ISSN : 2337-9057

PROSIDING

PERIODE DESEMBER 2012

SEMINAR HASIL PENELITIAN

SAINS, EDUKASI DAN TEKNOLOGI INFORMASI

15 DESEMBER 2012

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2012

DAFTAR ISI

Kelompok Statistika

Kelompok Kimia

KelompokFisika

PENDUGAAN PARAMETER MODEL POISSON-GAMMA MENGGUNAKAN ALGORITMA EM (*EXPECTATION MAXIMIZATION*)

Nurashri Partasiwi[1], Dian Kurniasari[2] dan Widiarti[2]

Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia[1]
nurashripartasiwi@yahoo.co.id
Dosen Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung, Bandar Lampung, Indonesia[2]

Abstrak

Model poisson merupakan model peluang diskrit yang menyatakan peluang jumlah peristiwa yang terjadi pada periode waktu tertentu dan memiliki rata-rata dan varians yang sama, tetapi pada kenyataannya, sering terjadi varians dari variabel responnya lebih besar daripada rata-ratanya atau overdispersi. Overdispersi akan membawa konsekuensi pada nilai penduga bagi galat baku yang lebih kecil (*under estimate*) yang selanjutnya dapat mengakibatkan kesalahan pada inferensia bagi parameternya. Salah satu cara untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menambahkan informasi yaitu dengan sebaran prior, salah satunya gamma. Dengan demikian, model poisson berubah menjadi model dua tahap, yaitu model Poisson-Gamma. Dalam kasus model poisson-gamma salah satu penduga tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga salah satu cara yang digunakan yaitu solusi numerik dengan teknik iteratif seperti metode Newton-Raphson. Dalam penelitian ini pendugaan parameter dilakukan dengan Algoritma EM (*Expectation Maximization*). Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan pendugaan parameter α dan β menunjukkan bahwa semakin besar nilai α dan β yang diberikan maka nilai $\hat{\alpha}$ juga akan semakin besar, sedangkan semakin besar nilai α dan β yang diberikan maka nilai $\hat{\beta}$ akan semakin kecil. Hasil pendugaan parameter θ menunjukkan bahwa semakin besar nilai α dan semakin kecil nilai β maka nilai $\hat{\theta}$ akan semakin kecil, sebaliknya semakin kecil nilai α dan semakin besar nilai β maka nilai $\hat{\theta}$ akan semakin besar.

Katakunci: Model Poisson-Gamma, Overdispersi, Algoritma EM (*Expectation Maximization*).

I. PENDAHULUAN

Model poisson memiliki rata-rata dan varians yang sama, tetapi pada kenyataannya, sering terjadi varians dari variabel responnya lebih besar daripada rata-ratanya atau overdispersi. Salah satu cara untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menambahkan informasi yaitu dengan sebaran prior, salah satunya gamma. Dengan demikian, model poisson berubah menjadi model dua tahap, yaitu model Poisson-Gamma. Dalam kasus model poisson-gamma salah satu penduga tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga salah satu cara yang digunakan yaitu solusi numerik dengan metode Newton-Raphson. Dalam jurnal ini akan membahas pendugaan parameter model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*).

II. LANDASAN TEORI

Peubah acak X(s) merupakan sebuah fungsi X yang menetapkan setiap anggota s϶S (S ruang sampel) dengan sebuah bilangan real. Salah satu peubah acak adalah peubah acak diskrit, yaitu banyaknya nilai-nilai yang mungkin dari X (X adalah peubah acak) berhingga atau tak berhingga tapi dapat dihitung. Dalam peubah acak diskrit, nilai-nilai yang mungkin merupakan bilangan bulat. Kemudian dapat menghitung nilai peluang dari masing-masing nilai peubah acak tersebut, apabila nilai peluang dari peubah acak tersebut mempunyai persyaratan tertentu maka nilai peluang tersebut dinamakan fungsi peluang. Distribusi yang mempunyai bentuk fungsi peluang dari peubah acak diskrit disebut distribusi khusus diskrit, yaitu salah satunya adalah distribusi poisson atau model poisson.

2.1 Model Poisson

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Poisson, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}\ ; x = 0,1,2,3,\ldots \qquad (2.1)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson adalah sebagai berikut:

1. $\mu = \theta$
2. $\sigma^2 = \theta$
3. $M_x(t) = e^{\theta(e^t - 1)}; t \in \Re$.

(Narr Herrhyanto dan Tuti Gantini, 2009).

2.2 Metode Bayes

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang berbentuk $f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$ dan sebaran dari peubah acak θ yaitu π(θ) (sebaran prior).

Langkah-langkah untuk menentukan penduga bayes bagi θ adalah:

1. Menentukan fungsi kepekatan peluang bersama dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang didefinisikan sebagai berikut:
   $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta).\pi(\theta)$ (2.2)
2. Menentukan sebaran marginal yang diperoleh dengan mengintegralkan fungsi kepekatan peluang bersama sebagai berikut:
   $m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta).\pi(\theta)\ d\theta$ (2.3)
3. Menentukan sebaran posterior atau fungsi kemungkinan sebagai berikut:
   $f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1,x_2,\dots,x_n,\theta)}{m(x_1,x_2,\dots,x_n)}$ (2.4)

(John E Freund dan Gary A Simon, 1999).

2.3 Model Poisson-Gamma

Model poisson-gamma merupakan model poisson campuran yang menggunakan prior gamma sebagai alternatif untuk menyelesaikan masalah overdispersi. Model poisson-gamma dapat ditulis sebagai:

$X_i \sim \text{Poisson}\ (\theta_i),\ \ i = 1,2, \dots$

$\theta_i \sim \text{Gamma}\ (\alpha, \beta),\ \ i = 1,2, \dots$

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sampel acak dengan fungsi peluang:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}; \quad x = 0,1, \dots \quad (2.5)$$

Dengan sebaran prior fungsi densitas gamma:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\theta/\beta}; \quad 0 \le \theta < \infty \quad (2.6)$$

Maka didapatkan fungsi bersama model poisson-gamma sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}.\frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\theta/\beta} \quad (2.7)$$

Sebaran marginal diperoleh dengan mengintegralkan fungsi bersama sebagai berikut:

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha x!}\ \Gamma(x + \alpha)\left(\frac{1}{1+1/\beta}\right)^{(x+\alpha)} \quad (2.8)$$

Dengan demikian fungsi kemungkinan model poisson-gamma adalah:

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\theta^{n(\alpha-1)}e^{-\theta n\left(1+1/\beta\right)}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(x_i+\alpha)\left(\frac{1}{1+1/\beta}\right)^{(\sum_{i=1}^n x_i+n\alpha)}}$$

(2.9)

(Michalis K Titsias, 2012).

2.4 Algoritma EM (*Expectation Maximization*)

Algoritma EM merupakan metode untuk pendugaan parameter dari fungsi kemungkinan pada data tidak teramati, terutama digunakan untuk sebaran campuran karena ada data tidak teramati. Ada dua tahap dalam menggunakan algoritma EM, yaitu tahap E (*Expectation*) dan tahap M (*Maximization*). Dalam tahap E yaitu mencari nilai harapan penduga parameter dan tahap M yaitu memaksimumkan nilai harapan ke fungsi kemungkinan.

Misalnya $Y_i = (X_i, Z_i)$ adalah data lengkap, dimana X_i data yang teramati dan Z_i data yang tidak teramati. Sehingga pada tahap E dari iterasi ke-(k+1), nilai harapan *loglikelihood* dari model data lengkap dapat dihitung dengan rumus $(\varphi|\varphi^{(k)}) = E\left[\log p(Y|\varphi)\,|X, \varphi^{(k)}\right]$ dihitung dengan menggunakan sebaran bersyarat $f(Y|X, \varphi^{(k)})$. Pada tahap M, nilai $(\varphi|\varphi^{(k)})$ dimaksimumkan terhadap φ, dimana φ merupakan penduga parameter tertentu.

Nilai-nilai data yang tidak teramati dalam sebaran campuran adalah realisasi dari θ_i, dimana θ_i adalah parameter yang tidak teramati untuk setiap X_i. Sehingga pada tahap E, kita perlu menghitung nilai harapan bersyarat dari fungsi θ_i(tidak teramati) dan memaksimumkan fungsi kemungkinan dari model data lengkap yang direduksi dari sebaran campuran.

Beberapa tahap untuk mencari nilai penduga kemungkinan maksimum dengan algoritma EM, yaitu:

1. Pada tahap E, menggunakan nilai dugaan terakhir atau saat ini $\varphi^{(k)}$ dari iterasi ke-k, kemudian hitung nilai *pseudo* (samaran) $t_{ij} = E\left[h_j(\theta)|X, \varphi^{(k)}\right]$, dimana $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ketika $h_i(.)$ adalah fungsi sebaran tertentu dan φ adalah nilai penduga.
2. Pada tahap M, menggunakan nilai *pseudo* t_{ij} dari tahap E untuk memaksimumkan kemungkinan dari sebaran campuran dan diperoleh nilai terbaru dari φ yaitu $\varphi^{(k+1)}$ dari iterasi ke-(k+1).
3. Ketika selisih $\varphi^{(k)}$ dan $\varphi^{(k+1)}$ kurang dari suatu bilangan yang sangat kecil maka iterasi akan berhenti, jika tidak iterasi berlanjut ke tahap E.

(Dempster AP, 1977).

2.5 Metode Newton-Raphson

Kebanyakan persoalan model matematika dalam bentuk yang rumit tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi eksak. Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi dari persoalan model matematika tersebut masih dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik.

Dalam metode numerik, pencarian akar $f(x) = 0$ dilakukan dengan iterasi. Diantara semua metode akar, metode Newton-Raphsonlah yang paling terkenal dan paling banayak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa. Metode ini paling disukai karna tingkat konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya.

Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson yaitu:

1. Penurunan rumus metode Newton-Raphson secara geometri

   Misal $f(x) = 0$ adalah suatu persamaan yang mempunyai akar x dan f dapat dideferensialkan, sehingga $y = f(x)$ memiliki garis singgung di setiap titik pada kurva fungsinya.

   Dengan gradient garis singgung di x_r adalah

   $$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}} = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}} \quad (2.10)$$

   Sehingga prosedur iterasi metode Newton-Raphson adalah:

   $$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, f'(x_r) \neq 0 \quad (2.11)$$

2. Penurunan rumus Newton-Raphson dengan deret Taylor

   Uraikan $f(x_{r+1})$ disekitar x_r ke dalam deret Taylor:

   $$f(x_{r+1}) = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2} f''(t), x_r < t < x_{r+1} \quad (2.12)$$

   Apabila deret tersebut dipotong sampai orde ke-2 maka persamaannya akan menjadi:

   $$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \quad (2.13)$$

   Dan karena persoalan mencari akar, $f(x_{r+1}) = 0$ sehingga:

   $$f(x_{r+1}) = f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) = 0 \quad (2.14)$$

   atau

   $$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, f'(x_r) \neq 0 \quad (2.15)$$

   yang merupakan rumus metode Newton-Raphson.

   Kondisi berhenti iterasi Newton-Raphson adalah apabila $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ atau bila menggunakan galat relative hampiran $\left|\frac{|x_{r+1} - x_r|}{x_{r+1}}\right| < \delta$, dengan ε dan δ adalah toleransi galat yang diinginkan.

(Rinaldi Munir, 2003).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dilihat hasil penduga parameter model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*) secara analitik. Selain itu akan dilihat pula hasil analisis data dari penduga parameter model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*) yang diaplikasikan pada data banyaknya penderita kanker bibir yang tercatat selama 6 tahun dari tahun 1975 sampai 1980 pada 56 distrik di Skotlandia dengan bantuan *software* Mathlab.

3.1 Pendugaan Parameter Model Poisson-Gamma dengan Menggunakan Algoritma EM (*Expectation Maximization*)

Pendugaan parameter model poisson-gamma dengan menggunakan Algoritma EM dilakukan dua tahap, yaitu tahap E (*Expectation*) dan tahap M (*Maximization*). Pada tahap E (*Expectation*) yaitu menentukan nilai pseudo dengan langkah pertama mencari nilai harapan dari sebaran posterior atau fungsi kemungkinan model poisson-gamma, dimana sebaran posterior atau fungsi kemungkinan model poisson-gamma:

$$f(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\theta^{x+\alpha-1} e^{-\theta\left(1+1/\beta\right)}}{\Gamma(x+\alpha)\left(\frac{1}{1+1/\beta}\right)^{(x+\alpha)}} \quad (3.1)$$

Sehingga nilai harapan dari sebaran posterior atau fungsi kemungkinan model poisson-gamma adalah sebagai berikut:

$$t_i = E\,[\,\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n\,] = \frac{x+\alpha}{1+1/\beta} \quad (3.2)$$

Selanjutnya langkah kedua yaitu berdasarkan sebaran prior gamma dengan parameter α dan β diperoleh:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha}\, \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}\, d\theta = 1 \quad (3.3)$$

$$\text{Dimana } \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}\, d\theta = \Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha \quad (3.4)$$

Kemudian mencari nilai harapan $\ln\theta$ dari persamaan (3.4) yaitu:

$$E[\ln\theta] = \int_0^\infty \ln\theta \,.\, \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}\, d\theta = \Gamma(\alpha)\,(\beta)^\alpha\,[\Psi(\alpha) + \ln(\beta)] \quad (3.5)$$

Dan $\Psi(\alpha) = \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}$ sebagai fungsi digamma.

Jadi, nilai harapan $\ln\theta$ dari sebaran prior gamma adalah sebagai berikut:

$$E[\ln\theta] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^\alpha} \int_0^\infty \ln\theta\; \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}\, d\theta$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.5) didapat hasil seperti berikut:

$$E[\ln\theta] = \Psi(\alpha) + \ln(\beta) \quad (3.6)$$

Jika sebaran prior gamma dengan parameter $x + \alpha$ dan $1 + 1/\beta$, maka:

$$s_i = E\,[\log\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n\,] = \Psi(x_i + \alpha) + \ln\left(1 + 1/\beta\right) \quad (3.7)$$

Pada tahap M (*Maximization*) yaitu langkah pertama memaksimumkan fungsi kemungkinan dari sebaran prior gamma yang menggunakan nilai pseudo t_i tahap E sebagai berikut:

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\beta)^{\alpha}} (t_i)^{\alpha-1} e^{-\frac{t_i}{\beta}}$$

$$L(\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^{n}(\beta)^{n\alpha}} \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\sum t_i}{\beta}} \quad (3.8)$$

$$\ln L(\alpha,\beta) = -n \ln \Gamma(\alpha) - n\alpha \ln(\beta) + (\alpha-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right) - \frac{\sum t_i}{\beta} \quad (3.9)$$

Nilai penduga parameter model poisson-gamma yang maksimum diperoleh dengan mencari turunan pertama dari logaritma natural $L(\alpha,\beta)$ terhadap masing-masing parameter α dan parameter β yang akan diduga.

3.1.1 Penduga Parameter α

Penduga parameter α model poisson-gamma dapat diperoleh dengan menggunakan metode Newton-Raphson sebagai berikut:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \; ; k = 1,2,\dots,n$$

$$f'(x_i) = \frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = -n\Psi(\alpha) - n\ln\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i$$
(3.10)

$$f''(x_i) = \frac{\partial^2 \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^2} = -n\Psi'(\alpha) \quad (3.11)$$

Dimana $\Psi'(\alpha)$ sebagai fungsi trigamma. Sehingga dari persamaan (3.10) dan persamaan (3.11) didapatkan hasil persamaan seperti berikut:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \left[\frac{-\Psi(\alpha) - \ln\beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln t_i}{n}}{-\Psi'(\alpha)}\right] \quad (3.12)$$

3.1.2 Penduga Parameter β

Penduga parameter β model poisson-gamma dapat diperoleh dari turunan pertama dari logaritma natural $L(\alpha,\beta)$ terhadap β yang harus sama dengan 0, sehingga:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-n\ln\Gamma(\alpha) - n\alpha\ln(\beta) + (\alpha-1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right) - \frac{\sum t_i}{\beta}\right) = 0$$

Sehingga didapatkan penduga parameter β adalah: $\hat{\beta} = \frac{\sum t_i}{n\alpha}$ (3.13)

3.1.3 Penduga Parameter θ

Penduga parameter θ model poisson-gamma dapat diperoleh dari nilai harapan sebaran posterior atau fungsi kemungkinan model poisson-gamma adalah sebagai berikut:

$$E[\theta | x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_0^{\infty} \theta \cdot \frac{\theta^{x+\alpha-1} e^{-\theta\left(1+1/\beta\right)}}{\Gamma(x+\alpha)\left(\frac{1}{1+1/\beta}\right)^{(x+\alpha)}} d\theta$$

Sehingga didapatkan penduga parameter θ adalah: $\hat{\theta}_i = \frac{x_i+\alpha}{1+1/\beta}$ (3.14)

3.2 Hasil Analisis Pendugaan Model Poisson-Gamma

Dengan menggunakan *software* Mathlab didesign program untuk memperoleh penduga parameter α, β dan θ dari model Poisson-Gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*) yang diaplikasikan pada data banyaknya penderita kanker bibir yang tercatat selama 6 tahun dari tahun 1975 sampai 1980 pada 56 distrik di Skotlandia [5].

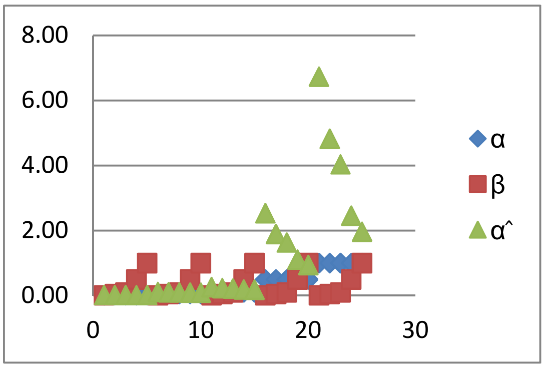
3.2.1 Pendugaan Parameter α dan β

Berikut ini hasil analis dari pendugaan parameter α dan β model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*) dengan bantuan *software* Mathlab dengan menentukan nilai awal parameter α dan β. Secara lengkap, nilai dugaan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ tersaji pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil analisis pendugaan parameter α dan β model poisson-gamma

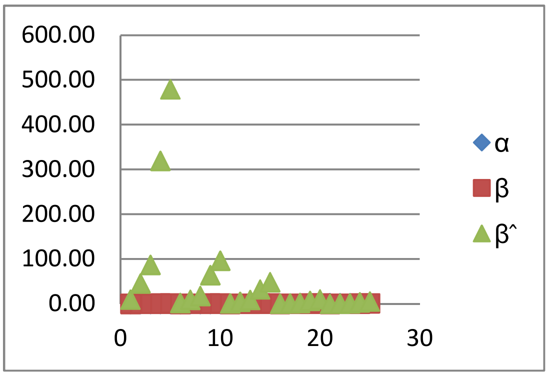
α	β	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
0,01	0,01	0,0201	9,4866
0,01	0,05	0,0198	45,6259
0,01	0,1	0,0197	87,1039
0,01	0,5	0,0194	319,381
0,01	1	0,0193	479,0714
0,05	0,01	0,1136	1,9082
0,05	0,05	0,1058	9,1633
0,05	0,1	0,1026	17,4935
0,05	0,5	0,0961	64,1429
0,05	1	0,0941	96,2143
0,1	0,01	0,263	0,9576
0,1	0,05	0,232	4,6054
0,1	0,1	0,2193	8,7922
0,1	0,5	0,1937	32,2381
0,1	1	0,1857	48,3571
0,5	0,01	2,533	0,1994
0,5	0,05	1,8965	0,9592
0,5	0,1	1,6344	1,8312
0,5	0,5	1,1078	6,7143
0,5	1	0,9435	10,0714
1	0,01	6,7334	0,1047
1	0,05	4,8238	0,5034
1	0,1	4,0376	0,961
1	0,5	2,4579	3,5238
1	1	1,9649	5,2857

Selanjutnya akan dilihat pengaruh nilai awal parameter α dan β terhadap nilai dugaan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$. Secara grafis, pengaruh ini dapat dilihat Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1. Grafik nilai dugaan $\hat{\alpha}$ terhadap nilai awal α dan β

Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa semakin besar nilai awal α dan β yang diberikan maka nilai dugaan $\hat{\alpha}$ juga akan semakin besar. Demikian halnya untuk nilai dugaan $\hat{\beta}$, akan dilihat pengaruh nilai awal α dan β terhadap nilai dugaan $\hat{\beta}$ secara grafis pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik nilai dugaan $\hat{\beta}$ terhadap nilai awal α dan β

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa semakin besar nilai awal α dan β yang diberikan maka nilai dugaan $\hat{\beta}$ akan semakin kecil.

Dengan demikian, semakin besar nilai awal α dan β yang diberikan maka nilai dugaan $\hat{\alpha}$ juga akan semakin besar, sedangkan semakin besar nilai awal α dan β yang diberikan maka nilai dugaan $\hat{\beta}$ akan semakin kecil.

3.2.2 Pendugaan Parameter θ

Berikut ini hasil analis dari pendugaan parameter θ model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*) dengan bantuan *software* Mathlab dengan mensubsitusikan nilai dugaan parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ terhadap data berupa jumlah penderita kanker bibir di Skotlandia. Dengan nilai awal parameter α = 0,01 dan β = 0,01, α = 0,01 dan β = 1,00, α = 1,00 dan β = 0,01, α = 1,00 dan β = 1,00 pada 56 distrik didapatkan nilai m dugaan parameter $\hat{\theta}$. Kemudian akan dilihat pengaruh nilai awal parameter α dan β terhadap nilai dugaan $\hat{\theta}$, secara lengkap tersaji pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil analisis pendugaan parameter θ model poisson-gamma

Distrik ke-	α = 0,01		α = 1,00	
	β = 0,01	β = 1,00	β = 0,01	β = 1,00
	$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}$
1	8,16	9,001	1,491	9,22
2	35,299	38,938	4,334	34,448
3	9,969	10,996	1,681	10,902
4	8,16	9,001	1,491	9,22
5	13,588	14,988	2,06	14,266
6	7,255	8,003	1,396	8,38
7	23,539	25,965	3,102	23,516
8	6,351	7,005	1,302	7,539
9	5,446	6,007	1,207	6,698
10	18,111	19,978	2,534	18,47
11	11,779	12,992	1,87	12,584
12	4,541	5,009	1,112	5,857
13	2,732	3,013	0,923	4,175
14	7,255	8,003	1,396	8,38
15	15,397	16,984	2,249	15,948
16	8,16	9,001	1,491	9,22
17	1,827	2,015	0,828	3,334
18	6,351	7,005	1,302	7,539
19	8,16	9,001	1,491	9,22
20	6,351	7,005	1,302	7,539
21	14,492	15,986	2,155	15,107
22	28,062	30,955	3,576	27,72
23	9,969	10,996	1,681	10,902
24	6,351	7,005	1,302	7,539
25	17,206	18,98	2,439	17,63
26	13,588	14,988	2,06	14,266
27	6,351	7,005	1,302	7,539

Lanjutan Tabel 2.

28	9,065	9,998	1,586	10,061
29	14,492	15,986	2,155	15,107
30	9,969	10,996	1,681	10,902
31	4,541	5,009	1,112	5,857
32	2,732	3,013	0,923	4,175
33	6,351	7,005	1,302	7,539
34	7,255	8,003	1,396	8,38
35	9,969	10,996	1,681	10,902
36	8,16	9,001	1,491	9,22
37	9,969	10,996	1,681	10,902
38	7,255	8,003	1,396	8,38
39	5,446	6,007	1,207	6,698
40	3,637	4,011	1,017	5,016
41	9,065	9,998	1,586	10,061
42	7,255	8,003	1,396	8,38
43	1,827	2,015	0,828	3,334
44	5,446	6,007	1,207	6,698
45	17,206	18,98	2,439	17,63
46	2,732	3,013	0,923	4,175
47	1,827	2,015	0,828	3,334
48	2,732	3,013	0,923	4,175
49	25,348	27,961	3,292	25,198
50	5,446	6,007	1,207	6,698
51	0,923	1,017	0,733	2,493
52	0,923	1,017	0,733	2,493
53	0,923	1,017	0,733	2,493
54	0,923	1,017	0,733	2,493
55	0,018	0,019	0,638	1,652
56	0,018	0,019	0,638	1,652

Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa semakin besar nilai awal α dan semakin kecil nilai awal β, maka nilai dugaan $\hat{\theta}$ akan semakin kecil. Dan sebaliknya, semakin kecil nilai awal α dan semakin besar nilai awal β, maka nilai dugaan $\hat{\theta}$ akan semakin besar.

IV. KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada analisis pendugaan parameter α dan β model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*), semakin besar nilai awal α dan β yang diberikan maka nilai dugaan $\hat{\alpha}$ juga akan semakin besar, sedangkan semakin besar nilai awal α dan β yang diberikan maka nilai dugaan $\hat{\beta}$ akan semakin kecil.
2. Pada analisis pendugaan parameter θ model poisson-gamma dengan menggunakan algoritma EM (*Expectation Maximization*), semakin besar nilai awal α dan semakin kecil nilai awal β, maka nilai dugaan $\hat{\theta}$ akan semakin kecil. Dan sebaliknya, semakin kecil nilai awal α dan semakin besar nilai awal β, maka nilai dugaan $\hat{\theta}$ akan semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

Dempster, A.P., Laird, N.M., & Rubin, D. 1977. Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm. Journal of the Royal Statistical Society. B 39:1-38.

Freund, J.E. & Simon, G.A. 1999. Modern Elementary Statistics. Prentice-Hall, America.

Herrhyanto, N. & Gantini, T. 2009. *Pengantar Statistika Matematis*. Yrama Widya, Bandung.

Munir, R. 2003. *MetodeNumerik*. Informatika, Bandung.

Stern, H.S. & Cressie, N. 2000. Posterior predictive model checks for disease mapping models. Statistics in Medicine. 18:2377-2399.

Titsias, M.K. 2007. The Infinite Gamma-Poisson Feature Model. University of Manchester, 1-8.