ISBN: 978-602-71798-1-3

GRAF PETERSEN BERBILANGAN KROMATIK LOKASI EMPAT

Asmiati[1]
[1]Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Lampung
email: asmiati308@yahoo.com

Abstract

Let G be a finite, simple, and connected graph. Let c be a proper coloring of a connected graph G using the colors $1,2,\ldots,k$ for some positive integer k, where $c(u)\neq c(v)$ for adjacent vertices u and v in G. Thus, the coloring c can be considered as a partition $\prod$ of $V(G)$ into color classes (independent sets) $C_1, C_2, ..., C_k$, where the vertices of C_i are colored by i for $1\leq i\leq k$. The color code $c_{\prod}(v)$ of a vertex v in G is the ordered k-tuple $(d(v,C_1),\ldots,d(v,C_k))$ where $d(v,C_i)=\min\{d(v,x)\,|\,x\in C_i\}$ for $1\leq i\leq k$. If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called a locating-coloring of G. A minimum locating-coloring uses a minimum number of colors and this number is called the locating-chromatic number of graph G, denoted by $\chi_L(G)$. In this paper will be discussed about the locating-chromatic number of Petersen Graph.

Keywords: *locating-coloring, Petersen graph.*

Abstrak

Misalkan G graf berhingga, sederhana, dan terhubung. Misalkan c pewarnaan sejati pada graf G menggunakan warna $1,2,\ldots,k$ untuk suatu bilangan positip k, dengan $c(u)\neq c(v)$ untuk dua titik bertetangga u dan v di G. Pewarnaan c menginduksi partisi $\prod$ dari $V(G)$ menjadi kelas-kelas warna $C_1, C_2, ..., C_k$, yang mana titik-titik di C_i diwarnai dengan i untuk $1\leq i\leq k$. Kode warna titik v di G, dinotasikan $c_{\prod}(v)$ adalah pasangan k-terurut $(d(v,C_1),\ldots,d(v,C_k))$, dengan $d(v,C_i)=\min\{d(v,x)\,|\,x\in C_i\}$ untuk $1\leq i\leq k$ .Jikasemuatitik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ .Pada paper ini akan didiskusikan tentang bilngan kromatik lokasi graf Petersen.

Keywords: *pewarnaan lokasi, graf Petersen*

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 2002, Chartrand dkk. memperkenalkan konsep bilangan kromatik lokasi yang merupakan perpaduan antara konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Banyak peneliti yang mengkaji tentang bilangan kromatik lokasi pada suatu graf krn belum adanya teorema atau algoritma untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf.

Pada awal penelitian, Chartrand dkk.(2002) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada kelas graf sederhana, seperti lintasan, graf bintang, graf bintang ganda, graf bipartit lengkap. dan beberapa pohon tertentu. Selain itu, Chartrand dkk. (2003) telah berhasil mengkarakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi n, (n-1), atau (n-2).

Pada tahun 2011, Asmiati dkk. telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada amalgamasi graf bintang seragam. Di tahun berikutnya, Asmiati dkk. (2012) telah berhasil memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api. Secara umum, penentuan bilangan kromatik lokasi pada amalgamasi graf bintang tak seragam juga telah didapatkan oleh Asmiati (2014). Pada permasalahan karakterisasi, Asmiati dan Baskoro (2012) telah berhasil mengkarakterisasi graf memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Sedangkan Baskoro dan Asmiati (2012) untuk karakterisasi graf pohon berbilangan kromatik lokasi tiga.

Berdasarkan penelusuran literatur yang telah dilakukan belum ada penelitian yang berkenaan dengan penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf Petersen. Pada tulisan ini akan dibahas graf Petersen Berbilangan Kromatik Lokasi Empat.

2. DEFINISI BILANGAN KROMATIK LOKASI DAN GRAF PETERSEN

Berikut ini definisi dari bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand dkk, (2002).

Misalkan$G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan-k sejatidari$G$. Misalkan pula $\prod = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan$c$. *Kode warna*, $C_\Pi(v)$dari$v$ adalah k-tupel $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i$untuk$1 \leq I \leq k$. Jika semua titik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut *pewarnaanlokasi*dari$G$.*Bilangankromatiklokasi*dari$G$, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan terkecil k sehingga$G$mempunyaipewarnaan-k lokasi.

Teorema 1. (Chartrand dkk. (2002))

Bilangan kromatik lokasi graf lingkaran C_n, n titik adalah 3 jika n ganjil dan 4 jika n genap.
Bukti:
Misalkan $V(C_n) = \{v_i : i \epsilon [1, n]\}$ dan
$$E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i \epsilon [1, n-1]\}$$

a. Kasus 1, untuk n ganjil.
Jelas bahwa sekurang-kurangnya dibutuhkan tiga warna untuk mewarnai titik-titik pada C_n, untuk n ganjil. Jadi, $\chi_L(C_n) \geq 3$. Misalkan c adalah pewarnaan menggunakan 3 warna.Warnai titik-titik pada C_n sebagai berikut: $c(v_i) = 1$, untuk i ganjil dan $i \neq n$; $c(v_i) = 2$, untuk i genap; $c(v_n) = 3$. Jelas bahwa kode warna semua titik berbeda. Jadi, $\chi_L(C_n) \leq 3$. Terbukti bahwa $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil.

b. Kasus 2, untuk n genap. Serupa dengan pembuktian Kasus 1, akan diperoleh$\chi_L(C_n) = 4$, untuk n genap.

Berikut ini diberikan definisi graf Petersen yang diambil dari Holton dkk.(1993).

Misalkan $\{u_1, \dots, u_n\}$ adalah titik-titik pada lingkaran luar dan $\{v_1, \dots, v_n\}$ titik-titik pada lingkaran dalam.Graf Petersen $P_{n,k}$adalah graf dengan $2n$titik $\{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ dan sisi $u_i \to u_{i+1}$, $v_i \to v_{i+k}$dan $u_i \to v_i$

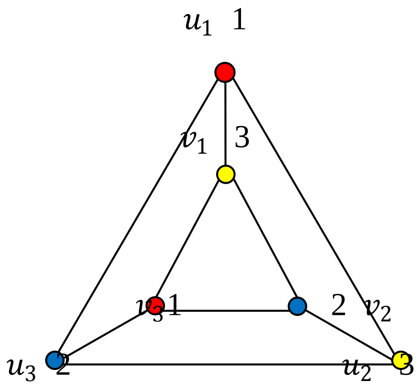
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat.

Teorema 2

$$\chi_L(P_{3,1}) = \chi_L(P_{4,2}) = \chi_L(P_{5,1}) = \chi_L(P_{5,2}) = 4$$

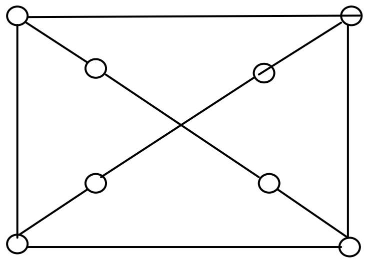
Bukti :



Gambar1.Batas bawah graf Petersen $P_{3,1}$

Graf Petersen$P_{3,1}$memuatC_3, makaberdasarkanTeorema1, $\chi_L(P_{3,1}) \geq 3$. Andaikan$c$ adalah pewarnaanlokasimenggunakan 3warna. PerhatikanGambar1,titik-titikpada Graf Petersen diwarnaisebagaiberikut : $c(u_1) = 1$, $c(u_2) = 3$, $c(u_3) = 2$, $c(v_1) = 3$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 1$. Kode warnanya adalah $c(u_1) =(0,1,1))$, $c_\pi(u_2) =(1,1,0)$, $c_\pi(u_3) =(1,0,1)$, $c(v_1) = (1,1,0)$, $c_\pi(v_2) =(1,0,1)$,$c_\pi(v_3) =(0,1,1)$. Makaakanterdapatwarna yang sama, yaitu :$c_\pi(u_1) = c_\pi(v_3)$, $c_\pi(u_2) = c_\pi(v_1)$, $c_\pi(u_3) = c_\pi(v_2)$. Maka cbukanpewarnalokasi, kontradiksi.Akibatnyadibutuhkansekurang-kurangnya 4 warnauntukmewarnai

Misalkan c adalah pewarnaan titik dengan 4 warna. Tanpa mengurangi perumuman, warnai titik-titik $P_{3,1}$sebagai berikut : $c(u_1)$ = 1,$c(u_2)$ = 3,$c(u_3)$ = 2,$c(v_1)$ = 4,$c(v_2)$ = 2,$c(v_3)$ = 1.Kodewarnanyaadalah$c_\pi(u_1) =$ (0,1,1,1); $c_\pi(u_2) = (1,1,0,2)$; $c_\pi(u_3) = (1,0,1,2)$; $c_\pi(v_1) = (1,1,2,0)$; $c_\pi(v_2) = (1,0,1,1)$; $c_\pi(v_3) = (0,1,2,1)$. Karenakodewarnasemuatitik di $P_{3,1}$berbeda, makac merupakan pewarnaan lokasi.
Jadi $\chi_L(P_{3,1}) \leq 4$. Akibatnya,$\chi_L\left(P_{3,1}\right) = 4$.

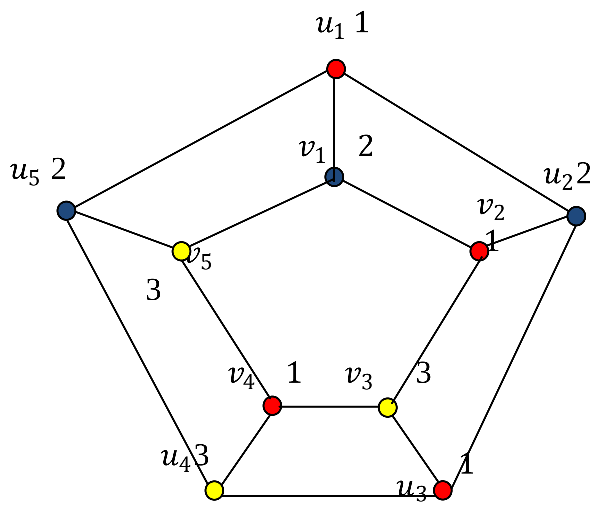


Gambar2. Graf Petersen $P_{4,2}$

Akan ditentukanbatasbawahdaribilangankromatiklokasi$P_{4,2}$. Graf Petersen memuat C_4. Berdasarkan Teorema 1, maka $\chi_L\ \left(P_{4,2}\right) \geq 4$. kodewarnasemuatitik di $P_{4,2}$ berbeda, maka pewarna tersebut mempunyaipewarnaaanlokasi. Sehingga, diperoleh$\chi_L(P_{4,2}) \geq 4$.

Akan ditentukan batas atas graf Petersen $P_{4,2}$. Misalkan c adalah pewarnaan titik dengan menggunakan 4 warna. Titik-titikpada Graf Petersen diwarnaisebagaiberikut : $c(u_1)$ = 1,$c(u_2)$ = 2,$c(u_3)$ = 3,$c(u_4)$ = 4,$c(v_1)$ = 2,$c(v_2)$ = 4, $c(v_3)$ = 1,$c(v_4)$ =3. Kodewarnanyaadalah$c_\pi(u_1) = (0,1,2,1)$; $c_\pi(u_2) = (1,0,1,1)$; $c_\pi(u_3) = (1,1,0,1)$; $c_\pi(u_4) = (1,2,1,0)$; $c_\pi(v_1) = (1,0,2,2)$; $c_\pi(v_2) = (2,1,1,0)$; $c_\pi(v_3) = \{0,1,1,2\}$; $c_\pi(v_4) = (2,2,0,1)$. Karena kode warna semua titik di $P_{4,2}$ berbeda, makac merupakan pewarnaan lokasi. Jadi,

$\chi_L(P_{4,2}) \leq 4$. Akibatny$\chi_L\left(P_{4,2}\right) = 4$.

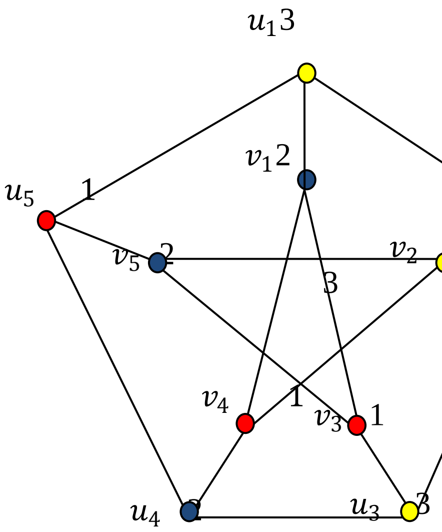


Gambar3.Batas bawah graf Petersen $P_{5,1}$

Akan ditentukanbatasbawahdaribilangankromatiklokasi$P_{5,1}$. Graf Petersen memuat C_5. Berdasarkan Teorema 2.4 $\chi_L(C_5) = 3$. Jadi $\chi_L\left(P_{5,1}\right) = 3$. Andaikan C adalah pewarnaan lokasi menggunakan 3 warna.PerhatikanGambar 4.7, titik-titikpada Graf Petersen diwarnaisebagaiberikut :
$c(u_1)$ = 1, $c(u_2)$ = 2, $c(u_3)$ = 1,
c(u_4) = 3, c(u_5) = 2, $c(v_1)$ = 2
$c(v_2)$ = 1, $c(v_3)$ = 3, $c(v_4)$ =1, $c(v_5)$ = 3.
Kode warnanya adalah $(u_1) = (0,1,2)$;
$c_\pi(u_2)$ =(1,0,2);
$c_\pi(u_3)$ =(0,1,1); $c(u_4)$ =(1,1,0);
$c_\pi(u_5)$ =(1,0,1); $c_\pi(v_1)$ =(1,0,1);
$c_\pi(v_2)$ =(0,1,1); $c_\pi(v_3) = \{1,2,0\}$;
$c_\pi(v_4)$ =(0,2,1),$c_\pi(v_5)$ =(2,1,0). Maka akan terdapat $c_\pi(u_3) = c_\pi(v_2)$dan $c_\pi(u_5) = c_\pi(v_1)$. Maka c bukanpewarnalokasi, kontradiksi.
Akibatnyadibutuhkansekurang-kurangnya 4 warnauntukmewarnai$P_{5,1}$.
Jadi$\chi_L\left(P_{5,1}\right) \geq 4$.

Titik-titikpada$P_{5,1}$dipartisi sebagai berikut $C_1 = \{u_1, u_3, v_4\}, C_2 = \{u_2, u_5, v_1\}, C_3 = \{u_4, v_3, v_5\}, C_4 = \{v_2\}$. Kode warnanya adalah
$c_\pi(u_1) = (0,1,2,2)$; $c_\pi(u_2) = (1,0,2,1)$;
$c_\pi(u_3) = (0,1,1,2)$; $c_\pi(u_4) = (1,1,0,3)$;
$c_\pi(u_5) = (1,0,1,3)$; $c_\pi(v_1) = (1,0,1,1)$;
$c_\pi(v_2) = \{2,1,1,0\}$;
$c_\pi(v_3) =$
$\{1,2,0,1\}$; $c_\pi(v_4)\{0,2,1,2\}$; $c_\pi(v_5) =$

{1,1,0,2}. Karena kode warna semua titik berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi. Jadi, diperoleh $\chi_L(P_{5,1}) \leq 4$.
Akibatnya, $\chi_L(P_{5,1}) = 4$.



Gambar4.Batas bawah graf Petersen $P_{5,2}$

Akan ditentukanbatasbawahdaribilangankromatiklokasi$P_{5,2}$. Graf Petersen memuatC_5. Berdasarkan Teorema 1,$\chi_L(C_5) = 3$. Jadi $\chi_L(P_{5,2}) \geq 3$.
Andaikan c adalah pewarnaan lokasi menggunakan 3 warna.PerhatikanGambar 4, titik-titikpada Graf Petersen diwarnaisebagaiberikut :
Titik-tiitikpada$P_{5,2}$ dipartisi sebagai berikut $C_1 = \{u_2, u_5, v_3, v_4\}, C_2 = \{u_4, v_1, v_5\}, C_3 = \{u_1, u_3, v_2\}$. Kode warnanya adalah $C_\pi(u_1) = \{1,1,0\}$; $C_\pi(u_2) = \{0,2,1\}$; $c_\pi(u_3) = (1,1,0)$; $c_\pi(u_4)$ =(1,0,1); $c_\pi(u_5)$ =(0,1,1); $c_\pi(v_1)$ =(1,0,1); $c_\pi(v_2)$ =(1,1,0); $c_\pi(v_3) = \{0,1,1\}$; $c_\pi(v_4)$ =(0,1,1),$c(v_5)$ =(1,0,1). Maka akan terdapat $c_\pi(u_1) = c_\pi(u_3) = c_\pi(v_2)$, $c_\pi(u_4) = c_\pi(v_1) = c_\pi(v_5)$, $c(u_5) = c_\pi(v_3) = c_\pi(v_4)$. Maka c bukanpewarnaanlokasi, kontradiksi.
Akibatnyadibutuhkansekurang-kurangnya 4 warnauntukmewarnai$P_{5,2}$. Jadi $\chi_L(P_{5,2}) \geq 4$

Akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf Petersen $P_{5,2}$.Titik-titikpada$P_{5,2}$dipartisi sebagai berikut :$C_1 = \{u_2, u_5, v_3\}, C_2 = \{u_4, v_1, v_5\}, C_3 = \{u_3, v_4\}, C_4 = \{u_1, v_2\}$. Kode warnanya adalah $c_\pi(u_1) = (1,1,2,0)$; $c_\pi(u_2) = (0,2,1,1)$; $c_\pi(u_3) = (1,1,0,2)$; $c_\pi(u_4) = (1,0,1,2)$; $c_\pi(u_5) = (0,1,2,1)$; $c_\pi(v_1) = (1,0,1,1)$; $c_\pi(v_2) = \{1,1,1,0\}$; $c_\pi(v_3) = \{0,1,1,2\}$; $c_\pi(v_4) = \{2,1,0,1\}$; $c_\pi(v_5) = \{1,0,2,1\}$. Karena kode warna semua titik di $P_{5,2}$ berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi.Jadi,
$\chi_L(P_{5,2}) \leq 4$. Akibatnya, $\chi_L(P_{5,2}) = 4$. □

4. KESIMPULAN

Graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat antara lain adalah $P_{3,1}, P_{4.2}, P_{5,1}$ dan $P_{5,2}$. Berdasarkan hasil yang diperoleh ini, penelitian dapat dilanjutkan untuk karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasiempat.

REFERENSI

[1] Asmiati, The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Almagamation of Starts, *Far East Journal of Mathematical Science (FJMS)*, **93(1)**, 89-96, 2014.

[2] Asmiati, Baskoro, E.T, Characteristic pf graphs Containing Cycle with Locating-cromatic Number Three, *AIP Conf.Proc*., **1450**, 351-357, 2012.

[3] Asmiati, Assiyatun, H, Baskoro, E.T, Suprijanto, D, Simanjuntak, R, Uttunggadewa, S, Locating-Chromatic Number of Firecracker Graph, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **63(1),** 11-23, 2012.

[4] Asmiati, Assiatun, H, Baskoro, E.T, Locating-Chromatic Number of Almagamation of Starts, *ITB J.Sci*., **43A**, 1-8, 2011.

[5] Chartrand, G, Erwin, D, Henning, M.A, Slater, P.J, dan Zhang, P. The locating-chromatic number of a graph, *Bull.inst.combin. Apll.*,**36,** 89-101, 2002.

[6] Chartrand, G, Erwin, D, Henning, M.A, Slater, P.J, dan Zhang, P., Graf of order n with locating-chromatic number *n*-1, *Discrate Math*., **269,** 65-79, 2003.

[7] Holton, D. A. dan Sheehan, J., *The Petersen Graph*, Cambridg University Press, Cambridge, 1993.