LAPORAN
PENELITIAN PASCASARJANA
UNIVERSITAS LAMPUNG

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDER TUJUH

Tim Peneliti

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**0029027201**	**6681987**
Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**0008116303**	**5979904**

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG

2021

HALAMAN PENGESAHAN
PENELITIAN DASAR UNIVERSITAS LAMPUNG

Judul Penelitian	: Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Tujuh
Manfaat sosial ekonomi	:
Jenis penelitian	: ☐ Penelitian Dasar ☐ Pengembangan Eksperimental
	☐ Penelitian Terapan ☑ Penelitian Pascasarjana
Ketua Peneliti	
a. Nama lengkap	: Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
b. NIDN	: 0029027201
c. SINTA ID	: 6681987
d. Jabatan fungsional	: Lektor Kepala
e. Program studi	: Matematika
f. No. HP.	: 081272097779
g. Alamat email (surel)	: muslim.ansori@fmipa.unila.ac.id
Anggota Peneliti (1)	
a. Nama lengkap	: Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D
b. NIDN	: 0008116303
c. SINTA ID	: 5979904
d. Jabatan fungsional	: Guru Besar
e. Program Studi	: Matematika
f. Nomor HP	: 08127942165
g. Alamat surel (e-mail)	: wamiliana.1963@fmipa.unila.ac.id
Mahasiswa yang terlibat	: 1. Fadila Cahya Puri (NPM: 1927031013) 2. Karina Sylvia Dewi (NPM: 1927031004)
Lokasi kegiatan	: Lab. Komputasi Jurusan Matematika
Lama kegiatan	: 6 bulan
Biaya penelitian	: Rp. 40.000.000
Sumber dana	: DIPA Unila

Bandarlampung, 21 September 2021

Mengetahui,	
Dekan FMIPA Unila	Ketua Peneliti
Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T	Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si
NIP. 197407052000031001	NIP 197202271998021001

Menyetujui,
Ketua LPPM Unila

Dr. Ir. Lusmeilia Afriani, D.E.A
NIP 196505101993032008

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

Ringkasan

Pencacahan graf telah dikenal sejak Cayley menghitung bentuk isomer dari hidrokarbon dan menemukan bahwa masalah tersebut sama dengan masalah menghitung banyaknya *tree* (pohon). Diberikan Graf G(V,E) dengan orde n (orde suatu graf adalah banyaknya titik pada suatu graf dan garis m, maka banyak graf yang dapat terbentuk, baik graf sederhana (tidak memuat loop atau garis paralel) ataupun tidak sederhana, terhubung (terdapat paling sedikit satu lintasan yang menghubungkan tiap dua titik di graf), maupun tak terhubung. Jika diberikan suatu graf G(V,E) dengan *orde* n (n adalah banyaknya titik pada suatu graf) dan garis sebanyak m, maka banyak graf yang dapat dibentuk. Graf-graf yang terbentuk tersebut dapat berupa graf sederhana yang tidak memuat *loop* atau garis paralel, atau graf tidak sederhana. Untuk graf dengan orde maksimal empat, banyaknya graf tak terhubung berlabel titik telah diinvestigasi oleh Amanto dkk pada tahun 2017. Untuk graf berorde lima, banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa garis paralel telah diinvestigasi oleh Wamiliana dkk pada tahun 2016, dan untuk graf berorde enam, banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa garis paralel yang memuat maksimal tujuh loop dan banyaknya garis non loop sebanyak genap telah diinvestigasi oleh Pertiwi dkk (2021). Sedangkan untuk graf terhubung, telah diinvestigasi graf terhubung berorde lima dengan maksimal garis paralel adalah lima dan tidak memuat *loop* (Wamiliana dkk, 2019), dan untuk graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan maksimal sepuluh garis paralel telah diinvestigasi oleh Amanto dkk (2019). Untuk graf berorde enam, banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde enam yang memuat maksimal tigapuluh garis tanpa loop telah diinvestigasi oleh Puri dkk (2021), dan banyaknya graf terhubung berorde enam berlabel titik dengan maksimal 10 loop tanpa garis paralel telah diinvestigasi oleh Wamiliana dkk (2020). Pada penelitian ini akan diinvestigasi banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh. Pada penelitian ini akan dikaji 2 kasus yaitu :

a. graf terhubung berlabel titik berorde tujuh, tanpa *loop*
b. graf terhubung berlabel titik berorde tujuh, tanpa *garis paralel.*

Salah satu tujuan dari penelitian ini untuk menghasilkan magister matematika yang mampu melakukan investigasi, mengeneralisir sifat-sifat suatu objek, menentukan suatu formula yang berhubungan dengan sifat-sifat tersebut, mampu menuliskan hasil tersebut dalam bentuk artikel, serta mampu untuk menyampaikan hasil penelitiannya di forum seminar internasional. Selain itu, hasil yang didapat nanti merupakan rumus/formula untuk menentukan banyaknya graf pada kedua kasus tersebut. Hasil tersebut akan ditulis menjadi artikel yang akan diterbitkan pada jurnal terindeks Scopus.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori Graf menjadi salah satu bidang ilmu dalam matematika yang sangat pesat perkembangannya sejak Euler memberikan solusi terhadap masalah jembatan Konigsberg. Saat ini teori graf memainkan peran yang sangat penting untuk merepresentasikan masalah-masalah di dunia nyata. Pada Teori graf dipelajari tentang objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Dua istilah dalam konsep graf yang seringkali digunakan untuk merepresentasikan masalah di dunia nyata adalah konsep vertex (titik) dan edge (garis). Titik-titik pada teori graf dapat digunakan untuk merepresentasikan kota/komputer/stasiun/bandara, dan lain lain, sedangkan garis yang menghubungkan titik-titik pada graf dapat merepresentasikan jalan/kabel/rel kereta/jalur penerbangan, dan sebagainya. Selain itu, informasi nonstruktural yang biasanya diberikan pada garis dapat mewakili jarak/waktu/ongkos/maksimal flow, dan lain sebagainya. Teori graf tidak saja hanya dapat digunakan untuk merepresentasikan masalah kehidupan sehari-hari, akan tetapi dapat juga digunakan untuk menyelesaikannya. Suatu teknik yang komprehensif untuk menyelesaikan berbagai masalah yang berhubungan dengan jaringan di berikan oleh Hsu dan Lin (2009), dan beberapa contoh terapan dari teori graf pada bidang teknik dan riset operasi diberikan Vasudev (2006). Proses pencacahan graf pertama kali dilakukan oleh Cayley pada tahun 1874 yang tertarik untuk menghitung banyaknya isomer hidrokarbon C_nH_{2n+2} dan mendapatkan bahwa penentuan banyaknya isomer tersebut berhubungan dengan menghitung banyaknya *rooted tree* Bondy dan Murty, 2000). Termotivasi oleh Cayley, Slomenski (1964) juga melakukan investigasi bentuk struktur senyawa kimia tertentu dengan graf.

Agnarsson dan Greenlaw (2007) memberikan formula/rumus untuk menentukan banyaknya graf sederhana jika diberikan n titik dan m garis, Berdasarkan hasil ini maka beberapa penelitian untuk menentukan banyaknya graf tidak sederhana (memuat *loop* atau garis paralel), berlabel titik, baik terhubung maupun tak terhubung telah diinvestigasi untuk orde lima oleh oleh Wamiliana dkk. (2016, 2019), Amanto dkk. (2018, 2019); orde enam oleh Wamiliana dkk (2020), Puri dkk (2021) dan Pertiwi dkk (2021). Pada penelitian ini akan dilakukan observasi bentuk-bentuk graf untuk menentukan rumus banyakya graf tak terhubung berlabel titik berorde tujuh.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelirtian ini adalah :

a. Menentukan formula untuk banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop* (garis paralel diperbolehkan).
b. Menentukan formula untuk banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa garis paralel (loop diperbolehkan).
c. Melibatkan mahasiswa program studi magister matematika (Fadila Cahya Puri, NPM 1807031010) dalam penelitian .

1.3 Rencana Target Luaran

1. Publikasi pada jurnal internasional bereputasi (terindeks Scopus)
2. Publikasi pada jurnal internasional atau prosiding internasional terindeks Scopus.

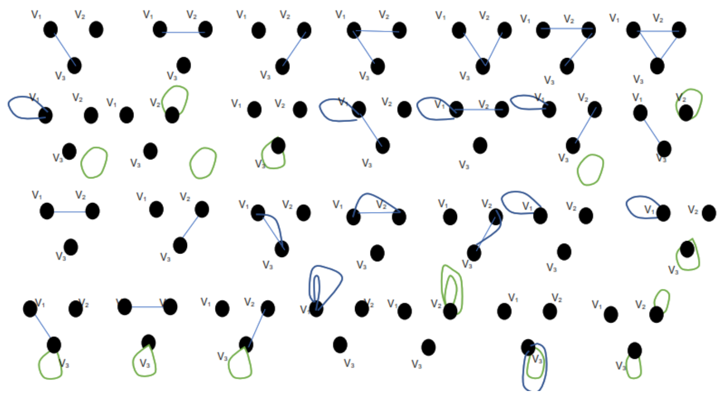
BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Sejak Euler memberikan solusi terhadap masalah Jembatan Konigsberg, Teori Graf muncul sebagai salah satu bidang yang paling aktif diinvestigasi dalam matematika. Euler merepresentasikan daratan dengan titik dan jembatan yang menghubungkan antar daratan dengan garis. Karena tidak ada ketentuan dalam pembuatan garis, apakah lurus, lengkung atau berkelok-kelok, maka secara secara umum, tidak ada seorangpun yang dapat mengklaim bahwa cara yang digunakannya adalah satu satunya cara terbaik untuk merepresentasikan graf. Oleh karena itu, sangat fleksibel untuk merepresentasikan masalah-masalah yang ada di dunia nyata dengan teori graf.

Saat ini tidak diragukan lagi bahwa banyak masalah sehari hari yang dapat direpresentasikan dengan menggunakan konsep teori graf. Pada masalah jaringan, misalnya jaringan transportasi, titik-titik pada graf dapat mewakili kota atau pertemuan jalan, dan garis-garis pada graf merepresentasikan jalan -jalan yang menghubungkan kota-kota atau pertemuan jalan tersebut. Pada garis dapat diberikan suatu informasi nonstruktural seperti jarak/waktu/ biaya, dan lain-lain. Dengan merepresentasikan jaringan transportasi dalam bentuk graf, masalah jaringan tersebut dapat divisualisasi dan lebih mudah untuk diselesaikan. Aplikasi yang komprehensif dari teori graf dalam berbagai bidang misalnya struktur data, algoritma, penjadwalan, alokasi sumber daya, dan lain lain diberikan pada Fould (1992) dan aplikasi yang berkaitan dengan desain jaringan diberikan pada Hsu dan Lin (2009).

Suatu graf G terdiri dari dua struktur *V(G)* dan *E(G)* dengan *V(G)* adalah himpunan tak kosong yang elemen-elemennya berupa titik dan *E(G)* adalah himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik di *V(G)* yang disebut sebagai garis atau *edge*. Banyaknya himpunan titik *V(G)* disebut orde dari suatu graf *G*. Suatu graf G dikatakan graf berlabel jika titik atau garisnya diberikan suatu nilai atau data tertentu. Jika tidak maka graf G dikatakan graf tak berlabel. Pelabelan graf dapat berupa pelabelan titik, pelabelan garis, atau pelabelan titik dan garis. Jika pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik dan garis, maka pelabelan tersebut disebut dengan pelabelan total.

Jika diberikan graf G(V,E) yang berorde n (n=banyaknya titik) dan garis sebanyak m, maka banyak graf berlabel titik yang dapat dibentuk, baik graf sederhana atau tidak, terhubung atau tidak. Sebagai contoh, diberikan $n = 3$ dan, $1 \leq m \leq 3$, maka **sebagian/beberapa** graf yang dapat dibentuk antara lain dapat dilihat pada Gambar 1 berikut :



Gambar 1. Beberapa graf yang terbentuk untuk n = 3 dan $1 \leq m \leq 3$

Dapat dilihat pada Gambar 1 bahwa banyak graf yang dapat dibentuk untuk n = 3 dan $1 \leq m \leq 3$. Pada gambar tersebut tidak semua graf terbentuk digambarkan. Akan tetapi, dapat dilihat bahwa graf yang terbentuk tersebut dapat berupa graf terhubung dan juga graf tak terhubung, baik hanya memuat *loop* saja, atau garis paralel saja, ataupun memuat keduanya. Semakin besar orde suatu graf dan semakin banyak garis yang diberikan, maka semakin banyak graf yang dapat dikonstruksi.

2.1 Hasil yang telah ada di literature

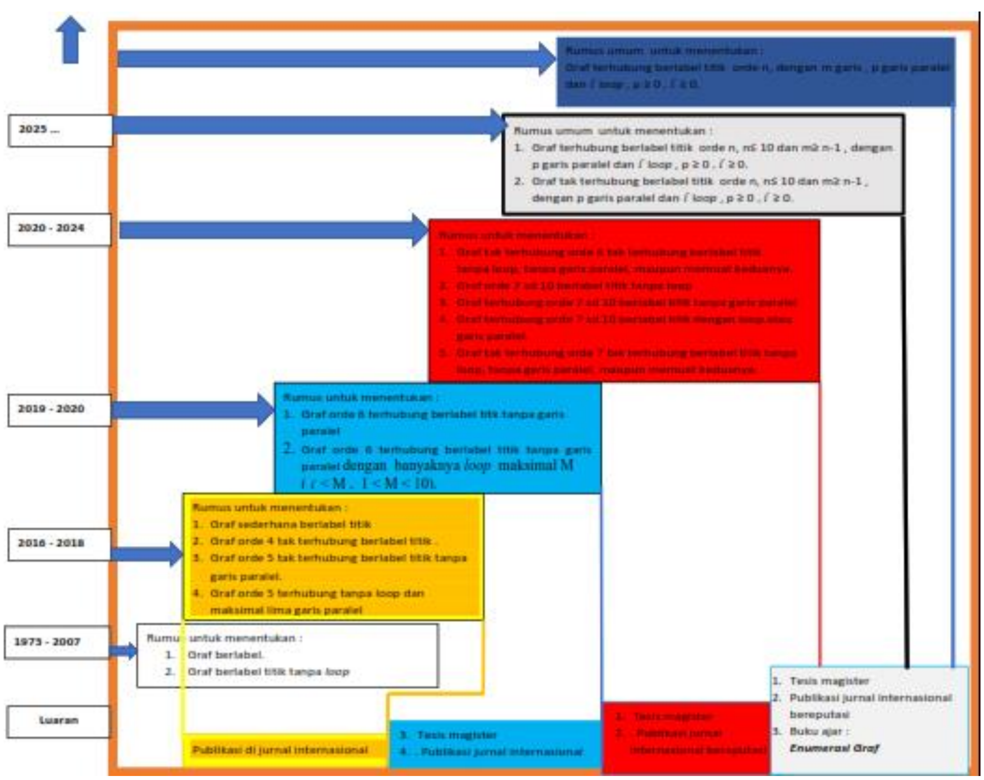
Seperti telah disebutkan sebelumnya bahwa sejak Cayley melakukan enumerasi terhadap banyaknya isomer dari hidrokarbon, maka masalah pencacahan (enumerasi) graf mulai berkembang. Menyadari bahwa stuktur isomeri hidrokarbon tersebut juga memberikan andil dalam enumerasi karena erat hubungannya dengan bentuk bentuk isomorfis suatu graf, maka pada tahun 1973 dikenalkan metode untuk melabelkan graf oleh Harary dan palmer (1973). Formula untuk menentukan banyaknya graf berlabel titik tanpa *loop* diberikan oleh Agnarsson dan Greenlaw (2007), akan tetapi sayangnya, formula tersebut berlaku untuk total keseluruhan graf, baik graf terhubung maupun graf tak terhubung. Sehingga, jika diberikan n titik dan m garis dan ingin ditentukan banyaknya graf terhubung saja, maka formula tersebut tidak dapat digunakan, begitu juga dengan graf tak terhubung. Oleh karena itu, beberapa investigasi dilakukan terkait dengan penentuan formula untuk menentukan banyaknya graf terhubung saja ataupun tak terhubung saja, dengan tambahan graf diperbolehkan untuk memuat *loop* ataupun garis paralel.

Untuk graf berlabel titik dengan orde lima telah diinvestigasi beberapa kasus oleh Amanto dkk (2018) antara lain : (a) banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa garis paralel dengan hasil

$N(G'_{5,m}) = \binom{m+4}{4} + 10 \times \binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$, (b) dan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan garis 3-paralel sebanyak enam dan tidak memuat *loop*. Untuk graf terhubung, telah diinvestigasi banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel maksimal lima dan tidak memuat *loop* oleh Wamiliana dkk (2019) dengan hasil $N(G_{n,m,4}) = 125 \times C_3^{(m-1)}$, $N(G_{n,m,5}) = 222 \times C_4^{(m-1)}$ $N(G_{n,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$, $N(G_{n,m,7}) = 110 \times C_6^{(m-1)}$, $N(G_{n,m,8}) = 45 \times C_7^{(m-1)}$, $N(G_{n,m,9}) = 10 \times C_8^{(m-1)}$ dan $N(G_{n,m,10}) = C_9^{(m-1)}$ dengan $N(G_{n,m,t})$ adalah banyaknya graf terhubung berlabel titik orde n (n = 5) dengan m garis dan t garis non parallel yang menghubungkan tiap pasangan titik yang berbeda (garis parallel dihitung satu). Pada tahun 2020 telah dilakukan investigasi terhadap graf terhubung berlabel titik berode enam yang tidak memuat garis paralel oleh Wamiliana dkk (2020), dan yang tidak memuat garis paralel oleh Puri dkk (2001). Untuk graf yang tidak terhubung berorde enam yang tidak memuat loop telah diteliti olehPutri dkk (2021), dan yang tidak memuat garis paralel oleh Pertiwi dkk (2021). Pada penelitian ini akan ditentukan rumus untuk menentukan banyaknya graf yak terhubung berlabel titik berorde enam yang akan diinvestigasi dalam dua kasus utama:

a. Graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa loop
b. Graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa garis paralel.

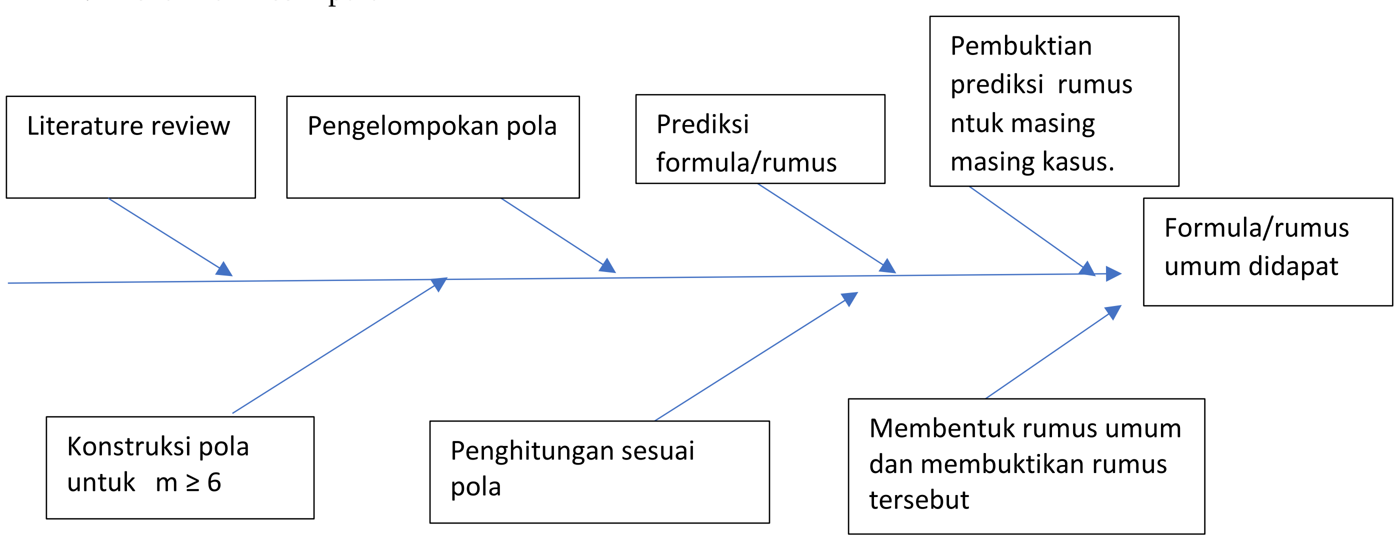
2.2 Road Map Penelitian



BAB III. METODE PENELITIAN

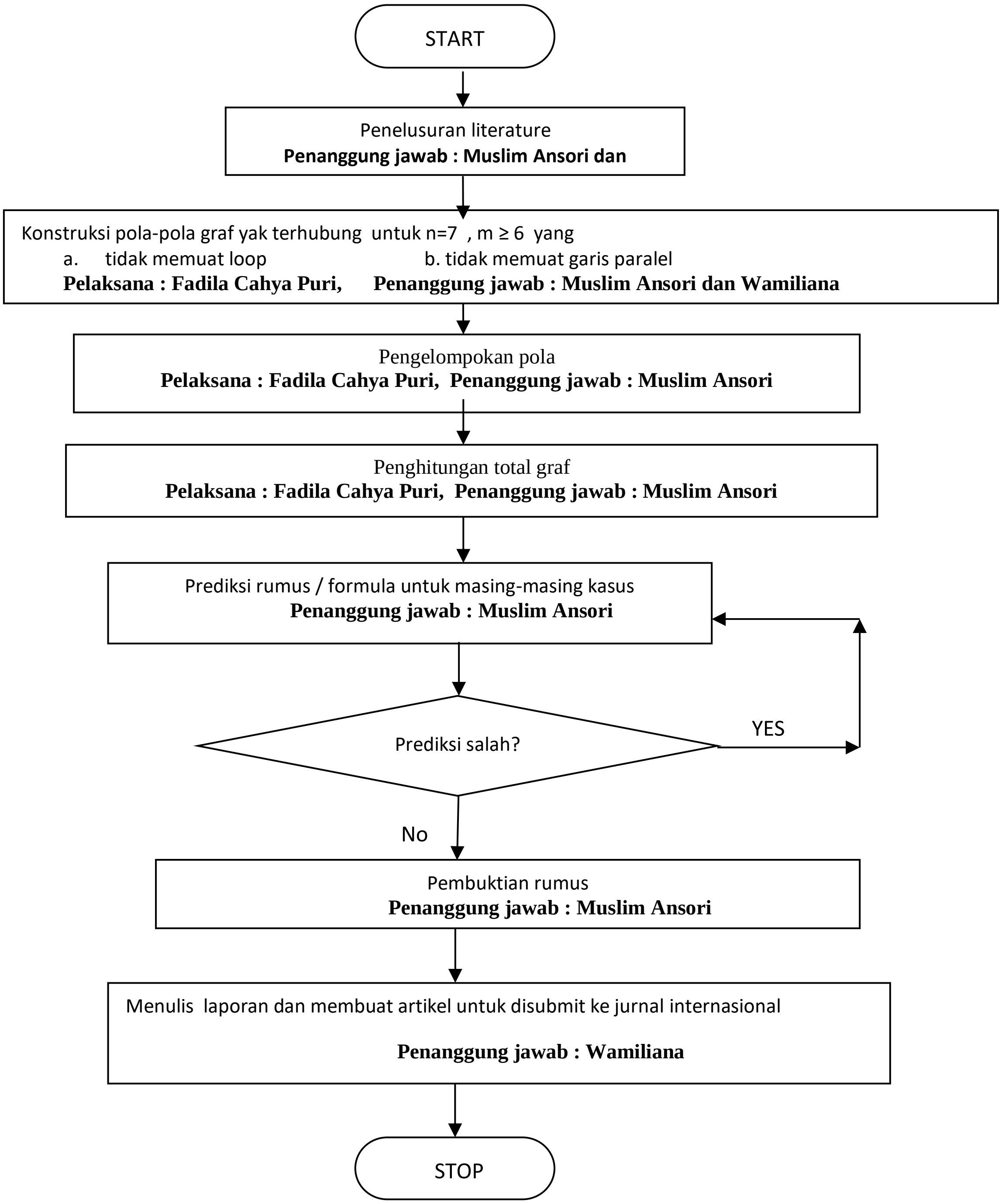
Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Pengecekan literature untuk mengetahui apakah sudah ada yang meneliti topik penelitian ini atau belum.
2. Pembuatan pola-pola graf terhubung yang mungkin terbentuk, dengan n = 7 dan m lebih besar atau sama dengan 6 (n adalah banyaknya titik dan m adalah banyaknya garis) dan graf yang terbentuk tersebut mempunyai sifat :
   a. graf terhubung yang tidak memuat *loop*
   b. graf terhubung tidak memuat garis paralel.
3. Penghitungan total graf yang terbentuk untuk masing masing kasus (a) dan (b) pada Langkah 2
4. Pengelompokan pola untuk memprediksi rumus/formula yang terbentuk
5. Penentuan formula/rumus untuk masing-masing kasus.
6. Pembuktian rumus
7. Penarikan kesimpulan



Gambar 2. Diagram tulang ikan prosedur penelitian

Catatan : pada proses prediksi rumus akan digunakan paket software Maple atau Matlab, karena dari hasil penelitian yang didapat selama ini dari Wamiliana dkk. pada tahun 2016, 2019, 2020, serta Amanto dkk tahun 2017, 2018, 2020, polynomial yang terbentuk dari pola graf sangat mungkin berorde enam atau lebih sehingga proses penghitungan untuk menentukan koefisiennya secara manual sudah tidak layak dilakukan dan diperlukan bantuan software, dalam hal ini Matlab atau Maple.



Gambar 3. Diagram alir penelitian

3.2 Tabel Ruang Lingkup Kegiatan Ketua dan Anggota

NO	Nama	Jabatan Dalam Tim Alokasi Waktu, Jam/Minggu	Tugas Dalam Tim
1.	Dr. Muslim Ansori	Ketua 10 jam/minggu	- Mengkaji jurnal-jurnal yang berhubungan dengan topik penelitian. - Memeriksa dan meneliti pola-pola graf yang dikonstruksi - Memeriksa pengelompokan pola pola graf yang dikonstruksi - Memeriksa pembuktian terhadap rumus yang diperoleh. - Menyusun draf paper untuk jurnal - Menyajikan hasil penelitian pada Seminar Internasional. - Mendokumentasi seluruh hasil penelitian yang dilakukan. - Membuat laporan
2.	Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D	Anggota 8 jam/minggu	- Mengkaji jurnal-jurnal yang berhubungan dengan topik penelitian. - Memeriksa dan meneliti pola-pola graf yang dikonstruksi - Memeriksa pengelompokan pola pola graf yang dikonstruksi - Menyusun draf paper untuk jurnal - Mensubmit draf artikel ke jurnal internasional bereputasi - Mendokumentasi seluruh hasil penelitian yang dilakukan.
3.	Fadila Cahya Puri Karina Sylvia Dewi	Anggota (mahasiswa) 8 jam/minggu	- Mengkonstruksi pola-pola yang mungkin - Mengelompokkan graf berdasarkan karakteristik yang dimiliki - Menghitung banyaknya graf yang terbentuk - Menentukan polynomial yang terbentuk - Menghitung koefisien dari polynomial denga nmenggunakan Maple atau Matlab. - Menyerahkan hasil perhitungan kepada ketua peneliti.

3.3 Luaran /outcome Penelitian

Luaran yang diharapkan dari penelitian ini adalah :

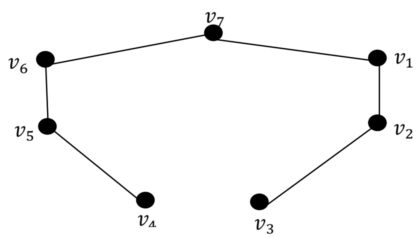
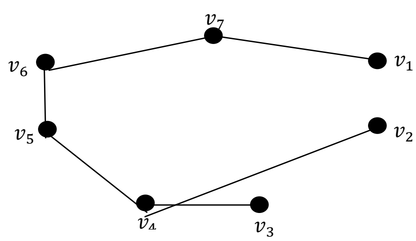
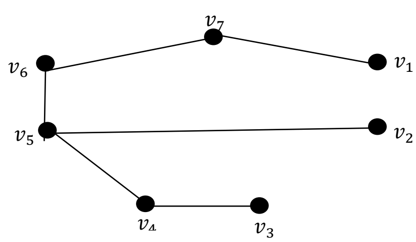
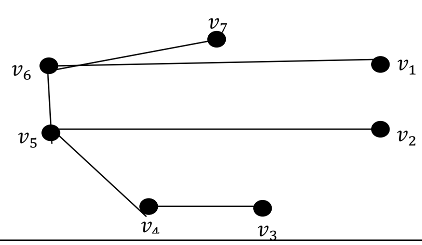
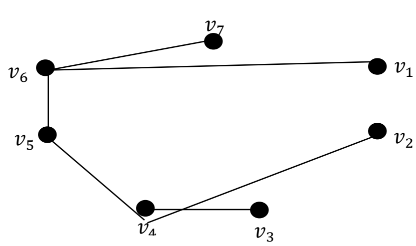
1. Publikasi pada jurnal internasional bereputasi (terindeks Scopus).
2. Publikasi pada prosiding internasional bereputasi (terindeks Scopus)

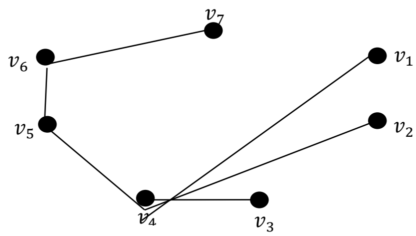
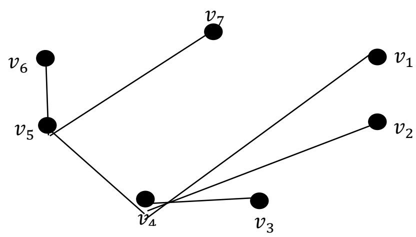
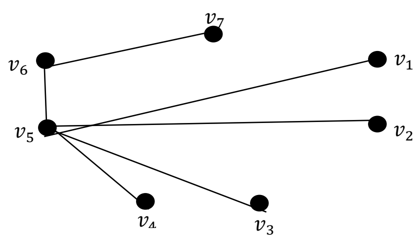
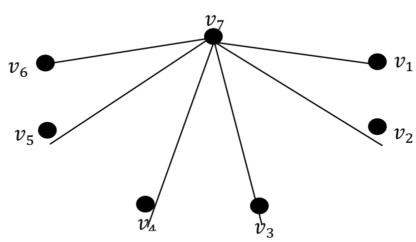
BAB IV. HASIL PENELITIAN DAN LUARAN YANG DICAPAI

4.1 Hasil Observasi Pola

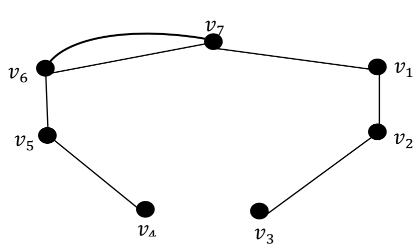
Berikut ini merupakan sebagian hasil dari observasi pola untuk graf terhubung berlabel titik orde tujuh tanpa *loop*.

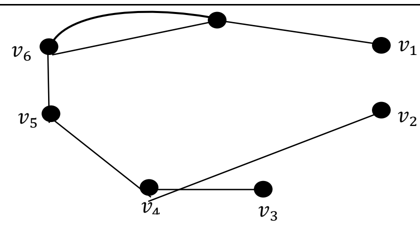
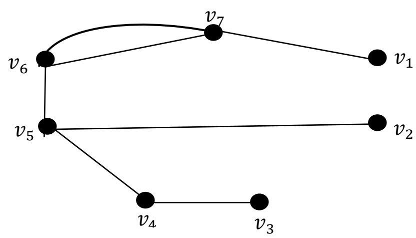
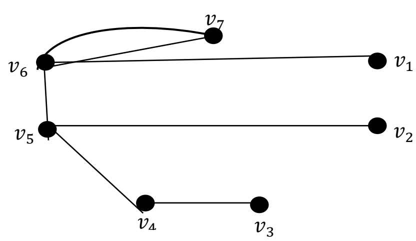
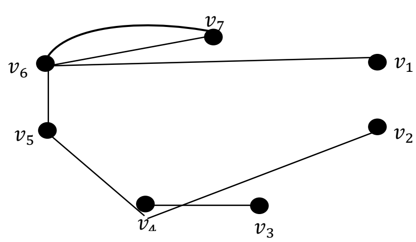
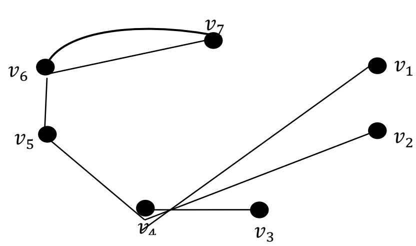
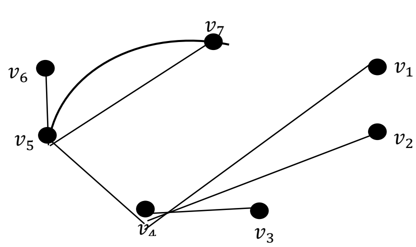
Tabel 4.1. Hasil konstruksi graf terhubung berlabel titik berorde tujuh dengan m=6 dan t=6

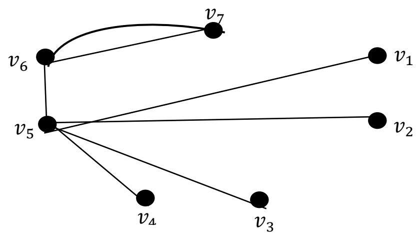
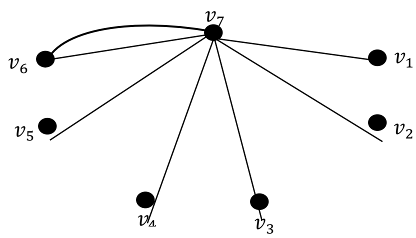
n = 7	Pola	Rumus	Banyaknya
t = 6 *m = 6*		$\frac{7!}{2}$	2520
		$C_1^7 \times C_3^6 \times C_2^3 \times 1$	420
		$C_1^7 \times C_3^6 \times 3!$	840
		$C_2^7 \times C_1^5 \times C_2^4 \times 2!$	1260
		$C_2^7 \times C_1^5 \times C_2^4 \times C_2^2$	630

		$C_1^7 \times C_2^6 \times C_3^4 \times 1$	420
		$C_1^7 \times C_1^6 \times C_2^5 \times C_3^3$	420
		$C_1^7 \times C_1^6 \times C_1^5 \times C_4^4$	210
		$C_1^7 \times C_6^6$	7
Total			6727

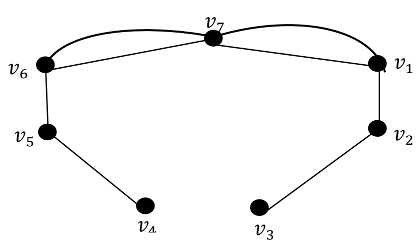
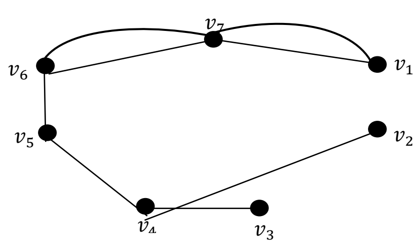
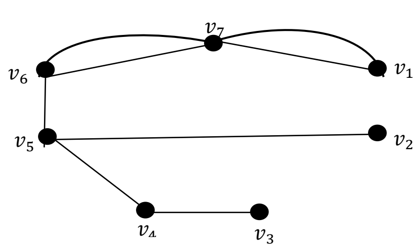
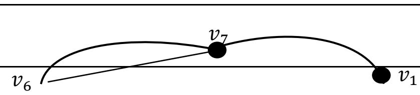
Tabel 4.2. Hasil konstruksi graf terhubung berlabel titik berorde tujuh dengan t=6 dan m = 7

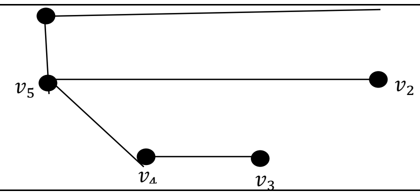
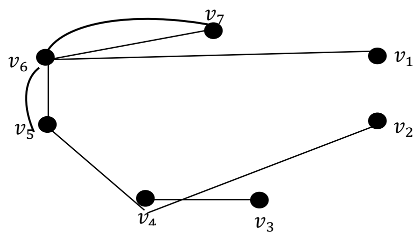
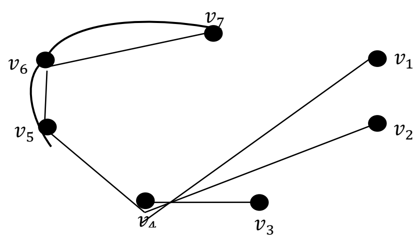
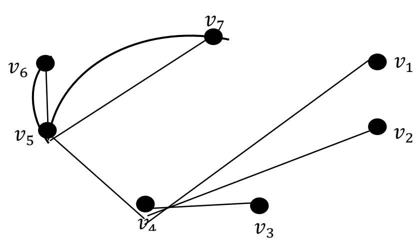
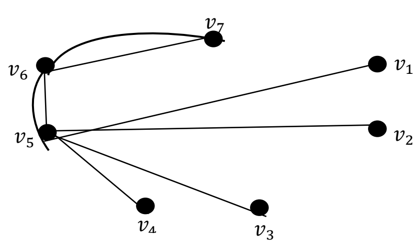
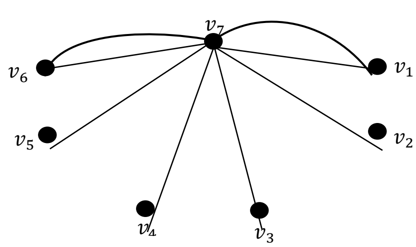
n = 7	Pola	Rumus	Banyaknya
t = 6 *m* = 7 $j_2 = 1$		$C_1^6 \times \frac{7!}{2}$	15120
	v_7		

		$C_1^6 \times C_1^7 \times C_3^6 \times C_2^3 \times 1$	2520
		$C_1^6 \times C_1^7 \times C_3^6 \times 3!$	5040
		$C_1^6 \times C_2^7 \times C_1^5 \times C_2^4 \times 2!$	7560
		$C_1^6 \times C_2^7 \times C_1^5 \times C_2^4 \times C_2^2$	3780
		$C_1^6 \times C_1^7 \times C_2^6 \times C_3^4 \times 1$	2520
		$C_1^6 \times C_1^7 \times C_1^6 \times C_2^5 \times C_3^3$	2520

		$C_1^6 \times C_1^7 \times C_1^6 \times C_1^5 \times C_4^4$	1260
		$C_1^6 \times C_1^7 \times C_6^6$	42
Total			40362

Tabel 4.3. Hasil konstruksi graf terhubung berlabel titik berorde tujuh dengan t=6 dan m= 8

n = 7 *t = 6* *m = 8* $j_2 = 2$	Pola	Rumus	Banyaknya
		$C_2^6 \times \frac{7!}{2}$	37800
		$C_2^6 \times C_1^7 \times C_3^6 \times C_2^3 \times 1$	6300
		$C_2^6 \times C_1^7 \times C_3^6 \times 3!$	12600
			

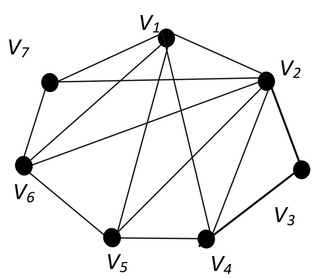
		$C_2^6 \times C_2^7 \times C_1^5 \times C_2^4 \times 2!$	18900
		$C_2^6 \times C_2^7 \times C_1^5 \times C_2^4 \times C_2^2$	9450
		$C_2^6 \times C_1^7 \times C_2^6 \times C_3^4 \times 1$	6300
		$C_2^6 \times C_1^7 \times C_1^6 \times C_2^5 \times C_3^3$	6300
		$C_2^6 \times C_1^7 \times C_1^6 \times C_1^5 \times C_4^4$	3150
		$C_2^6 \times C_1^7 \times C_6^6$	105
Total			100905

Dalam laporan ini semua pola tidak disertakan karna terlalu banyak pola yang tertentu. Selain itu, graf-graf yang isomorfik dihitung sebagai satu.

4.2 Mendeteksi graf yang isomorfik

Untuk melihat keisomorfikan suatu graf dapat dilakukan dengan mengkonstruksi suatu graf, lalu lakukan pelabelan ulang kemudian lakukan observasi dengan cara melihat derajat setiap titik, jumlah garis, dan sifat ketetanggaan dari suatu graf.

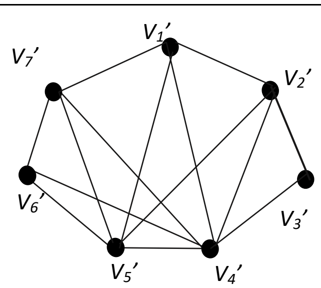
Tabel 4.4 Beberapa contoh pola yang isomorfik pada graf berorde tujuh.

<table>
<tr><th>Info graf</th><th>Pola graf</th><th>Keterangan</th><th>Isomorfik</th></tr>
<tr><td rowspan="2">n = 7
t = 12</td><td>

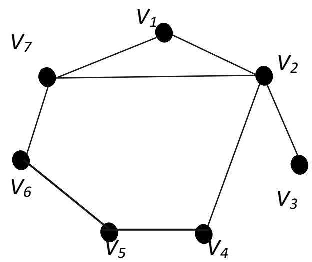
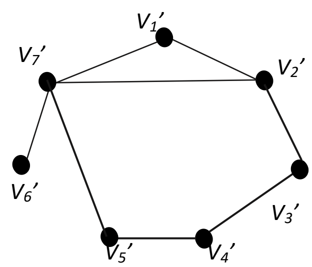
(G_1)</td><td>• Banyaknya titik : 7
• Banyaknya garis : 14
• Derajat setiap titik :
deg v_1 : 5
deg v_2 : 6
deg v_3 : 2
deg v_4 : 4
deg v_5 : 4
deg v_6 : 4
deg v_7 : 3</td><td rowspan="2">G_1 dan G_2 isomorfik karena ada f bijektif yaitu: $f : G_1 \rightarrow G_2$ sedemikian sehingga:

$f(v_1) \rightarrow (v_5')$
$f(v_2) \rightarrow (v_4')$
$f(v_3) \rightarrow (v_3')$
$f(v_4) \rightarrow (v_2')$
$f(v_5) \rightarrow (v_1')$
$f(v_6) \rightarrow (v_7')$
$f(v_7) \rightarrow (v_6')$

Rumus banyaknya graf G_1 dan G_2 :

$C_1^7 \times C_1^6 \times \frac{C_3^5 \times 3!}{2} C_1^2$
=2520</td></tr>
<tr><td>

(G_2)</td><td>• Banyaknya titik : 7
• Banyaknya garis : 14
• Derajat setiap titik :
deg v_1' : 4
deg v_2' : 4
deg v_3' : 2
deg v_4' : 6
deg v_5' : 5
deg v_6' : 3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>deg $v_{7'}$: 4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">n = 7
t = 6</td><td>
(G_3)</td><td>• Banyaknya titik : 7
• Banyaknya garis : 8
• Derajat setiap titik :
v_1 : 2
v_2 : 4
v_3 : 1
v_4 : 2
v_5 : 2
v_6 : 2
v_7 : 3</td><td>G_3 dan G_4 isomorfik karena ada f bijektif yaitu: $f : G_3 \rightarrow G_4$ sedemikian sehingga:
$f(v_1) \rightarrow (v_1')$
$f(v_2) \rightarrow (v_7')$
$f(v_3) \rightarrow (v_6')$
$f(v_4) \rightarrow (v_5')$
$f(v_5) \rightarrow (v_4')$
$f(v_6) \rightarrow (v_3')$
$f(v_7) \rightarrow (v_2')$</td></tr>
<tr><td>
(G_4)</td><td>• Banyaknya titik : 7
• Banyaknya garis : 6
• Derajat setiap titik :
v_1' : 2
v_2' : 3
v_3' : 2
v_4' : 2
v_5' : 2
v_6' : 1
v_7' : 4</td><td>Rumus banyaknya graf G_3 dan G_4 :

$C_1^7 \times \frac{C_4^6 \times 4!}{2} C_1^2$ =2520</td></tr>
</table>

4.3 Rumus Umum Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Tujuh

Hasil konstruksi graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde tujuh dapat dibentuk dalam tabel sebagai berikut :

Tabel 4.5. Banyaknya graf terhubung berorde tujuh tanpa *loop*

m	Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop*					
	t					
	6	7	8	9	10	11
6	6727					
7	40362	30160				
8	141267	211120	30765			
9	376712	844480	246120	21000		

10	847602	2533440	1107540	189000	28364	
11	1695204	6333600	3691800	945000	283640	26880
12	3107874	13933920	10152450	3465000	1560020	295680
13		27867840	24365880	10395000	6240080	1774080
14		51754560	52792740	27027000	20280260	7687680
15			105585480	63063000	56784728	26906880
16			197972775	135135000	141961820	80720640
17				270270000	324484160	215255040
18				510510000	689528840	522762240
19					1379057680	1176215040
20					2620209592	2483120640
21						4966241280
22						9481006080

m	Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop*				
	t				
	12	13	14	15	16
12	26460				
13	317520	20790			
14	2063880	270270	10290		
15	9631440	1891890	144060	8022	
16	36117900	9459450	1080450	120330	5460
17	115577280	37837800	5762400	962640	87360
18	327468960	128648520	24490200	5454960	742560
19	842063040	385945560	88164720	24547320	4455360
20	1999899720	1047566520	279188280	93279816	21162960
21	4444221600	2618916300	797680800	310932720	84651840
22	9332865360	6110804700	2093912100	932798160	296281440
23	18665730720	13443770340	5118451800	2565194940	931170240
24	35775983880	28109701620	11772439140	6555498180	2677114440
25		56219403240	25685321760	15733195632	7138971840
26		108114237000	53511087000	35757262800	17847429600
27			107022174000	77474069400	42184833600
28			206399907000	160907682600	94915875600
29				321815365200	204434193600
30				622176372720	423470829600
31					846941659200
32					1640949464700

m	Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop*				
	t				
	17	18	19	20	21
17	4417				
18	75089	2835			
19	675801	51030	210		
20	4280073	484785	3990	21	
21	21400365	3231900	39900	420	1
22	89881533	16967475	279300	4410	21
23	329565621	74656890	1536150	32340	231
24	1082858469	286184745	7066290	185955	1771
25	3248575407	981204840	28265160	892584	10626

26	9023820575	3066265125	100947000	3719100	53130
27	23461933495	8858099250	328077750	13813800	230230
28	57588382215	23916867975	984233250	46621575	888030
29	134372891835	60879300300	2755853100	145044900	3108105
30	299754912555	147124975725	7265430900	420630210	10015005
31	642331955475	339519174750	18163577250	1147173300	30045015
32	1327486041315	751792458375	43313145750	2963531025	84672315
33	2654972082630	1603823911200	99001476000	7294845600	225792840
34	5153769336870	3307886816850	217803247200	17194993200	573166440
35		6615773633700	462831900300	38975317920	1391975640
36		12864004287750	952889206500	85258507950	3247943160
37			1905778413000	180547428600	7307872110
38			3711252699000	371125269900	15905368710
39				742250539800	33578000610
40				1447388552610	68923264410
41					137846528820
42					269128937220

Hasil observasi yang dilakukan mengenai banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde tujuh berdasarkan Tabel 4.10, dapat dibentuk tabel baru sebagai berikut :

Tabel 4.6. Pola banyaknya graf terhubung berorde tujuh tanpa *loop*

m	Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop*					
	t					
	6	7	8	9	10	11
6	1 ×6727					
7	6 ×6727	1×30160				
8	21×6727	7×30160	1 ×30765			
9	56×6727	28×30160	8 ×30765	1×21000		
10	126×6727	84×30160	36 ×30765	9 ×21000	1 ×28364	
11	252×6727	210×30160	120 ×30765	45 ×21000	10 ×28364	1× 26880
12	462×6727	462×30160	330 ×30765	165 ×21000	55 ×28364	11 × 26880
13		924×30160	792 ×30765	495 ×21000	220 ×28364	66 × 26880
14		1716×30160	1716 ×30765	1287 ×21000	715 ×28364	286 × 26880
15			3432 ×30765	3003×21000	2002 ×28364	1001 × 26880
16			6435×30765	6435×21000	5005×28364	3003× 26880
17				12870×21000	11440×28364	8008× 26880
18				24310×21000	24310×28364	19448× 26880
19					48620×28364	43758× 26880
20					92378×28364	92378× 26880
21						184756× 26880
22						352716× 26880

m	Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop*				
	t				
	12	13	14	15	16
12	1×26460				
13	12×26460	1×20790			
14	78×26460	13×20790	1×10290		
15	364×26460	91×20790	14×10290	1×8022	
16	1365×26460	455×20790	105×10290	15×8022	1×2940
17	4368×26460	1820×20790	560×10290	120×8022	16×2940

18	12376×26460	6188×20790	2380×10290	680×8022	136×2940
19	31824×26460	18564×20790	8568×10290	3060×8022	816×2940
20	75582×26460	50388×20790	27132×10290	11628×8022	3876×2940
21	167960×26460	125970×20790	77520×10290	38760×8022	15504×2940
22	352716×26460	293930×20790	203490×10290	116280×8022	54264×2940
23	705432×26460	646646×20790	497420×10290	319770×8022	170544×2940
24	1352078×26460	1352078×20790	1144066×10290	817190×8022	490314×2940
25		2704156×20790	2496144×10290	1961256×8022	1307504×2940
26		5200300×20790	5200300×10290	4457400×8022	3268760×2940
27			10400600×10290	9657700×8022	7726160×2940
28			20058300×10290	20058300×8022	17383860×2940
29				40116600×8022	37442160×2940
30				77558760×8022	77558760×2940
31					155117520×2940
32					300540195×2940

m	Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop*				
	t				
	17	18	19	20	21
17	1×4417				
18	17×4417	1×2835			
19	153×4417	18×2835	1×210		
20	969×4417	171×2835	19×210	1×21	
21	4845×4417	1140×2835	190×210	20×21	1×1
22	20349×4417	5985×2835	1330×210	210×21	21×1
23	74613×4417	26334×2835	7315×210	1540×21	231×1
24	245157×4417	100947×2835	33649×210	8855×21	1771×1
25	735471×4417	346104×2835	134596×210	42504×21	10626×1
26	2042975×4417	1081575×2835	480700×210	177100×21	53130×1
27	5311735×4417	3124550×2835	1562275×210	657800×21	230230×1
28	13037895×4417	8436285×2835	4686825×210	2220075×21	888030×1
29	30421755×4417	21474180×2835	13123110×210	6906900×21	3108105×1
30	67863915×4417	51895935×2835	34597290×210	20030010×21	10015005×1
31	145422675×4417	119759850×2835	86493225×210	54627300×21	30045015×1
32	300540195×4417	265182525×2835	206253075×210	141120525×21	84672315×1
33	601080390×4417	565722720×2835	471435600×210	347373600×21	225792840×1
34	1166803110×4417	1166803110×2835	1037158320×210	818809200×21	573166440×1
35		2333606220×2835	2203961430×210	1855967520×21	1391975640×1
36		4537567650×2835	4537567650×210	4059928950×21	3247943160×1
37			9075135300×210	8597496600×21	7307872110×1
38			17672631900×210	17672631900×21	15905368710×1
39				35345263800×21	33578000610×1
40				68923264410×21	68923264410×1
41					137846528820×1
42					269128937220×1

Perhatikan Tabel 4.6 Pada $t = 6, m \geq 6$ membentuk pola 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, 2002

Barisan yang terbentuk dari pola tersebut yaitu:

1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
5	15	35	70	126	210	330	495	715	
10	20	35	56	84	120	165	220		
10	15	21	28	36	45	55			
5	6	7	8	9	10				
1	1	1	1	1					

Karena selisih tepatnya berada pada tingkat ke-lima maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika tingkat lima dan bentuk umum polinomial derajat lima yang berkaitan dengan barisan tersebut adalah:

$$a_m = a_5 m^5 + a_4 m^4 + a_3 m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

Misalkan $N(G_{n,m,t})$ = banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel berorde n dengan m garis dan t adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

Hasil 1. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 6, t = 6$ adalah : $N(G_{7,m,6}) = 6727 \times C_5^{(m-1)}$

Bukti:

Karena terletak pada tingkat ke-lima, maka bentuk umum suku ke-*m* dari barisan aritmatika tersebut polinomial yang berhubungan adalah

$$a_m = a_5 m^5 + a_4 m^4 + a_3 m^3 + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

untuk $m = 6$;

$6727 = 7776a_5 + 1296a_4 + 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + a_0$

untuk $m = 7$;

$40362 = 16807a_5 + 2401a_4 + 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + a_0$

untuk $m = 8$;

$141267 = 32768a_5 + 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + a_0$

untuk $m = 9$;

$376712 = 59049a_5 + 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0$

untuk $m = 10$;

$847602 = 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$

untuk $m = 11$;

$1695204 = 161051a_5 + 14641a_4 + 1331a_3 + 121a_2 + 11a_1 + a_0$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut didapat hasil sebagai berikut:

$a_5 = \frac{6727}{120}$

$a_4 = -\frac{100905}{120}$

$a_3 = \frac{571795}{120}$

$a_2 = -\frac{1513575}{120}$

$a_1 = \frac{1843198}{120}$

$a_0 = -\frac{807239}{120}$

Jadi rumus suku ke-*m* pada barisan aritmatika polinomial tingkat lima adalah

$$a_m = \frac{6727}{120}m^5 - \frac{100905}{120}m^4 + \frac{571795}{120}m^3 - \frac{1513575}{120}m^2 + \frac{1843198}{120} - \frac{807239}{120}$$

$$= \frac{6727}{120}(m^5 - 15m^4 + 85m^3 - 225m^2 + 274m - 120)$$

$$= \frac{6727}{120}((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5))$$

$= 6727 \times \frac{((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5))}{5\times4\times3\times2\times1}$

$= 6727 \times C_5^{(m-1)}$

Perhatikan Tabel 4.6 Pada $t = 7$, $m \geq 7$ membentuk pola 1, 7, 28, 84, 210, 462, 924, 1716, 3003,....

Barisan yang terbentuk dari pola tersebut yaitu:

1 7 28 84 210 462 924 1716 3003

6 21 56 126 252 462 792 1287

15 35 70 126 210 330 495

20 35 56 84 120 165

15 21 28 36 45

6 7 8 9

1 1 1

Karena selisih tepatnya berada pada tingkat ke-enam maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika tingkat enam dan bentuk umum polinomial derajat enam yang berkaitan dengan barisan tersebut adalah:

$$a_m = a_6m^6 + a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

Hasil 2. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 7$ adalah: $N(G_{6,m,7}) = 30160 \times C_6^{(m-1)}$

Bukti:

Karena terletak pada tingkat ke-enam, maka bentuk umum suku ke-*m* dari barisan aritmatika tersebut polinomial yang berhubungan adalah

$$a_m = a_6m^6 + a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

untuk $m = 7$;

$30160 = 117649a_6 + 16807a_5 + 2401a_4 + 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + a_0$

untuk $m = 8$;

$211120 = 262144a_6 + 32768a_5 + 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + a_0$

untuk $m = 9$;

$844480 = 531441a_6 + 59049a_5 + 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0$

untuk $m = 10$;

$2533440 = 1000000a_6 + 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$

untuk $m = 11$;

$6333600 = 1771561a_6 + 161051a_5 + 14641a_4 + 1331a_3 + 121a_2 + 11a_1 + a_0$

untuk $m = 12$;

$13933920 = 2985984a_6 + 248832a_5 + 20736a_4 + 1728a_3 + 144a_2 + 12a_1 + a_0$

untuk $m = 13$;

$27867840 = 4826809a_6 + 371293a_5 + 28561a_4 + 2197a_3 + 169a_2 + 13a_1 + a_0$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut didapat hasil:

$a_6 = \frac{30160}{720}$

$a_5 = -\frac{633360}{720}$

$a_4 = \frac{5278000}{720}$

$a_3 = -\frac{22167600}{720}$

$a_2 = \frac{48979840}{720}$

$a_1 = -\frac{53202240}{720}$

$a_0 = \frac{21715200}{720}$

Jadi, rumus umum suku ke-*m* pada barisan aritmatika polinomial tingkat enam adalah:

$$a_m = \frac{30160}{720}m^6 - \frac{633360}{720}m^5 + \frac{5278000}{720}m^4 - \frac{22167600}{720}m^3 + \frac{48979840}{720}m^2 - \frac{53202240}{720}m + \frac{21715200}{720}$$

$$= \frac{30160}{720}(m^6 - 21m^5 + 175m^4 - 735m^3 + 1624m^2 - 1764m + 720)$$

$$= \frac{30160}{720}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)$$

$$= 330 \times \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 30160 \times C_6^{(m-1)}$$

Dengan menggunakan cara yang sama didapat hasil untuk t = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, dan 15 sebagai berikut:

Hasil 3. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 8$ adalah:

$$N(G_{7,m,8}) = 30765 \times C_7^{(m-1)}$$

Hasil 4. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 9$ adalah:

$$N(G_{7,m,9}) = 21000 \times C_8^{(m-1)}$$

Hasil 5. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 10$ adalah:

$$N(G_{7,m,10}) = 28364 \times C_9^{(m-1)}$$

Hasil 6. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 11$ adalah:

$$N(G_{7,m,11}) = 26880 \times C_{10}^{(m-1)}$$

Hasil 7. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 12$ adalah:

$$N(G_{7,m,12}) = 26460 \times C_{11}^{(m-1)}$$

Hasil 8. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 13$ adalah:

$$N(G_{7,m,13}) = 20790 \times C_{12}^{(m-1)}$$

Hasil 9. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 14$ adalah:

$$N(G_{7,m,14}) = 10290 \times C_{13}^{(m-1)}$$

Hasil 10. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 15$ adalah:

$$N(G_{7,m,15}) = 8022 \times C_{14}^{(m-1)}$$

Hasil 11. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 16$ adalah:

$$N\left(G_{7,m,16}\right) = 5460 \times C_{15}^{(m-1)}$$

Hasil 12. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 17$ adalah:

$$N\left(G_{7,m,17}\right) = 4417 \times C_{16}^{(m-1)}$$

Hasil 13. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 18$ adalah:

$$N\left(G_{7,m,18}\right) = 2835 \times C_{17}^{(m-1)}$$

Hasil 14. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 19$ adalah:

$$N\left(G_{7,m,19}\right) = 210 \times C_{18}^{(m-1)}$$

Hasil 15. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 20$ adalah:

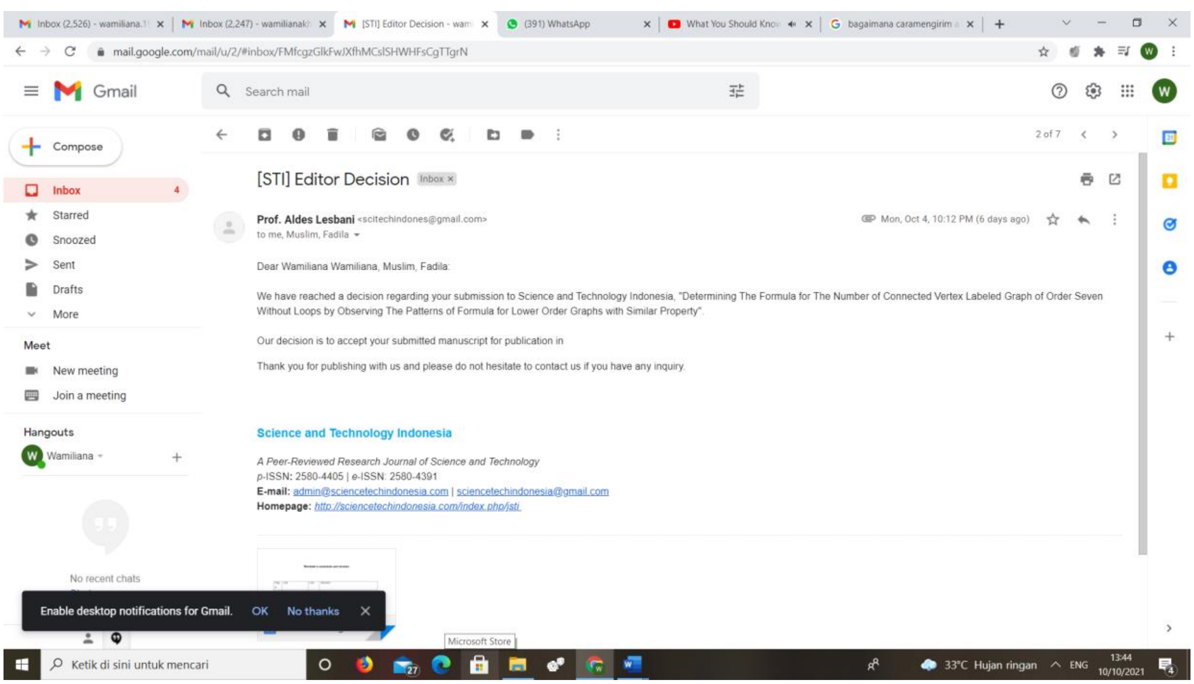
$$N\left(G_{7,m,20}\right) = 21 \times C_{19}^{(m-1)}$$

Hasil 16. Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 21$ adalah:

$$N\left(G_{7,m,21}\right) = 1 \times C_{20}^{(m-1)}$$

4.4. Luaran

Luaran yang didapat dari penelitian ini adalah satu artikel yang berjudul "**Determining The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven Without Loops by Observing The Patterns of Formula for Lower Order Graphs with Similar Property"** yang telah diterima di **Jurnal Science and Technology Indonesia (terindeks Scopus)** yang akan terbit akhir bulan Oktober 2021.



ARTIKEL (yang siap untuk dipublikasi):

Science and Technology Indonesia
e-ISSN:2580-4391 p-ISSN:2580-4405
Vol. x, No. x, Month Year

Science & Technology Indonesia

Research Paper

Check for updates

Determining The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven without Loops by Observing The Patterns of Formula for Lower Order Graphs with Similar Property

Muslim Ansori[1], Wamiliana[1*], Fadila Cahya Puri[1]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Science, Universitas Lampung, Bandarlampung 35145, Indonesia
[*]Corresponding author: wamiliana.1963@fmipa.unila.ac.id

Abstract
Given n vertices and m edges, $m \geq 1$, and for every vertex is given a label, there are lots of graphs that can be obtained. The graphs obtained may be simple or not simple, connected or disconnected. A graph G(V,E) is called simple if G(V,E) not containing loops or paralel edges. An edge which has the same end vertex is called a loop, and paralel edges are two or more edges which connect the same set of vertices. Let $N(G_{7,m,t})$ as the number of connected vertex labeled graphs of order seven with m vertices and t (t is the number edges that connect different pair of vertices). The result shows that $N(G_{7,m,t}) = c_t\ C_{t-1}^{(m-1)}$, with c_6=6727, c_7= 30160 , c_8=30765, c_9=21000, c_{10}=28364, c_{11}=26880, c_{12}=26460, c_{13}=20790, c_{14}=10290, c_{15}= 8022, c_{16}=2940, c_{17}=4417, c_{18}=2835, c_{19}=210, c_{20}= 21, c_{21}=1.

Keywords
Graph, Connected, Vertex, Labeled, Order, Loops

Received: xx, Accepted: xx
https://doi.org/10.26554/sti.Year.x.x.xx-xx

1. INTRODUCTION

Graph theory emerged as a new field in mathematics in 1736 after Leonhard Euler gave solution to the Konigsberg problem, graph theory was used widely in many real-life applications, especially as problems representation. A Graph G (V,E) is a structure which consists of a set V={$v_1, v_2, \ldots, v_n$} of vertices, where V ≠ ∅, and a set of edges E=e_{ij} | i, j ∈ V which connect the vertices of V. Usually the vertices are used to represent cities, depots, train stations, airports, etc., while edges are usually used to represent roads, train tracks, flight paths, etc. A number $c_{ij} \geq 0$ can be assigned to the edge e_{ij} as a nonformal information which can represent the distance, time, cost, flow, etc. Because the flexibility of how to draw a graph, where there is no restriction in drawing an edge (can be a straight line, a curve, or other line), graph becomes an interesting structure to cope with, especially to represent the problem for easily visualization. Some of graph terminologies that commonly used in application is the concept of tree, where tree is a connected graph without cycle.

Some applications that use graph theoretical concept as problems representation include applications in biology, chemistry, engineering, computer science, economics, agriculture, and others. For example, in biology, a leaf labeled tree was used to represent the evolutionary history of a set of taxa which is called as phylogenetic tree (Huson and Bryant, 2006; Brandes and Cornelsen, 2009), and Mathur and Adlakha (2016) used combined tree to represent DNA, in chemistry/pharmaceutical, Gramatica et al. (2014) used graph concept to describe or represent the possible modes of action for any given pharmacological compound; in engineering and computer science, Hsu and Lin (2009) exposed a lot of graph theoretical concepts including Hamiltonian circuits with relation in network design, Al Etaiwi (2014) in order to generate a complex cipher text used the concepts minimum spanning tree, complete graph and cycle graph, Priyadarsini (2015) investigate the use of graph theory concept, extremal and expander graphs in designing some ciphers, while Ni et al. (2021) use bipartite and corona graphs to create ciphers; in economics, Álvarez and Ehnts (2015) used directed graph to represent the dynamic closures of the accounting structure; in agriculture, Kawakura and Shibasaki (2018) used graph theory concepts to group agricultural workers engaging in manual tasks, Kannimuthu et al. (2020) use graph coloring to optimize farmer's objective, and many more.

In 1857 Cayley enumerated the isomer of C_nH_{2n+2} using the concept of tree (Cayley, 1874), and followed by Slomenski (1964) who used graph theory to calculate additive structural properties of hydrocarbon. Bona (2007) discussed how to enumerate trees and forest. If we are given n vertices and m edges, then lots of graphs can be obtained using that information. The graph obtained may be simple graph which does not contain loop nor parallel edges, or maybe not simple. Moreover, the graph obtained also may be connected or disconnected. For connected vertex labeled graph, the number of graph of order five with maximum number of paralel edges is five without loops was investigated by Wamiliana et al. (2019), and the number of graph of order six without paralel edges with ten loops maximum also investigated by Wamiliana et al. (2020). Puri et al. (2021) investigated the number of graphs of order six with maximum thirty edges without loops. For disconnected vertex labeled graph, Wamiliana et al. (2016) investigated the number of graph of order five without paralel edges, Amanto et al. (2017) gave the formula for graph of order maximal four, Putri et al. (2021) observed and gave formula for the number graphs of order six without loops and may contain maximum twenty parallel edges, while Pertiwi et al. (2021) proposed the formula for counting the number graph of order six without loops, especially when the graph obtained only contains maximum seven loops and the number of non loop edges is even. In this study, by observing the patterns of the formula of the number of connected vertex labeled graphs of order five and order six containing no loops, the formula of graphs of order seven with similar property will be discussed.

We organized this paper as follows: Section I is Introduction that describes about what is graph, some applications of graphs, and some researches related with this study. In Section II Observation and Investigation will be discussed while Result and Discussion is provided in Section III, and Conclusion in given in Section IV.

2. OBSERVATION AND INVESTIGATION

Given a graph G(V,E) where n =|V| = 7 and G is connected. Because G is connected, then the number of edges m = |E| ≥ 6. Every vertex in G is labeled, therefore graphs G_1 and G_2 in Figure 1 are two different graphs even though both graphs look similar.

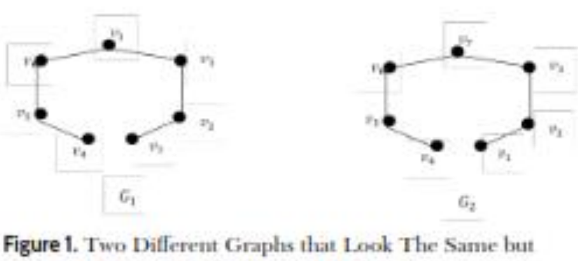


Figure 1. Two Different Graphs that Look The Same but Different because of The Vertex Labeling

Denote $N(G_{n,m,t})$ as the number of connected vertex labeled graphs containing no loops of order n, m edges and t, where t is the number of edges that connect different pairs of vertices in G. Edges that connect the same pair of vertices is counted as one. Moreover, isomorphics graphs are counted as one graph.

The result on Table 1 for n=5 and are obtained from Wamiliana et al. (2019), and for n=6 from and Puri et al. (2021). From Table 1 we know that for n = 5, the maximum number of t is 10, and for n= 6 is 15, and since the graph is connected, then m ≥ 4 for n = 5, and m ≥ 5 for n =6. By observing Table 1 we found that there are patterns between those two order graphs. Notice that, for every t, the formula only differ on the coefficients. Let ct is contant with t= 6,7,...,21. By using the patterns on Table 1, we predict that the formula for order seven as $c_t\ C_{t-1}^{(m-1)}$. Note that for order 7, maximum t is 21.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Given n=7, t and m, the number of graphs of order seven, connected, and vertex labelled are obtained by: pattern construction, grouping the patterns in term of m and t, and then calculate the graphs. Starting with t=6, we construct for m ≥ 6. The process continue with t=7 until t=21 (maximum possible t for n=7). Figure 2 shows some possible patterns for t=n-1.

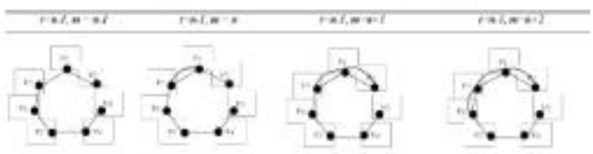


Figure 2. Some Possible Patterns for t=n-1 (n=7)

Note that we do not put all possible patterns here due to space limitation, for example, for t=n-1 and m= n, the paralel edges maybe connect vertex v_1 and v_2 or v_4 and v_5, and so on, and for t=n-1 and m=n+1, that is possible the paralel edges only on one pair of vertices, for example, there are three edges that connect vertex v_1 and v_2, etc. The number of graphs obtained is given in Table 2. By observing the number in every column, Table 2 can be rewrite as in Table 3.

By grouping the graphs by m and t, we notice that every column of Table 3 constitute patterns. Note that in the Table 2 and 3 we are not inputting all the numbers of graph obtained because t is fixed in every column and adding more edges only adding more paralel edges on t, and the pattern continues for the next m, for example: for t= 6, m ≥ 6 we only input the number until m= 12 and the pattern is 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462 (if adding more m, the pattern becomes 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, 2002,...).

The sequence of numbers that appear in the first column (t= 6) is 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462 and that number is multiplied by 6727. Therefore we can claim that the value of c_6 in Table 2 is 6727.

Result 1: Given n = 7, m ≥ 6, t= 6, the number of connected graphs of order seven containing no loops is $N(G_{7,m,6}) = 6727 * C_5^{(m-1)}$.

Table 1. The Formula of The Number of Connected Vertex Labeled Graph of Order N , N = 5, 6 , M Edges And T, where T is The Number of Edges that Connect Different Pairs of Vertices in Graph, and Containing no Loops

t	n = 5	n = 6
4	$N(G_{5,m,4}) = 125 \times C_3^{(m-1)}$	
5	$N(G_{5,m,5}) = 222 \times C_4^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,5}) = 1296 \times C_4^{(m-1)}$
6	$N(G_{5,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,6}) = 1980 \times C_5^{(m-1)}$
7	$N(G_{5,m,7}) = 110 \times C_6^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,7}) = 3330 \times C_6^{(m-1)}$
8	$N(G_{5,m,8}) = 45 \times C_7^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,8}) = 4620 \times C_7^{(m-1)}$
9	$N(G_{5,m,9}) = 10 \times C_8^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,9}) = 6660 \times C_8^{(m-1)}$
10	$N(G_{5,m,10}) = 1 \times C_9^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,10}) = 2640 \times C_9^{(m-1)}$
11		$N(G_{6,m,11}) = 1155 \times C_{10}^{(m-1)}$
12		$N(G_{6,m,12}) = 420 \times C_{11}^{(m-1)}$
13		$N(G_{6,m,13}) = 150 \times C_{12}^{(m-1)}$
14		$N(G_{6,m,14}) = 15 \times C_{13}^{(m-1)}$
15		$N(G_{6,m,13}) = 1 \times C_{14}^{(m-1)}$

1 6 21 56 126 252 462
5 15 35 70 126 210
10 20 35 56 84
10 15 21 28
5 6 7
1 1

Proof:
Look at the sequence of numbers above.
It can be seen that from the sequence above that the fixed difference occur on the fifth level. Therefore the polynomial that can represent this sequence is polynomial of order five:
$P_5(m) = a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$
Substitute $m = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ to the equation we get the following:

$$6727 = 7776a_5 + 1296a_4 + 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + a_0 \quad (1)$$

$$40362 = 16807a_5 + 2401a_4 + 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + a_0 \quad (2)$$

$$141267 = 32768a_5 + 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + a_0 \quad (3)$$

$$376712 = 59049a_5 + 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0 \quad (4)$$

$$847602 = 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 \quad (5)$$

$$1695204 = 161051a_5 + 14641a_4 + 1331a_3 + 121a_2 + 11a_1 + a_0 \quad (6)$$

Solving this system of linear equations we get $a_5 = \frac{6727}{120}$, $a_4 = -\frac{100905}{120}$, $a_3 = \frac{571795}{120}$, $a_2 = -\frac{1513575}{120}$, $a_1 = \frac{1843198}{120}$ and $a_0 = -\frac{807239}{120}$

$$\begin{aligned} P_5(m) &= a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0 \\ &= \frac{6727}{120}m^5 - \frac{100905}{120}m^4 + \frac{571795}{120}m^3 - \frac{1513575}{120}m^2 \\ &+ \frac{1843198}{120}m - \frac{807239}{120} \\ &= \frac{6727}{120}(m^5 - 15m^4 + 85m^3 - 225m^2 + 274m - 120) \quad (7) \\ &= \frac{6727}{120}((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)) \\ &= 6727 \times \frac{((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5))}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \\ &= 6727 \times C_5^{(m-1)} \end{aligned}$$

For t=7, we can see from Table 2 that the sequence of numbers is 1, 7, 28, 84, 210, 462, 924, 1716.

1 7 28 84 210 462 924 1716
6 21 56 126 252 462 792
15 35 70 126 210 330
20 35 56 84 120
15 21 28 36
6 7 8
1 1

Result 2: Given n = 7, $m \geq 6$, $t = 7$, the number of connected graphs of order seven containing no loops is $N(G_{7,m,7}) = 30160 \times C_6^{(m-1)}$.
Proof:

Table 2. Grouping The Number of Connected Vertex Labeled Graph of Order Seven without Loops by m and t

m	t = 6	7	8	9	10	11
6	6727					
7	40362	30160				
8	141267	211120	30765			
9	376712	844480	246120	21000		
10	847602	2533440	1107540	189000	28364	
11	1695204	6333600	3691800	945000	283640	26880
12	3107874	13933920	10152450	3465000	1560020	295680
13		27867840	24365880	10395000	6240080	1774080
14		51754560	52792740	27027000	20280260	7687680
15			105585480	63063000	56784728	26906880
16			197972775	135135000	141961820	80720640
17				270270000	324484160	215255040
18				510510000	689528840	522762240
19					1379057680	1176215040
20					2620209592	2483120640
21						4966241280
22						9481006080

The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven without Loops

m	t = 12	13	14	15	16
12	26460				
13	317520	20790			
14	2063880	270270	10290		
15	9631440	1891890	144060	8022	
16	36117900	9459450	1080450	120330	5460
17	115577280	37837800	5762400	962640	87360
18	327468960	128648520	24490200	5454960	742560
19	842063040	385945560	88164720	24547320	4455360
20	1999899720	1047566520	279188280	93279816	21162960
21	4444221600	2618916300	797680800	310932720	84651840
22	9332865360	6110804700	2093912100	932798160	296281440
23	18665730720	13443770340	5118451800	2565194940	931170240
24	35775983880	28109701620	11772439140	6555498180	2677114440
25		56219403240	25685321760	15733195632	7138971840
26		108114287000	53511087000	35757262800	17847429600
27			107022174000	77474069400	42184833600
28			206399907000	160907682600	94915875600
29				321815365200	204434193600
30				622176372720	423470829600
31					846941659200
32					1640949464700

Look at the sequence of numbers above.
It can be seen that from the sequence above that the fixed difference occur on the sixth level. Therefore the polynomial that can represent this sequence is polynomial of order six:
$P_6(m) = a_6m^6 + a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$
Substitute m = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 to the equation we get the following:

$$30160 = 117649a_6+16807a_5+2401a_4+343a_3+49a_2+7a_1+a_0 \quad (8)$$

$$211120 = 262144a_6+32768a_5+4096a_4+512a_3+64a_2+8a_1+a_0 \quad (9)$$

$$844480 = 531441a_6+59049a_5+6561a_4+729a_3+81a_2+9a_1+a_0 \quad (10)$$

	The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven without Loops				
			t		
m	17	18	19	20	21
17	4417				
18	75089	2835			
19	675801	51030	210		
20	4280073	484785	3990	21	
21	21400365	3231900	39900	420	1
22	89881533	16967475	279300	4410	21
23	329565621	74656890	1536150	32340	231
24	1082858469	286184745	7066290	185955	1771
25	3248575407	981204840	28265160	892584	10626
26	9023820575	3066265125	100947000	3719100	53130
27	23461933495	8858099250	328077750	13813800	230230
28	57588382215	23916867975	984233250	46621575	888030
29	134372891835	60879300300	2755853100	145044900	3108105
30	299754912555	147124975725	7265430900	420630210	10015005
31	642331955475	339519174750	18163577250	1147173300	30045015
32	1327486041315	751792458375	43313145750	2963531025	84672315
33	2654972082630	1603823911200	99001476000	7294845600	225792840
34	5153769336870	3307886816850	217803247200	17194993200	573166440
35		6615773633700	462831900300	38975317920	1391975640
36		12864004287750	952889206500	85258507950	3247943160
37			1905778413000	180547428600	7307872110
38			3711252699000	371125269900	15905368710
39				742250539800	33578000610
40				1447388552610	68923264410
41					137846528820
42					269128937220

$$2533440 = 1000000a_6 + 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 \quad (11)$$

$$6333600 = 1771561a_6 + 161051a_5 + 14641a_4 + 1331a_3 + 121a_2 + 11a_1 + a_0 \quad (12)$$

$$13933920 = 2985984a_6 + 248832a_5 + 20736a_4 + 1728a_3 + 144a_2 + 12a_1 + a_0 \quad (13)$$

$$27867840 = 4826809a_6 + 371293a_5 + 28561a_4 + 2197a_3 + 169a_2 + 13a_1 + a_0 \quad (14)$$

Solving this system of linear equations we get $a_6 = \frac{30160}{720}$, $a_5 = -\frac{633360}{720}$, $a_4 = \frac{5278000}{720}$, $a_3 = -\frac{22167600}{720}$, $a_2 = \frac{48979840}{720}$, $a_1 = -\frac{53202240}{720}$ and $a_0 = \frac{21715200}{720}$

Therefore

$$\begin{aligned} P_6(m) &= a_6m^6 + a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0 \\ &= \frac{30160}{720}m^6 - \frac{633360/720}{720}m^5 + \frac{5278000}{720}m^4 - \frac{22167600}{720}m^3 \\ &+ \frac{48979840}{720}m^2 - \frac{53202240}{720}m + \frac{21715200}{720} \\ &= \frac{30160}{720}(m^6 - 21m^5 + 175m^4 - 735m^3 + 1624m^2 - 1764m+ \\ &720) \\ &= \frac{30160}{720}((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)) \\ &= 30160 \times \frac{((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6))}{(6\times5\times4\times3\times2\times1)} \\ &= 30160 \times C_6^{(m-1)} \end{aligned} \quad (15)$$

Doing with similar manner we get the following results:
For n=7, $m \geq 8$, t =8, $N(G_{7,m,8}) = 30765 \times C_7^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 9$, t =9, $N(G_{7,m,9}) = 21000 \times C_8^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 10$, t =10, $N(G_{7,m,10}) = 28364 \times C_9^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 11$, t =11, $N(G_{7,m,11}) = 26880 \times C_{10}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 12$, t =12, $N(G_{7,m,12}) = 26460 \times C_{11}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 13$, t =13, $N(G_{7,m,13}) = 20790 \times C_{12}^{(m-1)}$

Table 3. Another form of Table 2

	The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven without Loops					
			t			
m	6	7	8	9	10	11
6	1 ×6727					
7	6 ×6727	1×30160				
8	21×6727	7×30160	1 ×30765			
9	56×6727	28×30160	8 ×30765	1×21000		
10	126×6727	84×30160	36 ×30765	9 ×21000	1 ×28364	
11	252×6727	210×30160	120 ×30765	45 ×21000	10 ×28364	1× 26880
12	462×6727	462×30160	330 ×30765	165 ×21000	55 ×28364	11 × 26880
13		924×30160	792 ×30765	495 ×21000	220 ×28364	66 × 26880
14		1716×30160	1716 ×30765	1287 ×21000	715 ×28364	286 × 26880
15			3432 ×30765	3003×21000	2002 ×28364	1001 × 26880
16			6435×30765	6435×21000	5005×28364	3003× 26880
17				12870×21000	11440×28364	8008× 26880
18				24310×21000	24310×28364	19448× 26880
19					48620×28364	43758× 26880
20					92378×28364	92378× 26880
21						184756× 26880
22						352716× 26880

	The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven without Loops				
			t		
m	12	13	14	15	16
12	1×26460				
13	12×26460	1×20790			
14	78×26460	13×20790	1×10290		
15	364×26460	91×20790	14×10290	1×8022	
16	1365×26460	455×20790	105×10290	15×8022	1×2940
17	4368×26460	1820×20790	560×10290	120×8022	16×2940
18	12376×26460	6188×20790	2380×10290	680×8022	136×2940
19	31824×26460	18564×20790	8568×10290	3060×8022	816×2940
20	75582×26460	50388×20790	27132×10290	11628×8022	3876×2940
21	167960×26460	125970×20790	77520×10290	38760×8022	15504×2940
22	352716×26460	293930×20790	203490×10290	116280×8022	54264×2940
23	705432×26460	646646×20790	497420×10290	319770×8022	170544×2940
24	1352078×26460	1352078×20790	1144066×10290	817190×8022	490314×2940
25		2704156×20790	2496144×10290	1961256×8022	1307504×2940
26		5200300×20790	5200300×10290	4457400×8022	3268760×2940
27			10400600×10290	9657700×8022	7726160×2940
28			20058300×10290	20058300×8022	17383860×2940
29				40116600×8022	37442160×2940
30				77558760×8022	77558760×2940
31					155117520×2940
32					300540195×2940

For n=7, $m \geq 14, t$ =14, $N(G_{7,m,14}) = 10290 \times C_{13}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 15, t$ =15, $N(G_{7,m,15}) = 8022 \times C_{14}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 16, t$ =16, $N(G_{7,m,16}) = 2940 \times C_{15}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 17, t$ =17, $N(G_{7,m,17}) = 4417 \times C_{16}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 18, t$ =18, $N(G_{7,m,18}) = 2835 \times C_{17}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 19, t$ =19, $N(G_{7,m,19}) = 210 \times C_{18}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 20, t$ =20, $N(G_{7,m,20}) = 21 \times C_{19}^{(m-1)}$
For n=7, $m \geq 21, t$ =21, $N(G_{7,m,21}) = 1 \times C_{20}^{(m-1)}$

Base on these result, we get Table 4 as follows: From Table 4 it can be seen that for every t, the formula consist of $C_{t-1}^{(m-1)}$, and the difference is on c_t.

	The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Seven				
	t				
m	17	18	19	20	21
17	1×4417				
18	17×4417	1×2835			
19	153×4417	18×2835	1×210		
20	969×4417	171×2835	19×210	1×21	
21	4845×4417	1140×2835	190×210	20×21	1×1
22	20349×4417	5985×2835	1330×210	210×21	21×1
23	74613×4417	26334×2835	7315×210	1540×21	231×1
24	245157×4417	100947×2835	33649×210	8855×21	1771×1
25	735471×4417	346104×2835	134596×210	42504×21	10626×1
26	2042975×4417	1081575×2835	480700×210	177100×21	53130×1
27	5311735×4417	3124550×2835	1562275×210	657800×21	230230×1
28	13037895×4417	8436285×2835	4686825×210	2220075×21	888030×1
29	30421755×4417	21474180×2835	13123110×210	6906900×21	3108105×1
30	67863915×4417	51895935×2835	34597290×210	20030010×21	10015005×1
31	145422675×4417	119759850×2835	86493225×210	54627300×21	30045015×1
32	300540195×4417	265182525×2835	206253075×210	141120525×21	84672315×1
33	601080390×4417	565722720×2835	471435600×210	347373600×21	225792840×1
34	1166803110×4417	1166803110×2835	1037158320×210	818809200×21	573166440×1
35		2333606220×2835	2203961430×210	1855967520×21	1391975640×1
36		4537567650×2835	4537567650×210	4059928950×21	3247943160×1
37			9075135300×210	8597496600×21	7307872110×1
38			17672631900×210	17672631900×21	15905368710×1
39				35345263800×21	33578000610×1
40				68923264410×21	68923264410×1
41					137846528820×1
42					269128937220×1

Table 4. Comparison for The Number of Connected Vertex Labeled Graphs of Order Five, Six, and Seven Containing no Loops

	n		
t	5	6	7
4	$N(G_{5,m,4}) = 125 \times C_3^{(m-1)}$		
5	$N(G_{5,m,5}) = 222 \times C_4^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,5}) = 1296 \times C_4^{(m-1)}$	
6	$N(G_{5,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,6}) = 1980 \times C_5^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,6}) = 6727 \times C_5^{(m-1)}$
7	$N(G_{5,m,7}) = 110 \times C_6^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,7}) = 3330 \times C_6^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,7}) = 30160 \times C_6^{(m-1)}$
8	$N(G_{5,m,8}) = 45 \times C_7^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,8}) = 4620 \times C_7^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,8}) = 30765 \times C_7^{(m-1)}$
9	$N(G_{5,m,9}) = 10 \times C_8^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,9}) = 6660 \times C_8^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,9}) = 21000 \times C_8^{(m-1)}$
10	$N(G_{5,m,10}) = 1 \times C_9^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,10}) = 2640 \times C_9^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,10}) = 28634 \times C_9^{(m-1)}$
11		$N(G_{6,m,11}) = 1155 \times C_{10}^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,11}) = 26880 \times C_{10}^{(m-1)}$
12		$N(G_{6,m,12}) = 420 \times C_{11}^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,12}) = 26460 \times C_{11}^{(m-1)}$
13		$N(G_{6,m,13}) = 150 \times C_{12}^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,13}) = 20790 \times C_{12}^{(m-1)}$
14		$N(G_{6,m,14}) = 15 \times C_{13}^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,14}) = 10290 \times C_{13}^{(m-1)}$
15		$N(G_{6,m,13}) = 1 \times C_{14}^{(m-1)}$	$N(G_{7,m,15}) = 8022 \times C_{14}^{(m-1)}$
16			$N(G_{7,m,16}) = 2940 \times C_{15}^{(m-1)}$
17			$N(G_{7,m,17}) = 4417 \times C_{16}^{(m-1)}$
18			$N(G_{7,m,18}) = 2835 \times C_{17}^{(m-1)}$
19			$N(G_{7,m,19}) = 210 \times C_{18}^{(m-1)}$
20			$N(G_{7,m,20}) = 21 \times C_{19}^{(m-1)}$
21			$N(G_{7,m,21}) = 1 \times C_{20}^{(m-1)}$

4. CONCLUSIONS

From the discussion above we can conclude that the formula to count the number of connected vertex labeled graph of order seven has a similar pattern with the lower order graph with the similar property. The difference of the formulas is on the coeficient for every t. The result shows that the number of connected vertex labeled graphs of order seven containing no loops is $N(G_{7,m,t}) = c_t\, C_{t-1}^{(m-1)}$, with c_6=6727, c_7= 30160 , c_8=30765, c_9=21000, c_{10}=28364, c_{11}=26880, c_{12}=26460, c_{13}=20790, c_{14}=10290, c_{15}= 8022, c_{16}=2940, c_{17}=4417, c_{18}=2835, c_{19}=210, c_{20}= 21, c_{21}=1.

5. ACKNOWLEDGEMENT

This research is funded by The Research Center Universitas Lampung under Postgraduate research grant project and the athors thanks for the fund.

REFERENCES

Al Etaiwi, W. M. (2014). Encryption algorithm using graph theory. *Journal of Scientific Research and Reports*, **3**(19); 2519–2527

Álvarez, M. C. and D. Ehnts (2015). *The Roads not Taken: Graph Theory and Macroeconomic Regimes in Stock-flow Consistent Modeling*. Levy Economics Institute of Bard College, Annandale-on-Hudson

Amanto, A., W. Wamiliana, M. Usman, and R. Permatasari (2017). Counting The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs with Order Maximal Four. *Science International Lahore*, **29**(6); 1181–1186

Bona, M. (2007). *Introduction to Enumerative Combinatorics*. McGraw-Hill Science

Brandes, U. and S. Cornelsen (2009). Phylogenetic graph models beyond trees. *Discrete Applied Mathematics*, **157**(10); 2361–2369

Cayley, A. (1874). On the mathematical theory of isomers. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **47**(314); 444–447

Gramatica, R., T. Di Matteo, S. Giorgetti, M. Barbiani, D. Bevec, and T. Aste (2014). Graph theory enables drug repurposing–how a mathematical model can drive the discovery of hidden mechanisms of action. *PloS One*, **9**(1); 84912

Hsu, L. H. and C. K. Lin (2009). *Graph Theory and Interconnection Networks*. Taylor and Francis Group

Huson, D. H. and D. Bryant (2006). Application of phylogenetic networks in evolutionary studies. *Molecular Biology and Evolution*, **23**(2); 254–267

Kannimuthu, S., D. Bhanu, and K. Bhuvaneshwari (2020). A novel approach for agricultural decision making using graph coloring. *SN Applied Sciences*, **2**(1); 1–6

Kawakura, S. and R. Shibasaki (2018). Grouping Method Using Graph Theory for Agricultural Workers Engaging in Manual Tasks. *Journal of Advanced Agricultural Technologies*, **5**(3); 173 –181

Mathur, R. and N. Adlakha (2016). A graph theoretic model for prediction of reticulation events and phylogenetic networks for DNA sequences. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, **3**(3); 263–271

Ni, B., R. Qazi, S. U. Rehman, and G. Farid (2021). Some Graph-Based Encryption Schemes. *Journal of Mathematics*, **2021**; 1–8

Pertiwi, F., Amanto, Wamiliana, Asmiati, and Notiragayu (2021). Calculating the Number of vertices Labeled Order Six Disconnected Graphs which Contain Maximum Seven Loops and Even Number of Non-loop Edges Without Parallel Edges. *Journal of Physics: Conference Series*, **1751**(1); 12026

Priyadarsini, P. (2015). A survey on some applications of graph theory in cryptography. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, **18**(3); 209–217

Puri, F., M. Usman, M. Ansori, Y. Antoni, et al. (2021). The Formula to Count The Number of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops. *Journal of Physics: Conference Series*, **1751**(1); 12023

Putri, D., Wamiliana, Fitriani, A. Faisol, and K. Dewi (2021). Determining the Number of Disconnected Vertices Labeled Graphs of Order Six with the Maximum Number Twenty Parallel Edges and Containing No Loops. *Journal of Physics: Conference Series*, **1751**(1); 12024

Slomenski, W. (1964). Application of the Theory of Graph to Calculations of the Additive Structural Properties of Hydrocarbon. *Russian Journal of Physical Chemistry*, **38**; 700–703

Wamiliana, A. Nuryaman, Amanto, A. Sutrisno, and N. Prayoga (2019). Determining the Number of Connected Vertices Labelled Graph of Order Five with Maximum Number of Parallel Edges is Five and Containing No Loops. *Journal of Physics: Conference Series*, **1338**(1); 12043

Wamiliana, W., A. Amanto, and G. T. Nagari (2016). Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five without Paralel Edges. *International Series on Interdisciplinary Research*, **1**(1); 4–7

Wamiliana, W., A. Amanto, M. Usman, M. Ansori, and F. C. Puri (2020). Enumerating the Number of Connected Vertices Labeled Graph of Order Six with Maximum Ten Loops and Containing No Parallel Edges. *Science and Technology Indonesia*, **5**(4); 131–135

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan didapat hasil sebagai berikut:

Jika $\mathrm{N}\left(G_{n,m,t}\right)$ adalah banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel berorde n dengan m garis dan t adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde tujuh tanpa loop adalah $(G_{7,m,t}) = c_t \; C_{t-1}^{(m-1)}$, with c_6=6727, c_7= 30160 , c_8=30765, c_9=21000, c_{10}=28364, c_{11}=26880, c_{12}=26460, c_{13}=20790, c_{14}=10290, c_{15}= 8022, c_{16}=2940, c_{17}=4417, c_{18}=2835, c_{19}=210, c_{20}= 21, c_{21}=1, atau

$N(G_{7,m,6}) = 6727 \times C_5^{(m-1)}$

$N\left(G_{6,m,7}\right) = 30160 \times C_6^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,8}\right) = 30765 \times C_7^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,9}\right) = 21000 \times C_8^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,10}\right) = 28364 \times C_9^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,11}\right) = 26880 \times C_{10}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,12}\right) = 26460 \times C_{11}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,13}\right) = 20790 \times C_{12}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,14}\right) = 10290 \times C_{13}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,16}\right) = 5460 \times C_{15}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,17}\right) = 4417 \times C_{16}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,18}\right) = 2835 \times C_{17}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,19}\right) = 210 \times C_{18}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,20}\right) = 21 \times C_{19}^{(m-1)}$

$N\left(G_{7,m,21}\right) = 1 \times C_{20}^{(m-1)}$

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G., and R. D. Greenlaw.2007. *Graph Theory Modelling, Application, and Algorithms*. Pearson/Prentice Education, Inc., New Jersey.

Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, and Reni Permata Sari. 2017. Counting the number of disconnected vertex Labelled graphs with order maximal four, *Sci.Int.(Lahore)*, 29(6),1181-1186,2017

Amanto, Wamiliana, And M.F Nur Efendi. 2018. The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs of Order Five With Maximum 3-Paralel Edges Is Six And Contains No Loops. KNM XIX, Universitas Brawijaya, Malang , 24-26 July 2018.

Amanto, Notiragayu, F,C. Puri, dan Wamiliana. 2020. Counting the number of vertices labeled connected graphs of order five with minimum five edges and maximum ten parallel edges. *Journal of Physics: Conference Series* 1524 (2020) 012047 doi:10.1088/1742-6596/1524/1/012047, 2020.

Bondy J.A., and U.S.R Murty. 2000. Graph Theory (Graduate Text in Mathematics , editors: S. Axler and K.A Ribet), Springer.

Foulds,L.R. Graph Theory Applications, New York: Springer-Verlag, 1992.

Harary F, and E. M. Palmer. 1973.*Graphical Enumeration*. Academic Press, New York.

Hsu, L.H., and Lin, C.K. 2009/*Graph Theory and interconnection network*. Taylor and Francis Group, LLC, New York.

Pertiwi, F.A., Amanto, Wamiliana, Asmiati, dan Notiragayu. 2021. Calculating the Number of Vertices Labeled Order Six Disconnected Graphs which Contain Maximum Seven Loops and Even Number of Non-loop Edges Without Parallel Edges. *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (2021) 012026. doi:10.1088/1742-6596/1751/1/012026

Puri, F.C., Wamiliana, Amanto, M.Usman, M. Ansori, dan Y. Antoni. 2021. The Formula to Count TheNumber of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops . Journal of Physics: Conference Series 1751 (2021) 012023 doi:10.1088/1742-6596/1751/1/012023

Slomenski, W.F., Application of the Theory of Graph to Calculations of the Additive Structural Properties of Hydrocarbon, Russian Journal of Physical Chemistry, 38, p.700-703, 1964.

Vasudev, C. *Graph Theory with Application*. New Age International Limited, 2006.

Wamiliana, Amanto, and G. T. Nagari. 2016. Counting the Number of Disconnected labelled Graphs of Order Five Without Parallel Edges. *International Series on Interdisciplinary Science and Technology (INSIST)*, **1**, no. 1, p. 1 – 6.

Wamiliana, A Nuryaman, Amanto, A Sutrisno, and N. A. Prayoga. 2019. Determining the Number of Connected Vertices Labelled Graph of Order Five with Maximum Number of Parallel Edges is Five and Containing No Loops. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1338 , 2019, 012043 , doi:10.1088/1742-6596/1338/1/012043

Wamiliana, Amanto, M.Usman, M. Ansori, dan F. C. Puri. 2020. Enumerating the Number of Connected Vertices Labeled Graph of Order Six with Maximum Ten Loops and Containing No Parallel Edges. Science and Technology Indonesia, Vol. 5 No. 4, pp. 131-135