PLAPORAN
PENELITIAN DASAR
UNIVERSITAS LAMPUNG

KARAKTERISTIK GRAF BERLABEL TITIK ORDE LIMA DAN ENAM DALAM PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK TANPA *LOOP* ORDE LIMA DAN ENAM

TIM PENGUSUL

Amanto, S.Si., M.Si
NIDN: 0014037301 SINTA ID: 6120134
Dr. Notiragayu S.Si., M.Si.
NIDN: 0009117301 SINTA ID : 6657292
Prof. Dr. Dr. La Zakaria, S.Si, M.Sc.
NIDN: 0013026902 SINTA ID : 6051059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2021

HALAMAN PENGESAHAN
PENELITIAN DASAR UNIVERSITAS LAMPUNG

Judul Penelitian	: Karakteristik Graf Berlabel Titik Orde Lima dan Enam Dalam Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Tanpa *Loop* Orde Lima dan Enam
Manfaat sosial ekonomi	:
Jenis penelitian	: [√] penelitian dasar [ ] penelitian terapan [ ] pengembangan eksperimental
Ketua Peneliti	
a. Nama lengkap	: Amanto, S.Si, M.Si.
b. NIDN/SINTA ID	: 0014037301/6120134
c. Jabatan fungsional	: Lektor
d. Program studi	: Matematika
e. No. HP.	: 081379067455
f. Alamat email (surel)	: amanto.1973@fmipa.unila.ac.id
Anggota Peneliti (1)	
a. Nama lengkap	: Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.
b. NIDN/ SINTA ID	: 0009117301/6157184
c. Jabatan fungsional	: Lektor
d. Program Studi	: Matematika
e. Alamat surel (e-mail)	: notiragayu@fmipa.unila.ac.id
Anggota Peneliti (2)	
a. Nama lengkap	: Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.
b. NIDN/ SINTA ID	: 0013026902/6051059
c. Jabatan fungsional	: Guru Besar
d. Program Studi	: Matematika
e. Alamat surel (e-mail)	: lazakaria.1969@fmipa.unila.ac.id
Nama mahaiswa yang terlibat	: Desiana Putri (1617031098) Syaiful Daiyan Mubarok (1717031070)
Lama kegiatan	: 6 bulan
Biaya penelitian	: Rp. 20.000.000
Sumber dana	: DIPA Unila TA 2021

Bandarlampung, 21 September 2021

Mengetahui, Dekan FMIPA Unila	Ketua Peneliti
Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T NIP. 197407052000031001	Amanto, S.Si., M.Si. NIP 197303142000121002

Menyetujui,
Ketua LPPM Unila

Dr. Ir. Lusmeilia Afriani, D.E.A.
NIP 196505101993032008

DAFTAR ISI

Ringkasan

Sejak konsep Teori Graf dikenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 sewaktu menyelesaikan masalah Jembatan Konisberg, konsep tersebut digunakan secara luas untuk merepresentasikan berbagai masalah yang dihadapi oleh manusia, salah satunya adalah masalah pencacahan (enumerasi). Cayley, pada tahun 1874 ingin mengetahui banyaknya isomer dari hidrokarbon, dan melakukan enumerasi untuk hal tersebut. Ternyata, yang ia lalukan tersebut sama saja dengan menghitung banyaknya *rooted tree* dari suatu graf, dengan unsur carbon (C) merupakan *leaf* (daun) dari *rooted tree* dan unsur hidrogen (H) sebagai *root* nya. Baik unsur C ataupun H diwakili oleh titik dan ikatan yang terjadi diantar unsur-unsur tersebut direpresentasikan oleh garis yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Jika diberikan suatu graf G(V,E) dengan *orde* n (n adalah banyaknya titik pada suatu graf) dan garis sebanyak m, maka banyak graf yang dapat dibentuk. Graf-graf yang terbentuk tersebut dapat berupa graf sederhana yang tidak memuat *loop* atau garis paralel, atau graf tidak sederhana. Titik dan garis pada graf dapat diberi label. Dengan adanya label ini, maka jika label yang berbeda akan menghasilkan graf yang berbeda juga, walaupun bentuknya sama. Banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima tanpa *loop* telah diinvestigasi oleh Wamiliana dkk (2020), dan banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* telah diinvestigasi oleh Puri (2019). Berdasarkan kedua hasil investigasi tersebut, maka pada penelitian ini akan diinvestigasi dari sifat graf terhubung berlabel titik orde lima dan enam tersebut untuk mendapatkan keterhubungan dari rumus yang dihasilkan. Hasil yang didapat nanti diharapkan dapat digunakan untuk memprediksi rumus untuk graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa loop. Hasil tersebut akan ditulis menjadi artikel yang akan diterbitkan pada prosiding internasional terindeks Scopus atau jurnal internasional terindeks Scopus.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang dari matematika yang mempelajari tentang objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis .Teori graf tidak saja hanya dapat digunakan untuk merepresentasikan masalah kehidupan sehari-hari, akan tetapi dapat juga digunakan untuk menyelesaikannya. Suatu teknik yang komprehensif untuk menyelesaikan berbagai masalah yang berhubungan dengan jaringan di berikan oleh Hsu dan Lin (2009), dan beberapa contoh terapan dari teori graf pada bidang teknik dan riset operasi diberikan oleh Vasudev (2006). Proses pencacahan graf pertama kali dilakukan oleh Cayley pada tahun 1874 yang tertarik untuk menghitung banyaknya isomer hidrokarbon C_nH_{2n+2} dan mendapatkan bahwa penentuan banyaknya isomer tersebut berhubungan dengan menghitung banyaknya *rooted tree*, dan termotivasi oleh Cayley, Slomenski (1964) juga melakukan investigasi bentuk struktur senyawa kimia tertentu dengan graf.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bilangan asli yang disebut label. Graf berlabel adalah graf yang titik atau garisnya memiliki label. Jika pelabelannya adalah titik, maka pelabelan disebut dengan pelabelan titik, jika pelabelannya adalah garis maka pelabelannya disebut pelabelan garis. Jika pelabelannya adalah titik dan garis maka pelabelannya disebut dengan pelabelan total (Valdya, 2010). Untuk menghitung graf sederhana berlabel diberikan formula $\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m}$, dimana n adalah orde graf dan m adalah banyaknya garis Tentu saja pada rumus tersebut dimungkinkan terbentuk graf yang tidak terhubung jika graf yang terbentuk bukan merupakan *tree* karena pada rumus tersebut m = n-1. Formula/rumus untuk menentukan banyaknya graf berlabel titik (terhubung ataupun tak terhubung) tanpa *loop* dengan menggunakan fungsi pembangkit diberikan oleh Agnarsson dan Greenlaw (2007). Akan tetapi, Agnarsson dan Greenlaw (2007) tidak mendiskusikan rumus jika graf yang diinginkan hanya graf terhubung saja, atau hanya graf tak terhubung saja, dan jika garis paralel diperbolehkan ada dalam graf. Oleh karena itu, beberapa kajian telah dilakukan untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung maupun terhubung berlabel titik dengan tambahan boleh memuat atau tidak boleh memuat baik *loop* ataupun garis paralel. Beberapa kajian tersebut antara lain untuk orde empat dilakukan Amanto dkk (2017) yang meneliti banyaknya graf tak terhubung berlabel titik orde empat; tak terhubung tanpa loop orde lima dilakukan oleh Wamiliana dkk (2016), terhubung orde lima tanpa loop oleh Wamiliana dkk (2019), terhubung orde enam tanpa garis paralel oleh Wamiliana dkk (2020), dan terhubung orde enam tanpa loop oleh Puri dkk (2021). Pada penelitian ini akan dikaji keterhubungan antara graf terhubung berlabel orde lima dan orde enam dalam penentuan rumus banyaknya graf terhubung berlabel titik yang dihasilkannya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

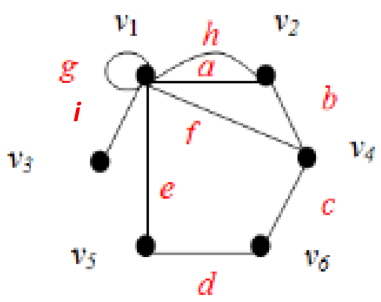
a. Mengkaji keterkaitan dan karakteristik dari graf terhubung berlabel titik berorde lima dan enam terhadap penentuan rumus untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik untuk orde tersebut.
b. Memberikan prediksi rumus untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik untuk orde yang lebih tinggi.

1.3 Rencana Targegt Luaran

1. Publikasi pada prosiding internasional bereputasi, atau
2. Publikasi pada jurnal internasional bereputasi.

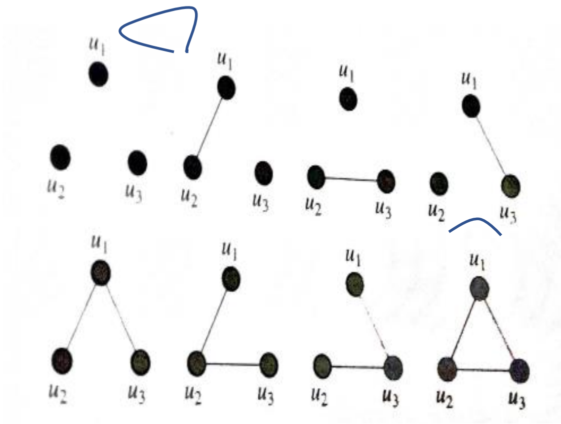
BAB II   TINJAUAN PUSTAKA

Suatu graf G terdiri dari dua struktur *V(G)* dan *E(G)* dengan *V(G)* adalah himpunan tak kosong yang elemen-elemennya berupa titik dan *E(G)* adalah himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik di *V(G)* yang disebut sebagai garis atau *edge*. Banyaknya himpunan titik *V(G)* disebut orde dari suatu graf *G*. Suatu graf G dikatakan graf berlabel jika titik atau garisnya diberikan suatu nilai atau data tertentu. Jika tidak maka graf G dikatakan graf tak berlabel. Pelabelan graf dapat berupa pelabelan titik, pelabelan garis, atau pelabelan titik dan garis. Jika pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik dan garis, maka pelabelan tersebut disebut dengan pelabelan total (Valdya, 2010). Contoh dari pelabelan adalah Gambar 2.1, yang merupakan pelabelan total.



Gambar 2.1. Contoh graf dengan pelabelan total

Diberikan graf G(V,E) dengan banyaknya titik n   n (n=banyaknya titik) dan garis sebanyak m, dan setiap titik nya diberi label, maka banyak graf yang dapat dibentuk. Graf yang terbentuk tersebut dapat berupa graf terhubung ataupun tak terhubung. Selain itu, graf yang terbentuk juga dapat berupa graf sederhana yang tidak memuat *loop* ataupun garis paralel, maupun graf yang tidak sederhana (memuat *loop* atau garis paralel). Pada Gambar 2 berikut diberikan contoh *beberapa (tidak semua)* graf yang dapat dibentuk jika diberikan n = 3.



Gambar 2.2. Beberapa graf yang terbentuk untuk n = 3

Dapat dilihat pada Gambar 2.2 bahwa banyak graf yang dapat dibentuk untuk n = 3. Pada gambar tersebut tidak semua graf terbentuk digambarkan. Akan tetapi, dapat dilihat bahwa graf yang terbentuk tersebut dapat berupa graf terhubung dan juga graf tak terhubung. Seperti pada gambar kiri atas dari Gambar 2 graf yang terbentuk adalah graf tak terhubung yang memuat satu loop, sedangkan di gambar kanan bawah, graf yang terbentuk adalah graf terhubung yang memuat garis paralel. Selain itu, dapat saja graf yang terbentuk memuat keduanya, baik loop maupun garis paralel. Jika banyaknya titik (banyaknya titik disebut dengan orde dari graf) yang diberikan semakin besar, maka semakin banyak graf yang dapat dibentuk.

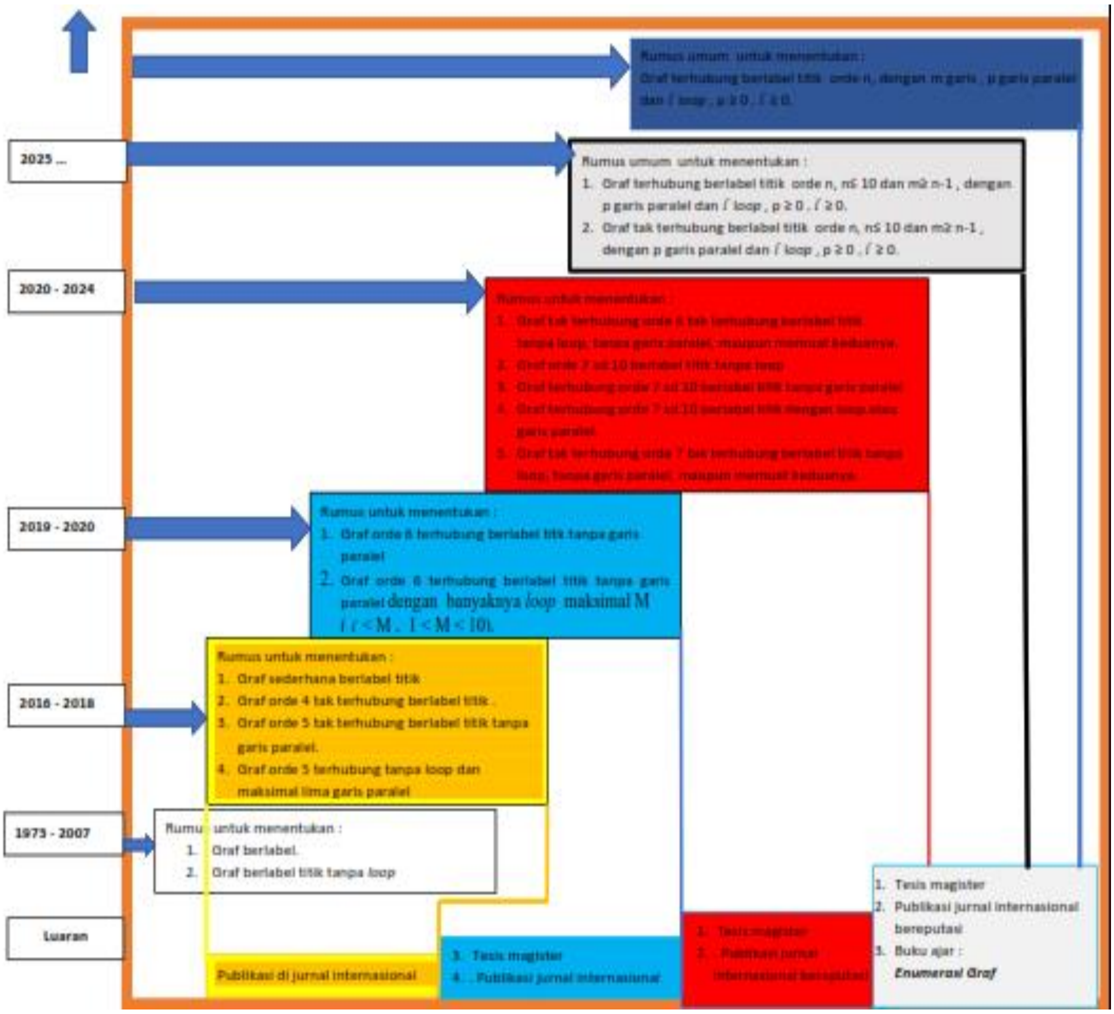
2.1 Hasil yang telah ada di literature

Harary dan palmer (1973) memberikan cara untuk memberikan label pada graf. Formula untuk menentukan banyaknya total graf berlabel titik (terhubung dan tak terhubung, tanpa ada pemisahan sifat keterhubungan) tanpa *loop* diberikan oleh Agnarsson dan Greenlaw (2007). Akibatnya, dari hasil Agnarsson dan Greenlaw (2007) ini, tidak dapat ditentukan banyaknya graf terhubung saja jika diberikan n titik dan m garis, beggitupun dengan banyaknya graf tak terhubung. Sehingga, berdasarkan hasil Agnarsson dan Greenlaw (2007), beberapa kajian dilakukan terkait dengan penentuan formula untuk menentukan banyaknya graf terhubung saja ataupun tak terhubung saja, dengan tambahan graf diperbolehkan untuk memuat *loop* ataupun garis paralel.

Pada 2017 Amanto dkk. telah dilakukan investigasi untuk graf tak terhubung berlabel titik dengan orde maksimal empat . Untuk orde lima telah diinvestigasi beberapa kasus oleh Amanto dkk (2018) antara lain : (a) banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa garis paralel dengan b) dan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan garis 3-paralel sebanyak enam dan tidak memuat *loop*. Untuk graf terhubung, telah diinvestigasi banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel maksimal lima dan tidak memuat *loop* oleh Wamiliana dkk (2019) dengan hasil: $\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,4}}) = 125 \times \mathrm{C}_3^{(\mathrm{m}-1)}$, $\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,5}}) = 222 \times \mathrm{C}_4^{(\mathrm{m}-1)}$, $\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,6}}) = 205 \times \mathrm{C}_5^{(\mathrm{m}-1)}$,$\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,7}}) = 110 \times \mathrm{C}_6^{(\mathrm{m}-1)}$,$\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,8}}) = 45 \times \mathrm{C}_7^{(\mathrm{m}-1)}$, $\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,9}}) = 10 \times \mathrm{C}_8^{(\mathrm{m}-1)}$ dan $\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,10}}) = \mathrm{C}_9^{(\mathrm{m}-1)}$. Untuk orde enam Puri dkk (2021) telah mengkaji banyaknya graf terhubung tanpa loop dengan banyaknya garis adalah tigapuluh dan didapat hasil: $N(G_{6,m,5}) = 1296 \times C_4^{(m-1)}$ $N(G_{6,m,6}) = 1980 \times C_5^{(m-1)}$, $N(G_{6,m,7}) = 3330 \times C_6^{(m-1)}$, $N(G_{6,m,8}) = 4620 \times C_7^{(m-1)}$, $N(G_{6,m,9}) = 6660 \times C_8^{(m-1)}$, $N(G_{6,m,10}) = 2640 \times C_9^{(m-1)}$. $\mathrm{N}(\mathrm{G}_{\mathrm{n,m,t}})$ adalah banyaknya graf terhubung berlabel titik orde 5 dengan m garis dan t adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda (garis paralel dihitung satu)

Berdasarkan hasil dariWamiliana dkk (2019) dan Puri dkk (2021), dapat dilihat adanya keterkaitan antara rumus untuk menentuka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima dan enam, dan pada penelitian ini akan dikaji kerterkaitan dari rumus yang didapat pada masing masing orde untuk mendapatkan karakterisasi dari masing masing orde graf. Hasil ini akan digunakan untuk memprediksi rumus untuk graf terhubung berlabel titik dengan orde yang lebih tinggi (n ≥ 7).

2.2 Road Map Penelitian

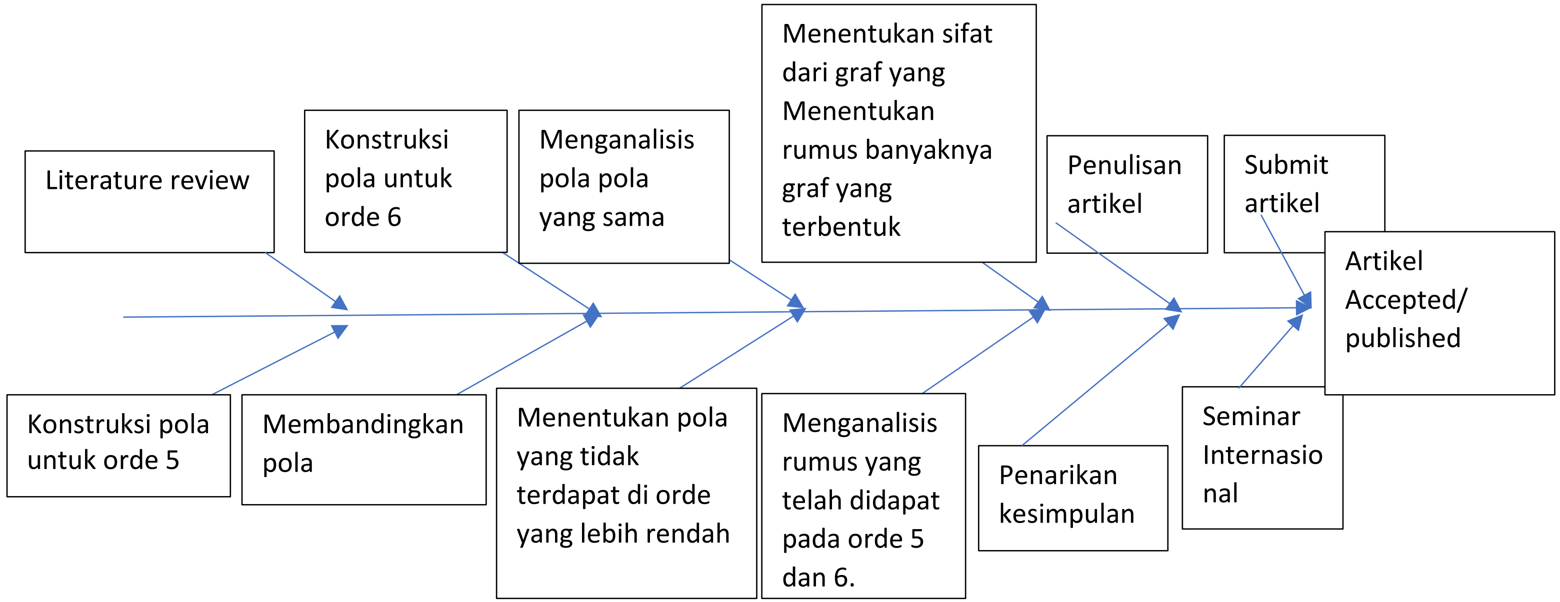


BAB III. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

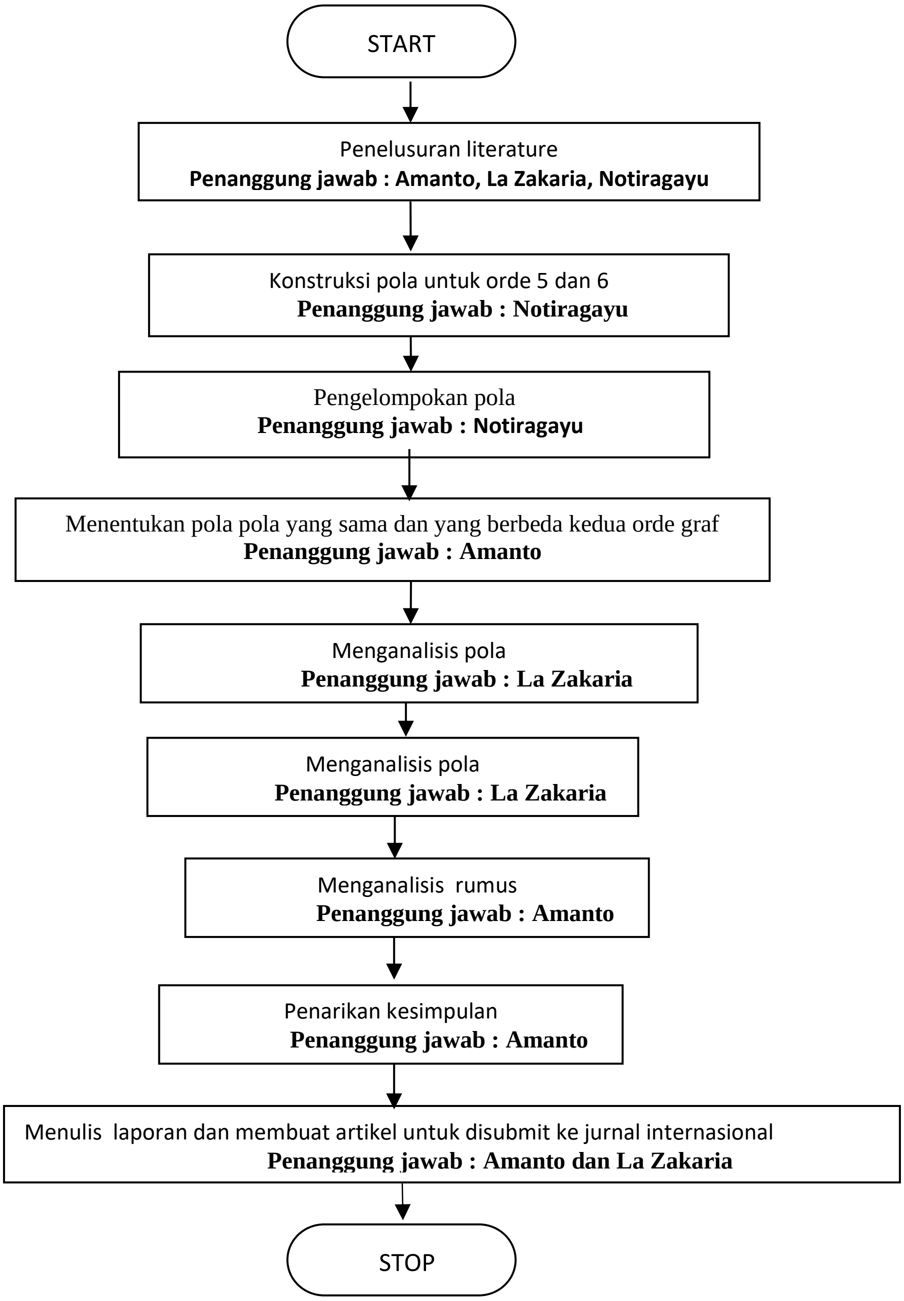
1. Pengecekan literature untuk mengetahui apakah sudah ada yang meneliti topik penelitian ini atau belum.
2. Mengkonstruksi pola-pola yang terdapat pada graf orde 5 dengan orde 6
3. Menentukan persamaan pola pada orde 5 dan 6
4. Menentukan pola yang tidak terdapat pada orde 5.
5. Menganalis pola untuk menentukan karakter yang penentu rumus masing masing orde.
6. Menganalisis rumus yang didapat untuk masing masing orde
7. Menentukan karakter/sifat penentu rumus dari masing masing orde.
8. Penarikan kesimpulan.
9. Pembuatan artikel jurnal.
10. Seminar Internasional
11. Sumbit artikel ke Jurnal internasional terindeks Scopus atau prosiding internasional terindeks Scopus.
12. Pelaporan

Langkah langkah tersebut dapat dilihat dari diagram tulang ikan berikut :



Gambar 2.3. Diagram tulang ikan penelitian

:



Gambar 2.4. Diagram alir penelitian

3.2 Tabel Ruang Lingkup Kegiatan Ketua dan Anggota

NO	Nama	Jabatan Dalam Tim Alokasi Waktu, Jam/Minggu	Tugas Dalam Tim
1.	Amanto, S.Si., M.Si	Ketua 10 jam/minggu	- Mengkaji jurnal-jurnal yang berhubungan dengan topik penelitian. - Memeriksa dan meneliti pola-pola graf yang dikonstruksi - Menentukan persamaan dan perbedaan pola graf orde 5 dan orde 6. - Menganalisis perbedaan pola. - Menganalisis perbedaan rumus - Menentukan sifat graf yang Menentukan bentuk rumus banyaknya graf masing masing orde. - Menyajikan hasil penelitian pada Seminar Internasional. - Mendokumentasi seluruh hasil penelitian yang dilakukan. - Membuat laporan
2.	Dr. La Zakaria, M.Sc	Anggota 8 jam/minggu	- Mengkaji jurnal-jurnal yang berhubungan dengan topik penelitian. - Menganalisis perbedaan pola. - Menganalisis perbedaan rumus - Menentukan sifat graf yang Menentukan bentuk rumus banyaknya graf masing masing orde. - Menyusun draf paper untuk jurnal - Mensubmit draf artikel ke jurnal internasional bereputasi
3.	Dr, Notiragayu, M.Si	Anggota (mahasiswa) 6 jam/minggu	- Mengkonstruksi pola-pola masing masing orde - Mengelompokkan graf berdasarkan karakteristik yang dimiliki .

3.3 Luaran /outcome Penelitian

Luaran yang diharapkan dari penelitian ini adalah :

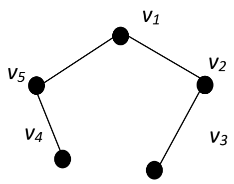
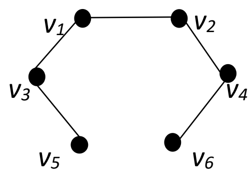
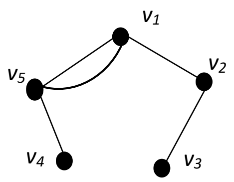
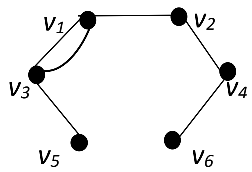
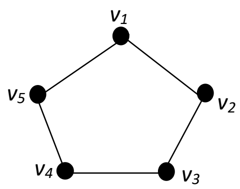
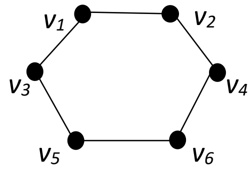
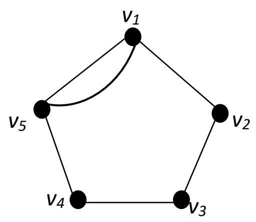
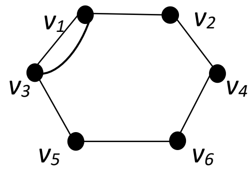
1. Publikasi pada prosiding internasional bereputasi, atau
2. Publikasi pada jurnal nasional terindeks SINTA 3.

BAB IV. HASIL PENELITIAN DAN LUARAN YANG DICAPAI

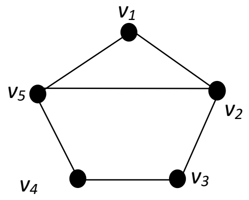
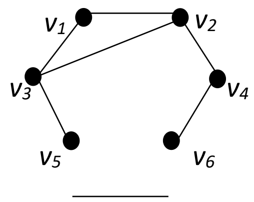
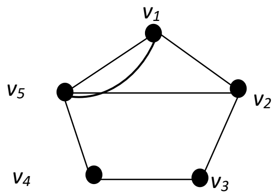
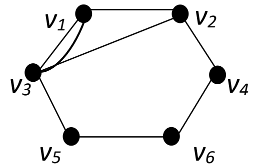
4.1 Hasil Observasi Pola yang Ada di n = 5, n = 6 dan n = 7

Berikut ini merupakan sebagian hasil dari observasi pola yang ada di n = 5 dan n = 6. Dalam laporan ini semua pola tidak disertakan karna terlalu banyak pola yang tertentu. Selain itu, graf-graf yang isomorfik dihitung sebagai satu.

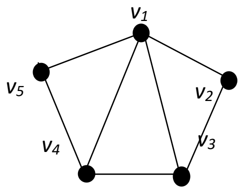
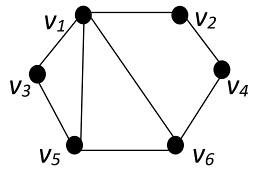
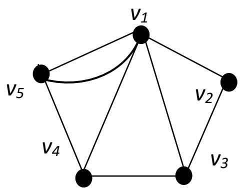
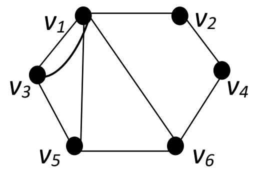
Tabel 4.1 Hasil observasi pola yang ada di n = 5 dan n = 6.

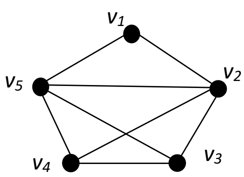
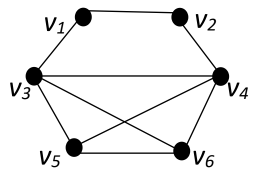
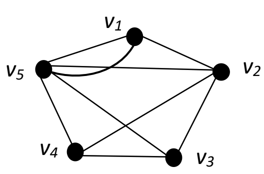
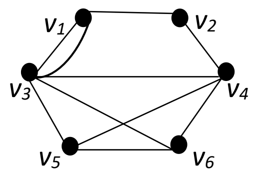
t	n = 5	n = 6
t=n-1 m=n-1		
t=n-1 m=n		
t = n m = n		
t = n m=n+1		

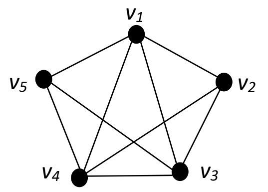
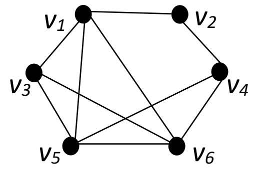
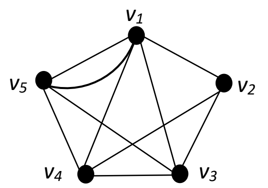
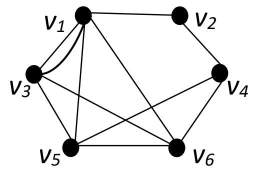
<table>
<tr><td rowspan="2">t=n+1
m=n+1

t=n+1
m=n+2</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

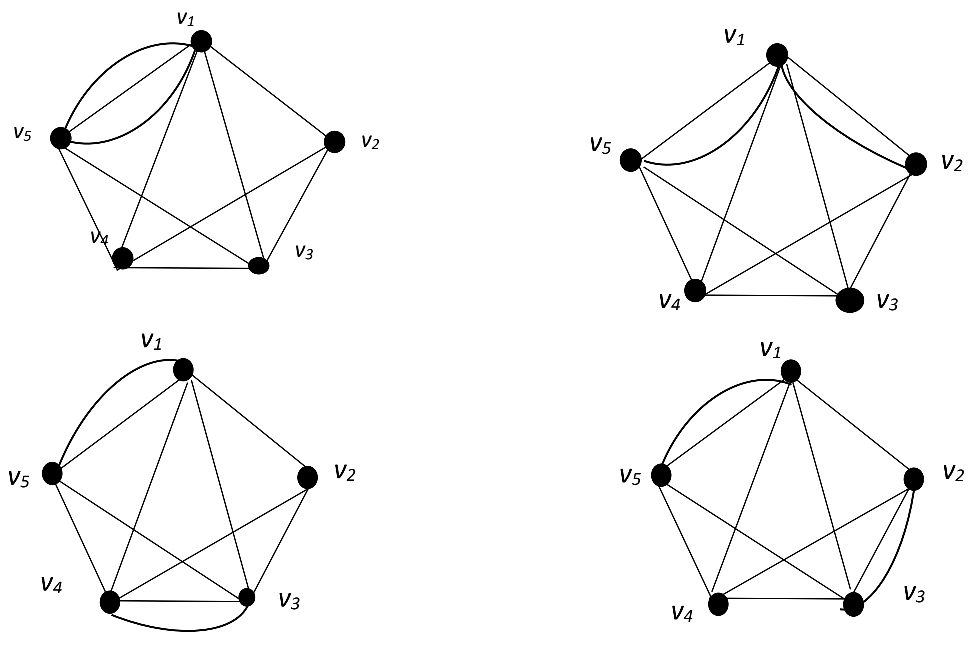
<table>
<tr><td rowspan="2">t=n+2
m=n+2

t=n+2
m=n+3</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">t=n+3
m=n+3

t=n+3
m=n+4</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

t=n+4 m=n+4		
t=n+4 m=n+5		

Pada Tabel 4.1 hanya ditampilkan sebagian pola yang terbentuk karena banyak sebkali pola yang terbentuk. Sebagai contoh untuk n=5, t = n+4 and m= n+6, (t adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda, dalam hal ini garis paralel dihitung 1), terdapat beberapa pola sebagai berikut:



Gambar 5. Beberapa pola dari graf terhubung berlabel titik orde 5 tanpa *loop* dengan t=n+4 dan m=n+6

Setelah dilakukan proses penghitungan banyaknya graf terhubung untuk masing2 pola serta pengelompokan berdasarkan m dan t, maka didapat hasil sebagai berikut:

Tabel 4.2 Banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa loop untuk graf berorde lima.

m	Banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop*					
	t					
	5	6	7	8	9	10
5	222					
6	1110	205				
7	3330	1230	110			
8	7770	4305	770	45		
9	15540	11480	3080	360	10	
10	27972	25830	9240	1620	90	1
11	46620	51660	23100	5400	450	10
12		94710	50820	14850	1650	55
13		162360	101640	35640	4950	220
14			188760	77220	12870	715
15			330330	154440	30030	2002
16				289575	64350	5005
17				514800	128700	11440
18					243100	24310
19					437580	48620
20						92378

Dengan mengelompokkan graf tersebut daalam m dan t, didapat bahwa pada tiap kolom, angka-angka membentuk suatu pola, sehinga didapat Tabel berikut:

Tabel 4.3 Bentuk alternatif dari Tabel 4.2.

m	Banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde lima tanpa *loop*					
	t					
	5	6	7	8	9	10
5	1 x 222					
6	5 x 222	1 x 205				
7	15 x 222	6 x 205	1 x 110			
8	35 x 222	21 x 205	7 x 110	1 x 45		
9	70 x 222	56 x 205	28 x 110	8 x 45	1 x 10	
10	126 x 222	126 x 205	84 x 110	36 x 45	9 x 10	1 x 1
111	210 x 222	252 x 205	210 x 110	120 x 45	45 x 10	10 x 1
12		462 x 205	462 x 110	330 x 45	165 x 10	55 x 1
13		792 x 205	924 x 110	792 x 45	495 x 10	220 x 1
14			1716 x 110	1716 x 45	1287 x 10	715 x 1
15			3003 x 110	3432 x 45	3003 x 10	2002 x1
16				6435 x 45	6435 x 10	5005 x 1
17				11440 x 45	12870 x10	11440 x 1
18					24310 x 10	24310 x 1
19					43758 x 10	48620 x 1
20						92378 x 1

Pada tiap kolom, angka yang menunjukkan banyaknya graf dapat ditulis sebagai suatu perkalian bilangan (yang membentuk suatu barisan bilangan) dengan sebuah konstanta.
Untuk $t = 5$, barisan bilangan yang terbentuk adalah: 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 5 & & 15 & & 35 & & 70 & & 126 & & 210 \\
& 4 & & 10 & & 20 & & 35 & & 56 & & 84 & \\
& & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & 28 & & \\
& & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & & \\
& & & & 1 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Beda tetap berada pada tingkat ke empat, maka barisan tersebut berhubungan dengan suatu polynomial berderajat empat dalam bentuk: $P_4(\mathrm{m}) = A_4 m^4 + A_3 m^3 + A_2 m^2 + A_1 m + A_0$

Notasikan $\mathbf{N}(\mathbf{G}_{\mathbf{n,m,t}})$ sebagai banyaknya graf terhubung berlabel titik orde n tanpa loop dengan m garis dan t (t adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda, dalam hal ini garis paralel dihitung 1).

Hasil 1 : Diberikan G (V,E), |V| = 5, |E| = m , t = 5, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima yang tidak memuat loop adalah: $N(G_{5,m,t}) = 222 \binom{m-1}{4}$.

Bukti :
Substitusi nilai yang menunjukkan banyaknya graf yang ada di kolom pertama, maka akan didapat:

$$222 = 625 A_4 + 125 A_3 + 25A_2 + 5A_1 + A_0$$
$$1110 = 1296 A_4 + 216 A_3 + 36A_2 + 6A_1 + A_0$$
$$3330 = 2401 A_4 + 343A_3 + 49A_2 + 7A_1 + A_0$$
$$7770 = 4096 A_4 + 512 A_3 + 64A_2 + 8A_1 + A_0$$
$$15540 = 6561 A_4 + 729A_3 + 81A_2 + 9A_1 + A_0$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut, maka didapat: $A_4 = \frac{2664}{288}$, $A_3 = \frac{-26640}{288}$,
$A_2 = \frac{93240}{288}$, $A_1 = \frac{-133200}{288}$, dan $A_0 = \frac{63936}{288}$.

Maka : $P_4(\mathrm{m}) = \frac{2664}{288} m^4 - \frac{26640}{288} m^3 + \frac{93240}{288} m^2 - \frac{133200}{288} m + \frac{63936}{288}$

$$= \frac{222}{24}(m^4 - 10m^3 + 35m^2 - 50m + 24)$$
$$= \frac{222}{24}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$
$$= 222 \binom{m-1}{4}.$$

Sehingga $N(G_{5,m,t})$ untuk t = 5 adalah $222 \binom{m-1}{4}$.

Dengan menggunakan cara yang sama didapat:

Hasil 2: Diberikan G (V,E), |V| = 5, |E| = m , t = 6, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima yang tidak memuat loop adalah: $N(G_{5,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$

Hasil 3: Diberikan *G* (V,E), |V| = 5, |E| = m , t = 7, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima yang tidak memuat loop adalah: $N(G_{5,m,7}) = 110 \times C_{6}^{(m-1)}$

Hasil 4: Diberikan *G* (V,E), |V| = 5, |E| = m , t = 8, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima yang tidak memuat loop adalah: $N(G_{5,m,8}) = 45 \times C_{7}^{(m-1)}$

Hasil 5: Diberikan *G* (V,E), |V| = 5, |E| = m , t = 9, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima yang tidak memuat loop adalah: $N(G_{5,m,9}) = 10 \times C_{8}^{(m-1)}$

Hasil 6: Diberikan *G* (V,E), |V| = 5, |E| = m , t = 10, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde lima yang tidak memuat loop adalah: $N(G_{5,m,10}) = 1 \times C_{9}^{(m-1)}$

Tabel 4.4. Banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa loop untuk graf berorde enam.

m	The number of connected vertices labeled order six graphs with thirty edges and may contained fifteen parallel edges, without loops										
	t										
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	1296										
6	6480	1980									
7	19440	11880	3330								
8	45360	41580	23310	4620							
9	90720	110880	93240	36960	6660						
10	163296	249480	279720	166320	59940	2460					
11	272160	498960	699300	554400	299700	24600	1155				
12	427680	914760	1538460	1524600	1098900	135300	12705	420			
13	641520	1568160	3076920	3659040	3296700	541200	76230	5040	150		
14	926640	2548260	5714280	7927920	8571420	1758900	330330	32760	1950	15	
15	1297296	3963960	9999990	15855840	19999980	4924920	1156155	152880	13650	210	1
16	1769040	5945940	16666650	29729700	42857100	12312300	3468465	573300	68250	1575	15
17	2358720	8648640	26666640	52852800	85714200	28142400	9249240	1834560	273000	8400	120
18	3084480	12252240	41212080	89849760	161904600	59802600	22462440	5197920	928200	35700	680
19	3965760	16964640	61818120	147026880	291428280	119605200	50540490	13366080	2784600	128520	3060
20	5023296	23023440	90349560	232792560	503376120	227249880	106696590	31744440	7558200	406980	11628
21	6279120	30697920	129070800	358142400	838960200	413181600	213393180	70543200	18895500	1162800	38760
22		40291020	180699120	537213600	1355243400	723067800	407386980	148140720	44089500	3052350	116280
23			248461290	787913280	2129668200	1223653200	746876130	296281440	96996900	7461300	319770
24				1132625340	3265491240	2010287400	1321396230	567872760	202811700	17160990	817190
25					4898236860	3216459840	2265250680	1048380480	405623400	37442160	1961256
26						5025718500	3775417800	1872108000	780045000	78004500	4457400
27							6135053925	3244987200	1448655000	156009000	9657700
28								5475915900	2607579000	300874500	20058300
29									4563263250	561632400	40116600
30										1017958725	77558760

Dengan memperhatikan angka-angka yang terdapat pada tiap-tiap kolom pada Tabel 4.4 maka tabel-tabel tersebut dapat dimodifikasi menjadi sebagai berikut:Tabel 4.5. Bentuk alternatif dari Tabel 4.4

m	The number of connected vertices labeled order six graphs with thirty edges and may contained fifteen parallel edges, without loops										
	t										
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	1 x 1296										
6	5 x 1296	1 x 1980									
7	15 x 1296	6 x 1980	1 x 3330								
8	35 x 1296	21 x 1980	7 x 3330	1 x 4620							
9	70 x 1296	56 x 1980	28 x 3330	8 x 4620	1 x 6660						
10	126 x 1296	126 x 1980	84 x 3330	36 x 4620	9 x 6660	1 x 2460					
11	210 x 1296	252 x 1980	210 x 3330	120 x 4620	45 x 6660	10 x 2460	1 x 1155				
12	330 x 1296	462 x 1980	462 x 3330	330 x 4620	165 x 6660	55 x 2460	11 x 1155	1 x 420			
13	495 x 1296	792 x 1980	924 x 3330	792 x 4620	495 x 6660	220 x 2460	66 x 1155	12 x 420	1 x 150		
14	715 x 1296	1287 x 1980	1716 x 3330	1716 x 4620	1287 x 6660	715 x 2460	286 x 1155	78 x 420	13 x 150	1 x 15	
15	1001 x 1296	2002 x 1980	3003 x 3330	3432 x 4620	3003 x 6660	2002 x 2460	1001 x 1155	364 x 420	91 x 150	14 x 15	1 x 1
16	1365 x 1296	3003 x 1980	5005 x 3330	6435 x 4620	6435 x 6660	5005 x 2460	3003 x 1155	1365 x 420	455 x 150	105 x 15	15 x 1
17	1820 x 1296	4368 x 1980	8008 x 3330	11440 x 4620	12870 x 6660	11440 x 2460	8008 x 1155	4368 x 420	1820 x 150	560 x 15	120 x 1
18	2380 x 1296	6188 x 1980	12376 x 3330	19448 x 4620	24310 x 6660	24310 x 2460	19448 x 1155	12376 x 420	6188 x 150	2380 x 15	680 x 1
19	3060 x 1296	8568 x 1980	18564 x 3330	31824 x 4620	43758 x 6660	48620 x 2460	43758 x 1155	31824 x 420	18564 x 150	8568 x 15	3060 x 1
20	3876 x 1296	11628 x 1980	27132 x 3330	50388 x 4620	75582 x 6660	92378 x 2460	92378 x 1155	75582 x 420	50388 x 150	27132 x 15	11628 x 1
21	4845 x 1296	15504 x 1980	38760 x 3330	77520 x 4620	125970 x 6660	167960 x 2460	184756 x 1155	167960 x 420	125970 x 150	77520 x 15	38760 x 1
22	5985 x 1296	20349 x 1980	54264 x 3330	116280 x 4620	203490 x 6660	293930 x 2460	352716 x 1155	352716 x 420	293930 x 150	203490 x 15	116280 x 1
23		26334 x 1980	74613 x 3330	170544 x 4620	319770 x 6660	497420 x 2460	646646 x 1155	705432 x 420	646646 x 150	497420 x 15	319770 x 1
24			100947 x 3330	245157 x 4620	490314 x 6660	817190 x 2460	1144066 x 1155	1352078 x 420	1352078 x 150	1144066 x 15	817190 x 1
25				346104 x 4620	735471 x 6660	1307504 x 2460	1961256 x 1155	2496144 x 420	2704156 x 150	2496144 x 15	1961256 x 1
26					1081575 x 6660	2042975 x 2460	3268760 x 1155	4457400 x 420	5200300 x 150	5200300 x 15	4457400 x 1
27							5311735 x 1155	7726160 x 420	9657700 x 150	10400600 x 15	9657700 x 1
28								13037895 x 420	17383860 x 150	20058300 x 15	20058300 x 1
29									30421755 x 150	37442160 x 15	40116600 x 1
30										67863915 x 15	77558760 x 1

Dengan cara yang sama sepert pada orde lima, didapat hasil untuk orde enam sebagai berikut:

Hasil 7: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 5, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,5}\right) = 1296 \times C_4^{(m-1)}$

Hasil 8: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 6, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,6}\right) = 1980 \times C_5^{(m-1)}$

Hasil 9: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 7, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,7}\right) = 3330 \times C_6^{(m-1)}$

Hasil 10: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 8, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,8}\right) = 4620 \times C_7^{(m-1)}$

Hasil 11: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 9, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,9}\right) = 6660 \times C_8^{(m-1)}$

Hasil 12: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 10, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,10}\right) = 2640 \times C_9^{(m-1)}$

Hasil 13: Diberikan *G* (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 11, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,11}\right) = 1155 \times C_{10}^{(m-1)}$

Hasil 14: Diberikan G (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 12, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,12}\right) = 420 \times C_{11}^{(m-1)}$

Hasil 7: Diberikan G (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 13, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,13}\right) = 150 \times C_{12}^{(m-1)}$

Hasil 7: Diberikan G (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 14, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,14}\right) = 15 \times C_{13}^{(m-1)}$

Hasil 15: Diberikan G (V,E), |V| = 6, |E| = m , t = 15, maka banyaknya graf terhubung berlabel titik orde enam yang tidak memuat loop adalah: $N\left(G_{6,m,15}\right) = 1 \times C_{14}^{(m-1)}$

Karena graf terhubung orde 5 dengan orde 5 (n=5) mempunyai $4 \leq t \leq 10$, dan untuk orde 6 mempunyai $5 \leq t \leq 15$, maka untuk melihat karakteristik graf serta perbandingan pola, nilai t yang di bandingkan adalah dari $5 \leq t \leq 10$. Pada Tabel 4.6 berikut diberikan perbandingan tersebut.

Tabel 4.6 Perbandingan pola graf terhubung berlabel titik tanpa loop untuk n=5 dan 6 yang dikelompokkan berdasarkan m dan t.

m	t											
	5		6		7		8		9		10	
	n=5	n=6	n=5	n=6	n=5	n=6	n=5	n=6	n=5	n=6	n=5	n=6
5	1x222	1 x 1296										
6	5x222	5 x 1296	1x205	1 x 1980								
7	15x222	15 x 1296	6x205	6 x 1980	1x110	1 x 3330						
8	35x222	35 x 1296	21x205	21 x 1980	7x110	7 x 3330	1x45	1 x 4620				
9	70x222	70 x 1296	56x205	56 x 1980	28x110	28 x 3330	8x45	8 x 4620	1x10	1 x 6660		
10	126x222	126 x 1296	126x205	126 x 1980	84x110	84 x 3330	36x45	36 x 4620	9x10	9 x 6660	1x1	1 x 2460
11		210 x 1296		252 x 1980		210 x 3330		120 x 4620		45 x 6660		10 x 2460
12		330 x 1296		462 x 1980		462 x 3330		330 x 4620		165 x 6660		55 x 2460
13		495 x 1296		792 x 1980		924 x 3330		792 x 4620		495 x 6660		220 x 2460
14		715 x 1296		1287 x 1980		1716 x 3330		1716 x 4620		1287 x 6660		715 x 2460
15		1001 x 1296		2002 x 1980		3003 x 3330		3432 x 4620		3003 x 6660		2002 x 2460

Adapun perbandingan rumus yang didapat untuk tiap=tiap orde berdasarkan m dan t dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.7. Perbandingan pola rumus graf terhubung berlabel titik tanpa loop orde lima dan orde enam.

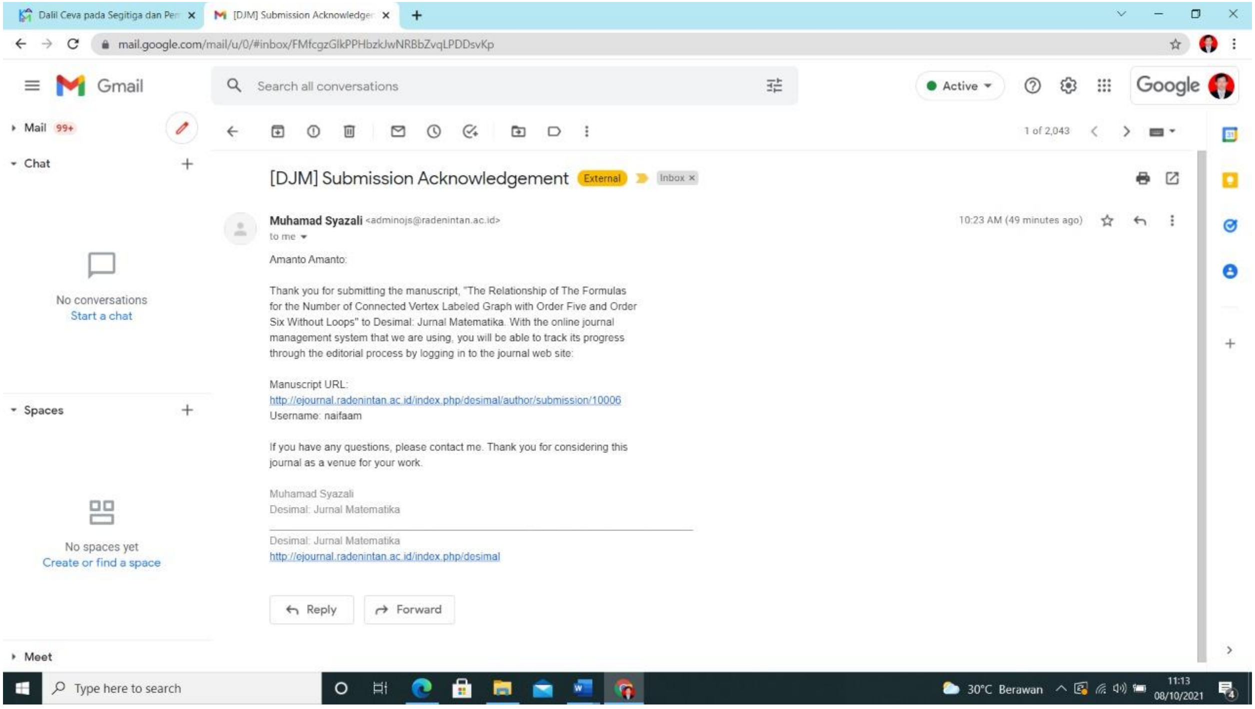
t	n	
	5	6
5	$N(G_{5,m,5}) = 222 \times C_4^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,5}) = 1296 \times C_4^{(m-1)}$
6	$N(G_{5,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,6}) = 1980 \times C_5^{(m-1)}$
7	$N(G_{5,m,7}) = 110 \times C_6^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,7}) = 3330 \times C_6^{(m-1)}$
8	$N(G_{5,m,8}) = 45 \times C_7^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,8}) = 4620 \times C_7^{(m-1)}$
9	$N(G_{5,m,9}) = 10 \times C_8^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,9}) = 6660 \times C_8^{(m-1)}$
10	$N(G_{5,m,10}) = 1 \times C_9^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,10}) = 2640 \times C_9^{(m-1)}$
11		$N(G_{6,m,11}) = 1155 \times C_{10}^{(m-1)}$
12		$N(G_{6,m,12}) = 420 \times C_{11}^{(m-1)}$
13		$N(G_{6,m,13}) = 150 \times C_{12}^{(m-1)}$
14		$N(G_{6,m,14}) = 15 \times C_{13}^{(m-1)}$
15		$N(G_{6,m,13}) = 1 \times C_{14}^{(m-1)}$

Dari Tabel 4.7 dapat dilihat bahwa banyaknya graf yang diperoleh membentuk pola sebagai berikut : $N(\mathbf{G_{n,m,t}}) = k_t \ \mathbf{C_{t-1}^{(m-1)}}$, dimana untuk n = 5, k_5=222, k_6= 205, k_7 = 110, k_8 = 45, k_9 = 10, and k_{10}=1. Untuk n=6, k_5=1296,k_6= 1980, k_7 = 3330, k_8 = 4620, k_9 = 6660, k_{10} = 2640, k_{11} = 1155, k_{12} = 420, k_{13} = 150, k_{14} = 15, k_{15} = 1. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa rumus banyaknya titik terhubung graf berlabel lima dan enam tanpa loop hanya berbeda pada koefisien t untuk setiap t, dan ketika t maksimum rumusnya adalah $\mathbf{C_{t-1}^{(m-1)}}$.

4.2 Luaran Penelitian

Dari penelitian ini telah dihasilkan satu artikel yang telah di submit pada jJurnal Desimal (Terakreditasi SINTA 3).

Bukti Korespondensi:



Contents lists available at DJM

DESIMAL: JURNAL MATEMATIKA

p-ISSN: 2613-9073 (print), e-ISSN: 2613-9081 (online), DOI 10.24042/djm

http://ejournal.radenintan.ac.id/index.php/desimal/index

The Relationship of The Formulas for the Number of Connected Vertex Labeled Graph with Order Five and Order Six Without Loops.

Amanto[1,*], Notiragayu[1], La Zakaria[1], Wamiliana[1]

[1] Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Lampung

ARTICLE INFO

Article History

Received : xx-xx-20xx
Revised : xx-xx-20xx
Accepted : xx-xx-20xx
Published : xx-xx-20xx

Keywords:
Graf terhubung, orde, loop, berlabel titik

*Correspondence: E-mail: pakamanto@gmail.com

Doi:
10.24042/djm.v%i%.%%%%

ABSTRACT

If we are given n points and m lines, then many graphs can be constructed if each vertex is labeled. both connected and unconnected graphs. A graph G is called a connected graph if there is at least one path that connects a pair of vertices in G. In addition, the graph formed may be simple or simple. A simple graph is a graph that does not contain loops or parallel lines. A loop is a line whose starting and ending points are the same, and a parallel line is two or more lines that connect the same pair of points. In this study, we will discuss the relationship between the formula patterns for calculating the number of connected graphs labeled with vertices of order five and six without loops.

.

http://ejournal.radenintan.ac.id/index.php/desimal/index

INTRODUCTION

Many real-life problems can be represented using graph theory. Graph theory is one of the fields in mathematics that is widely used as a tool to represent problems. Many branches of science that use the concept of graph theory, including chemistry, biology, computer science, economics, engineering, and others. In the field of chemistry, for example, Burch (2019) uses graphs to model chemical compounds to provide an overview of the physical properties of these chemical compounds; in the field of biology Mathur and Adlakha (2016) use a combination of trees to represent DNA, Huson and Bryant (2006) and Brandes and Cornelsen (2009) use a labeled tree to represent the evolution of taxa called phylogenetic trees; in the field of computer science Hsu and Lin (2009) comprehensively discuss graph concepts related to network design, and Al Etaiwi (2014) uses the minimum spanning tree concept, complete graph and cycle graph to generate a cipher text, and others.

Graph = $(V,)$ is defined as an unordered pair of a set $((G), (G))$ where (G) = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is a set of points/vertices, (G), and $(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ is the set of edges or lines of the unordered pair of G. An edge or line with the same starting point and ending point is called a loop, while a parallel line is two or more lines connecting the same points. A simple graph is a graph that does not contain loops or parallel lines, otherwise it is not simple. Vertices on a graph are generally used to represent cities/stations/airports, and so on, while lines are used to represent roads/railroads/airlines, and so on. For example, in a transportation problem, cities can be represented by vertices while roads connecting cities can be represented by lines. In addition, each line can be assigned a value that can represent a non-structural information such as distance, cost, time, and others. Thus, by representing the problem in the form of a graph, the problems encountered can be easily visualized.

Graph enumeration was pioneered by Cayley (1874) when calculating the number of $C_n H_{2n+2}$ hydrocarbon isomers which turned out to be related to counting rooted trees in graphs. Harary and Palmer (1973) provided a technique for calculating the number of graphs in general. Wamiliana et al. (2016) conducted a study to determine the number of disconnected vertex labeled graphs of order five without parallel lines. Amanto et al. (2017) provided a formula to determine the number of disconnected vertices labeled graphs with a maximum order of four. Furthermore, Amanto et al. (2018) provided a formula to calculate disconnected vertex labeled graph of order five with a maximum of six 3-parallel edges without loops. In the same year, Indrawan et al. (2018) conducted a study to calculate the number of connected graphs labeled with vertices of order five with a maximum of two parallel lines or loops and a maximum of six non-parallel lines. Wamiliana et al. (2019) investigated a formula to calculate the number of vertices labeled graphs of order five with a maximum of five parallel lines and no loops. Puri et al. (2021) provided a formula to calculate the number of connected graphs labeled with vertices of order 6 with a maximum of 30 lines without loops, and Putri et al. (2021) conducted a study to determine the number of disconnected vertices labeled graphs of order 6 with a maximum of 20 parallel lines and no loops. In this study, the patterns of the formula for the number of connected vertex label of order five and six without loops will be observed to find relationship between the formula.

METHOD

If given n vertices and m lines with each vertex is labeled, then many graphs can be constructed, whether connected or not, simple or not. In the construction process, isomorphic graphs are only counted as one graph. Two graphs G and G' are said to be equivalent (and are called isomorphic) if there is a 1-1 correspondence between the vertices of the two graphs and between their lines so that if the line e is adjacent to the points u and v on G then the line e' on G' also adjacent with the points u' and v'.

Notate:

n = the number of vertices
m = the number of edges
g = the number of non parallel edges
$g = m - \sum_{i=1} p_i$
p_i =the number of i parallel edges; $i \geq 2$
j_i = coefficient for the number of i – parallel edges
t = the number of edges that connect the same pairs of vertices (parallel edges are counted as one).

$$m = \sum_{i=2} j_i . p_i + g$$

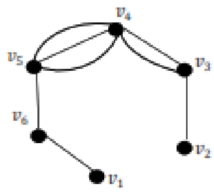
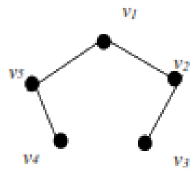
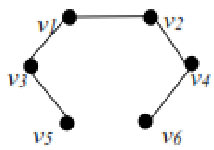
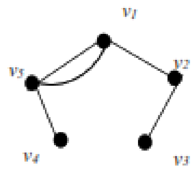
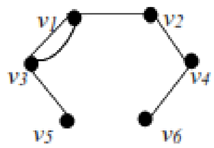
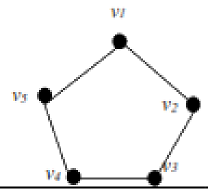
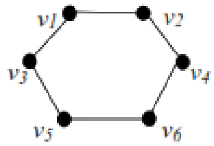
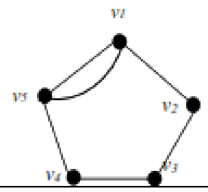
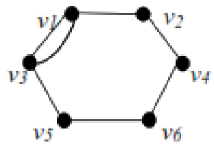
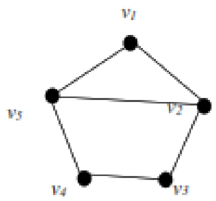
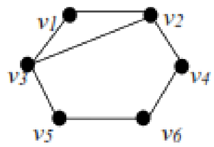
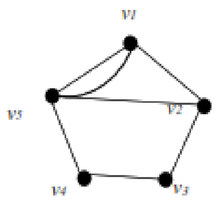
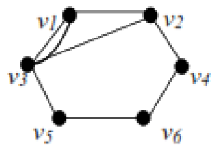


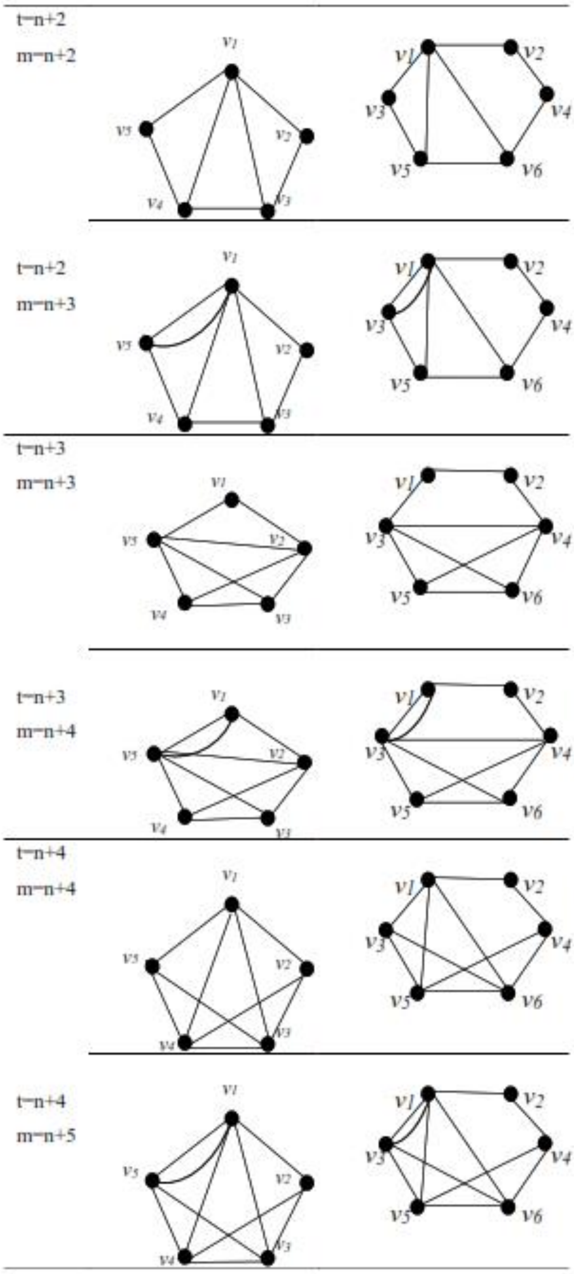
Figure 1. An example of a graph of order six with m = 8, g = 3, p_2=1, p_3=1, j_2=1, j_3=1.

From Figure 1 we can see that
$m = j_2p_2 + j_3p_3 + g$
$= (1)(2) + (1)(3) + 3$
$= 8$

To find the formula for the number of connected vertices labelled graph of order six without loops, first we constructed the patterns of the graph by comparing it with the pattern of order five and then find which patterns do not exist in order five. Next, we calculate the number of graphs obtained in every pattern, and then predict and determine the formula by comparing it with the formula of order five.

Table 1. Comparison of some patterns of connected vertex labeled graphs of order five and six without loops.

t	n = 5	n = 6
t=n-1 m=n-1		
t=n-1 m=n		
t = n m = n		
t = n m=n+1		
t=n+1 m=n+1		
t=n+1 m=n+2		



On Table 1 we only provide some patterns due to many patterns obtained and space limitation. For example, for order five (n=5), for t = n+4 and m= n+6, some patterns obtained are as follow:

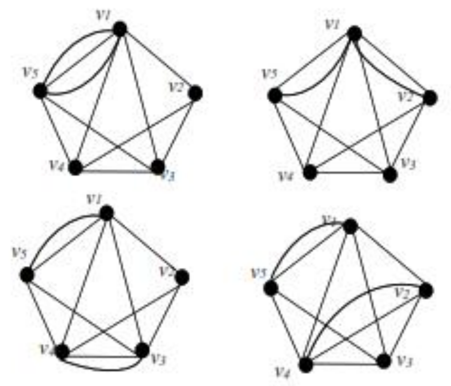


Figure 2. Some patterns of connected vertex labeled graphs of order six without loops for t=n+4 dan m=n+6

RESULTS AND DISCUSSION

From the observation we found that after grouping the graphs obtained by using t and m, the number of graphs is described in Table 2 as follow:

Table 2. Comparison of the number of connected vertices labelled graphs of order five and six without loops.

m	t			
	5		6	
	n=5	n=6	n=5	n=6
5	1x222	1 x 1296		
6	5x222	5 x 1296	1x205	1 x 1980
7	15x222	15 x 1296	6x205	6 x 1980
8	35x222	35 x 1296	21x205	21 x 1980
9	70x222	70 x 1296	56x205	56 x 1980
10	126x222	126 x 1296	126x205	126 x 1980
11		210 x 1296		252 x 1980
12		330 x 1296		462 x 1980
13		495 x 1296		792 x 1980
14		715 x 1296		1287 x 1980
15		1001 x 1296		2002 x 1980

m	t = 7		t = 8	
	n=5	n=6	n=5	n=6
7	1x110	1 x 3330		
8	7x110	7 x 3330	1x45	1 x 4620
9	28x110	28 x 3330	8x45	8 x 4620
10	84x110	84 x 3330	36x45	36 x 4620
11		210 x 3330		120 x 4620
12		462 x 3330		330 x 4620
13		924 x 3330		792 x 4620
14		1716 x 3330		1716 x 4620
15		3003 x 3330		3432 x 4620

m	t = 9		t = 10	
	n=5	n=6	n=5	n=6
9	1x10	1 x 6660		
10	9x10	9 x 6660	1x1	1 x 2460
11		45 x 6660		10 x 2460
12		165 x 6660		55 x 2460
13		495 x 6660		220 x 2460
14		1287 x 6660		715 x 2460
15		3003 x 6660		2002 x 2460

We provide the results for the number of connected vertices labelled graph of order five and six. For order 5, we only observed for 4 ≤ m ≤ 10, and 5 ≤ m ≤ 15 for order six. However, in the table we are not including m=4 for order five because we cannot compare it to order six if m=4 (if m=4 and n=6, then the graph will be disconnected).

Let $N(G_{n,m,t})$ as the number of connected vertices labeled graph of order n (n=5, 6) without loops, with m edges and t, where t is the number of edges that connect the same pair of vertices.

Based on Table 2 above we see that in every column there are a sequence of number that multiply by a fix number, for example for n=5 and t=5 we get sequence 1, 5, 15, 35, 70, 126, and this sequence is multiply by 222.

1 5 15 35 70 126
4 10 20 35 56
6 10 15 21
4 5 6
1 1

Result:

Given n=5, 4 ≤ m ≤ 10, and t=5, the number of vertex labelled connected graphs of order 5 without loop is $N(G_{n,m,t})$ $= \mathbf{222} \times \boldsymbol{C_4^{(m-1)}}$

Proof:

See the sequence of numbers above. The fixed difference occurs in fourth level, therefore the polynomial that related to that sequence is a polynomial of order four $\mathbf{P_4(m) = \alpha_4 m^4 + \alpha_3 m^3 + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0}$. Thus, we get the following system of equation:

$222 = 625\boldsymbol{\alpha_4} + 125\boldsymbol{\alpha_3} + 25\,\boldsymbol{\alpha_2} + 5\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_0}$ (1)

$1110 = 1296\boldsymbol{\alpha_4} + 216\boldsymbol{\alpha_3} + 36\,\boldsymbol{\alpha_2} + 6\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_0}$ (2)

$3330 = 2401\boldsymbol{\alpha_4} + 343\boldsymbol{\alpha_3} + 49\,\boldsymbol{\alpha_2} + 7\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_0}$ (3)

$7770 = 4096\alpha_4 + 512\alpha_3 + 64\,\alpha_2 + 8\alpha_1 + \alpha_0$ (4)

$15540 = 6561\alpha_4 + 729\alpha_3 + 81\alpha_2 + 9\alpha_1 + \alpha_0$ (5)

By solving that system of equation we get:

$$\mathbf{P_4(m)} = \frac{222}{24}m^4 - \frac{2220}{24}m^3 + \frac{7770}{24}m^2 - \frac{11100}{24}m + \frac{5328}{24}$$

$$= \frac{222}{24}(m^4 - 10\,m^3 + 35m^2 - 50m + 24)$$

$$= \frac{222}{24}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

$$= \mathbf{222} \times \boldsymbol{C_4^{(m-1)}}.$$

Table 3 below shows the results for n=5 and n=6.

Table 3. The number of connected vertex labeled graphs of order five and six without parallel edges.

t	n	
	5	6
5	$N(G_{5,m,5}) = 222 \times C_4^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,5}) = 1296 \times C_4^{(m-1)}$
6	$N(G_{5,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,6}) = 1980 \times C_5^{(m-1)}$
7	$N(G_{5,m,7}) = 110 \times C_6^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,7}) = 3330 \times C_6^{(m-1)}$
8	$N(G_{5,m,8}) = 45 \times C_7^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,8}) = 4620 \times C_7^{(m-1)}$
9	$N(G_{5,m,9}) = 10 \times C_8^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,9}) = 6660 \times C_8^{(m-1)}$
10	$N(G_{5,m,10}) = 1 \times C_9^{(m-1)}$	$N(G_{6,m,10}) = 2640 \times C_9^{(m-1)}$
11		$N(G_{6,m,11}) = 1155 \times C_{10}^{(m-1)}$
12		$N(G_{6,m,12}) = 420 \times C_{11}^{(m-1)}$
13		$N(G_{6,m,13}) = 150 \times C_{12}^{(m-1)}$
14		$N(G_{6,m,14}) = 15 \times C_{13}^{(m-1)}$
15		$N(G_{6,m,13}) = 1 \times C_{14}^{(m-1)}$

From Table 3 we can see that the number of graphs obtained make a pattern as: $N(G_{n,m,t}) = k_t\ C_{t-1}^{(m-1)}$, where for $n = 5$, $k_5=222$, $k_6= 205$, $k_7 = 110$, $k_8 = 45$, $k_9 = 10$, and $k_{10}=1$. For $n=6$, $k_5=1296$,$k_6= 1980$, $k_7 = 3330$, $k_8 = 4620$, $k_9 = 6660$, $k_{10} = 2640$, $k_{11} = 1155$, $k_{12} = 420$, $k_{13} = 150$, $k_{14} = 15$, $k_{15} = 1$. Note that for $n = 5$, maximal number of t is 10, and maximal number of t for n= 6 is 15. Thus, the formula for the number of connected vertex labeled graph of order five and six without loops differs only on the coefficient of t for every t, and when t is maximum then the formula is $C_{t-1}^{(m-1)}$.

CONCLUSION

Based on the discussion above we can conclude that the formula for the number of connected vertex labeled graphs of order five and six is $N(G_{n,m,t}) = k_t\ C_{t-1}^{(m-1)}$, where for $n = 5$, $k_5=222$, $k_6= 205$, $k_7 = 110$, $k_8 = 45$, $k_9 = 10$, and $k_{10}=1$. For $n=6$, $k_5=1296$,$k_6= 1980$, $k_7 = 3330$, $k_8 = 4620$, $k_9 = 6660$, $k_{10} = 2640$, $k_{11} = 1155$, $k_{12} = 420$, $k_{13} = 150$, $k_{14} = 15$, $k_{15} = 1$. Moreover, we can conclude that if t is maximum, then for every order (five and six), $N(G_{n,m,t}) = C_{t-1}^{(m-1)}$.

Aknowledgement

This research is funded by Research Center Universitas Lampung under Preeminent Grant and the author want to thanks for the fund.

REFERENCES

Al Etaiwi W M 2014 Encryption Algorithm Using Graph Theory. *Journal of Scientific Research and Reports* 3 (19): 2519-2527

Amanto, Wamiliana, Mustofa U, Reni P S. (2017). Counting the number of disconnected vertex Labelled graphs with order maximal four. *Sci.Int.(Lahore)*,29(6),1181-1186

Amanto, Wamiliana dan Efendi, M.F.N. 2018. The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs of Order Five With Maximum 3-Paralel Edges Is Six And Contains No Loops. *Mathematics National Conference (In Indonesia KNM)*, Universitas Brawijaya.

Brandes, U. and S. Cornelsen (2009). Phylogenetic graph models beyond trees. *Discrete Applied Mathematics*, 157(10); 2361–2369

Burch, K. J. (2019) Chemical applications of graph theory, *Mathematical Physics in Theoretical Chemistry*, ed. S.M Blinder and J.E House, Spinger, pp.261-294.

Huson D. H., and D. Bryant. (2006) Application of Phylogenetic Networks in Evolutionary Studies. *Molecular Biology and Evolution*, Volume 23, Issue 2, pp.254–267, https://doi.org/10.1093/molbev/msj030

Cayley, A. (1874) On the Mathematical Theory of Isomers', *Philosophical Magazine*, vol. 47, no. 4, 1874, pp.444 – 446.

Harary, F. & Palmer, E.M. 1973. *Graphical Enumeration.* Academic Press, Inc. Ltd., London.

Hsu L. H., and Lin C.K. (2009). *Graph Theory and Interconnection Network*. Taylor and Francis Group, LLC, New York.

Indrawan D, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto. 2018. Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau Loop Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam. *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2018* 1, 1-277.

Mathur R. and Adlakha N. (2016). A graph theoretic model for prediction of reticulation events and phylogenetic networks for DNA sequences. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences* 3(3) p 263-271 doi: 10.1016/j.ejbas.2016.07.004

Puri, F.C., Wamiliana., Usman, M., Amanto., Ansori, M., Antoni, Y. 2021. The Formula to Count the Number of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (01), 012023.

Putri, D., Wamiliana, Fitriani, Faisol A, Dewi K. S. (2021). Determining the Number of Disconnected Vertices Labeled Graphs of Order Six with the Maximum Number Twenty Parallel Edges and Containing No Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (01), 012024. doi:10.1088/1742-6596/1751/1/012024

Wamiliana, A. Nuryaman, Amanto, A. Sutrisno, and N. A. Prayoga. (2019). Determining the Number of Connected Vertices Labeled Graph of Order Five with Maximum Number of Parallel Edges is Five and Containing No Loops. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1338 (2019) 012043. doi:10.1088/1742-6596/1338/1/012043

Wamiliana, Amanto and Nagari G.T. (2016). Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five without Parallel Edges International Series on Interdisciplinary Sciences and Technology (INSIST) Vol 1 (1) p 1-6.

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian didapat hasil bahwa banyaknya graf yang diperoleh membentuk pola sebagai berikut : N($\mathbf{G_{n,m,t}}$) = k_t $\mathbf{C_{t-1}^{(m-1)}}$, dimana untuk n = 5, k_5=222, k_6= 205, k_7 = 110, k_8 = 45, k_9 = 10, and k_{10}=1. Untuk n=6, k_5=1296,k_6= 1980, k_7 = 3330, k_8 = 4620, k_9 = 6660, k_{10} = 2640, k_{11} = 1155, k_{12} = 420, k_{13} = 150, k_{14} = 15, k_{15} = 1. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa rumus banyaknya titik terhubung graf berlabel lima dan enam tanpa loop hanya berbeda pada koefisien t untuk setiap t, dan ketka t maksimum rumusnya adalah $\mathbf{C_{t-1}^{(m-1)}}$.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G., and R. D. Greenlaw, *Graph Theory Modelling, Application, and Algorithms*.
Pearson/Prentice Education, Inc., New Jersey.

Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, and Reni Permata Sari. Counting the Number of
Disconnected Vertex Labelled Graphs of Order Maximal Four. *Science International (Lahore)*, **29**, no. 6, 1181-1186, 2017.

Amanto, Wamiliana, And M.F Nur Efendi. The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs of Order Five With Maximum 3-Paralel Edges Is Six And Contains No Loops. KNM XIX, Universitas Brawijaya, Malang , 24-26 July 2018.

Harary F, and E. M. Palmer, *Graphical Enumeration*. Academic Press, New York, 1973.

Hsu, L.H., and Lin, C.K. *Graph Theory and interconnection network*. Taylor and Francis
Group, LLC, New York, 2009.

Puri, F.C., Wamiliana, Amanto, M.Usman, M. Ansori, dan Y. Antoni. 2021. The Formula to Count
TheNumber of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops . Journal of Physics: Conference Series 1751 (2021) 012023 doi:10.1088/1742-6596/1751/1/012023

Slomenski, W.F., Application of the Theory of Graph to Calculations of the Additive Structural Properties of Hydrocarbon, Russian Journal of Physical Chemistry, 38, p.700-703, 1964.

Valdya, S. K. dan Kanani K. Some New Results on Cordial Labeling in the Contest of Arbitrary Super sub division of Graph, *Applied Matematical Sciences*, Vol. 4 (2010) No. 47, 2323 – 2329, 2010.

Vasudev, C. *Graph Theory with Application*. New Age International Limited, 2006.

Wamiliana, Amanto, and G. T. Nagari. Counting the Number of Disconnected labelled Graphs of Order Five Without Parallel Edges. *International Series on Interdisciplinary Science and Technology (INSIST)*, **1**, no. 1, p. 1 – 6, 2016.

Wamiliana, A Nuryaman, Amanto, A Sutrisno, and N. A. Prayoga. 2019. Determining the Number of Connected Vertices Labelled Graph of Order Five with Maximum Number of Parallel Edges is Five and Containing No Loops. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1338 , 2019, 012043 , doi:10.1088/1742-6596/1338/1/012043

Wamiliana, Amanto, M.Usman, M. Ansori, dan F. C. Puri. 2020. Enumerating the Number of Connected Vertices Labeled Graph of Order Six with Maximum Ten Loops and Containing No Parallel Edges. Science and Technology Indonesia, Vol. 5 No. 4, pp. 131-135