

**LAPORAN
PENELITIAN PASCASARJANA
UNIVERSITAS LAMPUNG**



**KONSTRUKSI PEMETAAN *KORTEWEG DE VRIES* (KDV) YANG
DIPERUMUM DAN APLIKASINYA PADA KRIPTOGRAFI TEKS/CITRA**

Oleh :

**Dr. La Zakaria, M.Sc.
Agus Sutrisno, M.Si.
Dr. Aang Nuryaman, M.Sc.**

**Dibiayai Oleh DIPA BLU Universitas Lampung
No. Kontrak: 1668/UN26.21/PN/2021
Tahun Anggaran 2021**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2021**

**HALAMAN PENGESAHAN PENELITIAN PASCASARJANA
UNIVERSITAS LAMPUNG**

Judul : **Konstruksi Pemetaan Korteweg de Vries (KdV) yang Diperumum dan Aplikasinya pada Kriptografi Teks/Citra**

Manfaat sosial ekonomi : **Pengembangan IPTEKS**

Ketua Peneliti

a. Nama Lengkap : **Dr. La Zakaria, M.Sc.**

b. Jabatan Fungsional : **Lektor Kepala**

c. SINTA ID : **6051059**

d. Program Studi : **Matematika**

e. No. HP : **08127909255**

f. Alamat surel : **lazakaria.1969@fmipa.unila.ac.id**

Anggota Peneliti (1)

a. Nama Lengkap : **Dr. Aang Nuryaman, M.Si.**

b. Jabatan Fungsional : **Lektor**

c. SINTA ID : **6048163**

d. Program Studi : **Matematika**

Anggota Peneliti (2)

a. Nama Lengkap : **Agus Sutrisno, M.Si.**

b. Jabatan Fungsional : **Lektor**

c. SINTA ID : **6156956**

d. Program Studi : **Matematika**

Mahasiswa yang terlibat : **1 (satu) orang**

Nama : **Agus Sutrisno**

NIM : **1937061005**

Jumlah alumni yang terlibat : **-**

Jumlah staf yang terlibat : **-**

Lokasi kegiatan : **Laboratorium Matematika/Statistika Terapan FMIPA Unila**

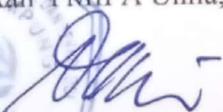
Lama Penelitian : **10 (sepuluh) bulan**

Biaya Penelitian : **Rp. 40.000.000 (Empat Puluh Juta rupiah)**

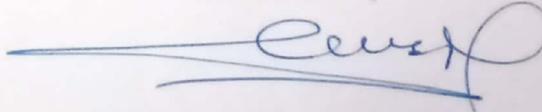
Sumber Dana : **BLU Universitas Lampung 2021**

Bandar Lampung, 15 – 09 – 2021

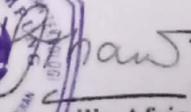
Mengetahui:
Dekan FMIPA Unila,


Dr. Eng. Supto Dwi Yuwono, M.T.
NIP. 19740705 200003 1 001

Ketua Peneliti,


Dr. La Zakaria, M.Sc.
NIP. 19690213 199402 1 001

Menyetujui:
Ketua LPPM Universitas Lampung,



Dr. Lusmeilia Afriani, D.E.A.
NIP. 19650510 199303 2 008

IDENTITAS DAN URAIAN UMUM

1. Judul Penelitian : **Konstruksi Pemetaan *Korteweg de Vries (KdV)* yang Diperumum dan Aplikasinya Pada Kriptografi Teks/Citra**

2. Tim Peneliti

No	Nama	Jabatan	Bidang Keahlian	Program Studi	Alokasi Waktu (jam/minggu)
1.	La Zakaria	Ketua	Matematika Komputasi	Matematika	10 jam/minggu
2.	Aang Nuryaman	Anggota 1	Matematika Terapan	Matematika	10 jam/minggu
3.	Agus Sutrisno	Anggota 2	Matematika Terapan	Matematika	10 jam/minggu

3. Objek Penelitian : Pengembangan Konsep Pemetaan non linear yang diturunkan dari sebuah persamaan beda orde dua dan persamaan beda parsial *KdV* dan aplikasinya pada Kriptografi Teks atau Gambar.

4. Masa Pelaksanaan

Mulai

: Bulan Pebruari 2021

Berakhir

: Bulan Nopember 2021

5. Usulan Biaya

: Rp. 40.000.000,- (*Empat puluh juta rupiah*)

6. Lokasi Penelitian

: Laboratorium Matematika dan Statistika Terapan
Jurusan Matematika FMIPA Unila

7. Instansi lain yang terlibat

: Belum Ada

8. Kontribusi Dasar

: Penguatan Ilmu Matematika untuk Sistem Diskrit umumnya dan Sistem Diskrit Terintegralkan khususnya, serta dapat digunakan sebagai referensi dalam mengkonstruksi algoritma untuk kriptografi teks atau citra (gambar).

9. Publikasi

: *International Journal of Mathematics, Engineering, and Management Sciences (terindeks Scopus)*.

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN SAMPUL USULAN PENELITIAN	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
IDENTITAS DAN URAIAN UMUM	iii
RINGKASAN	iv
DAFTAR ISI	v
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Urgensi dan Kontribusi Penelitian	2
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 <i>State of The Art</i>	4
2.2 <i>Roadmap</i> Penelitian	5
2.3 Konstruksi Perumusan Persamaan Beda: Studi Kasus Persamaan Beda <i>mKdV</i>	5
2.3.1 Perumusan Persamaan Beda Parsial <i>mKdV</i>	5
2.3.2 Bentuk Ekuivalen Persamaan Beda Parsial <i>KdV</i>	8
BAB 3 METODE PENELITIAN	10
3.1 Waktu dan Tempat	10
3.2 Alat dan Bahan Penelitian	10
3.3 Pendekatan dan Tahapan Penelitian	10
3.4 Luaran dan Indikator Capaian Penelitian	11
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	13
BAB 5 KESIMPULAN DAN KERJA LANJUTAN	20
DAFTAR PUSTAKA	21
LAMPIRAN- LAMPIRAN	23

RINGKASAN

Ada beberapa pendekatan yang dapat dilakukan untuk menangani kerahasiaan yang diamankan dalam sebuah citra atau teks (kriptografi untuk teks/citra). Pendekatan matematis berbasis pemetaan pernah dilakukan, misalnya pemetaan yang dikenal dengan sebutan *Arnold's Cat Map* (ACM) yang dilakukan oleh Munir pada tahun 2012. ACM merupakan sebuah sistem persamaan diskrit 2D yang bersifat *area preserving* dan *reversible*. Berbeda dengan yang dikerjakan oleh Munir, Ronsen dkk. 2014 melakukan sebuah upaya terhadap enkripsi citra digital menggunakan ACM dan *Nonlinear Chaotic Algorithm* (NCA) pada tahun 2014. Selain itu, terdapat peneliti lain yang melakukan kegiatan penelitian berkenaan dengan sistem kriptografi citra digital yang diasosiasikan dengan jaringan intranet menggunakan metode kombinasi *chaos map* dan teknik selektif sebagaimana dilakukan oleh Hidayat dan Afrianto pada tahun 2017. Berbeda dengan penelitian yang telah dikemukakan, penelitian yang direncanakan ini akan melibatkan pemetaan linear yang dikonstruksi dari sebuah persamaan beda parsial (*Partial Difference Equation/PΔE*) Korteweg de Vries (*KdV*). Penelitian ini juga berbeda dengan penelitian terhadap sebuah kriptografi teks digital yang telah dilakukan oleh Notiragayu dan Zakaria pada tahun 2018 jika ditinjau dari sisi penggunaan alat untuk penyandian. Mereka menggunakan pemetaan yang diturunkan dari sebuah persamaan beda parsial *mKdV* yang diperumum. Dengan kata lain, penggunaan pemetaan linear 2D *KdV* untuk sebuah kriptografi teks/citra belum dilakukan sebelumnya. Dapat dicatat bahwa hasil penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Bridgman dkk. 2012 memperlihatkan bahwa persamaan beda parsial *KdV* bentuk standar merupakan persamaan yang dapat diintegrasikan dan mempunyai sifat CAC. Oleh karena itu menarik untuk diteliti sifat-sifat kualitatif apa saja yang ada pada persamaan beda biasa (*Ordinary Difference Equation/OΔE*) *KdV* yang diturunkan dari *PΔE KdV*. Dan bagaimanakah kualitas kerahasiaan citra/teks yang diperoleh ketika dilakukan penyandian menggunakan pemetaan linear 2D yang diperoleh dari *OΔE KdV*? Dengan kata lain, terhadap tingkat kualitas hamburan pixel agar dikategorikan sebagai kriptografi yang sulit diketahui kerahasiaan dari citra yang disembunyikan, apakah pemetaan 2D yang dikonstruksi melalui sebuah *OΔE KdV* memberikan kualitas penyandian yang lebih baik? Untuk menjawab semua pertanyaan yang dinyatakan sebelumnya, penelitian dengan judul "*Konstruksi Pemetaan Korteweg de Vries (KdV) Yang Diperumum dan Aplikasinya pada Kriptografi Teks/Citra*" telah dilakukan. Dari penelitian yang dilakukan ini telah diperoleh bentuk umum pemetaan nonlinear dan sebuah pendekatan baru bagi pengembangan kriptografi teks/citra berbasis pemetaan/*mapping* karena dalam penelitian ini dikonstruksi sebuah algoritma enkripsi-dekripsi terhadap pesan digital (teks/citra). Penelitian ini juga telah menghasilkan sebuah algoritma dan implementasinya terhadap enkripsi-dekripsi berbasis *mapping* dengan menggunakan pemrograman *Mathematica*®.

Luaran (ilmiah) dan indikator capaian pada penelitian ini adalah diperolehnya *draft* disertasi yang siap diseminarkan dengan substansi materi meliputi konstruksi *PΔE-OΔE KdV* yang diperumum, sifat-sifat kualitatif *OΔE KdV*, dan algoritma enkripsi-dekripsi kriptografi teks/citra. Selain itu, artikel ilmiah yang diperoleh dari hasil penelitian ini telah disubmit pada jurnal internasional bereputasi (*Scopus-Sjr*) dengan indikasi "*under review*". *Draft* Artikel dari hasil-hasil penelitian yang diperoleh sebagian telah diseminarkan dalam konferensi Internasional ICMSS 2021 pada tanggal 15-16 September 2021 di Universitas Lambung Mangkurat oleh Mahasiswa Doktor (Agus Sutrisno/NIM 1937061005). TKT (Tingkat Kesiapterapan Teknologi) penelitian yang direncanakan sebelumnya yang berada pada level 1, saat ini telah dicapai 80% dengan telah diseminarkannya sebagian hasil penelitian dan adanya sebuah artikel yang dalam kondisi "*under review*" pada jurnal internasional terindeks *Scopus-Sjr* (IJMEMS).

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Terdapat beberapa persamaan beda yang diperkenalkan sekitar abad 19 dalam sebuah studi kurva permukaan yang berkonstanta negatif (*surfaces of constant negative curvature*) atau dikenal dengan *K-Surfaces* [1]. Persamaan beda *KdV* dan *mKdV*, dua diantaranya, memiliki banyak aplikasi di bidang fisika plasma, gelombang elektromagnetik dalam sistem feromagnetik, antiferromagnetik atau dielektrik, dan dapat diselesaikan dengan beberapa metode transformasi hamburan invers, bilinear Hirota, pendekatan Algebro-geometris dan lain-lain [2,3,4,5,6]. Sifat kualitatif dari kedua persamaan beda yang dimaksud dapat dipelajari dari eksistensi matriks Lax Pair (LP) mereka masing-masing. Keberadaan LP menjadi sangat penting karena ia mengekspresikan keterintegralan secara lengkap dari sistemnya. [2,7,8,9,10,11,12]. Keberadaan LP menjadi sebuah keharusan ketika metode *staircase* diterapkan untuk mengkonstruksi integral-integral bagi pemetaan-pemetaan yang berkorespondensi dengan reduksi masalah nilai awal PΔE yang periodik ke sistem OΔE linear. [10,11,12,13].

Perkembangan teknologi data digital (teks) saat ini dirasakan semakin meningkat pesat mengiringi kemajuan teknologi kamera digital. Sementara itu output kamera berupa teks memerlukan metode penyimpanan yang aman dan nyaman terutama untuk objek teks yang bersifat rahasia atau pribadi. Kriptografi berperan memberikan rasa aman terhadap data digital yang meliputi aspek kerahasiaan, integritas data, serta otentikasi. Secara khusus kriptografi untuk teks dapat dilakukan melalui pendekatan matematis yang melibatkan sebuah pemetaan linear, misalnya *Arnold's Cat Map (ACM)* [2,14,15]. Untuk sebuah pemetaan nonlinear, dapat dilakukan proses linerisasi untuk kemudian digunakan dalam kriptografi teks, misalnya pemetaan nonlinear yang diturunkan dari sebuah persamaan beda ganda *KdV* yang diperumum. Seperti halnya pemetaan nonlinear beda ganda *mKdV*, sebuah pemetaan nonlinear juga dapat diturunkan dari sebuah persamaan beda *potential Korteweg de Vries (pKdV)* yang diperumum. Melalui sebuah observasi literatur diperoleh bahwa sungguhpun dua pemetaan nonlinear yang berbeda tersebut merupakan pemetaan yang terintegralkan tetapi diturunkan dari dua buah persamaan beda yang memiliki sifat berbeda dalam hal konsistensi yang dikenal dengan sebutan *Consistent-Around-a-Cube (CAC)*[12].

1.2 Perumusan Masalah

Persamaan beda parsial *Korteweg de Vries (KdV)* merupakan persamaan beda terintegral (*integrability discrete equation*) karena mereka terdapatnya matriks *Lax Pair* pada masing-masing persamaan tersebut. Dengan konsep *travelling wave solution* (solusi gelombang rambatan) persamaan beda parsial ($P\Delta E$) dapat diubah ke dalam bentuk persamaan beda ordiner ($O\Delta E$). Guna mendapatkan solusi periodiknya, metode *staircase* dapat digunakan sedemikian sehingga dapat diturunkan bentuk ekivalen ($O\Delta E$) berupa pemetaan-pemetaan *nonlinear*. Dari bentuk *nonlinear* dapat ditentukan bentuk linear disekitar titik tetap yang ada pada pemetaan-pemetaan *nonlinear*. Terdapat sejumlah penelitian berkenaan dengan kriptografi teks digital yang sudah umum dibahas melalui sebuah pemetaan linear. Oleh karena itu sebuah teks yang ingin dirahasiakan keberadaannya dapat disembunyikan dengan menggunakan konsep pemetaan linear yang diturunkan dari *KdV*. Selain kriptografi teks, sejumlah hal yang menarik untuk diteliti diantaranya, dinamika dan sifat kualitatif yang ada pada persamaan beda *KdV* yang belum banyak dibahas secara spesifik. Penelitian Program Pascasarjana (PPS) yang diajukan ini diharapkan dapat menjawab permasalahan dan peluang penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mengkonstruksi *generalized OAE KdV* yang diperoleh dari *generalized PAE KdV* dan mendapatkan sejumlah sifat kualitatif melalui analisis level set bentuk integral *generalized OAE KdV*. Selain itu, akan dikonstruksi juga algoritma yang dapat digunakan untuk melakukan kegiatan kriptografi sebuah teks/citra menggunakan konsep pemetaan linear hasil linearisasi 2D *generalized OAE KdV*.

1.4 Urgensi dan Kontribusi Penelitian

Subjek penelitian ini adalah *PAE KdV* yang diperumum dan dikaji melalui bentuk level setnya untuk mengetahui sifat dinamik yang ada serta sebuah algoritma berbasis pemetaan untuk penyandian sebuah teks digital yang disimpan dalam sebuah teks hasil penyandian berbasis pemetaan yang sama. Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang dapat diterapkan dan dimanfaatkan oleh penelitian terapan khususnya membangun sistem kriptografi pada teks/citra. Peta jalannya penelitian ini dapat dilihat dalam Gambar 1. Sementara itu, tahapan-tahapan penelitian untuk mencapai tujuan penelitian yang dilakukan

diberikan dalam Gambar 2. Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai alternatif metode penyandian teks berbasis map. Dengan terlaksananya kegiatan dan tercapainya tujuan penelitian ini, kontribusi yang diberikan antara lain;

1. Kepada pengembangan ilmu matematika itu sendiri dan aplikasinya dalam hal pengembangan sistem kriptografi teks/citra yang dibahas dalam penelitian ini,
2. Dapat dijadikan sebagai referensi utama dan/atau pendukung bagi penelitian lanjutan dalam bidang pengembangan $P\Delta E$ - $O\Delta E$ dan aplikasinya pada pengamanan teks/citra.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. *State of The Art*

Terdapat beberapa pendekatan yang dilakukan terhadap kriptografi baik citra ataupun teks digital. Pendekatan matematis berbasis pemetaan pernah dilakukan. Pada tahun 2012 Rinaldi menggunakan pemetaan yang dikenal dengan sebutan *Arnold's Cat Map* (ACM) [16]. ACM merupakan sebuah persamaan beda 2D yang bersifat *area preserving* dan *reversible*. Berbeda dengan yang dikerjakan oleh Rinaldi, Ronsen, *et. al.*, 2014 melakukan sebuah upaya terhadap enkripsi teks digital menggunakan ACM dan *Nonlinear Chaotic Algorithm* pada tahun 2014 [17]. Selain itu, peneliti lain yang melakukan kegiatan penelitian berkenaan dengan sistem kriptografi teks digital yang diasosiasikan dengan jaringan intranet menggunakan metode kombinasi *chaosmap* dan teknik selektif sebagaimana dilakukan oleh Arinten dan Irawan pada tahun 2017 [18]. Terhadap objek kriptografi, untuk sebuah kriptografi teks digital, Notiragayu dan Zakaria tahun 2018 telah menggunakan pemetaan yang diturunkan dari sebuah persamaan beda ganda *mKdV* yang diperumum [19]. Objek penelitian ini adalah sebuah persamaan beda parsial *KdV* ($P\Delta E KdV$). Penelitian yang akan dilakukan meliputi kontruksi bentuk umum persamaan beda biasa ($O\Delta E$) *KdV* dan kajian sifat-sifat kualitatif apa saja yang ada pada $O\Delta E KdV$ melalui analisis level set yang dihasilkan oleh solusi $O\Delta E KdV$ yang diperumum. Penelitian serupa ini belum pernah dilakukan sebelumnya. Lebih jauh, hasil kontruksi bentuk umum $O\Delta E KdV$ akan difokuskan pada proses linerisasi terhadap pemetaan nonlinear 2D $O\Delta E KdV$ yang diperumum untuk diaplikasikan pada penyandian teks/citra digital. Dari perlakuan ini akan ditinjau apakah ada/tidak ada perubahan kualitas kerahasiaan citra/teks yang diperoleh ketika dilakukan penyandian menggunakan pemetaan linear 2D yang diperoleh dari $O\Delta E KdV$? Dengan kata lain, terhadap tingkat kualitas hamburan pixel agar dikategorikan sebagai kriptografi yang sulit diketahui kerahasiaan dari citra yang disembunyikan, apakah pemetaan 2D yang dikonstruksi melalui sebuah $O\Delta E KdV$ memberikan kualitas penyandian yang lebih baik? Untuk menjawab pertanyaan ini, dalam penelitian yang dilakukan telah dikonstruksi sebuah algoritma enkripsi-dekripsi terhadap pesan digital (teks/citra) melalui pendekatan yang melibatkan sebuah pemetaan/*mapping* yang diturunkan $O\Delta E KdV$ yang diperumum. Implementasi algoritma enkripsi-dekripsi berbasis *mapping* ke dalam pemrograman *Mathematica*® juga telah dikerjakan dalam penelitian ini.

2.2. Roadmap Penelitian



Gambar 1. Roadmap penelitian yang dilakukan.

2.3. Prosedur Konstruksi Perumuman Sebuah Pemetaan : Studi Kasus Pemetaan *mKdV*

2.3.1. Perumuman Persamaan Beda Parsial (*Generalized P Δ E*) *mKdV*

Pandang sebuah persamaan latis 2D (\mathbb{Z}^2) yang didefinisikan dalam bentuk persamaan berikut:

$$(2.1) \quad p(V_{l,m}V_{l,m+1} - V_{l+1,m}V_{l+1,m+1}) = q(V_{l,m}V_{l+1,m} - V_{l+1,m+1}V_{l,m+1})$$

dengan medan-medan $V_{l,m}$ didefinisikan pada sisi-sisi latris $l, m \in \mathbb{Z}$ yang merupakan dua peubah diskrit. Persamaan (2.1) dikenal dengan sebutan persamaan beda parsial $mKdV$. Misalkan $\xi_{l,m}(k)$ menyatakan vektor yang mengandung fungsi gelombang yang bergantung kepada sebuah parameter spektral k . Persamaan (2.1) dapat diturunkan melalui sistem persamaan berikut ini

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \xi_{l+1,m}(k) &= \frac{1}{p-k} M_{l,m}^{\text{hor}} \xi_{l,m}(k) \\ \xi_{l,m+1}(k) &= \frac{1}{q-k} M_{l,m}^{\text{vert}} \xi_{l,m}(k) \end{aligned}$$

dengan

$$(2.3) \quad M_{l,m}^{\text{hor}} = \begin{pmatrix} p & -V_{l+1,m} \\ -\left(\frac{k^2}{V_{l,m}}\right) & p\left(\frac{V_{l+1,m}}{V_{l,m}}\right) \end{pmatrix} \text{ dan } M_{l,m}^{\text{vert}} = \begin{pmatrix} q & -V_{l,m+1} \\ -\frac{k^2}{V_{l,m}} & q\frac{V_{l,m+1}}{V_{l,m}} \end{pmatrix}$$

merupakan matriks pasangan Lax (*LaxPair*). Sistem dalam persamaan (2.2) akan terdefinisi dengan baik apabila dipenuhi kondisi berikut.

$$\left(M_{l+1,m}^{\text{vert}} M_{l,m}^{\text{hor}} - M_{l,m+1}^{\text{hor}} M_{l,m}^{\text{vert}} \right) \xi_{l,m} = 0,$$

untuk semua $(l, m) \in \mathbb{Z}^2$. Kondisi ini dikenal dengan sebutan *compatibility condition*.

Persamaan (2.1) dapat diperumum dengan menambah sejumlah parameter baru. Akan tetapi harus memenuhi *compatibility condition*. Persamaan beda parsial $mKdV$ di (2.1) dapat diperumum dengan cara sebagai berikut (lihat [20] untuk cara serupa pada persamaan beda parsial bentuk lainnya)

$$(2.4) \quad P_{l,m}^{\text{hor}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 p & -\alpha_2 V_{l+1,m} \\ -\alpha_3 \left(\frac{k^2}{V_{l,m}}\right) & \alpha_4 p \left(\frac{V_{l+1,m}}{V_{l,m}}\right) \end{pmatrix} \text{ dan } P_{l,m}^{\text{vert}} = \begin{pmatrix} \beta_1 q & -\beta_2 V_{l,m+1} \\ -\beta_3 \frac{k^2}{V_{l,m}} & \beta_4 q \frac{V_{l,m+1}}{V_{l,m}} \end{pmatrix}.$$

Agar terpenuhinya *compatibility condition*, maka dari sistem (2.4) akan membentuk empat persamaan nonlinear berikut

$$k^2 (\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3) V_{1+l,1+m} = 0$$

$$-k^2 (\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3) = 0$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & p\alpha_1 \beta_2 V_{l,m} V_{l,1+m} - q\alpha_2 \beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m} + \\ & q\alpha_2 \beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m} - p\alpha_4 \beta_2 V_{1+l,m} V_{1+l,1+m} = 0 \\ & -k^2 (p\alpha_1 \beta_3 V_{l,m} V_{l,1+m} - q\alpha_3 \beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m}) - \\ & k^2 (p(q\alpha_3 \beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m} - p\alpha_4 \beta_3 V_{1+l,m} V_{1+l,1+m})) = 0 \end{aligned}$$

Dengan kata lain, kekonsistenan akan dapat tercapai apabila parameter-parameter α_j dan β_j dengan $j = 1, 2, 3, 4$ yang terlibat dalam sistem persamaan (2.5) menjadi solusi bagi sistem (2.5) itu sendiri. Sebuah kondisi yang secara langsung dapat dilihat adalah

$$(2.6) \quad \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3 = 0.$$

yang diperoleh dari dua persamaan pertama. Jika ini berlaku maka dua persamaan pertama dalam (2.5) adalah konsisten. Sementara itu, dua persamaan terakhir dalam (2.5) masing-masing dikalikan dengan $\beta_3 k^2$ pada persamaan ketiga diperoleh

$$(2.7) \quad \begin{cases} k^2 q \beta_3 (-\alpha_2 \beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m} + \alpha_2 \beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m}) + \\ k^2 p \beta_3 (\alpha_1 \beta_2 V_{l,m} V_{l,1+m} - \alpha_4 \beta_2 V_{1+l,m} V_{1+l,1+m}) = 0 \end{cases}$$

dan dikali dengan β_2 pada persamaan keempat diperoleh

$$(2.8) \quad \begin{cases} -k^2 q \beta_2 (-\alpha_3 \beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m} + \alpha_3 \beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m}) - \\ k^2 p \beta_2 (\alpha_1 \beta_3 V_{l,m} V_{l,1+m} - \alpha_4 \beta_3 V_{1+l,m} V_{1+l,1+m}) = 0 \end{cases}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (2.7) dan (2.8) diperoleh

$$(2.9) \quad q(\alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3) (\beta_1 V_{l,m} V_{1+l,m} - \beta_4 V_{l,1+m} V_{1+l,1+m}) = 0$$

Dari hubungan (2.6), persamaan (2.9) menjadi konsisten apabila $\alpha_2 = \alpha_3$ dan $\beta_2 = \beta_3$.

Dengan demikian sistem (2.5) menjadi konsisten apabila $\alpha_2 = \alpha_3$ dan $\beta_2 = \beta_3$. Akibatnya, matriks Lax dalam persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi

$$(2.10) \quad P_{l,m}^{\text{hor}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 p & -\alpha_2 V_{l+1,m} \\ -\alpha_2 \left(\frac{k^2}{V_{l,m}} \right) & \alpha_4 p \left(\frac{V_{l+1,m}}{V_{l,m}} \right) \end{pmatrix} \text{ dan } P_{l,m}^{\text{vert}} = \begin{pmatrix} \beta_1 q & -\beta_2 V_{l,m+1} \\ -\beta_2 \frac{k^2}{V_{l,m}} & \beta_4 q \frac{V_{l,m+1}}{V_{l,m}} \end{pmatrix}$$

Dari hasil kalkulasi yang dilakukan di atas, dapat disimpulkan bahwa bentuk pemetaan-pemetaan yang diturunkan dari persamaan beda parsial $mKdV$ yang diperumum (*generalized discrete partial mKdV equation*) merupakan sebuah bagian dari keluarga pemetaan empat parameter berikut ini

$$(2.11) \quad \theta_1 V_{l,m} V_{l,m+1} - \theta_2 V_{l+1,m} V_{l+1,m+1} - \theta_3 V_{l,m} V_{l+1,m} + \theta_4 V_{l,m+1} V_{l+1,m+1} = 0$$

dengan $\theta_1 = p\alpha_1\beta_2$, $\theta_2 = p\alpha_4\beta_2$, $\theta_3 = q\alpha_2\beta_1$, dan $\theta_4 = q\alpha_2\beta_2$.

2.3.2. Bentuk Ekuivalen Persamaan Beda Parsial *Korteweg de Vries (KdV)*

Persamaan KdV dalam versi latis 2D (\mathbb{Z}^2) didefinisikan sebagai [13]

$$(2.15) \quad (p + q + V_{l,m} - V_{l+1,m+1})(q - p + V_{l+1,m} - V_{l,m+1}) = q^2 - p^2.$$

Persamaan (2.15) dikenal dengan sebutan persamaan beda parsial KdV ($\Delta\Delta$ - KdV). Misalkan $\xi_{l,m}(k)$ menyatakan vektor yang mengandung fungsi gelombang yang bergantung kepada sebuah parameter spektral k . Persamaan (2.15) dapat diturunkan melalui pemetaan-pemetaan berikut ini [12,13]

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \xi_{l+1,m}(k) &= \frac{1}{p-k} M_{l,m}^{\text{hor}} \xi_{l,m}(k) \\ \xi_{l,m+1}(k) &= \frac{1}{q-k} M_{l,m}^{\text{vert}} \xi_{l,m}(k) \end{aligned}$$

dengan

$$(2.17) \quad \begin{cases} M_{l,m}^{\text{hor}}(k) = \begin{pmatrix} p - V_{l+1,m} & 1 \\ k^2 - p^2 + (p + V_{l,m})(p - V_{l+1,m}) & p + V_{l,m} \end{pmatrix} \\ M_{l,m}^{\text{vert}}(k) = \begin{pmatrix} q - V_{l,m+1} & 1 \\ k^2 - q^2 + (q + V_{l,m})(q - V_{l,m+1}) & q + V_{l,m} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Persamaan (2.17) merupakan sepasang matriks yang dikenal dengan sebutan matriks pasangan Lax (*Lax Pair*). Dapat dicatat bahwa persamaan (2.15) ekuivalen dengan pemetaan-pemetaan berikut ini

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} V'_{z_1+z_2-1} = p + q + V_0 - \frac{(q^2 - p^2)}{(q - p + V_{z_1} - V_{z_2})} \\ V'_{z_1+z_2-2} = V_{z_1+z_2-1} \\ \vdots \\ V'_1 = V_2 \\ V'_0 = V_1 \end{array} \right.$$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1. Tempat dan Waktu

Kegiatan penelitian yang direncanakan telah dilakukan di Jurusan Matematika dan Laboratorium Matematika dan Statistika Terapan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung. Lamanya waktu yang digunakan adalah 2 (dua) semester yang pada tahun akademik *2020/2021* (Genap) dan *2021/2022* (Ganjil).

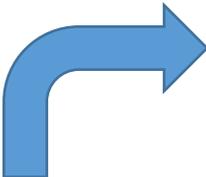
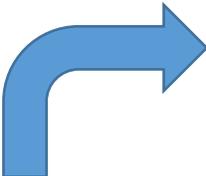
3.2. Bahan dan Alat

Penelitian yang dilakukan hanya memerlukan teks/citra untuk dilakukan implementasi algoritma yang didesain. Sementara bahan pendukung penelitian lainnya hanya bahan habis pakai dan bahan bacaan berupa buku dan/atau jurnal matematika, analisis numerik, dan komputasi. Sedangkan alat yang digunakan untuk proses komputasi dan simulasi berupa seperangkat komputer *Notebook Core i5* yang berisikan *software MATHEMATICA®* versi 9.

3.3. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode pendekatan studi literatur terhadap persoalan yang di selesaikan. Artikel (jurnal dan/atau prosiding), buku teks, pendapat pakar yang resmi dan legal dijadikan sebagai bahan bacaan guna mendukung uji kevalidan hasil penelitian berkenaan dengan konsep pemetaan/fungsi dan algoritma yang dikonstruksi. Dalam penelitian yang telah dilakukan, sejumlah tahapan penelitian diilustrasikan dalam Gambar 2.

Secara deskriptif, alur penelitian dalam Gambar 2 dijelaskan sebagai berikut. Penelitian telah dilakukan melalui proses observasi/kajian teoritis beberapa hasil-hasil penelitian yang telah dideskripsikan dalam jurnal-jurnal internasional terdahulu yang dipelajari dan dikaji untuk sejumlah konsep dasar bentuk umum pemetaan 2D yang diturunkan dari persamaan beda parsial ganda *KdV* yang diperumum dan kriptografi sebuah teks berdasarkan pada sebuah pemetaan. Kemudian dikonstruksi sebuah algoritma enkripsi-dekripsi yang digunakan untuk melakukan proses kriptografi teks secara berjenjang pada dua teks berbasis *map* yang berbeda untuk kemudian dikombinasikan agar diperoleh tingkat pengamanan teks digital.

	Periode Kegiatan (Bulan Jan-April)	Periode Kegiatan (Bulan Mei-Agustus)	Periode Kegiatan (Bulan September-Oktober)
Tahap Finalisasi			<p style="text-align: center;"><i>Implementasi algoritma (coding) yang telah dikonstruksi dengan menggunakan Mathematica® melalui sebuah sampel citra.</i></p>
Tahap Pengembangan		<p style="text-align: center;"><i>Analisis level set persamaan beda biasa KdV, Konstruksi Algoritma yang digunakan untuk melakukan proses kriptografi teks/citra berbasis 2D KdV map yang diperumum</i></p>	
Tahap Inisiasi	<p style="text-align: center;"><i>Studi dan Observasi bentuk umum persamaan beda parsial KdV, Mengkonstruksi bentuk umum pers. Beda biasa berdimensi $\mathbb{R}^{z_1+z_2}$, dan Linierisasi Persamaan beda biasa KdV yang diperumum.</i></p>		

Gambar 2. Diagram tahapan penelitian yang telah dilakukan.

3.4. Luaran dan Indikator Capaian Penelitian

Hasil/luaran dan indikator capaian pada penelitian ini adalah diperolehnya hasil analisis dinamika dan bifurkasi perilaku sistem, dalam pandangan/konteks sifat-sifat dinamik (kestabilan titik tetap misalnya), sehubungan dengan bervariasinya nilai-nilai parameter yang terlibat dalam sistem dinamik diskrit yang diturunkan dari persamaan beda ganda *KdV*. Hasil/luaran penelitian ini direncanakan akan diseminarkan dalam sebuah seminar hasil

penelitian yang diselenggarakan oleh LPPM Universitas Lampung, konferensi Internasional (ICMSS 2021 pada tanggal 15-16 September 2021 di Universitas Lampung Mangkurat oleh Mahasiswa Doktoral (Agus Sutrisno/NIM 1937061005)). Luaran dan indikator capaian penelitian dapat dirinci sebagaimana diberikan dalam tabel berikut ini:

Tabel: Target Capaian Kegiatan Penelitian

No	Jenis Luaran				Target Capaian 2021
	Kategori	Sub Kategori	Wajib	Tambahan	
1	Artikel ilmiah dimuat di jurnal	Internasional bereputasi	<i>Accepted</i> [*]	<i>Published</i>	√
		Nasional Terakreditasi	<i>Sumitted</i> [#]	<i>Accepted</i>	√
2	Artikel ilmiah dimuat di prosiding	Internasional Terindeks	<i>Sumitted</i> [#]	<i>Accepted</i>	√
4	Disertasi		<i>draft</i>	-	√
5	Tingkat Kesiapan Teknologi (TKT)		1	-	-

* Per tanggal 12 Oktober: *under Review*

Per tanggal 12 Oktober: *draft*

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian yang telah dilakukan diawali dengan upaya memahami bentuk pemetaan yang diturunkan dari sebuah persamaan beda ordiner. Bekerjasama dengan mahasiswa doktoral (Agus Sutrisno/NIM 1937061005) upaya tersebut menghasilkan sebuah pemetaan yang diturunkan dari konsep persamaan beda ordiner yang dikenal dengan pemetaan *Quispel-Robert-Thomson* (QRT Map). Deskripsi lengkapnya adalah sebagai berikut.

Pertimbangkan persamaan beda orde dua yang ditulis dalam bentuk berikut:

$$(4.1) \quad x_{n+2} = \frac{g_0(x_{n+1}) - x_n g_1(x_{n+1})}{g_1(x_{n+1}) - x_n g_2(x_{n+1})},$$

dengan $g_j, j = 0, 1, 2$, dinyatakan dengan

$$(4.2) \quad \begin{matrix} g_0(x_{n+1}) \\ g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_{n+1}) \end{matrix} = A_0 \begin{pmatrix} x_n^2 \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x_n^2 \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perlu dicatat bahwa A_0 dan A_1 dalam persamaan (4.2) merupakan matriks simetris 3×3 yang didefinisikan dengan:

$$(4.3) \quad A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \beta_i & \epsilon_i & \zeta_i \\ \gamma_i & \zeta_i & \kappa_i \end{pmatrix}; i = 0, 1.$$

Persamaan. (4.2) memiliki invarian/integral G , yang berarti $G(x_n, x_{n+1}) = G(x_{n+1}, x_{n+2})$.

Hal ini dapat dinyatakan sebagai rasio polinomial biquadratik:

$$(4.4) \quad G(x, y) = \frac{(\alpha_0 x^2 y^2 + \beta_0(x^2 y + xy^2) + \gamma_0(x^2 + y^2) + \epsilon_0(x^2 + y^2) + \sigma_0(x + y) + \kappa_0)}{(\alpha_1 x^2 y^2 + \beta_1(x^2 y + xy^2) + \gamma_1(x^2 + y^2) + \epsilon_1(x^2 + y^2) + \sigma_1(x + y) + \kappa_1)}$$

Perlu dicatat bahwa sifat-sifat pemetaan simetris QRT di atas adalah reversibel dan (anti) mengawetkan ukuran.

Fokus sekarang pada persamaan perbedaan QRT orde kedua dalam Persamaan. (4.1) dalam bentuk khusus berikut

$$(4.5) \quad x_{n+2} = \frac{(\lambda - \mu x_{n+1}^2)}{x_n (x_{n+1}^2 - \mu)}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Asumsikan bahwa A_0 dan A_1 dalam persamaan (4.3) sebagai berikut:

$$(4.6) \quad A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -\lambda \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu, fungsi $g_i, i = 0, 1, 2$, dalam persamaan (4.2) adalah:

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} g_0(x_{n+1}) \\ g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_{n+1} - \mu x_{n+1}^3 \\ 0 \\ \mu x_{n+1} - x_{n+1}^3 \end{pmatrix}$$

Sekarang pertimbangkan sebuah kasus yang berbeda dengan menetapkan matriks A_0 dan A_1 sebagai berikut:

$$(4.8) \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \mu \\ -1 & 1 & -1 \\ \mu & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian fungsi-fungsi $g_j, j = 0, 1, 2$, menjadi:

$$(4.9) \quad \begin{pmatrix} g_0(x_{n+1}) \\ g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_{n+1}^2 - \mu x_{n+1}^3 \\ 0 \\ \mu x_{n+1} - x_{n+1}^2 \end{pmatrix}$$

Penerapan persamaan (4.8) dan fungsi bernilai vektor dalam persamaan (4.9), bentuk khusus persamaan dari (4.1) adalah

$$(4.10) \quad x_{n+2} = \frac{x_{n+1}(\lambda - \mu x_{n+1})}{x_n (x_{n+1} - \mu)}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Pandang persamaan beda orde dua QRT dalam persamaan (4.5). Tulis persamaan tersebut dalam bentuk pemetaan sebagaimana berikut ini:

$$(4.11) \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_{(\mu, \lambda)}(\mathbf{x}_n)$$

dengan

$$(4.12) \quad \mathbf{f}_{(\lambda, \mu)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{\lambda - \mu x_1^2}{x_2 (x_1^2 - \mu)}, x_1 \right)$$

Pilih $\lambda = 1$. Bentuk khusus pemetaan akan diperoleh sebagaimana diberikan dalam persamaan (4.12), yaitu

$$(4.13) \quad \mathbf{f}_{(1, \mu)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1 - \mu x_1^2}{x_2 (x_1^2 - \mu)}, x_1 \right)$$

Dengan elaborasi sederhana akan diperoleh pemetaan (4.13) memiliki integral sebagaimana diberikan dalam persamaan (4.14)

$$(4.14) \quad F(x_1, x_2) = \mu \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) - \left(x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} \right)$$

Pemetaan (4.13) memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- a. Memiliki sebuah titik tetap yaitu (1,1).
- b. Mengawetkan Luas.
- c. Dapat dibalik.
- d. Simetris.

Dapat dicatat bahwa integral pada persamaan (4.13) adalah linear dalam μ . Oleh karena itu,

$$(4.15) \quad \mu = \mu(x_1, x_2) = \frac{(1 + x_1^2 x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)}$$

Untuk semua $(x_1, x_2) \in F(x_1, x_2) = 0$. Dengan mensubsitusikan persamaan (4.15) kedalam pemetaan (4.14), diperoleh pemetaan linear berikut

$$(4.16) \quad (x_1', x_2') = \hat{\mathbf{f}}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

dengan bentuk integralnya adalah

$$(4.17) \quad \hat{F}(x_1, x_2) = \frac{(1 + x_1^2 x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)}$$

Pemetaan linear $\hat{\mathbf{f}}(x_1, x_2)$ memiliki sifat-sifat berikut:

- Orbit $\hat{\mathbf{f}}(x_1, x_2)$ merupakan orbit dengan periode-4.
- Pemetaan $\hat{\mathbf{f}}(x_1, x_2)$ merupakan pemetaan yang mengawetkan luas. Dengan kata lain terdapat

sebuah densitas $\hat{\rho}(x_1, x_2)$ sehingga berlaku

$$(4.18) \quad |D\hat{\mathbf{f}}(x_1, x_2)| = \frac{\hat{\rho}(x_1, x_2)}{\hat{\rho}(x_1', x_2')} = 1$$

dan

$$\hat{\rho}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2} \left[\frac{\partial \hat{F}(x_1, x_2)}{\partial \mu} \right]^{-1} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

- Pandang $G_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Dapat dicatat bahwa $G_1(G_1(x_1, x_2)) = G_1(x_2, x_1) = (x_1, x_2)$, yang mengakibatkan $G_1(x_1, x_2)^{-1} = G_1(x_1, x_2)$. Oleh karena itu dapat diperiksa bahwa $G_1 \circ \hat{f} \circ G_1^{-1} = \hat{f}^{-1}$, yang berarti bahwa G_1 merupakan sebuah *reversing symmetry* untuk \hat{f} .
- Terdapat sebuah *symmetry* $S_1(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$ sehingga berlaku $S_1 \circ \hat{f} \circ S_1^{-1} = \hat{f}$.

Catatan lain yang perlu diketahui bahwa sebuah pemetaan linear dapat dikonstruksi dari persamaan (4.14) di sekitar titik tetap (1,1) dengan bentuk matriks Jacobiannya adalah:

$$(4.19) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{2(\mu^2 - 1)}{(1 - \mu)^2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dan bentuk linear pemetaanya adalah:

$$(4.20) \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(\mu^2 - 1)}{(1 - \mu)^2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Pemakaian sistem linear (4.20) pada kriptografi citra telah di sampaikan dalam seminar internasional ICMSS 2021 pada tanggal 15-16 September 2021 di Universitas Lambung Mangkurat oleh saudara Agus Sutrisno/NIM 1937061005. Sementara itu, hasil penelitian yang diperoleh ini juga telah ditulis dalam sebuah artikel untuk dipublikasikan dalam sebuah jurnal *IJMEM* (terindeks *Scopus*) yang saat ini masih dalam status *under review*.

Hasil lain yang juga diperoleh dalam penelitian yang telah dilakukan adalah diperolehnya bentuk khusus invarian/inegral dari pemetaan (2.18) dengan penetapan nilai-nilai $z_1 = 1$ dan $z_2 = 2$.

Pilih $z_1 = 1$ dan $z_2 = 2$. Pemetaan (2.18) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini

$$(4.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_2' = p + q + V_0 - \frac{(q^2 - p^2)}{(q - p + V_1 - V_2)} \\ V_1' = V_2 \\ V_0' = V_1 \end{array} \right.$$

Pemetaan (4.21) merupakan pemetaan 3D (*3-dimensional mapping*). Bentuk invarian dari pemetaan (4.21) dapat dievaluasi melalui persamaan berikut

$$(4.22) \quad Tr L^{1,2}(k) = Tr(V_{ver} \cdot H_{hor_1} \cdot H_{hor_0})$$

dengan

$$V_{ver} = \begin{pmatrix} q - V_2 & 1 \\ k^2 - q^2 + (q + V_0)(q - V_2) & q + V_0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$H_{hor_1} = \begin{pmatrix} p - V_2 & 1 \\ k^2 - p^2 + (p + V_1)(p - V_2) & p + V_1 \end{pmatrix}$$

$$H_{hor_0} = \begin{pmatrix} p - V_1 & 1 \\ k^2 - p^2 + (p + V_0)(p - V_1) & p + V_0 \end{pmatrix}$$

Atau

$$(4.23) \quad M = Tr L^{1,2}(k) = Tr \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

dengan

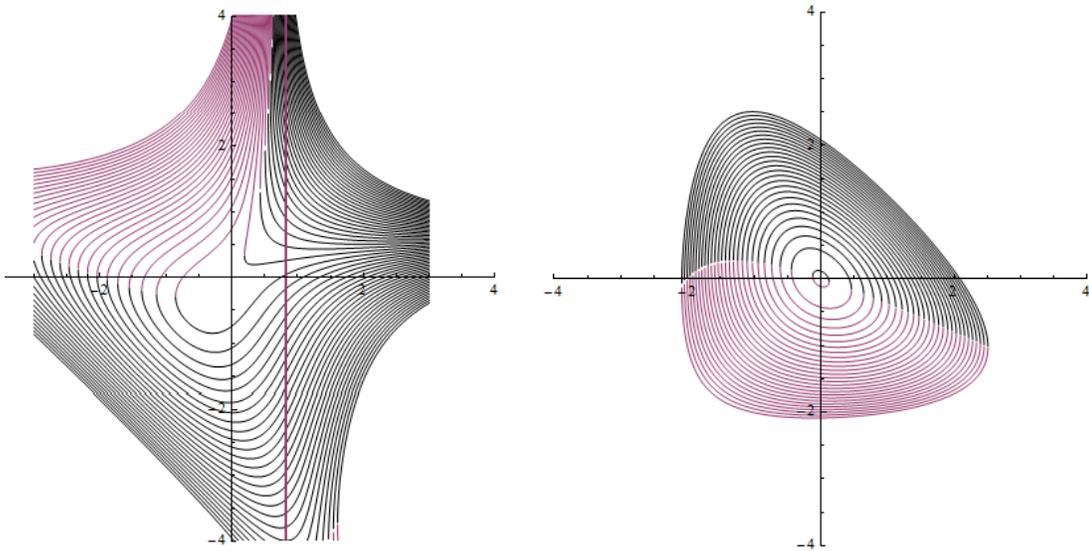
$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{-q(k^2 + p^2) - V_0(k^2 + V_1(-2p - q + V_2) + pq - pV_2 + V_1^2)}{(k - q)(k + q)} \\
&+ \frac{2k^2p + 2pV_1(q - V_1) - V_2(p - V_1)(p - q + V_1) + V_0^2(V_1 - p)}{(k - q)(k + q)} \\
m_{12} &= \frac{k^2 + p^2 - V_2(p - q + V_1) + V_0(-p - q + V_1 + V_2) - 2pq + 2pV_1 - V_0^2}{(k - q)(k + q)} \\
m_{21} &= \frac{(k^2 + pV_0 - V_1(p + V_0))(k^2 + V_2(p - q - V_0 + V_1) - pq + qV_0 - qV_1)}{(k - q)(k + q)} \\
&- \frac{(p - V_1)(-(k^2 - V_2^2)(p - q) + V_1(p - V_2)(q - V_2) + V_0(p - V_2)(V_2 - q))}{(k - q)(k + q)} \\
m_{22} &= \frac{2k^2p + V_2(p - q)(p - V_2) + V_1(2p - V_2)(V_2 - q) + V_0^2(q - V_2)}{(k - q)(k + q)} \\
&- \frac{-q(k^2 + p^2) + V_0(k^2 - V_2(p + 2q) + pq + V_1(V_2 - q) + V_2^2)}{(k - q)(k + q)}
\end{aligned}$$

Hasil komputasi sisi kanan persamaan (4.23) adalah

$$(4.24) \quad H(w_0, w_1; p, q) = -p(w_0^2 + w_1^2) + q(w_0 + w_1)^2 + w_0w_1(w_0 + w_1)$$

dengan $w_0 = V_0 - V_1$ dan $w_1 = V_1 - V_2$. Persamaan (4.24) merupakan bentuk invarian/integral dari pemetaan (4.21).

Hasil komputasi terhadap penentuan bentuk level set invarian/integral dalam persamaan (4.24) dengan menetapkan nilai $q = -1$ dan nilai-nilai $p = -2$ dan $p = 1.831$ masing-masing diperlihatkan dalam gambar berikut ini (kiri $p = 1.831$ dan kanan $p = -2$).



Hasil-hasil lain berkenaan dengan level set integral persamaan (4.24) untuk variasi nilai p dan q dapat diperoleh dengan menggunakan program *Matheamtica* yang telah dibuat sebagaimana diberikan dalam bagian Lampiran laporan penelitian ini.

BAB 5. KESIMPULAN DAN KERJA LANJUTAN

Penelitian yang telah dilakukan selain memberikan hasil utama berupa sebuah bentuk khusus pemetaan yang diturunkan dari sebuah persamaan KdV juga memberikan sebuah pemetaan nonlinear 2D yang merupakan bagian dari pemetaan yang dikenal dengan sebutan pemetaan QRT. Secara khusus, pemetaan yang diturunkan dari persamaan KdV tersebut merupakan sebuah pemetaan nonlinear. Selain mendapatkan bentuk pemetaannya, penelitian ini juga berhasil mendapatkan bentuk invarian/integralnya. Dalam ilustrasi level set integral untuk sebuah nilai q dan dua buah nilai parameter p berbeda diperoleh informasi bahwa solusi pemetaan dapat dalam kondisi stabil dan juga tidak stabil yang dalam hal ini bergantung pada nilai parameter yang digunakan. Hasil-hasil penelitian ini dapat ditindaklanjuti untuk penurunan bentuk pemetaan dengan orde yang lebih tinggi walau tidak mudah untuk mendapatkannya. Selain itu, bentuk-bentuk level set dengan solusi yang stabil atau tidak stabil masih perlu penelitian lanjutan. Hal yang dapat dan akan dilakukan setelah hasil ini diperoleh adalah mendapatkan titik tetap untuk pemetaan yang telah dihasilkan dalam penelitian ini untuk kemudian dilakukan linearisasi sebagai sebuah upaya untuk diaplikasikan dalam kriptografi citra/gambar.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] I. Jun-ichi, K. Kenji, M. Nozomu, and O., Yasuhiro. Discrete mKdV and Discrete Sine-Gordon Flows on Discrete Space Curves, *Nonlinear Sciences : Exactly Solvable and Integrable Systems* DOI. [10.1088/1751-8113/47/23/235202](https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/23/235202). 1-30, 2013.
- [2] Schief W.K, Lattice Geometry of the Discrete Darboux, KP, BKP, and CKP Equations. Menelaus' and Carnot's Theorems, *Journal of Non Linear Mathematical Physics*, 2003, 10, 194-208
- [3] Nijhoff, F.W., Lecturer Note: Discrete Systems And Integrability.
- [4] M.J. Ablowitz and J.F. Ladik, Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis, *J. Math. Phys.* 17, 1011-1018, 1976
- [5] X.G. Geng and D. Gong, Quasi-periodic solutions of the discrete mKdV hierarchy, *Int. J. Geom. Methods M.* 10, 1250094, 2013.
- [6] F.W. Nijhoff, G. R.W. Quispel and H.W. Capel, Direct linearization of nonlinear difference-difference equations, *Phys. Lett. A* 97, 125-128, 1983.
- [7] Peter H Van Der Kamp, O Rojas And G R W Quispel, Closed-Form Expressions For Integrals Of MKdV And Sine-Gordon Maps, *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 12789-12798, 2007
- [8] Hereman W. and Quispel G.R.A., *Symbolic Computation Of Lax Pairs Of Non-linear Partial Difference Equations*, SIDE8 International Conference Ste.-AdEle, QuEbec, Canada. Saturday, June 28, 2008, 9:30-10:00.
- [9] Chandre, C and Eilbec, J.C., Does the existence of a Lax pair imply integrability?.
- [10] Quispel, G.R.W., Capel H.W., Papageorgiou, V.G., and Nijhoff, F.W. Integrable Mappings Derived From Soliton Equations, *Physica A* 173. 243-266, 1991.
- [11] Van der Kamp, P.H., and Quispel, G.R.W., Capel H.W., The Staircase method : Integrals for periodic reduction of integrable lattice equations, 2010.
- [12] Bridgman. T., Hereman, W., and Quispel, G.R.W., and Van der Kamp, P.H., Symbolic Computation of Lax Pairs of Partial Difference Equation Using Consistency Around the Cube, *Found Comput Math* .DOI 10.1007/s 10208-012-9133-9, 2012.
- [13] Van der Kamp, P.H., Initial Value Problems For Lattice Equations *J. Phys A: Math Theor.* 42 404-419, 2009.
- [14] Bobenko A. I., *Discrete Integrable System and Geometry*, The Proceeding of The International Congress of Mathematical Physics'97 Brisbane, July 1997.
- [15] Bobenko A. I., and Seiler, *Discrete Integrable Geometry and Physics*, 1998 (Book)
- [16] M. Rinaldi, Algoritma enkripsi selektif teks digital dalam ranah frekuensi berbasis permutasi chaos. *Jurnal Rekayasa Elektrika*, 10 (2), 66-72, 2012.

- [17] D. H. Arinten, A. Irawan, Sistem Kriptografi Teks Digital Pada Jaringan Intranet Menggunakan Metode Kombinasi Chaos Map Dan Teknik Selektif. *Ultimatics*, **9 (1)**, 59-66, 2017.
- [18] P. Ronsen, H. Arwin, S. Indra, Enkripsi teks digital menggunakan Arnold's cat map dan nonlinear chaotic algorithm. *Jurnal SIFO Mikroskil*, **15(2)**, 61-71, 2014.
- [19] L. Zakaria, Notiragayu, A. Nuryaman, S. Suharsono, The Integral Normal Form Of A Three-Dimensional Traveling Wave Solution Mapping Derived From Generalized $\Delta\Delta$ -mKdV Equation. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, **19(1)**, 37-48. 2018.
- [20] L. Zakaria and J.M. Tuwankotta. Dynamics and Bifurcations in a Two-Dimensional Maps Derived From a Generalized diskrit ganda sineGordon Equation, *Far East Journal of Dynamical Systems*, **28(3)**, 165–194. 2016.