# POLA RUMUS BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK TANPA *LOOP* BERORDE LIMA DAN ENAM DAN HUBUNGANNYA DENGAN PENENTUAN RUMUS GRAF TERHUBUNG ORDE TUJUH TANPA *LOOP*

Muslim Ansori[1] dan Wamiliana[1]
muslim.ansori@fmipa.unila.ac.id , wamiliana.1963@fmipa.unila.ac.id

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung[1)]

**ABSTRAK**

Suatu graf *G* disebut graf terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di *G*. *Loop* adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama, garis paralel adalah dua garis atau lebih yang titik-titik ujungnya sama. Jika diberikan n titik dan m garis, banyak graf yang dapat dibentuk. Pada penelitian ini akan didiskusikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop*. Pada penelitian ini diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop* adalah

$$N\left(G_{n,m}\right) = \sum_{t \geq n-1}^{m} N\left(G_{n,m,t}\right);m \geq t$$

dengan $t$ adalah banyaknya garis yang menghubungkan dua titik yang berbeda dan garis-garis yg menghubungkan pasangan titik yg sama dihitung satu.

**Kata Kunci** : graf, graf terhubung, *loop*, dan garis paralel.

## 1. PENDAHULUAN

Topik tentang teori graf dipelopori oleh Leonard Euler pada tahun 1736, ketika menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg, Kaliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan - daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler menyatakan dengan permodelan tertentu bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi. Hal tersebut dapat terjadi jika banyaknya jembatan berjumlah genap. Bentuk permodelan tersebut yang kemudian menjadi latar belakang munculnya konsep teori graf yang ada saat ini.

Cayley (1874) menghitung isomer hidrokarbon $C_nH_{2n+2}$ yang ternyata sama dengan proses pencacahan berkaitan dengan penghitungan pohon berakar pada graf. Harary dan Palmer (1973) memberikan teknik perhitungan banyaknya graf secara umum. Wamiliana dkk. (2016) melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde lima tanpa garis paralel. Pada tahun berikutnya, Amanto dkk. (2017) memberikan rumus untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat. Selanjutnya, Amanto dkk. (2018) memberikan rumus untuk menghitung graf tak terhubung berlabel titik berorde lima dengan maksimum enam sisi 3-paralel tanpa *loop*. Pada tahun yang sama, Indrawan dkk. (2018) melakukan penelitian untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua serta garis non paralel maksimal enam. Pada tahun berikutnya, Wamiliana dkk. (2019) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf berlabel titik berorde lima dengan maksimal lima garis paralel dan tanpa *loop.* Selanjutnya, Amanto dkk. (2020) melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde lima dengan $5 \leq m \leq 10$. Puri dkk. (2021) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde 6 dengan maksimal 30 garis tanpa *loop*, dan Putri dkk. (2021) melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde 6 dengan maksimal 20 garis paralel dan tanpa *loop.* Pada penelitian ini akan didiskusikan tentang pola rumus banyaknya graf berorde lima dan enam tanpa *loop* dan hubungannya dengan penentuan banyaknya graf terhubung berorde tujuh tanpa *loop*.

## 2. Tinjauan Pustaka

Beberapa konsep dasar graf pada sub bab ini dirujuk dari Deo (1989). Graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan tak terurut suatu himpunan $((G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ merupakan himpunan titik,

$V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ merupakan himpunan sisi atau garis dari pasangan tak terurut $V(G)$.

Suatu sisi atau garis yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut *loop*, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan titik-titik yang sama. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat *loop* atau garis paralel, sedangkan jika memuat *loop* atau garis paralel, maka disebut graf tak sederhana.

*Walk* adalah barisan berhingga dari suatu titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk*. *Walk* yang melewati titik yang berbeda-beda disebut sebagai *path* (lintasan). *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*. Suatu graf *G* disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di *G*. Derajat (*degree*) dari suatu titik *v* pada graf *G* dinotasikan deg*(v)* adalah banyaknya garis yang menempel pada titik *v* dengan *loop* terhitung dua..

Titik terasing merupakan titik yang memiliki derajat nol, sedangkan titik *pendant* (daun) adalah titik yang memiliki derajat satu. Dua graf dikatakan ekuivalen (dan disebut isomorfik) jika keduanya memiliki ciri-ciri yang sama pada istilah dalam teori graf. Dua graf *G* dan *G'* dikatakan isomorfik jika ada korespondensi 1-1 antara titik pada kedua graf tersebut dan antara garis keduanya sehingga jika garis *e* bersisian dengan titik *u* dan *v* pada *G* maka garis *e*' pada *G'* juga bersisian dengan titik *u*' dan *v*'.
Dua graf isomorfik harus memiliki:

1. Jumlah titik yang sama.
2. Jumlah garis yang sama.
3. Mempunyai jumlah titik yang sama berderajat tertentu

Perlu diperhatikan bahwa dua graf yang mempunyai sifat 1 sampai dengan 3, belum tentu kedua graf tersebut isomorfik.

Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian $S$ yang terdiri dari $r$ $(r \leq n)$ disebut kombinasi n objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau C(n,r) atau ${}_nC_r$ . Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ . Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek yang muncul (Siang, 2002).

Barisan aritmatika tingkat ke-$p$ adalah sebuah barisan yang memiliki selisih yang sama setiap suku berurutannya setelah $p$ tingkatan. Tingkatan pada barisan aritmatika akan menghasilkan persamaan dengan pangkat tertingginya adalah $p$. Pangkat tertinggi dari suatu persamaan merupakan orde dari persamaan tersebut.

Fungsi polinomial adalah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan polinomial pada deret aritmatika orde ke- $p$ adalah

$$P_p(m) = a_p m^p + a_{p-1} m^{p-1} + a_{p-2} m^{p-2} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0,$$

dengan koefisien tertentu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}$ . Polinom ini memiliki derajat sebesar $p$, jika koefisien penentunya $a_1 \neq 0$ (Conte dan de Boor, 1980).

## 2. METODE PENELITIAN

Adapun langkah – langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi pustaka yang berhubungan dengan graf.
2. Menggambar pola - pola dasar yang mungkin terbentuk.
3. Menghitung banyaknya graf dari pola - pola tersebut.
4. Mengelompokkan pola - pola graf berdasarkan *m* dan *t*, dengan *t* adalah banyaknya garis yang menghubungkan dua titik yang berbeda dan m adalah banyaknya keseluruhan garis pada graf.
5. Memprediksikan formula yang terbentuk serta menggunakan software https://www.dcode.fr/matrix-determinant dan https://www.mathway.com/ untuk menentukan koefisien polinomial.
6. Memberikan bukti formal atas formula atau rumus yang telah terbentuk.

7. Menarik kesimpulan.

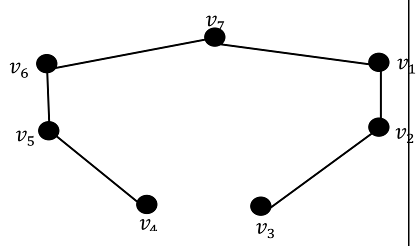
## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

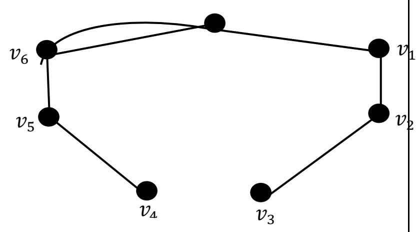
Pada bab ini akan didiskusikan tentang hasil dan observasi mengenai banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop*.

### 3.1 Konstruksi Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Tujuh tanpa *Loop*

Berikut ini merupakan hasil konstruksi dari observasi yang telah dilakukan terhadap graf tak terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop.*

Tabel 3.1.1 Hasil kostruksi graf tak terhubung berorde 7 dengan $1 \leq t \leq 10$ dan $1 \leq m \leq 2$

<table>
<tr><th>Info graf</th><th>Pola graf</th><th>Banyaknya</th></tr>
<tr><td>n = 7<br>t = 1<br>m = 1</td><td>
</td><td>$\frac{7!}{2} = 2520$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>2520</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Info graf</th><th>Pola graf</th><th>Banyaknya</th></tr>
<tr><td>n = 7<br>t = 1<br>m = 2</td><td>
</td><td>$C_1^6 \times \frac{7!}{2} = 15120$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>15120</td></tr>
</table>

### 3.2 Observasi Perbandingan Pola dengan Penelitian Sebelumnya

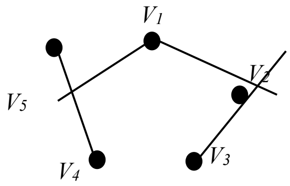
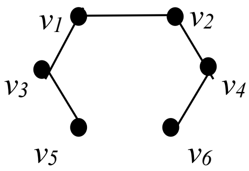
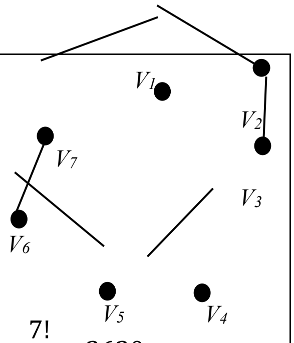
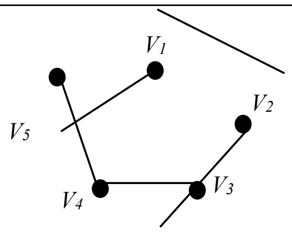
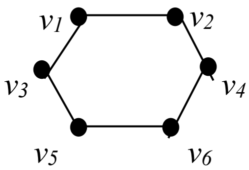
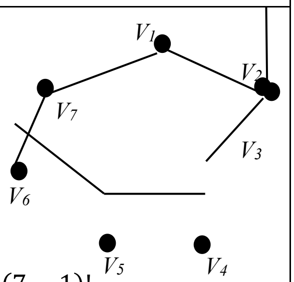
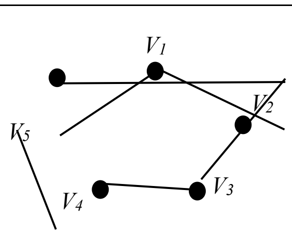
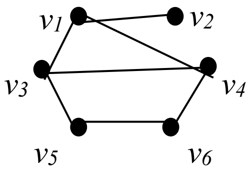
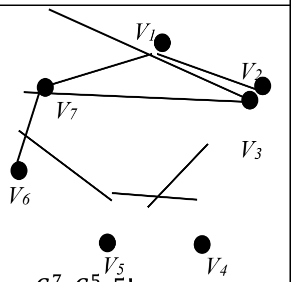
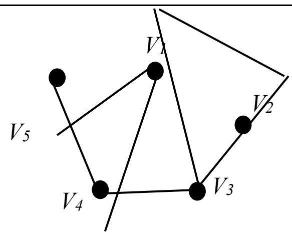
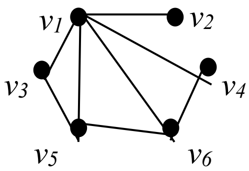
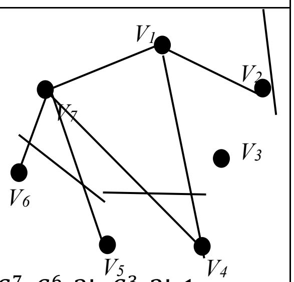
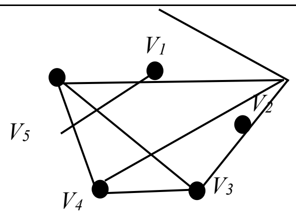
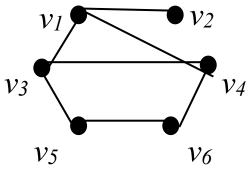
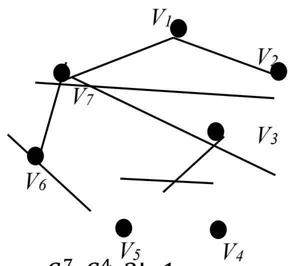
Berikut ini merupakan hasil dari observasi yang telah dilakukan tentang perbandingan pola dengan penelitian sebelumnya.

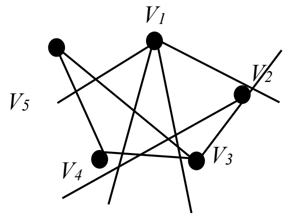
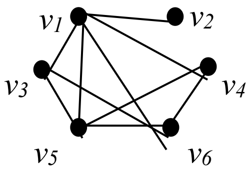
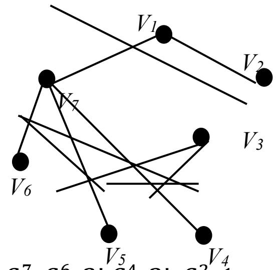
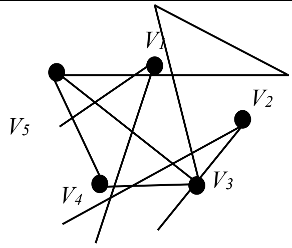
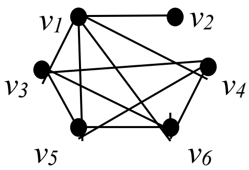
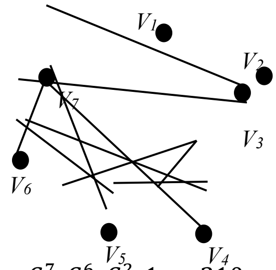
#### 3.2.1 Hasil Observasi Pola yang Ada di n = 5, n = 6 dan n = 7

Berikut ini merupakan hasil dari observasi pola yang ada di n = 5, n = 6, dan n = 7.

Tabel 3.2.1.1 Hasil observasi pola yang ada di n = 5, n = 6, dan n = 7.

| *t* | *n = 5* | *n = 6* | *n = 7* |
|---|---|---|---|

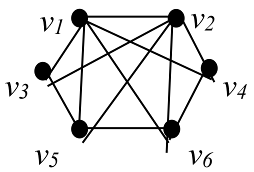
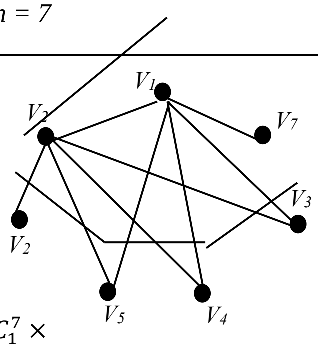
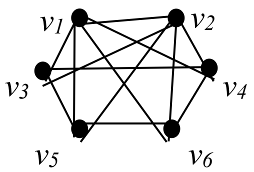
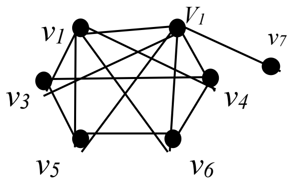
| | | | |
|---|---|---|---|
| *t=n-1* |   $\frac{5!}{2}=60$ |   $\frac{6!}{2}=360$ |   $\frac{7!}{2}=2620$ |
| *t = n* |   $\frac{(5-1)!}{2}=12$ |   $\frac{(6-1)!}{2}=60$ |   $\frac{(7-1)!}{2}=360$ |
| *t=n+1* |   $\frac{C_2^5.C_3^3.3!}{2}=30$ |   $\frac{C_2^6\,.\,C_4^4.\,4!}{2}=180$ |   $\frac{C_2^7.\,C_5^5.\,5!}{2}=1260$ |
| *t=n+2* |   $\frac{C_1^5.\,C_2^4.\,2!}{2}.\frac{C_2^2.\,2!.}{2}=60$ |   $\frac{C_1^6.\,C_2^5.\,2!}{2}.\frac{C_2^3.\,2!\,.1}{2}=90$ |   $\frac{C_1^7.\,C_3^6.\,3!}{2}.\frac{C_2^3.\,2!\,.1}{2}=2520$ |
| *t=n+3* |   $\frac{C_2^5.C_2^3.2!}{2}.1=30$ |   $\frac{C_3^6\,.\,C_2^3.\,2!}{2}.1=60$ |   $\frac{C_3^7.\,C_3^4.\,3!\ .1}{2}=420$ |

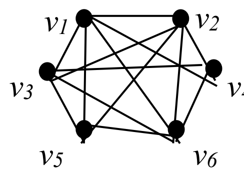
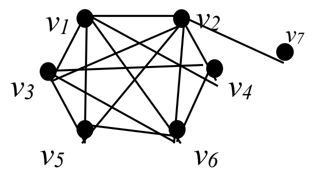
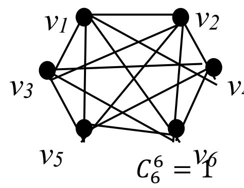
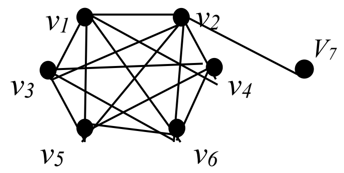
| | | | |
|---|---|---|---|
| *t=n+4* |  $\frac{C_3^5 . C_2^2 .2!}{2} = 10$ |  $\frac{C_1^6 . C_{2.}^5 . 2!}{2} \frac{C_2^3 . 2! .1}{2} = 120$ |  $\frac{C_1^7 . C_{2.}^6 . 2!}{2} \frac{C_2^4 . 2!. C_1^2 . 1}{2} = 420$ |
| *t=n+5* |  $C_5^5 = 1$ |  $C_1^6 . C_4^5 . 1 = 30$ |  $C_1^7 . C_4^6 . C_1^2 . 1 = 210$ |

**3.2.2 Hasil Observasi Pola yang Ada di n = 6 dan n = 7**

Berikut ini merupakan hasil dari observasi pola yang ada di n = 6 dan n = 7.

Tabel 3.2.2.1 Hasil observasi pola yang ada di n = 6 dan n = 7.

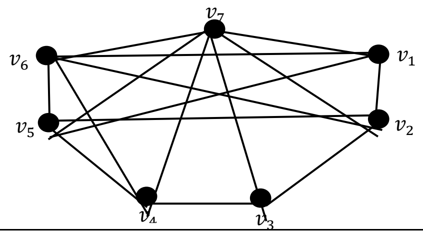
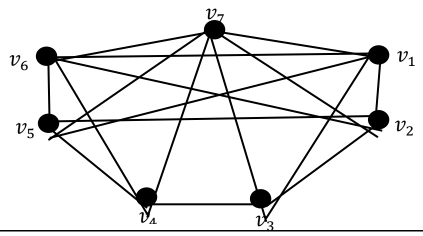
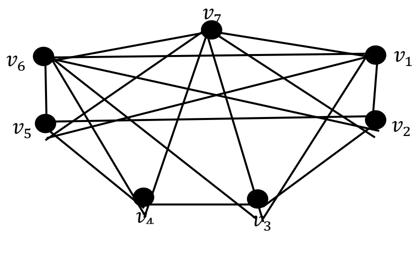
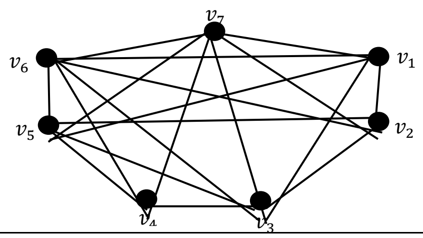
| *t* | *n = 6* | *n = 7* |
|---|---|---|
| *t=n+6* |  $C_2^6 \times \frac{C_2^4 \times 2!}{2} \times \frac{C_2^2 \times 2!}{2} = 90$ |  $C_1^7 \times$ $C_1^6 \times \frac{C_2^5 \times 2!}{2} \times$ $\frac{C_2^3 \times 2!}{2} \times 1 = 420$ |
| *t=n+7* |  $C_2^6 \times \frac{C_4^4 \times 4!}{2} = 180$ |  $C_1^7 \times C_1^6 \times \frac{C_4^5 \times 4!}{2} \times 1 = 2520$ |

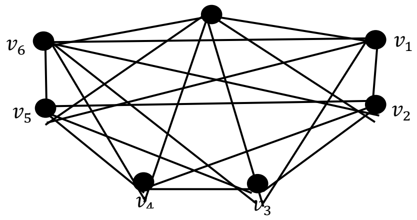
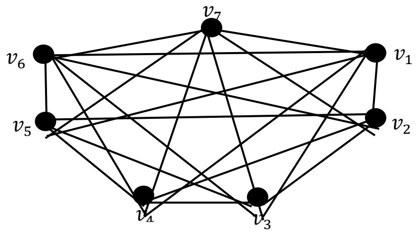
| | | |
|---|---|---|
| *t=n+8* |  $C_4^6 \times \frac{C_2^2 \times 2!}{2}$ =15 |  $C_1^7 \times \frac{C_3^6 \times 3!}{2} \times \frac{C_2^3 \times 2!}{2} \times 1 = 1260$ |
| *t=n+9* |  $C_6^6 = 1$ |  $C_1^7 \times \frac{C_5^6 \times 5!}{2} \times 1 = 2520$ |

### 3.2.3 Hasil Observasi Pola yang Hanya Ada di n = 7

Berikut ini merupakan hasil dari observasi pola yang ada di n = 7.

Tabel 3.2.3.1. Hasil observasi pola yang ada di n = 7.

| *t* | Pola | Rumus | Jumlah |
|---|---|---|---|
| 16 |  | $C_1^7 \times \frac{C_3^6 \times 3!}{2} \times C_2^3$ | 1260 |
| 17 |  | $C_1^7 \times \frac{C_4^6 \times 4!}{2} \times C_2^2$ | 1260 |
| 18 |  | $C_2^7 \times \frac{C_4^5 \times 4!}{2} \times 1$ | 1260 |
| 19 |  | $C_4^7 \times C_2^3 \times C_1^1$ | 105 |
| 20 | $v_7$ | | |

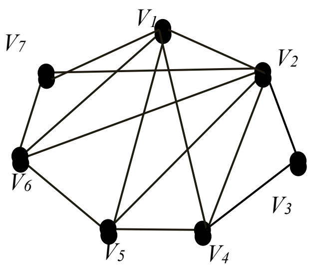
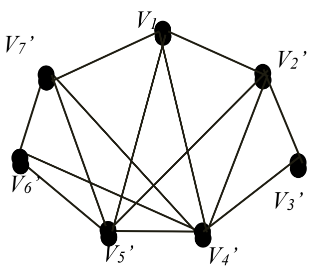
| | | | |
|---|---|---|---|
| |  | $C_5^7 \times C_2^2$ | 21 |
| 21 |  | $C_7^7$ | 1 |

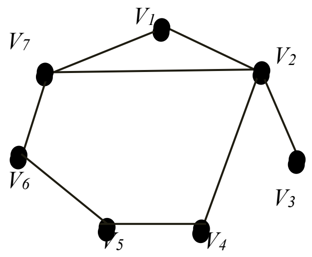
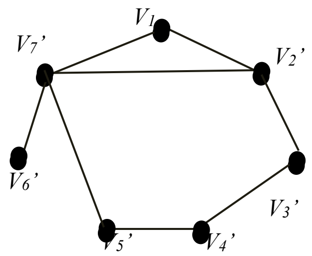
### 3.3 Mendeteksi Isomorfik

Untuk melihat isomorfik graf dilakukan konstruksi graf, lalu dilakukan pelabelan ulang dan observasi kemungkinan isomorfik yang dilihat dari derajat setiap titik dan garisnya.

Berikut ini merupakan hasil deteksi isomorfik graf.

Tabel 3.3.1 Hasil deteksi isomorfik

| Info graf | Pola graf | Keterangan | Isomorfik |
|---|---|---|---|
| *n = 7*<br>*t = 12* | <br>( $G_1$ ) | • Banyaknya titik : 7<br>• Banyaknya garis : 14<br>• Derajat setiap titik :<br>deg $v_1$ : 5<br>deg $v_2$ : 6<br>deg $v_3$ : 2<br>deg $v_4$ : 4<br>deg $v_5$ : 4<br>deg $v_6$ : 4<br>deg $v_7$ : 3 | G1 dan G2 isomorfik karena ada f bijektif yaitu: $f : G_1 \rightarrow G_2$ sedemikian sehingga:<br><br>$f(v_1) \rightarrow (v_5')$<br>$f(v_2) \rightarrow (v_4')$<br>$f(v_3) \rightarrow (v_3')$<br>$f(v_4) \rightarrow (v_2')$<br>$f(v_5) \rightarrow (v_1')$<br>$f(v_6) \rightarrow (v_7')$<br>$f(v_7) \rightarrow (v_6')$ |
| | <br>( $G_2$ ) | • Banyaknya titik : 7<br>• Banyaknya garis : 14<br>• Derajat setiap titik :<br>deg $v_1'$ : 4<br>deg $v_2'$ : 4<br>deg $v_3'$ : 2<br>deg $v_4'$ : 6<br>deg $v_5'$ : 5<br>deg $v_6'$ : 3<br>deg $v_7'$ : 4 | Rumus banyaknya graf $G_1$ dan $G_2$ :<br><br>$C_1^7 \times C_1^6 \times \frac{C_3^5 \times 3!}{2} C_1^2$<br>=2520 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| n = 7<br>t = 6 | <br>( $G_3$ ) | • Banyaknya titik : 7<br>• Banyaknya garis : 8<br>• Derajat setiap titik :<br>$v_1$ : 2<br>$v_2$ : 4<br>$v_3$ : 1<br>$v_4$ : 2<br>$v_5$ : 2<br>$v_6$ : 2<br>$v_7$ : 3 | G3 dan G4 isomorfik karena ada f bijektif yaitu: $f : G_3 \rightarrow G_4$ sedemikian sehingga:<br>$f(v_1) \rightarrow (v_1')$<br>$f(v_2) \rightarrow (v_7')$<br>$f(v_3) \rightarrow (v_6')$<br>$f(v_4) \rightarrow (v_5')$<br>$f(v_5) \rightarrow (v_4')$<br>$f(v_6) \rightarrow (v_3')$<br>$f(v_7) \rightarrow (v_2')$ |
| | <br>( $G_4$ ) | • Banyaknya titik : 7<br>• Banyaknya garis : 6<br>• Derajat setiap titik :<br>$v_1'$ : 2<br>$v_2'$ : 3<br>$v_3'$ : 2<br>$v_4'$ : 2<br>$v_5'$ : 2<br>$v_6'$ : 1<br>$v_7'$ : 4 | Rumus banyaknya graf $G_3$ dan $G_4$ :<br><br>$C_1^7 \times \frac{C_4^6 \times 4!}{2} C_1^2$ =2520 |

### 3.4 Prediksi Rumus dari Hasil Observasi Perbandingan Penelitian Sebelumnya

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, dengan:

$n$ = banyaknya titik

$m$ = banyaknya garis

$t$ = banyaknya garis yang menghubungkan 2 titik yang berbeda

$N(G_{n,m,t})$ = banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel berorde $n$ dengan $m$ garis dan $t$ adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

Rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa loop dengan $n$ = 5 dan $n$ = 6 adalah sebagai berikut :

Tabel 4.8 Rumus Banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* dengan $n$ = 5 dan $n$ = 6

| ***t*** | ***n*** | |
|---|---|---|
| | **5** | **6** |
| 4 | N($G'_{5,m,4}$) = 125 × $C_3^{(m-1)}$ | |
| 5 | N($G'_{5,m,5}$) = 222 × $C_4^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,5}$) = 1296 × $C_4^{(m-1)}$ |
| 6 | N($G'_{5,m,6}$) = 205 × $C_5^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,6}$) = 1980 × $C_5^{(m-1)}$ |
| 7 | N($G'_{5,m,7}$) = 110 × $C_6^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,7}$) = 3330 × $C_6^{(m-1)}$ |
| 8 | N($G'_{5,m,8}$) = 45 × $C_7^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,8}$) = 4620 × $C_7^{(m-1)}$ |
| 9 | N($G'_{5,m,9}$) = 10 × $C_8^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,9}$) = 6660 × $C_8^{(m-1)}$ |
| 10 | N($G'_{5,m,10}$) = 1 × $C_9^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,10}$) = 2640 × $C_9^{(m-1)}$ |
| 11 | | N($G'_{6,m,11}$) = 1155 × $C_{10}^{(m-1)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 12 | | $\mathrm{N}(G'_{6,m,12})$ = 420 × $C_{11}^{(m-1)}$ |
| 13 | | $\mathrm{N}(G'_{6,m,13})$ = 150 × $C_{12}^{(m-1)}$ |
| 14 | | $\mathrm{N}(G'_{6,m,14})$ = 15 × $C_{13}^{(m-1)}$ |
| 15 | | $\mathrm{N}(G'_{6,m,13})$ = 1 × $C_{14}^{(m-1)}$ |

Misalkan $K_i$ = konstanta, dengan $i$ = 1, 2, 3,……,16.
Dengan melihat Tabel 4.8 maka diprediksi rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop* sebagai berikut:
Tabel 4.9 prediksi rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop*

| ***t*** | **7 (prediksi)** |
|---|---|
| 6 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,6}) = K_1 \times C_5^{(m-1)}$ |
| 7 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,7}) = K_2 \times C_6^{(m-1)}$ |
| 8 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,8}) = K_3 \times C_7^{(m-1)}$ |
| 9 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,9}) = K_4 \times C_8^{(m-1)}$ |
| 10 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,10}) = K_5 \times C_9^{(m-1)}$ |
| 11 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,11}) = K_6 \times C_{10}^{(m-1)}$ |
| 12 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,12}) = K_7 \times C_{11}^{(m-1)}$ |
| 13 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,13}) = K_8 \times C_{12}^{(m-1)}$ |
| 14 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,14}) = K_9 \times C_{13}^{(m-1)}$ |
| 15 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,15}) = K_{10} \times C_{14}^{(m-1)}$ |
| 16 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,16}) = K_{11} \times C_{15}^{(m-1)}$ |
| 17 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,17}) = K_{12} \times C_{16}^{(m-1)}$ |
| 18 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,18}) = K_{13} \times C_{17}^{(m-1)}$ |
| 19 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,19}) = K_{14} \times C_{18}^{(m-1)}$ |
| 20 | $\mathrm{N}(G'_{7,m,20}) = K_{15} \times C_{19}^{(m-1)}$ |

| 21 | N($G'_{7,m,21}$) = $K_{16} \times C_{20}^{(m-1)}$ |
|---|---|

### 3.5 Rumus untuk Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Tujuh Tanpa *Loop*

Hasil konstruksi graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde tujuh dapat dibentuk dalam tabel sebagai berikut :

Tabel 4.10. Banyaknya graf terhubung berorde tujuh tanpa *loop*

| *M* | Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *t* | | | | | |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 6727 | | | | | |
| 7 | 40362 | 30160 | | | | |
| 8 | 141267 | 211120 | 30765 | | | |
| 9 | 376712 | 844480 | 246120 | 21000 | | |
| 10 | 847602 | 2533440 | 1107540 | 189000 | 28364 | |
| 11 | 1695204 | 6333600 | 3691800 | 945000 | 283640 | 26880 |
| 12 | 3107874 | 13933920 | 10152450 | 3465000 | 1560020 | 295680 |
| 13 | | 27867840 | 24365880 | 10395000 | 6240080 | 1774080 |
| 14 | | 51754560 | 52792740 | 27027000 | 20280260 | 7687680 |
| 15 | | | 105585480 | 63063000 | 56784728 | 26906880 |
| 16 | | | 197972775 | 135135000 | 141961820 | 80720640 |
| 17 | | | | 270270000 | 324484160 | 215255040 |
| 18 | | | | 510510000 | 689528840 | 522762240 |
| 19 | | | | | 1379057680 | 1176215040 |
| 20 | | | | | 2620209592 | 2483120640 |
| 21 | | | | | | 4966241280 |
| 22 | | | | | | 9481006080 |

| *m* | Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *t* | | | | |
| | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 12 | 26460 | | | | |
| 13 | 317520 | 20790 | | | |
| 14 | 2063880 | 270270 | 10290 | | |
| 15 | 9631440 | 1891890 | 144060 | 8022 | |
| 16 | 36117900 | 9459450 | 1080450 | 120330 | 5460 |
| 17 | 115577280 | 37837800 | 5762400 | 962640 | 87360 |
| 18 | 327468960 | 128648520 | 24490200 | 5454960 | 742560 |
| 19 | 842063040 | 385945560 | 88164720 | 24547320 | 4455360 |
| 20 | 1999899720 | 1047566520 | 279188280 | 93279816 | 21162960 |
| 21 | 4444221600 | 2618916300 | 797680800 | 310932720 | 84651840 |
| 22 | 9332865360 | 6110804700 | 2093912100 | 932798160 | 296281440 |
| 23 | 18665730720 | 13443770340 | 5118451800 | 2565194940 | 931170240 |
| 24 | 35775983880 | 28109701620 | 11772439140 | 6555498180 | 2677114440 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 25 | | 56219403240 | 25685321760 | 15733195632 | 7138971840 |
| 26 | | 108114237000 | 53511087000 | 35757262800 | 17847429600 |
| 27 | | | 107022174000 | 77474069400 | 42184833600 |
| 28 | | | 206399907000 | 160907682600 | 94915875600 |
| 29 | | | | 321815365200 | 204434193600 |
| 30 | | | | 622176372720 | 423470829600 |
| 31 | | | | | 846941659200 |
| 32 | | | | | 1640949464700 |

| *m* | Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *t* | | | | |
| | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 17 | 4417 | | | | |
| 18 | 75089 | 2835 | | | |
| 19 | 675801 | 51030 | 210 | | |
| 20 | 4280073 | 484785 | 3990 | 21 | |
| 21 | 21400365 | 3231900 | 39900 | 420 | 1 |
| 22 | 89881533 | 16967475 | 279300 | 4410 | 21 |
| 23 | 329565621 | 74656890 | 1536150 | 32340 | 231 |
| 24 | 1082858469 | 286184745 | 7066290 | 185955 | 1771 |
| 25 | 3248575407 | 981204840 | 28265160 | 892584 | 10626 |
| 26 | 9023820575 | 3066265125 | 100947000 | 3719100 | 53130 |
| 27 | 23461933495 | 8858099250 | 328077750 | 13813800 | 230230 |
| 28 | 57588382215 | 23916867975 | 984233250 | 46621575 | 888030 |
| 29 | 134372891835 | 60879300300 | 2755853100 | 145044900 | 3108105 |
| 30 | 299754912555 | 147124975725 | 7265430900 | 420630210 | 10015005 |
| 31 | 642331955475 | 339519174750 | 18163577250 | 1147173300 | 30045015 |
| 32 | 1327486041315 | 751792458375 | 43313145750 | 2963531025 | 84672315 |
| 33 | 2654972082630 | 1603823911200 | 99001476000 | 7294845600 | 225792840 |
| 34 | 5153769336870 | 3307886816850 | 217803247200 | 17194993200 | 573166440 |
| 35 | | 6615773633700 | 462831900300 | 38975317920 | 1391975640 |
| 36 | | 12864004287750 | 952889206500 | 85258507950 | 3247943160 |
| 37 | | | 1905778413000 | 180547428600 | 7307872110 |
| 38 | | | 3711252699000 | 371125269900 | 15905368710 |
| 39 | | | | 742250539800 | 33578000610 |
| 40 | | | | 1447388552610 | 68923264410 |
| 41 | | | | | 137846528820 |
| 42 | | | | | 269128937220 |

Hasil observasi yang dilakukan mengenai banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde tujuh berdasarkan Tabel 4.10, dapat dibentuk tabel baru sebagai berikut :

Tabel 4.11. Pola banyaknya graf terhubung berorde tujuh tanpa *loop*

| *m* | Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *t* | | | | | |
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 1 ×6727 | | | | | |
| 7 | 6 ×6727 | 1×30160 | | | | |
| 8 | 21×6727 | 7×30160 | 1 ×30765 | | | |
| 9 | 56×6727 | 28×30160 | 8 ×30765 | 1×21000 | | |
| 10 | 126×6727 | 84×30160 | 36 ×30765 | 9 ×21000 | 1 ×28364 | |
| 11 | 252×6727 | 210×30160 | 120 ×30765 | 45 ×21000 | 10 ×28364 | 1× 26880 |
| 12 | 462×6727 | 462×30160 | 330 ×30765 | 165 ×21000 | 55 ×28364 | 11 × 26880 |
| 13 | | 924×30160 | 792 ×30765 | 495 ×21000 | 220 ×28364 | 66 × 26880 |
| 14 | | 1716×30160 | 1716 ×30765 | 1287 ×21000 | 715 ×28364 | 286 × 26880 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | | | 3432 ×30765 | 3003×21000 | 2002 ×28364 | 1001 × 26880 |
| 16 | | | 6435×30765 | 6435×21000 | 5005×28364 | 3003× 26880 |
| 17 | | | | 12870×21000 | 11440×28364 | 8008× 26880 |
| 18 | | | | 24310×21000 | 24310×28364 | 19448× 26880 |
| 19 | | | | | 48620×28364 | 43758× 26880 |
| 20 | | | | | 92378×28364 | 92378× 26880 |
| 21 | | | | | | 184756× 26880 |
| 22 | | | | | | 352716× 26880 |

| m | Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *t* | | | | |
| | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 12 | 1×26460 | | | | |
| 13 | 12×26460 | 1×20790 | | | |
| 14 | 78×26460 | 13×20790 | 1×10290 | | |
| 15 | 364×26460 | 91×20790 | 14×10290 | 1×8022 | |
| 16 | 1365×26460 | 455×20790 | 105×10290 | 15×8022 | 1×2940 |
| 17 | 4368×26460 | 1820×20790 | 560×10290 | 120×8022 | 16×2940 |
| 18 | 12376×26460 | 6188×20790 | 2380×10290 | 680×8022 | 136×2940 |
| 19 | 31824×26460 | 18564×20790 | 8568×10290 | 3060×8022 | 816×2940 |
| 20 | 75582×26460 | 50388×20790 | 27132×10290 | 11628×8022 | 3876×2940 |
| 21 | 167960×26460 | 125970×20790 | 77520×10290 | 38760×8022 | 15504×2940 |
| 22 | 352716×26460 | 293930×20790 | 203490×10290 | 116280×8022 | 54264×2940 |
| 23 | 705432×26460 | 646646×20790 | 497420×10290 | 319770×8022 | 170544×2940 |
| 24 | 1352078×26460 | 1352078×20790 | 1144066×10290 | 817190×8022 | 490314×2940 |
| 25 | | 2704156×20790 | 2496144×10290 | 1961256×8022 | 1307504×2940 |
| 26 | | 5200300×20790 | 5200300×10290 | 4457400×8022 | 3268760×2940 |
| 27 | | | 10400600×10290 | 9657700×8022 | 7726160×2940 |
| 28 | | | 20058300×10290 | 20058300×8022 | 17383860×2940 |
| 29 | | | | 40116600×8022 | 37442160×2940 |
| 30 | | | | 77558760×8022 | 77558760×2940 |
| 31 | | | | | 155117520×2940 |
| 32 | | | | | 300540195×2940 |

| m | Banyaknya graf terhubung berorde 7 tanpa *loop* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *t* | | | | |
| | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 17 | 1×4417 | | | | |
| 18 | 17×4417 | 1×2835 | | | |
| 19 | 153×4417 | 18×2835 | 1×210 | | |
| 20 | 969×4417 | 171×2835 | 19×210 | 1×21 | |
| 21 | 4845×4417 | 1140×2835 | 190×210 | 20×21 | 1×1 |
| 22 | 20349×4417 | 5985×2835 | 1330×210 | 210×21 | 21×1 |
| 23 | 74613×4417 | 26334×2835 | 7315×210 | 1540×21 | 231×1 |
| 24 | 245157×4417 | 100947×2835 | 33649×210 | 8855×21 | 1771×1 |
| 25 | 735471×4417 | 346104×2835 | 134596×210 | 42504×21 | 10626×1 |
| 26 | 2042975×4417 | 1081575×2835 | 480700×210 | 177100×21 | 53130×1 |
| 27 | 5311735×4417 | 3124550×2835 | 1562275×210 | 657800×21 | 230230×1 |
| 28 | 13037895×4417 | 8436285×2835 | 4686825×210 | 2220075×21 | 888030×1 |
| 29 | 30421755×4417 | 21474180×2835 | 13123110×210 | 6906900×21 | 3108105×1 |
| 30 | 67863915×4417 | 51895935×2835 | 34597290×210 | 20030010×21 | 10015005×1 |
| 31 | 145422675×4417 | 119759850×2835 | 86493225×210 | 54627300×21 | 30045015×1 |
| 32 | 300540195×4417 | 265182525×2835 | 206253075×210 | 141120525×21 | 84672315×1 |
| 33 | 601080390×4417 | 565722720×2835 | 471435600×210 | 347373600×21 | 225792840×1 |
| 34 | 1166803110×4417 | 1166803110×2835 | 1037158320×210 | 818809200×21 | 573166440×1 |
| 35 | | 2333606220×2835 | 2203961430×210 | 1855967520×21 | 1391975640×1 |
| 36 | | 4537567650×2835 | 4537567650×210 | 4059928950×21 | 3247943160×1 |
| 37 | | | 9075135300×210 | 8597496600×21 | 7307872110×1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 38 | | | 17672631900×210 | 17672631900×21 | 15905368710×1 |
| 39 | | | | 35345263800×21 | 33578000610×1 |
| 40 | | | | 68923264410×21 | 68923264410×1 |
| 41 | | | | | 137846528820×1 |
| 42 | | | | | 269128937220×1 |

Perhatikan Tabel 4.11 Pada $t = 6, m \geq 6$ membentuk pola 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, 2002,.... Barisan yang terbentuk dari pola tersebut yaitu:

1 6 21 56 126 252 462 792 1287 2002

5 15 35 70 126 210 330 495 715

10 20 35 56 84 120 165 220

10 15 21 28 36 45 55

5 6 7 8 9 10

1 1 1 1 1

Karena selisih tepatnya berada pada tingkat ke-lima maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika tingkat lima dan bentuk umum polinomial derajat lima yang berkaitan dengan barisan tersebut adalah:

$$a_m = a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

**Hasil 1.** Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 6, t = 6$ adalah :
$N(G_{5,m,7}) = 6727 \times C_5^{(m-1)}$

Bukti:
Karena terletak pada tingkat ke-lima, maka bentuk umum suku ke-*m* dari barisan aritmatika tersebut polinomial yang berhubungan adalah

$$a_m = a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:
untuk $m = 6$ ;
$6727 = 7776a_5 + 1296a_4 + 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + a_0$ (4.2.6)
untuk $m = 7$ ;
$40362 = 16807a_5 + 2401a_4 + 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + a_0$ (4.2.7)
untuk $m = 8$;
$141267 = 32768a_5 + 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + a_0$ (4.2.8)
untuk $m = 9$ ;
$376712 = 59049a_5 + 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0$ (4.2.9)
untuk $m = 10$ ;
$847602 = 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$ (4.2.10)
untuk $m = 11$ ;
$1695204 = 161051a_5 + 14641a_4 + 1331a_3 + 121a_2 + 11a_1 + a_0$ (4.2.11)

Pada Persamaan (4.2.6) sampai dengan (4.2.11) membentuk sistem persamaan linear yang dapat diubah dalam bentuk matriks $Ax = b$, seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \\ 100000 & 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 \\ 161051 & 14641 & 1331 & 121 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6727 \\ 40362 \\ 141267 \\ 376712 \\ 847602 \\ 1695204 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nilai determinan yang diperoleh, makan nilai $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ dan $a_5$ yaitu:

$$a_5 = \frac{\det(A_5)}{\det(A)} = \frac{-1937376}{-34560} = \frac{6727}{120}$$

$$a_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{29060640}{-34560} = -\frac{100905}{120}$$

$$a_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-164676960}{-34560} = \frac{571795}{120}$$

$$a_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{435909600}{-34560} = -\frac{1513575}{120}$$

$$a_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-530841024}{-34560} = \frac{1843198}{120}$$

$$a_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)} = \frac{232485119}{-34560} = -\frac{807239}{120}$$

Jadi rumus suku ke-*m* pada barisan aritmatika polinomial tingkat lima adalah

$$a_m = \frac{6727}{120}m^5 - \frac{100905}{120}m^4 + \frac{571795}{120}m^3 - \frac{1513575}{120}m^2 + \frac{1843198}{120} - \frac{807239}{120}$$

$$= \frac{6727}{120}(m^5 - 15m^4 + 85m^3 - 225m^2 + 274m - 120)$$

$$= \frac{6727}{120}((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5))$$

$$= 6727 \times \frac{((m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5))}{5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 6727 \times C_5^{(m-1)}$$

Perhatikan Tabel 4.11 Pada $t = 7, m \geq 7$ membentuk pola 1, 7, 28, 84, 210, 462, 924, 1716, 3003,.... Barisan yang terbentuk dari pola tersebut yaitu:

1 7 28 84 210 462 924 1716 3003

6 21 56 126 252 462 792 1287

15 35 70 126 210 330 495

20 35 56 84 120 165

15 21 28 36 45

6 7 8 9

1 1 1

Karena selisih tepatnya berada pada tingkat ke-enam maka barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika tingkat enam dan bentuk umum polinomial derajat enam yang berkaitan dengan barisan tersebut adalah:

$$a_m = a_6m^6 + a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

**Hasil 2.** Banyaknya graf-graf terhubung berlabel tanpa *loop* dengan $n = 7,\ m \geq 7, t = 7$ adalah :
$N(G_{5,m,7}) = 30160 \times C_6^{(m-1)}$
Bukti:
Karena terletak pada tingkat ke-enam, maka bentuk umum suku ke-*m* dari barisan aritmatika tersebut polinomial yang berhubungan adalah

$$a_m = a_6m^6 + a_5m^5 + a_4m^4 + a_3m^3 + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

untuk $m = 7$ ;

$$30160 = 117649a_6 + 16807a_5 + 2401a_4 + 343a_3 + 49a_2 + 7a_1 + a_0 \quad (4.2.12)$$

untuk $m = 8$ ;

$$211120 = 262144a_6 + 32768a_5 + 4096a_4 + 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + a_0 \quad (4.2.13)$$

untuk $m = 9$ ;

$$844480 = 531441a_6 + 59049a_5 + 6561a_4 + 729a_3 + 81a_2 + 9a_1 + a_0 \quad (4.2.14)$$

untuk $m = 10$ ;

$$2533440 = 1000000a_6 + 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 \quad (4.2.15)$$

untuk $m = 11$ ;

$$6333600 = 1771561a_6 + 161051a_5 + 14641a_4 + 1331a_3 + 121a_2 + 11a_1 + a_0 \quad (4.2.16)$$

untuk $m = 12$ ;

$$13933920 = 2985984a_6 + 248832a_5 + 20736a_4 + 1728a_3 + 144a_2 + 12a_1 + a_0 \quad (4.2.17)$$

untuk $m = 13$ ;

$$27867840 = 4826809a_6 + 371293a_5 + 28561a_4 + 2197a_3 + 169a_2 + 13a_1 + a_0 \quad (4.2.18)$$

Pada Persamaan (4.2.12) sampai dengan (4.2.18) membentuk sistem persamaan linear yang dapat diubah dalam bentuk matriks $Ax = b$, seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 11769 & 16807 & 2401 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 262144 & 32768 & 4096 & 512 & 64 & 8 & 1 \\ 531441 & 59049 & 6561 & 729 & 81 & 9 & 1 \\ 1000000 & 100000 & 10000 & 1000 & 100 & 10 & 1 \\ 1771561 & 161051 & 14641 & 1331 & 121 & 11 & 1 \\ 2985984 & 248832 & 20736 & 1728 & 144 & 12 & 1 \\ 4826809 & 371293 & 28561 & 2197 & 169 & 13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30160 \\ 211120 \\ 844480 \\ 2533440 \\ 6333600 \\ 13933920 \\ 27867840 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nilai determinan yang diperoleh, maka nilai $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$,dan $a_6$ yaitu:

$$a_6 = \frac{\det(A_6)}{\det(A)} = \frac{-1042329600}{-24883200} = \frac{30160}{720}$$

$$a_5 = \frac{\det(A_5)}{\det(A)} = \frac{21888921600}{-24883200} = -\frac{633360}{720}$$

$$a_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{-182407680000}{-24883200} = \frac{5278000}{720}$$

$$a_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{766112256000}{-24883200} = -\frac{22167600}{720}$$

$$a_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-1692743235840}{-24883200} = \frac{48979840}{720}$$

$$a_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{1838669379840}{-24883200} = -\frac{53202240}{720}$$

$$a_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A)} = \frac{-7504745472000}{-24883200} = \frac{21715200}{720}$$

Jadi, rumus umum suku ke-*m* pada barisan aritmatika polinomial tingkat enam adalah:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{30160}{720}m^6 - \frac{633360}{720}m^5 + \frac{5278000}{720}m^4 - \frac{22167600}{720}m^3 + \frac{48979840}{720}m^2 - \frac{53202240}{720}m + \frac{21715200}{720} \\ &= \frac{30160}{720}(m^6 - 21m^5 + 175m^4 - 735m^3 + 1624m^2 - 1764m + 720) \\ &= \frac{30160}{720}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6) \\ &= 330 \times \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 30160 \times C_6^{(m-1)} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama didapat:

*Hasil 3*. Untuk $n = 7, t = 8$ diperoleh rumus :

$$N(G_{7,m,8}) = 30765 \times C_7^{(m-1)}$$

$Hasil$ 4. Untuk $n$=7 ; $t$=9 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,9}) = 21000 \times C_8^{(m-1)}$$

$Hasil$ 5. Untuk $n$=7 ; $t$=10 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,10}) = 28364 \times C_9^{(m-1)}$$

$Hasil$ 6. Untuk $n$=7 ; $t$=11 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,11}) = 26880 \times C_{10}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 7. Untuk $n$=7 ; $t$=12 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,12}) = 26460 \times C_{11}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 8. Untuk $n$=7 ; $t$=13 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,13}) = 20790 \times C_{12}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 9. Untuk $n$=7 ; $t$=14 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,14}) = 10290 \times C_{13}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 10. Untuk $n$=7 ; $t$=15 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,15}) = 8022 \times C_{14}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 11. Untuk $n$=7 ; $t$=16 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,16}) = 2940 \times C_{15}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 12. Untuk $n$=7 ; $t$=17 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,17}) = 4417 \times C_{16}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 13. Untuk $n$=7 ; $t$=18 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,18}) = 2835 \times C_{17}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 14. Untuk $n$=7 ; $t$=19 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,19}) = 210 \times C_{18}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 15. Untuk $n$=7 ; $t$=20 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,20}) = 21 \times C_{19}^{(m-1)}$$

$Hasil$ 16. Untuk $n$=7 ; $t$=21 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,21}) = 1 \times C_{20}^{(m-1)}$$

Pembuktian untuk Hasil 4 sampai dengan 16 secara lengkap dapat dilihat pada lampiran.

Tabel 4.12 Tabel hasil banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* untuk $n$ = 5, 6, 7.

| ***t*** | ***n*** | | |
|---|---|---|---|
| | **5** | **6** | **7** |
| 4 | N($G'_{5,m,4}$) = 125 × $C_3^{(m-1)}$ | | |
| 5 | N($G'_{5,m,5}$) = 222 × $C_4^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,5}$) = 1296 × $C_4^{(m-1)}$ | |
| 6 | N($G'_{5,m,6}$) = 205 × $C_5^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,6}$) = 1980 × $C_5^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,6}$) = 6727 × $C_5^{(m-1)}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | N($G'_{5,m,7}$) = 110 × $C_6^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,7}$) = 3330 × $C_6^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,7}$) = 30160 × $C_6^{(m-1)}$ |
| 8 | N($G'_{5,m,8}$) = 45 × $C_7^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,8}$) = 4620 × $C_7^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,8}$) = 30765 × $C_7^{(m-1)}$ |
| 9 | N($G'_{5,m,9}$) = 10 × $C_8^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,9}$) = 6660 × $C_8^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,9}$) = 21000 × $C_8^{(m-1)}$ |
| 10 | N($G'_{5,m,10}$) = 1 × $C_9^{(m-1)}$ | N($G'_{6,m,10}$) = 2640 × $C_9^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,10}$) = 28364 × $C_9^{(m-1)}$ |
| 11 | | N($G'_{6,m,11}$) = 1155 × $C_{10}^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,11}$) = 26880 × $C_{10}^{(m-1)}$ |
| 12 | | N($G'_{6,m,12}$) = 420 × $C_{11}^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,12}$) = 26460 × $C_{11}^{(m-1)}$ |
| 13 | | N($G'_{6,m,13}$) = 150 × $C_{12}^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,13}$) = 20790 × $C_{12}^{(m-1)}$ |
| 14 | | N($G'_{6,m,14}$) = 15 × $C_{13}^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,14}$) = 10290 × $C_{13}^{(m-1)}$ |
| 15 | | N($G'_{6,m,13}$) = 1 × $C_{14}^{(m-1)}$ | N($G'_{7,m,15}$) = 8022 × $C_{14}^{(m-1)}$ |
| 16 | | | N($G'_{7,m,16}$) = 2940 × $C_{15}^{(m-1)}$ |
| 17 | | | N($G'_{7,m,17}$) = 4417 × $C_{16}^{(m-1)}$ |
| 18 | | | N($G'_{7,m,18}$) = 2835 × $C_{17}^{(m-1)}$ |
| 19 | | | N($G'_{7,m,19}$) = 210 × $C_{18}^{(m-1)}$ |
| 20 | | | N($G'_{7,m,20}$) = 21 × $C_{19}^{(m-1)}$ |
| 21 | | | N($G'_{7,m,21}$) = 1 × $C_{20}^{(m-1)}$ |

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil observasi dari graf terhubung berlabel titik berorde tujuh tanpa *loop*, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Untuk n=7 ; t=6 diperoleh rumus:

$$N\left(G_{7,m,6}\right) = 6727 \times C_5^{(m-1)}$$

b. Untuk n=7 ; t=7 diperoleh rumus:

$$N\left(G_{7,m,7}\right) = 30160 \times C_6^{(m-1)}$$

c. Untuk n=7 ; t=8 diperoleh rumus:

$$N\left(G_{7,m,8}\right) = 30765 \times C_7^{(m-1)}$$

d. Untuk n=7 ; t=9 diperoleh rumus:

$$N\left(G_{7,m,9}\right) = 21000 \times C_8^{(m-1)}$$

e. Untuk n=7 ; t=10 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,10}) = 28364 \times C_{9}^{(m-1)}$$

f. Untuk n=7 ; t=11 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,11}) = 26880 \times C_{10}^{(m-1)}$$

g. Untuk n=7 ; t=12 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,12}) = 26460 \times C_{11}^{(m-1)}$$

h. Untuk n=7 ; t=13 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,13}) = 20790 \times C_{12}^{(m-1)}$$

i. Untuk n=7 ; t=14 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,14}) = 10290 \times C_{13}^{(m-1)}$$

j. Untuk n=7 ; t=15 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,15}) = 8022 \times C_{14}^{(m-1)}$$

k. Untuk n=7 ; t=16 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,16}) = 5460 \times C_{15}^{(m-1)}$$

l. Untuk n=7 ; t=17 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,17}) = 4417 \times C_{16}^{(m-1)}$$

m. Untuk n=7 ; t=18 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,18}) = 2835 \times C_{17}^{(m-1)}$$

n. Untuk n=7 ; t=19 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,19}) = 210 \times C_{18}^{(m-1)}$$

o. Untuk n=7 ; t=20 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,20}) = 21 \times C_{19}^{(m-1)}$$

p. Untuk n=7 ; t=21 diperoleh rumus:

$$N(G_{7,m,21}) = 1 \times C_{20}^{(m-1)}$$

dengan :

$N(G_{n,m,t}) =$ banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan garis paralel berorde $n$ dengan $m$ garis dan $t$ adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

**DAFTAR PUSTAKA**

Amanto, Notiragayu, Puri, F.C., Antoni, Y., dan Wamiliana. 2020. Counting the number of vertexes labeled connected graphs of order five with minimum five edges and maximum ten parallel edges. *Journal of Physics: Conference Series* 1524 (1), 012-047.

Amanto, Wamiliana dan Efendi, M.F.N. 2018. The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs of Order Five With Maximum 3-Paralel Edges Is Six And Contains No Loops. *Mathematics National Conference (In Indonesia KNM),* Universitas Brawijaya.

Amanto, Wamiliana, Usman, M., dan Sari, R.P. 2017. Counting the number of disconnected vertex labelled graphs with order maximal four. *Science International (Lahore)* 29 (6), 1181-1186.

Anton, H., dan Chris, R. 2004. *Aljabar Linier Elementer edisi 8.* Erlangga. Jakarta

Ayres, Frank, J.R., dan Philip, A.S. 2004. *Matematika Universitas*. Erlangga, Jakarta.

Cayley, A. 1874 'On the Mathematical Theory of Isomers', *Philosophical Magazine*, 444 – 446.

Conte, S.D. and Carl de Boor. 1980. *Dasar-dasar analisis numerik suatu pendekatan algoritma*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.* Prentice Hall Inc., New York.

Harary, F., and E M Palmer. 1973. *Graphical Enumeration*. Academic Press, New York.

Imail, S. 2012. *Suku Ke-n Barisan Aritmatika Tingkat Dua, Tiga dan Empat dengan Pendekatan Akar Karakteristik*. Respository.ung.ac.id/get/karyailmiah.pdf. Diakses Tanggal 31 Juli 2018, pukul 19.00 WIB.

Indrawan D, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto. 2018. Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau Loop Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam. *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2018* 1, 1-277.

Puri, F.C., Wamiliana., Usman, M., Amanto., Ansori, M., Antoni, Y. 2021. The Formula to Count the Number of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (01), 012023.

Putri, D., Wamiliana., Fitriani., Faisol, A., Dewi, K.S. 2021. Determining the Number of Disconnected Vertices Labeled Graphs of Order Six with the Maximum Number Twenty Parallel Edges and Containing No Loops . *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (01), 012024.

Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications,* Seventh Edition. McGraw-Hill, New York. USA.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu Komputer.* Andi Offset. Yogyakarta.

Wamiliana, Amanto, dan Nagari, G.T., 2016. Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *Journal INSIST* 1(1),4-7.

Wamiliana, Amanto, Usman, M., Ansori, M., Puri, F.C. 2020. Enumerating the Number of Connected Vertices Labeled Graph of Order Six with Maximum Ten Loops and Containing No Parallel Edges. *Science and Technology Indonesia* 5 (4), 131-135.

Wamiliana, Nuryaman, A., Amanto, Sutrisno, A., dan Prayoga, N. 2019. A Determining the Number of Connected Vertices Labelled Graph of Order Five with Maximum Number of Parallel Edges is Five and Containing No Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1338 (1), 012043.