru dan kepada siswa lainnya. Komunikasi ini merupakan salah satu dari lima standar proses yang ditekankan dalam NCTM (2000: 29), bahwa lima standar proses, yaitu pemecahan masalah (*problem solving*), penalaran dan bukti (*reasoning and proof*), komunikasi (*communication*), koneksi (*connections*), dan representasi (*representation*).

2. Kemampuan komunikasi matematik dan jenisnya

Menurut Brenner (1998: 104), peningkatan kemampuan siswa untuk mengkomunikasikan matematika adalah satu dari tujuan utama pergerakan reformasi matematika. Brenner (1998: 107) lebih lanjut menyatakan bahwa penekanan atas komunikasi dalam pergerakan reformasi matematika berasal dari suatu konsensus bahwa hasil pembelajaran sangat efektif di dalam suatu konteks sosial. Melalui konteks sosial yang dirancang dalam pembelajaran, siswa dapat mengkomunikasikan berbagai ide yang dimilikinya untuk menyelesaikan masalah matematika.

Menurut Lubienski (2000), kemampuan siswa dalam mengkomunikasikan masalah matematika pada umumnya ditunjang oleh pemahaman mereka terhadap bahasa (Hulukati, 2005: 18). Cooke dan Buchholz (2005: 265) menyarankan agar guru seharusnya dapat membuat suatu hubungan antara matematika dan bahasa. Hubungan ini akan membantu siswa mampu mengekspresikan suatu masalah matematika ke dalam bahasa simbol atau model matematika. Komunikasi seperti ini disebut komunikasi tulisan.

Menurut Baroody (1993), ada dua alasan penting mengapa kemampuan berbahasa itu sangat penting dibutuhkan dalam berkomunikasi, yaitu: (1) *mathematics as language*; matematika tidak hanya sekedar alat bantu berpikir (*a tool to aid thinking*), alat untuk menemukan pola, atau menyelesaikan masalah, namun matematika juga adalah alat yang tak terhingga nilainya untuk mengkomunikasikan berbagai idea dengan jelas, tepat, dan ringkas, dan (2) *mathematics learning as social activity*, sebagai aktivitas sosial dalam pembelajaran matematika, interaksi antar siswa, misalnya komunikasi antara guru dan siswa yang merupakan bagian penting untuk memelihara dan mengembangkan potensi matematika siswa (Hulukati, 2005: 17).

Pendapat di atas mengisyaratkan adanya dua jenis kemunikasi matematik, tulisan dan lisan (*verbal*). Ernest (1994: 19) menjelaskan bahwa: (a) komunikasi matematik *non-verbal* menekankan pada interaksi siswa dalam dunia yang kecil dan penafsiran *non-verbal* serentak mereka terhadap interaksi lainnya, dan (b) komunikasi matematik lisan (*verbal*) menekankan interaksi lisan mereka satu sama lain dan dengan guru ketika mereka membangun tujuan dengan membuat pembagian yang sesuai. Kedua jenis komunikasi

matematik ini memainkan peran penting dalam interaksi sosial siswa di kelas matematika. Bantuan guru untuk membiasakan siswa mampu mengkomunikasikan ide melalui bahasa lisan dan tulisan ini dapat membantu meningkatkan kemampuan komunikasi matematika siswa sesuai standar komunikasi matematika yang diinginkan.

Dalam NCTM (2000: 60), disebutkan, standar kemampuan komunikasi matematika untuk siswa taman kanak-kanak sampai kelas 12 adalah siswa dapat:

- Mengorganisasi dan mengkonsolidasi pemikiran matematika mereka melalui komunikasi;
- Mengkomunikasikan pemikiran matematika mereka secara koheren dan jelas kepada pasangan, guru, dan yang lainnya;
- Menganalisis dan mengevaluasi pemikiran matematika dan strategi orang lain;
- Menggunakan bahasa matematika untuk mengekspresikan ide matematika secara tepat.

Untuk meningkatkan kemampuan komunikasi matematika siswa kelas 8, NCTM (2000: 271) menyarankan agar guru mengidentifikasi dan menggunakan berbagai tugas yang: berkaitan penting dengan ide matematika; dapat diakses dengan berbagai metode solusi; menyediakan representasi multipel; dan memberikan siswa kesempatan menginterpretasi, jastifikasi dan konjektur. Dalam melaksanakan tugas-tugas tersebut, setiap siswa diberi kesempatan untuk berkontribusi walaupun tidak perlu semua siswa memberikan argumen atau penjelasan secara bersamaan. Intinya, setiap siswa diarahkan untuk mengeluarkan kemampuannya untuk menjelaskan pemikiran matematik dan penalarannya terhadap masalah yang berkembang di kelas. Efektifitas pembelajaran untuk meningkatkan kemampuan komunikasi matematka siswa kelas 8 ini terjadi ketika siswa bekerja secara berpasangan. Dalam NCTM (2000: 272) disebutkan, bekerja berpasangan sering merupakan suatu pendekatan yang sangat efektif bagi siswa sekolah menengah.

3. Pengukuran kemampuan komunikasi matematik

Pengukuran kemampuan komunikasi matematik siswa harus memperhatikan aspek-aspek komunikasi matematik. Menurut Sumarmo (2003), komunikasi matematik merupakan kemampuan yang dapat menyertakan dan memuat berbagai kesempatan untuk berkomunikasi dalam bentuk:

a. Merefleksikan benda-benda nyata, gambar, dan diagram ke dalam ide matematika;
b. Membuat model situasi atau persoalan menggunakan metode lisan, tertulis, konkrit, grafik, dan aljabar;
c. Menyatakan peristiwa sehari-hari dalam bahasa dan simbol matematika;

d. Mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematika;
e. Membaca dengan pemahaman suatu presentasi matematik tertulis;
f. Membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi, dan generalisasi; dan
g. Menjelaskan dan membuat pertanyaan tentang matematika yang telah dipelajari (Herawati, 2007: 24 - 25).

Penjelasan di atas memperlihatkan adanya lima aspek komunikasi, yaitu representasi (*representation*), mendengar (*listening*), membaca (*reading*), diskusi (*discussion*), dan menulis (*writing*) (Baroody (1993) dalam Hulukati, 2005: 23 – 27). Kelima aspek ini dapat dikembangkan menjadi tahap-tahap berlangsungnya proses komunikasi dalam pembelajaran matematika.

Untuk memgungkap kemampuan siswa dalam berbagai spek komunikasi di atas dapat dilakukan dengan melihat kemampuan siswa dalam mendiskusikan masalah dan membuat ekspresi matematika secara tertulis baik gambar, model matematika, maupun simbol atau bahasa sendiri. Kemampuan siswa berkomunikasi lisan sulit diukur oleh guru sehingga untuk mendapatkan informasi ini guru perlu membuat lembar observasi untuk mengamati kualitas diskusi yang diikuti siswa selama proses pembelajaran. Sementara itu, kemampuan komunikasi matematik siswa secara tertulis dapat diketahui dengan memberikan soal-soal matematika kepada siswa untuk diselesaikan. Menurut Cai, Lane dan Jacabscin (1998: 240), untuk mengungkapkan kemampuan komunikasi matematik dapat dilakukan dengan berbagai cara, seperti diskusi dan mengerjakan berbagai bentuk soal, baik pilihan ganda maupun uraian. Soal uraian yang dapat digunakan untuk mengukur kemampuan komunikasi matematik siswa antara lain dapat berupa soal uraian berbentuk transfer, eksploratif, elaboratif, aplikatif, dan estimasi (Ansari, 2003: 18). Berikut ini diberikan contoh bentuk soal eksploratif.

> Saudara laki-laki Aisya sama banyak dengan saudara perempuannya. Saudara laki-laki Nabil tiga kali lebih banyak dari saudara perempuannya. Kesemua anak ini selalu belajar bersama dan tidak bergabung dengan anak lainnya di luar keluarga tersebut. Suatu hari ketika mereka sedang belajar bersama, ada 2 anak yang meninggalkan tempat belajar. Berapa anakkah yang tetap aktif belajar bersama di ruangan itu? Bagaimanakah caramu memperolehnya? Jelaskan jawabanmu!

Pengukuran kemampuan komunikasi matematik siswa dilakukan dengan memberikan skor terhadap kemampuan siswa dalam memberikan jawaban soal dengan menggambar (*drawing*), membuat ekspresi matematik (*mathematical expression*), dan menuliskan jawaban dengan bahasa sendiri (*written texts*). Pemberian skor jawaban siswa disusun berdasarkan tiga kemampuan tersebut.

KETERAMPILAN SOSIAL

Keterampilan sosial merupakan kemampuan yang dimiliki siswa untuk menempatkan diri dan mengambil peran yang sesuai di lingkungannya. Keterampilan ini dipandang penting karena berbagai hasil penelitian menyebutkan bahwa ada hubungan yang cukup erat antara keterampilan sosial siswa dengan berbagai kemampuan lainnya seperti menjalin kerjasama dalam kelompok, berinteraksi dengan sebayanya, bergabung dalam kelompok, menjalain pertemanan baru, menangani konflik, dan belajar bekerja sama. Kurangnya keterampilan sosial siswa akan berdampak pada rendahnya prestasi akademik siswa tersebut, cenderung kesepian dan menampakkan *self-esteem* yang rendah, dan ada kemungkinan akan *dropt-out* dari sekolah (Mujis dan Reynolds, 2008: 203).

Menurut Hair et al (2001), mengembangkan keterampilan sosial berhubungan dengan memiliki kepribadian yang hangat dan ramah, kecerdasan nonverbal yang baik, pola asuh orang tua yang respnsif, dan kontak reguler dengan kakak/adik kandung (Muijs dan Reynolds, 2008: 204). Melalui pengembangan keterampilan sosial ini, seorang siswa akan dapat memiliki kemampuan bersosialisasi dan prestasi akademik yang baik. Kemampuan mengambil peran merupakan tahapan yang dilalui siswa dalam hidupnya. Pada usia 12 – 15 tahun hingga dewasa, anak-anak sudah masuk pada tahap kelima dari model Selman, yaitu ”*social and conventional system role-taking*”, pengambilan peran sistem sosial dan konvensional. Pada tahap ini anak secara umum telah memiliki pertimbangan sosial, aturan dan norma diperhitungkan dan diwujudkan dalam peran yang dilakukannya. Oleh karena itu dibutuhkan keterampilan-keterampilan sosial untuk dikembangkan dalam persahabatan.

Menurut Gottman dan Parker (1986), ada enam keterampilan sosial tertentu yang dikembangkan di dalam pertemanan, yaitu: (1) *conform, cooperate and compete* (penyesuaian diri, bekerja sama dan bersaing), (2) *take risks* (mengambil resiko); (3) *develop communication skills* (mengembangkan keterampilan komunikasi); (4) *develop negotiation skills and tact* (mengembangkan keterampilan negosiasi dan bijaksana); (5) *resolve conflicts* (menangani konflik); dan (6) *develop shared meanings for group interaction* (mengembangkan pengertian bersama dalam interaksi kelompok) (Edwards, 2004). Keenam keterampilan sosial ini sesuai dengan studi pertemanan di kelas matematika.

Pendapat lain tentang keterampilan ini dikemukakan oleh Schneider (2000) atas laporan Nelson dan Aboud (1985) dalam Edwards (2004) yang menemukan bahwa para teman lebih sering menjelaskan pendapat mereka dan mengkritik partnernya dibanding yang bukan teman. Artinya, untuk membangun suatu aktivitas diskusi dalam kelompok, sebaiknya kelompok disusun berdasarkan hubungan persahabatan. Melalui hubungan

persahabatan, muncul diskusi yang lebih tajam karena para siswa tidak segan untuk mengemukakan pendapat mereka terhadap suatu permasalahan dan sekaligus melakukan kritik terhadap teman sekelompoknya. Kebiasaan untuk mengemukakan pendapat ini akan mengarah kepada kemampuan untuk menganalisis kemampuan diri mengelola informasi sebelum pendapat itu dikemukakan. Kegiatan ini dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam pemecahan masalah dan komunikasi matematik.

Pendapat serupa tentang keterampilan sosial anak juga dikemukakan oleh Indri Savitri. Menurutnya, ada sembilan keterampilan sosial yang harus dimiliki anak, yaitu kenal diri, kenal emosi, empati, simpati, berbagi, negosiasi, menolong, kerjasama, dan bersaing (Kusumah, 2008). Dalam uraiannya dijelaskan bahwa keterampilan sosial anak perlu dikembangkan agar anak memperoleh rasa percaya diri, bisa menghadapi berbagai masalah dan mencari solusinya, dan mudah diterima oleh anak lainnya. Melalui pengembangan keterampilan sosial, anak akan mudah bergaul dengan orang lain di lingkungan manapun dia berada. Anak yang mempunyai keterampilan sosial yang baik akan berperilaku sesuai dengan harapan lingkungan secara tepat. Salah satu cara yang dapat diupayakan untuk menanamkan keterampilan sosial anak adalah dengan memberi kesempatan kepada anak untuk berlatih berinteraksi dengan anak lainnya dalam pembelajaran kelompok kecil. Kebiasaan siswa bermain dan bergaul bersama temannya dalam memecahkan masalah dan saling menerima cenderung akan memiliki keterampilan sosial yang tinggi dibandingkan dengan anak yang sehari-harinya di rumah saja atau dalam pembelajaran klasikal tanpa interaksi dengan siswa lainnya. Menurut Muijs (2008: 207), salah satu cara untuk meningkatkan keterampilan sosial siswaadalah melalui *coaching*. Prinsip yang mendasari *coaching* keterampilan sosial adalah bahwa masalah keterampilan sosial sering disebabkan oleh fakta bahwa mereka tidak tahu apa yang harus dilakukan di berbagai situasi sosial, dan mereka dapat diajari untuk mengatasi kekurangan ini.

Williams dan Ansher (1993) mengusulkan sebuah sesi *coaching* tiga bagian. Dibagian pertama, *coach* (pelatih, orang dewasa yang responsif, misalnya guru) membicarakan dengan anak tentang bagaimana cara berinteraksi yang lebih baik dengan sebayanya. Ketika menjelaskan konsep ini, pelatih perlu memfokuskan pada apa yang seharusnya dilakukan anak, dan bukan pada apa yang seharusnya tidak dilakukannya. Bagian kedua *coaching* melibatkan pempraktikan kegiatan dengan anak-anak ain. Terakhir, pelatih dan akan dapat mendiskusikan penggunaan konsep sosial kegiatan itu selama mempraktikkannya dengan anak.

Untuk mengetahui tingkat keterampilan sosial anak dapat digunakan beberapa alat, misalnya lembar observasi, *self report checklist*, dan *rating scale*. Semua instrumen ini disusun berdasarkan dimensi keterampilan sosial. Lembar observasi digunakan untuk mengamati kualitas interaksi siswa selama pembelajaran matematika. *Self report checklist* diberikan kepada siswa untuk diisi. Pada *rating scale*, guru membandingkan penilaiannya dengan penilaian siswa untuk mengetahui konsistensi. Menurut Ogden (2003), dan Hall dan Bramlett (2002), hasil-hasil yang diperoleh tampaknya sedikit berbeda tergantung skala penilaian mana yang digunakan (Muijs, 2008: 207).

Penjelasan di atas mengandung makna bahwa keterampilan sosial dapat dikembangkan melalui pembelajaran yang melibatkan siswa dalam proses interaksi. Dengan demikian, guru perlu merancang suatu pembelajaran yang dapat mengembangkan semangat interaktif siswa sehingga tujuan pembelajaran dapat dicapai secara maksimal baik dari segi kognitif, afektif maupun psikomotor khususnya kemampuan siswa berkomunikasi matematika dan terampil dalam kehidupan sosial di kelas dan di luar kelas.

PEMBELAJARAN MATEMATIKA YANG EFEKTIF

Efektifitas suatu pembelajaran dapat dilihat dari kualitas pelaksanaan proses pembelajaran dan hasil belajar yang dicapai siswa. Suatu pembelajaran dikatakan efektif apabila mencapai sasaran yang dinginkan, baik dari segi tujuan pembelajaran maupun prestasi belajar siswa yang maksimal. Menurut Donald P. Kauchak (1988: 1), keefektifan pembelajaran terjadi jika siswa terlibat secara aktif dalam mengorganisasikan dan menemukan hubungan-hubungan informasi yang diberikan daripada sekedar menerima secara pasif pengetahuan yang disampaikan guru. Hasil aktivitas ini tidak hanya meningkatkan pemahaman dan daya serap siswa terhadap materi pembelajaran tetapi juga dalam memperbaiki keterampilan berpikir.

Berdasarkan pendapat di atas dapat diketahui bahwa efektifitas pembelajaran dapat dicapai jika siswa diorganisir secara baik untuk terlibat secara aktif di kelas. Keterlibatan siswa secara aktif di kelas ini dapat diarahkan dengan mengurangi dominasi guru selama proses pembelajaran. Berkurangnya dominasi guru berarti meningkatnya aktifitas siswa sehingga pada akhirnya diperoleh siswa mandiri dalam belajar matematika. Aktifitas siswa dalam diskusi selama pembelajaran dapat ditingkatkan melalui pembelajaran dengan model aktivasi interaktif. Menurut Brenner (1998: 108), melalui aktifitas diskusi dengan guru dan pasangannya, siswa diharapkan dapat memperoleh pemahaman yang lebih baik terhadap konsep dasar matematika dan menjadi pemecah masalah yang lebih baik.

Menurut Brenner (1998: 109-110) juga, walaupun teori belajar konstruktivis sosial merupakan dasar interaksi sosial pembelajaran, studi antropologi sekolah dengan tegas menyarankan bahwa bentuk-bentuk komunikasi di kelas perlu diubah agar memungkinkan semua siswa berpartisipasi secara efektif. Cara tradisional dalam mengorganisasi diskusi secara sistematik telah menghalangi siswa dari beberapa kebiasaan untuk berpartisipasi pada interaksi di kelas. Oleh karena itu diusulkan untuk melaksanakan pembelajaran melalui kelompok kecil, bukan pembelajaran klasikal dan mempertimbangkan perbedaan latar belakang budaya dalam setiap kelompok. Hal ini perlu diupayakan agar memungkinkan munculnya interaksi maksimal setiap siswa untuk berpartisipasi akif dalam diskusi baik di kelompok maupun di kelas.

Menurut Meyers (1986: 61 – 65), ada lima kunci untuk merancang suatu kelas interaktif agar tugas-tugas menjadi lebih mudah, yaitu: (1) mulai setiap kelas dengan suatu masalah atau kontroversi; (2) gunakan kesunyian untuk mendorong refleksi; (3) atur ruang kelas untuk mendorong interaksi; (4) jika memungkinkan tambah waktu pembelajaran; dan (5) ciptakan lingkungan belajar yang menyenangkan. Pendapat lain menyatakan bahwa, waktu yang paling baik untuk mengajar anak adalah ketika mereka merasa membutuhkannya. Kegiatan ini dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu: *arranging that children learn through practical activities that are intrinsically interesting, giving them a problem to solve by presenting them with a challenge, and selecting subject matter that appeals to their natural interests* (Hughes, 2003: 322 – 323). Pendapat ini mengandun makna pentingnya masalah menarik dan menantang diberikan kepada siswa agar meningkatkan kualitas interaksi sosial selama proses pembelajaran. Meningkatnya kualitas proses interaksi dengan setting sosial yang terarah akan meningkatkan kemampuan komunikasi dan keterampilan sosial siswa.

Setting sosial pembelajaran dapat dibuat berdasarkan pembelajaran dengan kelompok kecil. Menurut Muijs dan Reynolds (2008: 82), pembelajaran dengan kelompok kecil ini memiliki keuntungan sebagai berikut: (1) kontribusinya terhadap pengembangan keterampilan sosial siswa karena dapat mengembangkan kemampuan empatik untuk menyadari bahwa tiap orang memiliki kelebihan dan kekurangan; (2) menemukan solusi masalah dalam kelompok; (3) mengembangkan keterampilan-keterampilan seperti kebutuhan untuk mengakomodasi pandangan orang lain; (4) siswa saling memberikan penopang (*scaffolding*) dengan cara yang sama seperti yang dilakukan guru selama tanya jawab;dan (5) kelompok dapat mengatasi masalah lebih kuat sehingga memungkinkan guru memberikan soal-soal yang lebih sulit. Menurut Muijs dan Reynolds (2008: 84) juga, ada

beberapa cara yang dapat dilakukan untuk mengefektifkan kerja kelompok kecil, yaitu: (1) siswa harus mampu bekerjasama dan saling memberikan bantuan secara konstruktif; (2) mengajarkan keterampilan berbagi (*sharing skill*) dengan teknik *Round Robin* di mana guru melontarkan sebuah pertanyaan dan memperkenalkan sebuah ide yang memiliki banyak kemungkinan jawaban; (3) Menstrukturisasikan tugas sehingga siswa harus berperan tertentu dalam kelompok atau *time tokens* untuk semua kelompok bagi siswa dengan *participation skill* rendah; (4) mengajarkan *paraphrasing* bagi siswa dengan *communication skills* rendah; dan (5) mengajarkan *paraphrasing* terhadap pendapat orang secara bergiliran bagi siswa dengan *listening skill* rendah. Menurut Muijs dan Reynolds (2008: 93) juga, penggunaan kerja kelompok kecil juga dapat membantu perkembangan keterampilan-keterampilan kolaboratif dan keterampilan sosial dan oleh karenanya dianggap sebagai bagian penting dari perkembangan siswa. Kerja kelompok juga memungkinkan pengatasan masalah yang lebih kuat, karena pengetahuan total yang terdapat di kelompok cenderung lebih besar dibanding kemampuan yang terdapat pada murid orang per orang. Lebih lanjut Muijs dan Reynolds (2008: 93) menyatakan bahwa setelah menyelesaikan tugas kelompok, hasil-hasilnya perlu dipresentasikan kepada seluruh kelas dan sebuah *debriefing* yang difokuskan pada proses kerja kelompok harus dilaksanakan.

Berdasarkan pendapat di atas, maka masalah kontekstual yang digunakan dalam pembelajaran matematika harus menarik dan menantang. Masalah yang menarik akan lebih menambah gaira siswa untuk memecahkannya karena terkait dengan kebutuhannya. Sdang maasalah yang menantang akan membuat siswa tidak bosan serta dapat melatih kemamuan berpikr siswa pada level yang lebih tinggi. Hal ini dapat membuat siswa tidak merasa bosan mengikuti proses pembelajaran karena merasa ditantang untuk bisa memecahkan masalah yang menantang tersebut.

PENUTUP

Kemampuan komunikasi matematik dan keterampilan sosial siswa penting dikembangkan karena semakin kompleksnya permasalahan kehidupan yang akan dihadapi siswa pada masa mendatang. Siswa dapat mengatasi masalah tersebut jika mampu menempatkan dirinya secara baik dalam berinteraksi dengan orang lain. Ketika berinteraksi, siswa membutuhkan sikap dan pola pikir yang logis, konsisten dan sistematis. Nilai-nilai ini dapat ditanamkan dalam pembelajaran matematika. Pembelajaran matematika harus

dirancang sedemikian rupa sehingga mendorong partisipasi aktif siswa untuk selalu berkomunikasi dan berinteraksi baik dengan guru, dengan siswa lainnya, maupun dengan materi matematika. Interaksi maksimal ketiga komponen ini berdampak pada meningkatnya efektifitas pembelajaran. Pembelajaran dikatakan efektif jika dapat memaksimalkan partisipasi aktif siswa dalam proses pembelajaran sehingga pemahaman, daya serap, dan keterampilan berpikir mereka dapat ditingkatkan. Pembelajaran seperti ini dapat dilaksanakan dengan memperhatikan: (1) pembelajaran dengan kelompok kecil; (2) masalah yang diberikan harus menarik dan menantang; (3) strategi diskusi diupayakan untuk memaksimalkan interaksi antar siswa baik di dalam kelompok maupun di kelas; (4) guru memberi perhatian kepada siswa yang kurang memiliki keterampilan berbagi, keterampilan berpartisipasi, keterampilan menyusun kata-kata, dan keterampilan mendengar; dan (5) teknik *scaffolding* senantiasa menjadi senjata guru untuk mengarahkan siswa dalam pemecahan masalah.

Daftar Pustaka

Ansari, B. I. (2003). *Menumbuhkembangkan Kemampuan Pemahaman dan Komunikasi Matematik Siswa SMU melalui Strategi Think-Talk-Write.* Disertasi PPs UPI, tidak diterbitkan.

Arends, R.I. (2008). *Learning to Teach, Belajar untuk Mengajar. Edisi Ketujuh Jilid I. Cetakan Pertama.* Penerjemah: Helly Prajitno Soetjipto dan Sri Mulyantini Soetjipto. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Bell, F. H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary School).* Iowa: Wm. C. Brown Company Publisher.

Brenner, M. E. (1998). Development of Mathematical Communication in Problem Solving Groups By Language Minority Students. *Bilingual Research Journal*, 22:2, 3, & 4 Spring, Summer, & Fall.

Cai, J., Lane., S. dan Jacabscin, M.S. (1998). Assessing Students' Mathematical Communication. *School Science and Mathematics Journal.* 96(5), 238-246. [On line]. Tersedia: http://findartices.com/p/articles/ms_qa3667/is_199605/ai_n8742617/pg1_8. [12 Mei 2008]

Cooke, B. D. dan Buchholz, D. (2005). Mathematical Communication in the Classroom: A Teacher Makes a Difference. *Early Childhood Education Journal*, Springer Netherland, Vol. 32, Nmber 6/ June, 2005. p.365-369. [Online]. Tersedia: http://www.springerlink.com/content/g428572457656 536/ [11 Juni 2008]

Edwards, J. (2004). *The Language of Friendship: Developing Sociomathematics Norms in The Secondary School Classroom.* [Online] Tersedia: http://eprints.soton.ac.uk/43843/01/Edwards_J_Final_CERMES_07.pdf [28 Agustus 2007]

Effendy, O.U. (2007). *Komunikasi Teori dan Praktek.* Bandung: Remaja Rosdakarya Offset.

Eggen, P D. & Kauchak. (1988). *Strategies for Teacher Teaching Content and Thinking Skills.* New Jersey: Prentice Hall.

Ernest, P. (1994). *Constructing Mathematical Knowledge: Epistimology and Mathematics Education.* London: The Falmer Press.

Herawati. (2007). *Mengembangkan Kemampuan Penalaran dan Komunikasi Matematis siswa melalui Pembelajaran dengan Pendekatan Matematika Realstik dalam Kelompok Kecil (studi eksperimen pada kelas XI MAN Tembilahan INHL Riau).* Tesis SPs UPI, tidak diterbitkan.

Hughes, A. G. & Hughes, E. H. (2003). *Learning and Teaching.* New Delhi: Sonali Publication.

Hulukati, E. (2005). *Mengembangkan Kemampuan Komunikasi dan Pemecahan Masalah Matematika Siswa SMP melalui Pembelajaran Generatif.* Disertasi SPs UPI, tidak diterbitkan.

Jaworski, B. (1996). *Constructivism ad Teaching – The Sociocultural Context*. V.n. 1.0 (11th December 196). University of Oxford. [Online] Tersedia: http://www.grout.demon.co.uk/Barbara/chreods.htm

Kadir. (2007). *Penggunaan Sociomathematical Norms dalam Pembelajaran Matematika.* Makalah Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 24 Nopember 2007.

Kadir. (2008). *Mengembangkan Norma Sosiomatematik* (*Sociomathematical Norms) dalam Pembelajaran Matematika.* Makalah Disampaikan pada Seminar Nasional Hasil Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 30 Mei 2008.

Kusumah, D. (2008). *9 Keterampian Sosial*. [Online] Tersedia: http://pembelajaran-anak.blogspot.com/2008/08/9-ketrampilan-sosial.html [20-11-2008]

Muijs, D. & Reynolds, D. (2008). *Effective Teaching Teori dan Aplikasi, Edisi Kedua.* Terjemah oleh: Drs. Helly Prajitno Soetjipto, M.A. dan Dra. Sri Mulyantini Soetjipto. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Drive, Reston, VA: The NCTM.

Slavin, R. E. (2008). *Cooperative Learning: Teori, Riset, dan Praktik.* Penterjemah: Nurulita. Bandung: Nusa Media.

PENGARUH BIMBINGAN BELAJAR TERHADAP HASIL BELAJAR MAHASISWA (Studi Kasus terhadap Mata Kuliah Analisis II)

Sugimin

Jurusan Matematika FMIPA UT
ugi@mail.ut.ac.id

ABSTRAK

Mata kuliah Analisis II berisi konsep-konsep yang sangat abstrak sehingga susah untuk memahami materinya. Dari daftar nilai mahasiswa selama 4 (empat) semester terakhir, terlihat bahwa mahasiswa yang mendapatkan nilai D dan E sebesar 47,06% pada masa ujian 2006.1; 54,17% pada masa ujian 2006.2; 83,33% pada masa ujian 2007.1; 80% pada masa ujian 2007.2. Dengan demikian perlu adanya bantuan belajar. Untuk itu penulis melakukan kegiatan bantuan belajar berupa bimbingan belajar. Dalam tulisan ini penulis membahas pengaruh bimbingan belajar terhadap hasil belajar mahasiswa. Hasil belajar mahasiswa ini dilihat dari nilai ujian akhir semester. Bimbingan belajar dilakukan di UT pusat. Bimbingan belajar dilakukan terhadap mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis II pada masa ujian 2008.1. Metode yang digunakan adalah observasi terhadap kemampuan mahasiswa dalam memahami materi Analisis II, dengan analisis datanya berupa analisis deskriptif. Berdasarkan nilai ujian akhir semester pada masa ujian sebelumnya, terlihat adanya peningkatan hasil belajar mahasiswa terhadap mata kuliah Analisis II.

Kata kunci : bimbingan belajar, hasil belajar

I. PENDAHULUAN

Pendidikan merupakan proses pengubahan sikap dan perilaku seseorang melalui upaya pengajaran dengan menitikberatkan pada pembentukan dan pengembangan kepribadian. Dalam pengajaran, perumusan tujuan menjadi utama dan setiap proses pengajaran senantiasa diarahkan untuk mencapai tujuan yang telah ditetapkan. Proses pengajaran melalui tiga tahap, yaitu tahap analisis (menentukan dan merumuskan tujuan), tahap sintesis (perencanaan proses yang akan ditempuh), dan tahap evaluasi.

Hamalik (2001) menyatakan bahwa evaluasi adalah suatu proses berkelanjutan tentang pengumpulan dan penafsiran informasi untuk menilai keputusan-keputusan yang dibuat dalam merancang suatu sistem pengajaran. Sedangkan Sudirman (1987) menyatakan bahwa evaluasi berarti suatu tindakan untuk menentukan nilai sesuatu.

Keberhasilan studi mahasiswa dipengaruhi banyak faktor, baik yang berasal dari dalam maupun dari luar mahasiswa. Faktor dari luar mahasiswa misalnya dipengaruhi oleh kualitas bahan ajar, sedangkan faktor dari dalam diri mahasiswa mencakup kecerdasan, strategi belajar, motivasi, dan sebagainya (Suciati dan Irawan P., 2001).

Dalam kurikulum Program Studi Matematika, mata kuliah Analisis II dikelompokkan dalam Mata kuliah Keahlian Berkarya (MKB). Mata kuliah ini merupakan salah satu mata kuliah pendukung Tugas Akhir Program (TAP). Dengan demikian jelas bahwa mata kuliah ini sangat penting bagi seorang calon sarjana Matematika.

Mata kuliah Analisis II merupakan bagian dari mata kuliah Analisis atau biasa disebut dengan Analisis Real, yaitu cabang dari analisis matematika yang melibatkan himpunan dan fungsi bilangan real. Tepatnya dapat dilihat sebagai versi kalkulus yang mempelajari konsep-konsep seperti barisan dan limit barisan, kekontinuan, pendiferensialan, pengintegralan, dan barisan fungsi.

Mata kuliah Analisis II berisi konsep-konsep yang sangat abstrak sehingga susah untuk memahami materinya. Dari daftar nilai mahasiswa selama 4 (empat) semester terakhir, terlihat bahwa mahasiswa yang mendapatkan nilai D dan E sebesar 47,06% pada masa ujian 2006.1; 54,17% pada masa ujian 2006.2; 83,33% pada masa ujian 2007.1; 80% pada masa ujian 2007.2. Daftar nilai mahasiswa yang menempuh mata kuliah Analisis II untuk masa ujian 2006.1 s.d. 2007.2 dapat dilihat pada Tabel 1 s.d. Tabel 4 (terlampir).

Dengan demikian perlu adanya bantuan belajar. Untuk itu penulis melakukan kegiatan bantuan belajar berupa bimbingan belajar.

Jenis penilaian hasil belajar yang diberikan UT saat ini adalah Tugas Mandiri (TM), Tugas Tutorial Tatap Muka Rancangan Khusus (TTMRK), Ujian Praktek atau Praktikum, Ujian Akhir Semester (UAS), serta Tugas Akhir Program (TAP). Adapun bentuk ujiannya meliputi bentuk ujian objektif, uraian, kinerja, dan lisan. Ada pula penilaian hasil belajar yang tidak melalui ujian, mahasiswa melaksanakan praktek atau praktikum atau tugas mata kuliah (pedoman penilaian hasil belajar mahasiswa, tim penulis simintas UT, 2004).

Hasil belajar mahasiswa terhadap suatu mata kuliah merupakan salah satu informasi untuk mengetahui kualitas mata kuliah tersebut. Dalam tulisan ini penulis

membahas pengaruh bimbingan belajar terhadap hasil belajar mahasiswa. Hasil belajar mahasiswa ini dilihat dari nilai ujian akhir semester

Tujuan penelitian ini adalah menyelidiki pengaruh bimbingan belajar terhadap hasil belajar mahasiswa. Dari hasil ini diharapkan dapat meningkatkan memotivasi dan prestasi belajar mahasiswa. Dengan demikian, pertanyaan dalam penelitian ini adalah apakah bimbingan belajar bisa meningkatkan hasil belajar mahasiswa.

II. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian dilakukan di UT Pusat. Dalam perencanaan awal, pengambilan sampel data atau input tentang masalah penelitian, yaitu observasi pemahaman mahasiswa terhadap materi Analisis II, dilakukan terhadap mahasiswa dari UPBJJ Jakarta, Bogor, dan Serang. Diharapkan data yang diambil dari tiga UPBJJ tersebut dapat mewakili serta menggambarkan kemampuan seluruh mahasiswa Program Studi Matematika dalam memahami materi BMP Analisis II.

Pada masa registrasi 2008.1 ada 19 mahasiswa yang meregistrasi matakuliah Analisis II. Nama-nama mahasiswa tersebut dapat dilihat pada Tabel 5 (terlampir). Berdasarkan data tersebut, ternyata tidak ada mahasiswa dari UPBJJ Bogor dan Serang. Selanjutnya, peneliti mengambil sampel mahasiswa dari UPBJJ Jakarta sebanyak 9 mahasiswa dan UPBJJ Bandung sebanyak 2 mahasiswa. Kemudian mahasiswa dari kedua UPBJJ tersebut dihubungi lewat surat, telpon, atau e-mail.

Pengambilan data terhadap mahasiswa dilakukan pada Minggu, 27 April 2008 bertempat di Ruang Sidang I FMIPA-UT pukul 10.00-15.15 WIB. Mahasiswa yang hadir sebanyak 5 orang dari UPBJJ Jakarta. Daftar mahasiswa yang hadir tersebut dapat dilihat pada Tabel 6 (terlampir).

Metode pengumpulan data dilakukan melalui observasi terhadap kemampuan mahasiswa dalam memahami materi Analisis II yakni dengan cara diadakan uji coba pengerjaan soal.

Analisis data yang digunakan adalah analisis deskriptif. Dalam analisis data ini, peneliti mencari informasi tentang pemahaman mahasiswa terhadap konsep materi Analisis II.

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dari hasil uji coba pengerjaan soal , terlihat bahwa mahasiswa masih kurang memahami materi Analisis II. Kemudian, peneliti menjelaskan bagaimana cara memahami konsep materi Analisis II. Selanjutnya, untuk mengetahui hasil dari bimbingan belajar, peneliti melihat nilai UAS 2008.1 dari 5 mahasiswa yang mengikuti bimbingan belajar.Berikut daftar nilai mahasiswa yang menempuh mata kuliah Analisis II masa ujian 2008.1.

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nilai
1.	013464516	ARIF ROSIDI	C
2.	012751513	ANA AGUSTINA KUSHAYANTI	A
3.	014135084	JADIUN MANALU	D
4.	013908769	SOFYAN A ULI	A
5.	014083674	AKHMAD SUBEKHI	A
6.	014290728	RULLY IRAWAN	B
7.	014372123	ACHMAD FAUZI	A
8.	014035594	ERLAN BUDIAWAN	A
9.	012631319	ANDA LUSIA	A
10.	010302251	LYDIA MARIANA	B
11.	014407716	ARI SETIOSO SUGIYONO	C
12.	014628624	DARMINTO	C
13.	014311807	MARLINA SAHULEKA	C
14.	004506973	YURIAN ATMA NOER	D
15.	014346848	ELISABETH WIBOWO	E
16.	013897594	DIRA WIRAWAN	E

Dalam masa ujian 2008.1 ini, mahasiswa yang mendapatkan nilai D dan E sebesar 25%. Berdasarkan tabel di atas terlihat bahwa dari 5 mahasiswa yang mengikuti bimbingan belajar tersebut, yang mendapatkan nilai A sebanyak 3 mahasiswa yakni Akhmad Subekhi, Erlan Budiawan, dan Anda Lusia, nilai B sebanyak 1 mahasiswa yakni Rully Irawan, dan nilai C sebanyak 1 mahasiswa yakni Arif Rosidi.

Dari 5 mahasiswa tersebut terdapat 3 mahasiswa yang pernah menempuh mata kuliah Analisis II pada masa ujian sebelumnya, yakni Arif Rosidi mendapatkan nilai D pada masa ujian 2006.2, Akhmad Subekhi mendapatkan nilai E pada masa ujian 2007.1, dan

Rully Irawan mendapatkan nilai E pada masa ujian 2007.2. Nilai 5 mahasiswa yang mengikuti bimbingan belajar tersebut dapat dilihat pada tabel berikut.

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nilai				
			2006.1	2006.2	2007.1	2007.2	2008.1
1.	013464516	ARIF ROSIDI		D			C
2.	014083674	AKHMAD SUBEKHI			E		A
3.	014290728	RULLY IRAWAN				E	B
4.	014035594	ERLAN BUDIAWAN					A
5.	012631319	ANDA LUSIA					A

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian ini adalah mahasiswa yang mengikuti bimbingan belajar mendapatkan hasil belajar mata kuliah Analisis II yang lebih baik dari masa ujian sebelumnya.

Daftar Pustaka

_____ (2004). *Pedoman Penilaian Hasil Belajar Mahasiswa*. Simintas Universitas Terbuka, Jakarta.

Bartle, R.G. (1976). *The Elements of Real Analysis, Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc, Canada.

Hamalik, O. (2001). *Perencanaan Pengajaran Berdasarkan Pendekatan Sistem*. Bumi Aksara, Jakarta.

Soemantri, R. (2004). *Buku Materi Pokok Analisis II*. Pusbit Universitas Terbuka, Jakarta.

Suciati dan Irawan, P. (2001). *Teori Belajar dan Motivasi*. PAU-PPAI, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Departemen Pendidikan Nasional, Jakarta.

Sudirman, dkk. (1987). *Ilmu Pendidikan*. Remaja Karya, Bandung.

Tabel 1 Daftar Nilai Mahasiswa yang Meregistrasi Matakuliah Analisis II m.u. 2006.1

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nilai
1.	013986709	ELSA SOFIARI	A
2.	014056305	SUKRISNO	A

3.	010507742	YOVANI TANEY	B
4.	013306114	SUKMA ARIANI	B
5.	011060307	LIAU SAU JUNG	C
6.	011163759	ASEP JAENUDIN	C
7.	013932065	AWAT NUGRAHA	C
8.	014385327	DONA MULYANI	C
9.	014416335	DIANA SUZANA MANDAR	C
10.	004848984	ANNIE A ANDRIES	D
11.	010442229	AHMAD FAUZI	D
12.	012662338	DEASY NORMASARI	D
13.	012825892	ABDUL AZIZ	D
14.	013537822	YUSRON	D
15.	013909603	TONY SYAIFUL KAMAL	D
16.	012815497	SANGA KEDON GASPAR	E
17.	014223924	SIRAJUDDIN	E

Tabel 2 Daftar Nilai Mahasiswa yang Meregistrasi Matakuliah Analisis II m.u. 2006.2

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nilai
1.	010507742	YOVANI TANEY	E
2.	004848984	ANNIE A ANDRIES	C
3.	013909603	TONY SYAIFUL KAMAL	D
4.	014223924	SIRAJUDDIN	B
5.	014495821	ANA YUNI ASTUTI	A
6.	014033609	ZULFI IRAWAN	B
7.	014294116	AGUS MAULANA	B
8.	014319819	KHOIRUNNASIKIN	B
9.	014433499	M. ALFIAN	B
10.	014467363	HARINUAN PAKPAHAN	B
11.	014007818	MUHAMAD HADYAN FATCHANI	C
12.	014434333	MEILINA ADRIANI	C
13.	014518026	BOBON SOBANDI	C
14.	010439933	ARIF CAHYADI	D
15.	013371261	RISKY MEGALIA A	D
16.	013464516	ARIF ROSIDI	D
17.	013793309	LAILA FAJRIYYAH	D
18.	005210686	MOHAMAD DZIKRULLAH	E
19.	011129305	HENDRI HARDIAN	E
20.	012751513	ANA AGUSTINA KUSHAYANTI	E
21.	012803224	SUCIPTO	E
22.	013811098	YONATHAN RINDAYANTO ONGKO	E
23.	014167066	RIDWAN HASAN	E
24.	014418457	SAKUAN	E

Tabel 3 Daftar Nilai Mahasiswa yang Meregistrasi Matakuliah Analisis II m.u. 2007.1

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nilai

1.	013909603	TONY SYAIFUL KAMAL	E
2.	011129305	HENDRI HARDIAN	D
3.	013811098	YONATHAN RINDAYANTO ONGKO	E
4.	014418457	SAKUAN	E
5.	014393094	NILLA AMGRIA FITRI	A
6.	014135084	JADIUN MANALU	C
7.	014531476	NOVRITA	C
8.	014188654	MOKHSEN UMASUGI	D
9.	014839019	SUJATNOKO	D
10.	004065654	HERI SUMARYUNUS H	E
11.	013906339	KHOLIS SHOTUL MAGHFIROH	E
12.	013908769	SOFYAN A ULI	E
13.	014083674	AKHMAD SUBEKHI	E
14.	014426572	ADI ARDIANSYAH	E
15.	014521601	TIKA ROSTIKA	E
16.	014577012	NUR KHODIJAH	E
17.	014632244	ZAELANI	E
18.	014837473	TRI JAYA WIDAGDO	E

Tabel 4 Daftar Nilai Mahasiswa yang Meregistrasi Matakuliah Analisis II m.u. 2007.2

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nilai
1.	011129305	HENDRI HARDIAN	E
2.	013811098	YONATHAN RINDAYANTO ONGKO	D
3.	014162977	CHRISTIAN ADI DHARMAWAN	C
4.	014839019	SUJATNOKO	E
5.	014837473	TRI JAYA WIDAGDO	E
6.	014840013	SLAMET ARIFIN	A
7.	014958379	INDRA WADI	B
8.	013930498	LIE WIRIYUS JANUAR	D
9.	003077695	PURWOKO SUSILO	E
10.	005073432	NURON HAFIZHOH	E
11.	009237151	DJOKO WINARSO	E
12.	013528325	ADOLF ERLANGGA LA	E
13.	014181533	IRVIANI APRILIAH	E
14.	014290728	RULLY IRAWAN	E
15.	014780534	STI MAR'ATUS SA'ADAH	E

Tabel 5 Daftar Mahasiswa Meregistrasi Matakuliah Analisis II m.u. 2008.1

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nama UPBJJ
1.	014 135 084	Jadiun Manalu	Medan
2.	014 372 123	Achmad Fauzi	Batam
3.	010 302 251	Lydia Mariana	Pangkal Pinang
4.	014 573 061	Suwarno	Jakarta
5.	014 407 716	Ari Setioso Sugiono	Jakarta
6.	014 290 728	Rully Irawan	Jakarta
7.	014 083 674	Akhmad Subekhi	Jakarta
8.	014 035 594	Erlan Budiawan	Jakarta
9.	013 908 769	Sofyan A Uli	Jakarta
10.	013 818 194	Ferly Ibrahim	Jakarta
11.	013 464 516	Arif Rosidi	Jakarta
12.	012 631 319	Anda Lusia	Jakarta
13.	015 032 577	Irpan Nul Muis	Bandung
14.	012 751 513	Ana Agustina Kushayanti	Bandung
15.	004 506 973	Yurian Atma Noer	Banjarmasin
16.	014 628 624	Darminto	Surabaya
17.	014 346 848	Elisabeth Wibowo	Surabaya
18.	013 897 594	Dira Wirawan	Surabaya
19.	014 311 807	Marlina Sahuleka	Ambon

Tabel 6 Daftar Kehadiran Mahasiswa

No.	NIM	Nama Mahasiswa	Nama UPBJJ
1.	014 290 728	Rully Irawan	Jakarta
2.	014 083 674	Akhmad Subekhi	Jakarta
3.	014 035 594	Erlan Budiawan	Jakarta
4.	013 464 516	Arif Rosidi	Jakarta
5.	012 631 319	Anda Lusia	Jakarta

Keterbatasan Memori dan Implikasinya dalam Mendesain Metode Pembelajaran Matematika

Endah Retnowati, M.Ed.
Jurusan Pendidikan Matematika
Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Proses kognitif melibatkan tiga unsur utama dalam sistem memori manusia, yaitu memori penginderaan, memori pekerja dan memori jangka panjang. Memori penginderaan dan memori bekerja mempunyai keterbatasan dalam menyimpan (menahan) informasi, baik jumlah maupun durasinya. Memori penginderaan berfungsi untuk mempersepsikan informasi yang diterima oleh alat indera, yang kemudian akan dipilih dan diberi makna oleh memori bekerja. Memori pekerja berfungsi untuk mengorganisasikan informasi tersebut, membentuk (mengkonstruksi) pengetahuan dan menyimpannya ke memori jangka panjang. Memori jangka panjang mempunyai ketakterbatasan dalam menyimpan informasi. Informasi di dalam memori jangka panjang berperan penting dalam proses-proses kognitif selanjutnya.

Proses kognitif dalam sistem memori ini menentukan bagaimana pengetahuan dibangun dan disimpan dengan baik oleh seseorang. Oleh karenanya, prinsip kerja (fungsi) dari setiap unsur di sistem memori berkonsekuensi dalam penyajian materi pembelajaran. Sedangkan, teknik penyajian materi pembelajaran turut menentukan keefektifan metode pembelajaran yang dilaksanakan. Artikel ini akan membahas sistem memori yang terlibat dalam proses pembentukan pengetahuan dan implikasinya dalam mendesain metode pembelajaran matematika efektif.

Kata kunci: proses kognitif, konstruksi pengetahuan, metode pembelajaran

A. Pendahuluan

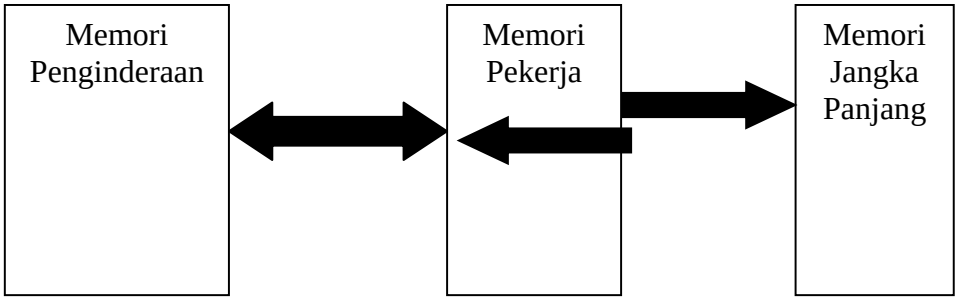
Belajar adalah suatu perubahan susunan pengetahuan yang telah disimpan di dalam memori melalui proses pengkonstruksian pengetahuan baru atau rekonstruksi pengetahuan lama. Proses belajar atau pembelajaran melibatkan sistem memori (disebut juga sistem kognitif) untuk mengolah informasi yang sedang dipelajari. Sehingga, untuk mendesain metode pembelajaran yang efektif, perlu memperhatikan bagaimana proses kognitif dalam membangun pengetahuan. Teori beban kognitif mengembangkan metode-metode pembelajaran berdasarkan karakter dan fungsi sistem memori dalam mengorganisasikan informasi (Pass, Renkl, & Sweller, 2004; Sweller, 2004). Artikel ini membahas proses kognitif dalam sistem

memori, implikasinya dalam mendesain metode pembelajaran dan contoh-contoh metode pembelajaran matematika menggunakan prinsip yang dikembangkan berdasarkan sistem kognitif manusia.

B. Proses Kognitif

Informasi yang diterima oleh manusia diolah oleh suatu sistem memori yang ada di otak untuk dapat dikenali, diorganisasikan dan direspon. Pemrosesan informasi untuk menjadi pengetahuan yang tersimpan dalam memori manusia atau proses pengolahan pengetahuan di memori disebut dengan proses kognitif. Proses ini disebut juga proses mental kognitif.

Diskusi dan penelitian mengenai proses kognitif sudah dimulai sejak puluhan tahun yang lalu. Shiffrin dan Atkinson (1969) menyusun diagram sistem pemrosesan informasi yang dapat disederhanakan sebagai berikut:



Gambar *1 . Modal Model (diadaptasi dari Shiffrin & Atkinson, 1969, p. 180)*

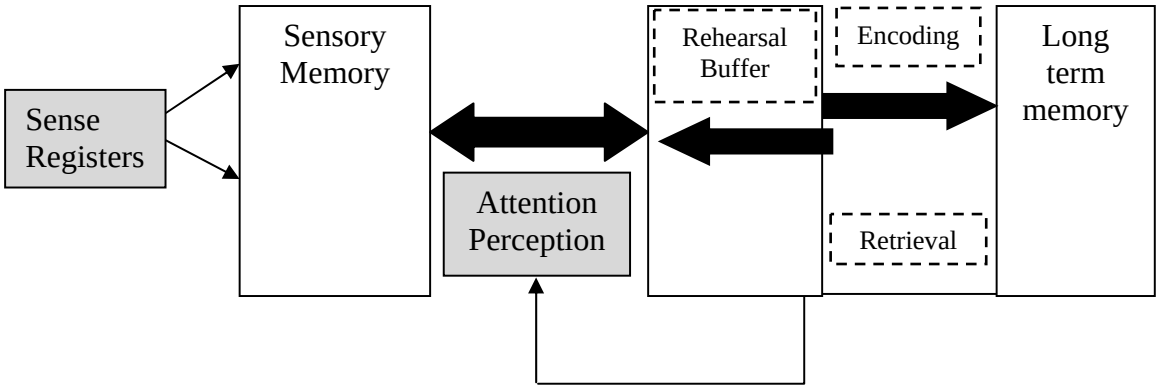
Diagram sistem pemrosesan informasi yang paling mendasar ini kemudian dikenal dengan *Modal Model* (Bruning, Scraw, Norby, & Ronning, 2004). Diagram ini telah dikembangkan lebih lanjut oleh J. Anderson (Teori ACT), A. Baddeley (Klasifikasi memori pekerja) dan K. Ericcson (Pengembangan keahlian/ekspertis). Karakter dan fungsi dari masing-masing bagian sistem kognitif tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Memori Penginderaan (*Sensory Memory*)

Memori penginderaan adalah komponen paling pertama yang menerima informasi. Untuk memberikan persepsi dan identifikasi awal informasi yang diterima, memori

ini mengubah informasi dalam bentuk signal-signal stimulus. Penelitian menunjukkan bahwa memori ini menahan signal-signal tersebut untuk memberikan persepsi dan identifikasi dalam waktu yang sangat pendek (kurang dari satu mikro detik) dan signal tersebut akan segera hilang dari memori ini karena datangnya signal-signal stimulus berikutnya (Bruning et al., 2004).

Memori penginderaan merupakan suatu sistem yang terdiri dari penerima atau penerus informasi (sense registers). Penerima informasi dikenal dengan alat pengindera, seperti mata (untuk melihat dan menerima pandangan/informasi visual), telinga (untuk mendengar dan menerima suara/informasi auditori), hidung (untuk membau), lidah (untuk merasa) dan kulit (untuk meraba). Meskipun setiap alat pengindera tersebut mempunyai kemampuan yang berbeda, sebagian besar peneliti lebih memfokuskan pada penglihatan dan pendengaran.



Gambar *2. Alat pengindera, perhatian dan persepsi yang terlibat dengan sensory memory*

Ada tiga proses yang terjadi ketika memori pengindera menerima suatu informasi: perhatian, persepsi atau pengenalan pola dan pemberian makna. Perhatian adalah langkah pertama yang dilakukan oleh memori pengindera untuk mendeteksi dan memperhatikan datangnya suatu stimulus. Seseorang memberikan perhatian terhadap suatu informasi dengan mengalokasikan muatan kognitif terhadap informasi tersebut. Pemberian perhatian terhadap datangnya suatu informasi dapat terjadi secara otomatis (tidak sadar) maupun secara sadar (disengaja), tergantung dari pengetahuan awal yang tersedia di memori jangka panjang. Pengetahuan awal

(*prior knowledge*) adalah informasi yang sebelumnya telah dipelajari dan disimpan di memori jangka panjang.

Di dalam memori penginderaan, informasi yang dipilih (diperhatikan) diuraikan menjadi sinyal-sinyal yang akan dipersepsikan dengan mengenali polanya, tanpa perlu memahami maknanya, menggunakan pengetahuan awal. Pengetahuan awal ini dapat berupa prototype, analisis bentuk atau deskripsi suatu bentuk. Pengetahuan awal ini menentukan bagaimana memori pengindera mempersepsikan suatu stimulus. Apabila perhatian untuk mengindera stimulus tersebut ditingkatkan, maka alat pengindera akan mengumpulkan lebih banyak informasi yang berkaitan dan mengabaikan informasi yang tidak berkaitan. Kemudian, sistem ini akan mengirimkan ke sistem memori berikutnya (*working memory)* untuk memberikan dan mengorganisasikan makna informasi tersebut. Memori penginderaan tidak berfungsi untuk mempelajari informasi, tetapi memperhatikan informasi dan mengenali polanya.

Implikasi dari fungsi memori penginderaan ini antara lain: (1) memori pengindera hanya dapat mengolah informasi dalam jumlah terbatas, sehingga penyajian materi pembelajaran perlu didesain sedemikian sehingga informasi-informasi kunci dapat diterima oleh siswa dengan baik; (2) memori penginderaan dapat menerima informasi dari kelima alat indera, sehingga mengkombinasikan sajian informasi, misalnya, visual (tertulis) dan verbal, dapat meningkatkan jumlah informasi yang mampu diterima oleh memori pengindera.

2. *Working Memory* (Memory Pekerja)

Ketika saat ini kita sedang memikirkan suatu informasi, maka kita sedang menghadirkan informasi tersebut di memori pekerja. Memori pekerja sebelumnya dikenal dengan memori jangka pendek (*short term memory*). Secara fungsi, memori ini bertugas untuk mengorganisasikan informasi, memberi makna informasi dan membentuk pengetahuan untuk disimpan di memori jangka panjang, sehingga disebut memori pekerja. Secara kapasitas, memori ini hanya dapat menyimpan

(menahan) informasi dalam waktu pendek, sehingga disebut memori jangka pendek.

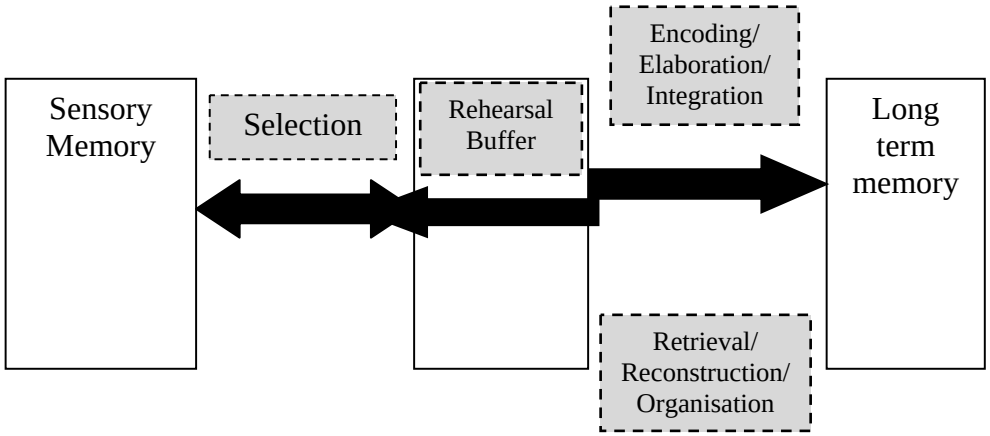
Berikut ini adalah suatu permasalahan yang mungkin ditemui dalam kehidupan sehari-hari:

Jika tanggal 4 Juni 2008 jatuh pada hari Senin, jatuh pada hari apakah tanggal 27 Juni 2008?

Bagi siswa yang tidak seringa tau belum pernah mengerjakan permasalahan seperti di atas, permasalahan tersebut adalah sesuatu yang awam. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, ada beberapa informasi yang perlu diolah secara simultan dengan mengaitkan satu informasi dengan informasi yang lain. Pada umumnya, siswa tidak dapat menyelesaikannya secara langsung meskipun permasalahan tersebut terkesan sederhana. Contoh permasalahan tersebut juga menunjukkan bahwa memori pekerja kita mempunyai kapasitas terbatas untuk mengolah informasi awam secara simultan.

Bahwa memori pekerja mempunyai kapasitas yang terbatas, yaitu sekitar 5 sampai dengan 9 elemen informasi dalam satu waktu, telah ditunjukkan oleh Robert Miller (1956). Dalam penelitiannya, Miller menyajikan kata-kata yang susunanya tidak bermakna dan kemudian meminta responden untuk menyatakannya kembali. Hasilnya menunjukkan bahwa sebagian besar responden hanya mampu mengingat antara lima sampai dengan sembilan kata. Penelitian yang sama diulang oleh Peterson dan Peterson pada tahun 1959 (dalam Bruning et al., 2004) yang menyatakan bahwa banyaknya informasi yang dapat ditahan oleh memori pekerja akan semakin menurun setelah beberapa waktu. Dengan kata lain, memori pekerja kita mempunyai keterbatasan kapasitas dan durasi dalam mengolah informasi secara simultan.

Gambar 3 di bawah ini dapat diilustrasikan sebagai berikut. Informasi yang telah dikenali polanya oleh memori penginderaan dan dipilih untuk diberi makna dikirim ke memori pekerja melalui proses *selection*. Memori pekerja akan memberi makna informasi tersebut dengan memanggil (*retrieval*) pengetahuan awal yang telah disimpan di memori jangka panjang. Informasi yang telah diolah dalam memori pekerja akan disimpan ke dalam memori jangka panjang melalui koding (*encoding*) pengetahuan baru atau dengan mengelaborasi (*elaboration*) atau mengintegrasikan (*integration*) pengetahuan baru dengan pengetahuan yang telah ada. *Rehearsal* adalah suatu proses pengulangan informasi baik dengan dilafalkan maupun tidak.



Gambar *3. Aktivitas yang terlibat dalam working memory*

Jika memori jangka panjang tidak cukup mempunyai pengetahuan awal yang menjadi prasyarat untuk memaknai dengan tepat informasi yang sedang diolah, maka memori pekerja akan kesulitan memberikan makna dan mengkonstruksi pengetahuan tersebut sebagai pengetahuan. Dengan kata lain, memori pekerja kelebihan beban memahami permasalahan. Namun, jika terdapat pengetahuan prasayarat (*prerequisite knowledge*) yang cukup untuk mengolah informasi yang sedang dihadirkan, maka memori pekerja akan menjadi mudah mengolah informasi tersebut. Dengan kata lain, memori pekerja mempunyai cukup kapasitas untuk memahami permasalahan sehingga ada ruang di memori perkerja yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi penyelesaian permasalahan tersebut.

Teori beban kognitif (Pass et al., 2004; Sweller, 2004) menyebutkan bahwa beban kognitif dalam memori pekerja dapat disebabkan oleh tiga sumber yaitu: (1) beban kognitif instrinsik (*intrinsic cognitive load*); (2) beban kognitif ekstrinsik (*extrinsic cognitive load*) dan (3) beban kognitif konstruktif (*german cognitive load*).

Beban kognitif instrinsik ditentukan oleh tingkat kekompleksan informasi atau materi yang sedang dipelajari, sedangkan beban kognitif ekstrinsik ditentukan oleh teknik penyajian materi tersebut (Sweller & Chandler, 1994). Beban kognitif intrinsik tidak dapat dimanipulasi karena sudah menjadi karakter dari interaktifitas elemen-elemen di dalam materi. Sehingga, beban kognitif intrinsik ini bersifat tetap. Namun, beban kognitif ekstrinsik dapat dimanipulasi. Teknik penyajian materi yang baik, yaitu yang tidak menyulitkan pemahaman, akan menurunkan beban kognitif ekstrinsik. Pemahaman suatu materi dapat mudah terjadi jika ada pengetahuan prasyarat yang cukup yang dapat dipanggil dari memori jangka panjang. Jika pengetahuan prasyarat ini dapat hadir di memori pekerja secara otomatis, maka beban kognitif ekstrinsik akan semakin minimum. Semakin banyak pengetahuan yang dapat digunakan secara otomatis, semakin minimum beban kognitif di memori pekerja. Dalam hal ini, kapasitas memori pekerja menjadi semakin meningkat.

Materi yang secara intrinsik mempunyai beban berat, jika disajikan dengan baik, maka proses kognitif di memori pekerja akan berjalan dengan lancar. Sebaliknya, meskipun beban kognitif intrinsik suatu materi adalah ringan, jika disajikan dengan tidak baik, seperti terlalu banyak atau acak, maka proses kognitif di memori pekerja akan berjalan dengan lambat atau berhenti.

Jika memori pekerja telah dipenuhi oleh beban kognitif intrinsik dan ekstrinsik, maka tidak ada muatan yang tersisa untuk beban kognitif konstruktif. Beban kognitif konstruktif adalah beban kognitif yang diakibatkan oleh proses kognitif yang relevan dengan pemahaman materi yang sedang dipelajari dan proses konstruksi (akuisisi skema) pengetahuan. Jika tidak ada beban kognitif konstruktif, berarti memori pekerja tidak dapat mengorganisasikan, mengkonstruksi,

mengkoding, mengelaborasi atau mengintegrasikan materi yang sedang dipelajari sebagai pengetahuan yang tersimpan dengan baik di memori jangka panjang. Dengan kata lain, informasi yang disajikan tidak dipelajari dengan baik. Informasi tersebut mungkin berhasil disimpan di memori jangka panjang, tapi mungkin akan sulit dipanggil kembali atau tidak terkoneksi dengan pengetahuan yang relevan. Hal ini berakibat pada lambatnya proses pembelajaran yang terkait di masa selanjutnya.

Proses kognitif konstruktif tersebut terjadi secara otomatis jika memang ada muatan di memori pekerja yang kosong akibat dari minimalnya beban kognitif intrinsic dan ekstrinsik. Tetapi, dapat dipengaruhi oleh motivasi dan sikap siswa terhadap materi yang dipelajari. Tanpa adanya motivasi dan sikap yang baik terhadap proses pemelajaran, meskipun materi telah dimanajemen dengan baik, hasil pembelajaran mungkin tidak maksimal.

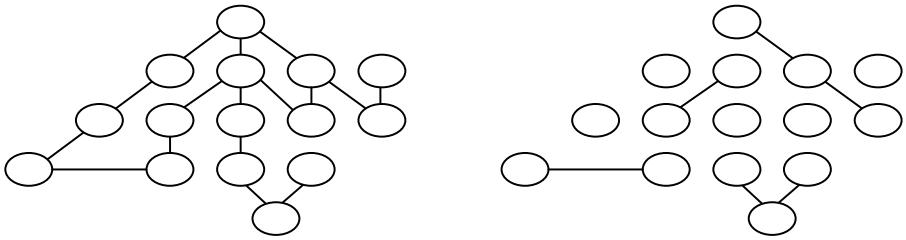
Implikasi dari fungsi memori pekerja dalam mendesain metode pembelajaran antara lain: (1) perlu memahami tingkat kekompleksan materi yang akan dipelajari atau banyaknya informasi yang akan disampaikan; (2) perlu mengetahui tingkat pengetahuan awal siswa yang akan mempelajari materi yang disampaikan; (3) meminimalkan jumlah dari beban kognitif intrinsik dan ekstrinsik; dan (4) memfasilitasi proses yang meningkatkan beban kognitif konstruktif yaitu akuisisi dan konstruksi skema pengetahuan.

3. *Long Term Memory* (Memori Jangka Panjang)

Memori jangka panjang diasumsikan sebagai tempat penyimpanan pengetahuan secara permanen, karena pengetahuan dapat ditahan di dalam memori ini dalam waktu lama. Memori ini juga mempunyai kapasitas yang tidak terbatas (Pass et al., 2004; Sweller, 2004). Hal ini dapat ditunjukkan dengan kemampuan kita untuk menyimpan informasi sejak lahir sampai akhir hayat. Ketika kita merasa sulit menyimpan atau mengingat informasi, yang menjadi masalah bukan kapasitas memori jangka panjang kita terbatas. Namun, kapasitas memori pekerja yang

terbatas dalam proses kognitif meyimpan pengetahuan atau memanggil pengetahuan.

Memori ini dapat menyimpan pengetahuan deklaratif, prosedural dan kondisional (Bruning et al., 2004). Pengetahuan tersebut tersimpan dalam bentuk skema (*schema/schemata*). Bagaimana informasi diproses sangat tergantung dari posisi skema-skema pengetahuan di dalam memori jangka panjang ini. Model-model skema di dalam memori jangka panjang dapat digambarkan pada Gambar 4.



(1) (2)

Gambar *4. Model pengetahuan di memori jangka panjang*

Susunan skema di memori jangka panjang menggambarkan kemampuan seseorang di suatu bidang. Gambar 4 (1) menunjukkan skema-skema yang saling terkait, tapi Gambar 4 (2) menunjukkan skema-skema yang tersimpan tidak berkaitan. Seorang ahli dalam bidang tertentu akan mempunyai susunan skema yang baik di dalam memorinya, sehingga memudahkannya untuk mentransfer ke materi baru atau penyelesaian masalah.

Implikasi dalam mendesain metode pembelajaran antara lain (1) materi pembelajaran disajikan secara hirarkis; (2) pengetahuan disimpan secara baik sehingga pemahaman mendalam; dan (3) memfasilitasi automatisasi skema yaitu pengetahuan yang telah disimpan perlu dilatih berulang-ulang agar dapat dimunculkan di memori pekerja secara otomatis ketika menyelesaikan suatu permasalahan, karena pengetahuan yang dihadirkan secara otomatis tidak menambah beban di memori pekerja.

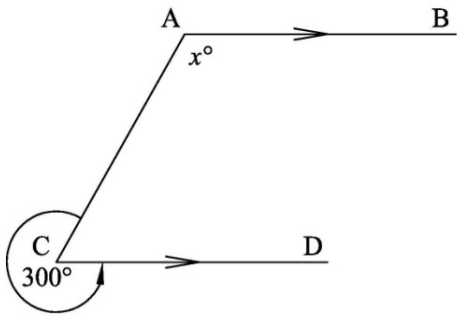
C. Metode-Metode Pembelajaran Berdasarkan Teori Beban Kognitif

Pembelajaran yang bermakna, menurut Mayer (1999), adalah suatu proses pembelajaran yang menghasilkan kemampuan siswa untuk mentransfer pengetahuan yang telah diperoleh. Dengan demikian, metode pembelajaran yang efektif adalah metode yang mendorong siswa untuk membangun pengetahuan dengan baik, sehingga dapat menggunakannya unutk menyelesaikan masalah baru.

Teori beban kognitif yang diuraikan di atas menghasilkan pemahaman bahwa metode pembelajaran yang efektif adalah metode pembelajaran yang meminimalkan beban kognitif ekstrinsik atau memaksimalkan beban kognitif konstruktif. Dengan manajemen beban kognitif ini, memori pekerja dapat mengorganisasikan materi yang dipelajari dengan lancar.

Metode-metode untuk meminimalkan beban kognitif ekstrinsik antara lain dengan menghindari efek perhatian terpisah dan efek ulangan dalam menyajikan materi pembelajaran (Sweller, 1999). Efek perhatian terpisah diakibatkan oleh penyajian dua sumber informasi secara terpisah, padahal untuk memahaminya informasi tersebut harus diintegrasikan. Contohnya adalah dalam Gambar 5 berikut.

Problem: Find the value of x and give reasons for each step.



Solution:

1. ∠ACD = 360° - 300° = 60°

   Reason: angles formed by lines running to the same point sum to 360°

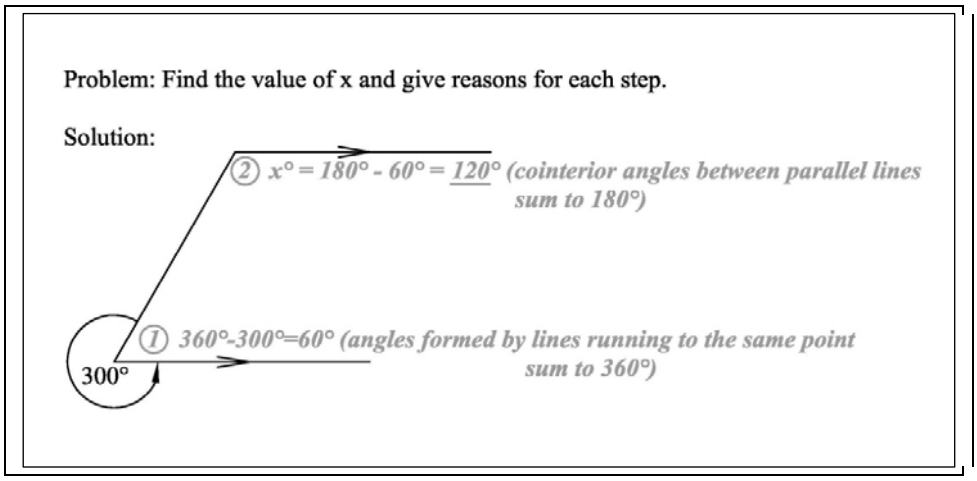
2. ∠BAC = 180° - ∠ACD = 180° - 60° = 120°

   Reason: cointerior angles between parallel lines sum to 180°

3. Therefore, x = 120°

Gambar 5. *Efek perhatian terpisah (diambil dari Retnowati, Sweller & Ayres, 2008)*

Dalam mempelajari contoh soal di atas, siswa harus mengintegrasikan informasi pada gambar dan informasi pada langkah-langkah penyelesaian. Aktivitas mengintegrasikan ini menaikkan beban kognitif ekstrinsik. Alternatifnya adalah penyajian secara integrative seperti pada Gambar 6.



Gambar *6. Teknik integratif (diambil dari Retnowati, Sweller & Ayres, 2008)*

Penggunaan contoh soal yang disajikan secara integratif antara gambar dan teks (verbal atau tertulis) yang berasosiasi telah ditunjukkan kefektifannya dalam pembelajaran oleh berbagai penelitian (Chandler & Sweller, 1992, Retnowati, Sweller & Ayres, 2008; Moreno & Mayer, 1999; Tarmizi & Sweller, 1988; Tindall-Ford, Chandler, & Sweller, 1997; Van Gog, Paas, & Van Merrienboer, 2006). Namun, mengintegrasikan dua gambar dan ilustrasi yang berasosiasi perlu menghindari efek ulangan. Efek ini terjadi apabila gambar telah secara implisit memuat ilustrasi mengenai gambar tersebut (*self-explained figure*). Selain itu, efek ulangan ini juga dapat terjadi jika menyajikan informasi yang telah diketahui dengan baik oleh siswa (Chandler & Sweller, 1992). Dalam hal ini efek ulangan terjadi karena ada informasi yang berlebih, yaitu informasi yang disajikan dan pengetahuan yang berisi sama dengan informasi tersebut.

Metode pembelajaran menggunakan contoh soal yang disusun dengan meminimalkan beban kognitif ekstrinsik seperti dibahas diatas, perlu disertai dengan teknik yang mendorong beban kognitif konstruktif. Misalnya dengan menyajikan pasangan-pasangan contoh soal – permasalahan (*example – problem pairs*). Dalam metode ini, siswa difasilitasi dengan satu paket pasangan contoh dan soal. Contoh yang disajikan sebaiknya terdiri dari beberapa jenis dan soal yang diberikan adalah soal yang sejenis dengan contoh yang diberikan. Sehingga, siswa setelah mempelajari prosedur dalam contoh, siswa diberi fasilitas untuk mengulangnya dan

mengkonstruksi pengetahuan melalui penyelesaian soal yang mengikutinya. Metode ini telah dibuktikan kefektifannya dalam berbagai penelitian (lihat Atkinson, Derry, Renkl & Wotham, 2000).

D. Penutup

Dari diskusi mengenai sistem memori dan terutama mengenai proses kognitif yang terjadi di memori pekerja, dapat disimpulkan bahwa memori pekerja mempunyai keterbatasan kapasitas ketika mempelajari informasi awam. Namun, memori pekerja tidak mempunyai keterbatasan dalam memproses informasi secara kognitif, apabila tersedia pengetahuan awal yang cukup dan dapat dihadirkan secara otomatis. Keotomatisan pengetahuan ditentukan oleh susunan skema pengetahuan yang baik di memori jangka panjang dan dihasilkan oleh proses konstruksi pengetahuan yang terorganisir atau penggunaan yang berfrekuensi di memori pekerja. Untuk menyusun metode pembelajaran yang efektif, beban kognitif intrinsic, ekstrinsik dan konstruktif perlu dioptimalkan agar tidak melebihi kapasitas memori pekerja.

Daftar Pustaka:

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Worthan, D. (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181-214.

Bruning, R. H., Scraw, G. J., Norby, M. N., & Ronning, R. R. (2004). *Cognitive Psychology and Instruction* (4 ed.). Ohio: Prentice Hall.

Chandler, P., & Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology, 62*(2), 233-246.

Mayer, R. (1999). *The Promise of Educational Psychology: Teaching for Meaningful Learning* (Vol. 2). USA: Merill - Prentice Hall.

Miller, R. (1956). The Magic Number of Seven Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information. *Psychological Review, 63*, 81-97.

Moreno, R., & Mayer, R. (1999). Cognitive Principles of Multimedia Learning: The Role of Modality and Contiguity. *Journal of Educational Psychology, 91*(2), 358-368.

Pass, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2004). Cognitive Load Theory: Instructional Implications of the Interaction between Information Structures and Cognitive Architecture. *Instructional Science, 32*(1-2), 1-8.

Retnowati, E., Sweller, J. & Ayres, P. (2008). Group Work Settings: Worked Example Vs. Problem Solving. *Online Proceeding of International Conference on Cognitive Load Theory 2008*, Retrieved at http://www.uow.edu.au/conferences/ Cognitive_Load_Theory_2008/program.html

Shiffrin, R. M., & Atkinson, R. C. (1969). Storage and Retrieval Process in Long Term Memory. *Psychological Review, 76*(2), 179-193.

Sweller, J. (1999). *Instructional Design in Technical Areas*. Victoria, Australia: Australian Council for Educational Research.

Sweller, J. (2004). Instructional Design Consequences of an Analogy between Evolution by Natural Selection and Human Cognitive Architecture. *Instructional Science, 32*(1-2), 9-31.

Sweller, J., & Chandler, P. (1994). Why Some Material is Difficult to Learn? *Cognition and Instruction, 12*(3), 185-233.

Tarmizi, R. A., & Sweller, J. (1988). Guidance Suring mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 80*(4), 424-436.

Tindall-Ford, S., Chandler, P., & Sweller, J. (1997). When Two Sensory Modes Are Better Than One. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 3 No. 4,* 257 - 287.

Van Gog, T., Paas, F., & Van Merrienboer, J. (2006). Effects of Process-Oriented Worked Examples on Troubleshooting Transfer Performance. *Learning and Instruction, 16*(2), 154-164.