

**DINAMIKA DAN BIFURKASI PEMETAAN-PEMETAAN  
YANG DITURUNKAN DARI PERSAMAAN  $\Delta\Delta$   
*SINE-GORDON* YANG DIPERUMUM**

**DISERTASI**

**Karya tulis sebagai salah satu syarat  
untuk memperoleh gelar Doktor dari  
Institut Teknologi Bandung**

Oleh  
**LA ZAKARIA**  
**NIM: 30111010**  
**(Program Studi Doktor Matematika)**



**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**  
**Januari 2017**

## ABSTRAK

# DINAMIKA DAN BIFURKASI PEMETAAN-PEMETAAN YANG DITURUNKAN DARI PERSAMAAN $\Delta\Delta$ *SINE-GORDON* YANG DIPERUMUM

Oleh

**La Zakaria**

**NIM: 30111010**

**(Program Studi Doktor Matematika)**

Persamaan sine-Gordon adalah persamaan diferensial parsial yang dikenal memiliki solusi soliton, sehingga disebut salah satu persamaan soliton. Versi diskrit persamaan ini dapat diperoleh dengan beberapa cara. Pada disertasi ini akan digunakan metode yang melibatkan pasangan matriks Lax (Lax-pair). Dengan batasan untuk solusi gelombang berjalan akan diperoleh persamaan beda biasa yang terintegralkan.

Tujuan penelitian ini adalah mempelajari dinamika dan bifurkasi dari persamaan beda biasa (atau sistem dinamik diskrit) yang diturunkan dari sebuah solusi gelombang berjalan. Untuk itu, terhadap sistem dinamik yang dimaksud ditambahkan sejumlah parameter pada matriks Lax awal untuk memperumum sistem. Hal ini dilakukan untuk menyelidiki lebih banyak kemungkinan dinamika dan bifurkasi yang terjadi dalam sistem dibandingkan dengan bentuk standarnya. Melalui syarat kekonsistenan didapat sistem dinamik diskrit yang tergantung pada dua parameter bifurkasi dan dua parameter yang bukan parameter bifurkasi. Kedua parameter yang bukan parameter bifurkasi menentukan dimensi dari sistem.

Pada disertasi ini, sistem dinamik yang dipelajari dibatasi di ruang berdimensi rendah yaitu dua dan tiga. Integral dari sistem tersebut didapat dengan menghitung matriks monodromi sepanjang sebuah *staircase* pada latis. Dengan mempelajari level set (kurva ketinggian) dari fungsi integral ini dideskripsikan dinamika sistem yang ditentukan oleh empat belas buah bentuk normal dari fungsi integral tersebut. Bifurkasi yang ditemukan adalah bifurkasi yang non lokal. Bifurkasi yang terjadi dalam sistem adalah bifurkasi penggandaan periode di mana dua titik berperiode-2 terbentuk dari sebuah titik kritis dan bifurkasi yang melibatkan tabrakan koneksi homoklinik dan heteroklinik antara titik kritis bertipe *saddle*.

**Kata-kunci:** *Persamaan sine-Gordon, Solusi gelombang berjalan, Integral, Titik Kritis, Bifurkasi*

## ***ABSTRACT***

# **DYNAMICS AND BIFURCATIONS OF THE MAPPINGS DERIVED FROM GENERALIZED $\Delta\Delta$ SINE-GORDON EQUATION**

*by*

**La Zakaria**

**NIM: 30111010**

***(Doctoral Study Program of Mathematics)***

The sine-Gordon equation is a partial differential equations which is known to have soliton solutions, and hence it is called one of the soliton equations. A discrete version of the equation could be obtained in various ways. Here, we will follow a method that use the so called Lax-pair. By restricting to the traveling wave solution, we derive an integrable ordinary difference equation.

The aim of this research is to study the dynamics and bifurcation of the ordinary difference equations (or discrete dynamical systems) derived from traveling wave solution. To achieve this goal, we introduce a number of the parameters in the original Lax pair to obtain a generalized system. By using the compability condition, the discrete dynamical systems that depend on four parameters are obtained. Two of the parameters are bifurcation parameters while the others are not. The non bifurcational parameters determine the dimension of the system.

In this dissertation, we will study the dynamical systems of low-dimensional (two and three-dimensional). The integral of the system is obtained by computing the monodromy matrix along a *staircase* on the lattice. By studying the level sets of the integral, we describe the dynamics of the system through the fourteen normal form of the integral. We observe an interesting local bifurcation of critical point in the system, namely: the period doubling bifurcation, where two 2-period points are created from a critical point. We have observed also a nonlocal bifurcation involving collision of homoclinic and heteroclinic connection between saddle type critical points.

***Key-words:*** *sine-Gordon equation, Integral, Traveling Wave Solution, Critical point, Bifurcation*

**DINAMIKA DAN BIFURKASI PEMETAAN-PEMETAAN  
YANG DITURUNKAN DARI PERSAMAAN  $\Delta\Delta$   
SINE-GORDON YANG DIPERUMUM**

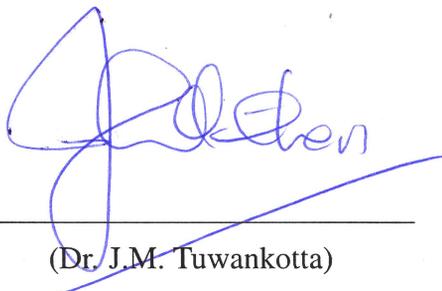
Oleh  
**La Zakaria**  
**NIM: 30111010**  
**(Program Studi Doktor Matematika)**

Institut Teknologi Bandung

Menyetujui  
Tim Pembimbing

Tanggal 18 Januari 2017

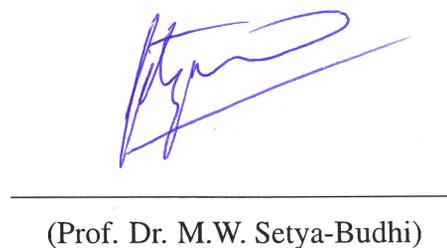
Ketua



---

(Dr. J.M. Tuwankotta)

Anggota



---

(Prof. Dr. M.W. Setya-Budhi)

***Dipersembahkan untuk mereka yang telah mendidik dan  
berbagi suka dan duka:***

*Bapak La Taka bin La Raha dan Ibu Nur binti Sahidan,  
Bapak Sarnubi bin Zahri. (Alm.) dan Ibu Farida binti Abd. Somad (Almh.),  
Istri tercinta: Desova Zulia, dan  
Anak-anak tersayang:  
Ulfah Muharramah,  
Zuliana Nurfadlillah,  
Khoirunnisaa R.A.P., dan  
Muhammad Ilyas,  
Hamba Allah.*

***”Ar-Rahman telah mengajarkan Al Qur’an, menciptakan manusia,  
mengajarnya pandai berbicara. Maka nikmat Rabbmu yang mana lagi yang  
kamu dustakan?”***

***(Al Qur’an. Surat Ar-Rahman 1-4 dan 16)***

***”Sesungguhnya Allah menyuruh kamu berlaku adil dan berbuat kebajikan,  
memberi bantuan kepada kerabat, dan Dia melarang (melakukan) perbuatan  
keji, kemungkaran, dan permusuhan. Dia memberi pengajaran kepadamu agar  
kamu dapat mengambil pelajaran”***

***(Al Qur’an. Surat An-Nahl 90)***

## PEDOMAN PENGGUNAAN DISERTASI

Disertasi Doktor yang tidak dipublikasikan terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung, dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau peringkasan hanya dapat dilakukan seizin pengarang dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Sitasi hasil penelitian Disertasi ini dapat ditulis dalam bahasa Indonesia sebagai berikut:

L. Zakaria, (2016): *Dinamika dan Bifurkasi Pemetaan-Pemetaan yang Diturunkan dari Persamaan  $\Delta\Delta$  sine-Gordon yang Diperumum*, Disertasi Program Doktor, Institut Teknologi Bandung.

dan dalam bahasa Inggris sebagai berikut:

L. Zakaria, (2016): *Dynamics and bifurcations of The Mappings Derived from Generalized  $\Delta\Delta$  sine-Gordon Equation*, Doctoral Dissertation, Institut Teknologi Bandung.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh disertasi haruslah seizin Dekan Sekolah Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Rabbil 'Alamiin. Dengan petunjuk dan kekuatan dari-Nya penelitian, desiminasi, dan penulisan disertasi yang merupakan sebagian persyaratan untuk menyelesaikan studi di Program Studi Doktor Matematika, Sekolah Pasca Sarjana ITB dapat diselesaikan. Ucapan terima kasih dengan tulus dan penghargaan yang tinggi kepada Tim Promotor, Dr. J.M. Tuwakotta dan Prof. Dr. M.W. Setya Budhi, yang selalu meluangkan waktu dan memberikan perhatian serta dengan penuh kesabaran mensupervisi, mengarahkan, dan membimbing penulis selama pelaksanaan penelitian dan penulisan disertasi ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada Prof. St. Bagus Waluya, PhD., Alexander A. Iskandar, Ph.D. dan Dr. Jalina Wijaya yang telah membaca dan/atau memeriksa kelayakan isi disertasi ini. Kemudian, ucapan terima kasih juga disampaikan kepada Prof. Dr. Hendra Gunawan, Dr. Yudi Soeharyadi, Dr. Janny Lindiarni, Dr. Oki Neswan, Dr. Eric Hariyanto, dan anggota KK Analisis & Geometri Prodi Matematika FMIPA-ITB yang telah memberikan saran dan tanggapan atas disertasi ini. Kepada Ketua dan mantan Ketua Prodi Doktor Matematika serta seluruh dosen dan staf/pegawai Prodi Matematika FMIPA ITB, Kemenristek Dikti, dan ITB atas penggunaan sarana-prasarana pendidikan dan bantuan beasiswa BPDN dan dana BOPTN ITB yang diterima selama ini. Dan tak lupa ucapan terima kasih disampaikan kepada kolega di Universitas Lampung dan di Universitas Riau khususnya dan PTN/PTS lain umumnya. Ucapan terima kasih diberikan juga kepada mahasiswa S3 Prodi Matematika, Bapak Hi. Iwa K. dan keluarga, Jamaah Masjid MUI Kota Bandung, Masjid An-Nur, Masjid Babussalam, dan Mushola Nurul Huda Kelurahan Sadang Serang Bandung, atas do'a, dan bantuan selama ini sehingga proses pendidikan penulis senantiasa lancar. Mengakhiri Kata Pengantar ini, penulis berharap disertasi ini dapat ditanggapi dan diberi saran yang sifatnya menyempurnakan. Semoga disertasi ini dapat dijadikan referensi dan bermanfaat.

Bandung, Januari 2017

Penulis

La Zakaria

## DAFTAR PUBLIKASI YANG BERASAL DARI DISERTASI

1. L. Zakaria, J.M. Tuwankotta, and M.W. Setya Budhi., (2013): The Normal Form For The Integral Of 3-Dimensional Maps Derived From  $\Delta\Delta$ -Sine Gordon Equations *SEACMA Proceeding*, ISBN : 978-979-96152-8-2, – (1) 2013 : M-33.
2. L. Zakaria, and J.M. Tuwankotta., (2016): Dynamics and bifurcations in a two-dimensional maps derived from a generalized  $\Delta\Delta$  sine-Gordon equation, *Far East Journal of Dynamical Systems*, **28(3)**, pp 165–194.

## DAFTAR ISI

ABSTRAK .....	i
<i>ABSTRACT</i> .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iii
HALAMAN PERUNTUKAN .....	iv
PEDOMAN PENGGUNAAN DISERTASI .....	v
KATA PENGANTAR .....	vi
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR LAMPIRAN .....	x
DAFTAR GAMBAR .....	xi
Bab I    Persamaan Diskrit sine-Gordon Pada Latis Berdimensi 2 .....	1
I.1    Pendahuluan .....	1
I.2    Persamaan sine-Gordon .....	2
I.3    Persamaan Diskrit sine-Gordon .....	4
I.4    Persamaan $\Delta\Delta$ sine-Gordon .....	9
I.5    Perumuman $\Delta\Delta$ sine-Gordon oleh Tuwankotta .....	12
Bab II    Solusi Gelombang Berjalan dan Aplikasi Metode <i>Staircase</i> untuk Integral .....	14
II.1    Solusi gelombang berjalan .....	14
II.2    Aplikasi Metode <i>Staircase</i> untuk Integral .....	17
II.2.1    Metode <i>Staircase</i> .....	17
II.2.2    Aplikasi Metode <i>Staircase</i> : Komputasi Formula Eksplisit untuk Integral bagi Persamaan O $\Delta$ E sine- Gordon yang Diperumum .....	18
Bab III    Dinamika Dan Bifurkasi Di Ruang Berdimensi Dua Untuk $z_1 =$ $z_2 = 1$ .....	21
III.1    Sistem Dinamik yang Diturunkan dari Persamaan $\Delta\Delta$ sine-Gordon yang Diperumum untuk $z_1 = z_2 = 1$ .....	21
III.2    Titik Kritis dan Titik Dasar .....	22
III.2.1    Titik Kritis .....	23
III.2.2    Titik Dasar .....	23
III.2.3    Prapeta Titik Dasar .....	24
III.3    Bentuk Normal Integral .....	25
III.4    Analisa Level Set Fungsi Integral .....	26
III.5    Kestabilan Titik Tetap Sistem Dinamik Diskrit Kasus $z_1 =$ $z_2 = 1$ .....	32
Bab IV    Dinamika Dan Bifurkasi Di Ruang Berdimensi Dua Untuk $z_1 =$ $1; z_2 = 2$ .....	37
IV.1    Sistem Dinamik yang Diturunkan dari Persamaan $\Delta\Delta$ sine-Gordon yang Diperumum untuk $z_1 = 1; z_2 = 2$ .....	37
IV.2    Titik Kritis dan Titik Dasar .....	38
IV.2.1    Titik Kritis .....	38
IV.2.2    Titik Dasar .....	39
IV.2.3    Prapeta Titik Dasar .....	39

IV.3 Bentuk Normal Integral . . . . .	39
IV.4 Analisa Level Set Fungsi Integral . . . . .	41
IV.5 Kestabilan Titik Tetap Sistem Dinamik Diskrit Untuk Kasus $z_1 = 1$ dan $z_2 = 2$ . . . . .	46
Bab V Kesimpulan dan Masalah Terbuka . . . . .	52
DAFTAR PUSTAKA . . . . .	55
LAMPIRAN . . . . .	56

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A	Penurunan Persamaan Bilinear Hirota yang Ekuivalen dengan Persamaan sine-Gordon . . . . .	57
Lampiran B	Aplikasi Metode <i>Staircase</i> : Komputasi Formula Eksplisit untuk Integral O $\Delta$ E sine-Gordon . . . . .	60

## DAFTAR GAMBAR

Gambar II.1	Diagram solusi gelombang berjalan versi kontinu (kiri) dan versi diskrit (kanan). Untuk ilustrasi versi diskrit dipilih $z_1 = 3; z_2 = 2$ . . . . .	15
Gambar II.2	Bentuk <i>staircase</i> untuk $z_1 = 3$ $z_2 = 7$ . . . . .	18
Gambar II.3	Bentuk <i>staircase</i> untuk $z_1 = 1$ $z_2 = 2$ . . . . .	19
Gambar III.1	Kiri: Bentuk kurva $A_2$ hingga $A_6$ dengan $\mu = 4$ . Titik dasar yang dilewati semua kurva ada di sumbu koordinat. Kanan: Keadaan kurva $A_2$ hingga $A_6$ dengan $\mu = 4$ di sekitar titik dasar $(0, 1/2)$ . . . . .	25
Gambar III.2	Sejumlah penampakan level set dari integral $F_1(x, y)$ untuk beberapa nilai parameter yang berbeda. Baris pertama penampakan level set untuk $\mu = 4$ (kiri), $\mu = 1$ (tengah), dan $\mu = 0.25$ (kanan). Baris kedua penampakan level set untuk $\mu = 0$ (kiri) dan $\mu = -1$ (kanan). . . . .	26
Gambar III.3	Sejumlah penampakan level set dari integral $F_2(x, y)$ untuk beberapa nilai parameter yang $\mu$ berbeda. Dari kiri ke kanan, penampakan level set dari $F_2(x, y)(\mu = -1)$ , $F_2(x, y)(\mu = 0)$ , dan $F_2(x, y)(\mu = 1)$ . . . . .	27
Gambar III.4	Sejumlah penampakan level set dari integral $F_3(x, y)$ untuk beberapa nilai parameter yang $\mu$ berbeda. Dari kiri ke kanan, penampakan level set dari $F_3(x, y)(\mu = -1)$ , $F_3(x, y)(\mu = 0)$ , dan $F_3(x, y)(\mu = 1)$ . . . . .	27
Gambar III.5	Bifurkasi (perubahan kestabilan) titik kritis fungsi integral $F_1$ ketika $\mu$ melalui 0. . . . .	30
Gambar III.6	Bentuk level set dari integral (III.4) untuk nilai parameter $\theta_2 = 0$ tetapi $\theta_1 \neq 0$ yang secara khusus direpresentasikan oleh bentuk integral $F_4(x, y)$ , $F_6(x, y)$ , dan $F_5(x, y)$ . . . . .	31
Gambar III.7	Bentuk level set dari integral (III.4) untuk nilai parameter $\theta_2 = 0$ tetapi $\theta_1 = 0$ direpresentasikan oleh bentuk integral $F_7(x, y)$ . . . . .	32
Gambar III.8	Keadaan nilai eigen $\xi_1$ dan $\xi_2$ pada lingkaran satuan di bidang kompleks. Dari kiri ke kanan, baris pertama: kedua nilai eigen bernilai real dan tidak sama dengan 1 atau -1. Baris kedua, kedua nilai eigen real dan sama dengan 1 atau -1. Baris ketiga, kedua nilai eigen kompleks dimana sebuah nilai eigen merupakan konjugat nilai eigen yang lainnya. . . . .	36
Gambar III.9	Hubungan $\mu$ dan $\lambda$ dalam sebuah ruang parameter. Manifold $\mathfrak{M} = \{(\mu, \lambda)   \mu^2 - \lambda = 0\}$ . . . . .	36
Gambar IV.1	Bentuk kurva $B_1$ hingga $B_5$ dengan $\mu = 2$ . (Kiri). Keadaan kurva $B_1$ hingga $B_5$ dengan $\mu = 2$ di sekitar titik dasar $(0, \frac{1}{\mu})$ . (Kanan). . . . .	40

Gambar IV.2	Diagram kurva level set fungsi (IV.14) untuk nilai-nilai $\mu = 1, 0.6, 0.4, 0.1,$ dan $-1$ . Dalam diagram, tampak titik kritis yang terdapat di kuadran pertama bertransisi dari semula bertipe <i>saddle</i> menjadi <i>centre</i> setelah melewati $\mu = 0.5$ menuju $\mu$ negatif. Sebaliknya di kuadran III bertransisi dari <i>centre</i> ke <i>saddle</i> setelah melewati $\mu = 0.5$ menuju $\mu$ negatif. ....	43
Gambar IV.3	Dalam gambar di atas, bifurkasi level set-level set titik kritis fungsi $G_1$ untuk $\mu$ di sekitar 1. Diagram pada baris pertama adalah gambar $\wp_{1,1}$ untuk masing-masing $\mu = 1.1, 1.0,$ dan $\mu = 0.9$ (dari kiri ke kanan). Diagram pada baris kedua adalah gambar $\wp_{-1,1}$ untuk masing-masing $\mu = 1.1, 1.0,$ dan $\mu = 0.9$ ( dari kiri ke kanan). Sementara itu, diagram pada baris ketiga merupakan keadaan sejumlah level set $G_1$ untuk masing-masing nilai $\mu = 1.1, 1.0,$ dan $\mu = 0.9$ . ....	44
Gambar IV.4	Bifurkasi <i>Period-Doubling</i> titik kritis fungsi integral $G_1$ di sekitar $\mu = 0.5$ . Diagram dengan nilai $\mu = 0.50475$ (kiri) dan Diagram dengan nilai $\mu = 0.475$ (kanan). ....	45
Gambar IV.5	Dalam gambar ini level set-level set dari $G_2$ dan $G_3$ diperlihatkan. Tiga buah diagram yang ditampilkan dalam baris pertama adalah untuk $G_2$ dengan $\mu = 2, 0.4,$ dan $\mu = 0$ (dari kiri-ke kanan). Sedangkan pada baris kedua adalah untuk $G_3$ dengan $\mu = 0.5,$ dan $\mu = 0$ (dari kiri-ke kanan) ..	46
Gambar IV.6	Beberapa diagram level set dari integral (IV.4) untuk nilai parameter $\theta_2 = 0$ tetapi $\theta_1 \neq 0$ yang secara khusus diwakilkan oleh bentuk integral $G_4(x, y), G_5(x, y),$ dan $G_6(x, y)$ .	47
Gambar IV.7	Diagram level set $G_7$ . ....	47
Gambar IV.8	<i>Phase portrait</i> dan diagram bifurkasi sistem (IV.5). (Atas) Sebuah <i>phase portrait</i> dengan empat buah orbit untuk nilai parameter $\lambda = 1$ dan $\mu = 0.55$ (Bertipe <i>Saddle-Tidak Stabil</i> ) (kiri) dan $\mu = 0.4$ (Bertipe <i>Centre-Stabil</i> )(kanan). (Bawah) Sebuah diagram bifurkasi yang memperlihatkan kestabilan sistem di sekitar titik tetap untuk nilai $\lambda = 1$ ; (Kanan) Di sekitar titik tetap $(1, 1)$ untuk nilai parameter $\mu \leq 1$ . (Kiri) Di sekitar titik tetap $(-1, -1)$ untuk nilai parameter $\mu \geq -1$ . ....	50
Gambar V.1	Level Set $F_1(x, y) = C$ dengan $\mu = 0.5$ . Kurva merah ditandai untuk nilai $C = 0$ . ....	53
Gambar V.2	Level Set $\hat{F}(u, v) = K$ . Kurva hijau ditandai untuk nilai $K = 0.5$ . ....	54

# Bab I Persamaan Diskrit sine-Gordon Pada Latis Berdimensi 2

## I.1 Pendahuluan

Disertasi ini membahas masalah dinamika dan bifurkasi pada keluarga tiga parameter dari sistem dinamik diskrit berdimensi rendah yang diturunkan dari persamaan beda parsial (P $\Delta$ E) sine-Gordon. Persamaan sine-Gordon adalah persamaan diferensial parsial yang dikenal dalam matematika fisika sebagai salah satu persamaan yang terintegralkan, dan juga memiliki solusi soliton. Penurunan persamaan beda parsial sine-Gordon diturunkan dari persamaan diferensial parsial, dengan melakukan diskritisasi pada peubah ruang satu dimensi dan peubah waktu. Akibatnya persamaan ini juga dikenal dengan nama persamaan  $\Delta\Delta$  sine-Gordon (karena diskritisasi dilakukan melibatkan  $\Delta$ -x dan  $\Delta$ -t).

Penurunan persamaan diskrit ini tidak unik; pada disertasi ini akan diikuti langkah-langkah yang melibatkan bentuk bilinear Hirota (oleh Hirota). Karena persamaan diferensial parsial sine-Gordon dikenal sebagai persamaan diferensial yang terintegralkan maka sifat keterintegralan ini juga diwariskan pada bentuk diskritnya. Keterintegralan dari persamaan ini diikuti dengan eksistensi dari dua matriks pasangan Lax (lihat (Orfanidis, 1978a)).

Pada disertasi ini akan didapatkan keluarga baru dari persamaan *double* diskrit yang terintegralkan, tetapi memuat cukup banyak parameter sehingga bifurkasi di dalamnya dapat dipelajari. Cara untuk memperumum dengan menambahkan parameter, tetapi tetap mempertahankan sifat keterintegralan, dipilih cara dengan memperumum matriks pasangan Laxnya. Ini dilakukan pada bagian berikutnya dari Bab I pada disertasi ini.

Tujuan penelitian disertasi ini adalah mempelajari dinamika dan bifurkasi dari sistem dinamik yang diturunkan dari persamaan sine-Gordon. Sistem dinamik diskrit ini didapatkan dengan membatasi masalah pada solusi gelombang berjalan. Pada kasus diskrit, solusi gelombang berjalan didapat dengan membatasi pada garis karakteristik yang ditentukan oleh dua parameter anggota bilangan bulat.

Keluarga sistem dinamik diskrit yang didapat pada disertasi ini, adalah bagian dari keluarga sistem dinamik diskrit yang terintegralkan, yang dikenal dengan nama pemetaan Quispel-Roberts-Thompson (QRT). Sistem ini adalah salah satu sistem terintegralkan yang paling umum yaitu memiliki 18 parameter.

Hasil penelitian yang diperoleh selain formulasi umum bentuk eksplisit fungsi integral untuk sebuah pemetaan-pemetaan yang diturunkan dari persamaan  $\Delta\Delta$

## Bab III Dinamika Dan Bifurkasi Di Ruang Berdimensi Dua

Untuk  $z_1 = z_2 = 1$

Kajian dinamika dan bifurkasi sistem dinamik yang diturunkan dari sebuah persamaan  $\Delta\Delta$  sine-Gordon yang diperumum merupakan hal baru. Oleh karena itu pengamatan terhadap sistem yang ada dapat dimulai dari dimensi yang lebih rendah. Pada bab ini dan bab berikutnya (Bab.IV), akan dibahas dinamika dan bifurkasi dari sistem dinamik diskrit yang diturunkan dari persamaan beda biasa SG di (II.3). Ada dua kasus yang akan dipelajari, yaitu untuk kasus  $z_1 = z_2 = 1$  dan kasus  $z_1 = 1, z_2 = 2$ . Untuk kasus  $z_1 = z_2 = 1$ , sebagian telah dikerjakan pada (Tuwankotta dan Quispel, 2012) yang tidak dipublikasikan. Untuk kelengkapan, dalam disertasi ini juga dimuat hasil-hasil yang diperoleh pada (Tuwankotta dan Quispel, 2012).

### III.1 Sistem Dinamik yang Diturunkan dari Persamaan

$\Delta\Delta$  sine-Gordon yang Diperumum untuk  $z_1 = z_2 = 1$

Pilih nilai  $z_1 = 1$  dan  $z_2 = 1$ . Persamaan di (II.3) dapat dinyatakan sebagai

$$V_{n+2} = \frac{(\theta_3 - \theta_1 V_{n+1}^2)}{V_n (\theta_2 V_{n+1}^2 - \theta_1)} \quad (\text{III.1})$$

Kemudian pandang  $\gamma_n$  sebagai sebuah barisan pada  $\mathbb{R}^2$  yang didefinisikan dengan

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} V_{n+1} \\ V_n \end{pmatrix}$$

dan  $\theta$  merupakan vektor parameter di  $\mathbb{R}^3$ :  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Maka persamaan di (III.1) dapat dinyatakan sebagai sebuah sistem dinamik berikut ini:

$$\gamma_{n+1} = \mathbf{f}_\theta(\gamma_n) \quad (\text{III.2})$$

dengan

$$\mathbf{f}_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \left( \frac{\theta_3 - \theta_1 x^2}{(\theta_2 x^2 - \theta_1) y}, x \right).$$

## Bab IV Dinamika Dan Bifurkasi Di Ruang Berdimensi Dua

Untuk  $z_1 = 1; z_2 = 2$

Sebagaimana telah dikemukakan dalam Bab III, bab ini akan membahas dinamika dan bifurkasi sistem dinamik diskrit sine-Gordon yang diperumum untuk kasus  $z_1 = 1, z_2 = 2$ . Bahasan dalam bab ini dimulai dengan mengkonstruksi sebuah sistem dinamik diskrit sine-Gordon untuk pilihan  $z_1 = 1, z_2 = 2$  beserta fungsi integralnya. Kemudian dari fungsi integralnya dilakukan komputasi untuk mendapatkan titik kritis dan titik dasar serta prapeta titik dasar. Selain itu, bentuk normal integral berkenaan dengan sistem dinamik juga dikonstruksi. Dari hasil pernormalan integral dapat diketahui keadaan dinamik melalui diagram-diagram level set dari fungsi integral. Bagian ini ditutup dengan memberikan informasi tentang kestabilan sistem di titik-titik tetapnya.

### IV.1 Sistem Dinamik yang Diturunkan dari Persamaan

$\Delta\Delta$  sine-Gordon yang Diperumum untuk  $z_1 = 1; z_2 = 2$

Pandang persamaan di (II.3). Dengan menetapkan  $z_1 = 1$  dan  $z_2 = 2$ , maka

$$V_{n+3} = \frac{(\theta_3 - \theta_1 V_{n+1} V_{n+2})}{V_n (\theta_2 V_{n+1} V_{n+2} - \theta_1)}. \quad (\text{IV.1})$$

Persamaan di (IV.1) dapat ditulis sebagai sebuah sistem persamaan, yaitu:

$$\begin{aligned} V_{n+3} &= \frac{(\theta_3 - \theta_1 V_{n+1} V_{n+2})}{V_n (\theta_2 V_{n+1} V_{n+2} - \theta_1)} \\ V_{n+2} &= V_{n+1} \\ V_{n+1} &= V_n \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Jika  $\zeta_n^0 = V_{n+2}V_{n+1}$  dan  $\zeta_n^1 = V_{n+1}V_n$ , maka sistem persamaan di (IV.2) dapat dinyatakan sebagai

$$\zeta_{n+1} = \mathbf{g}_\theta(\zeta_n) \quad (\text{IV.3})$$

dimana

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\theta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left( \frac{(\theta_3 - \theta_1 x) x}{(\theta_2 x - \theta_1) y}, x \right). \end{aligned}$$

## Bab V Kesimpulan dan Masalah Terbuka

Pada disertasi ini telah dipelajari sistem dinamik diskrit berdimensi rendah (dua dan tiga) yang diturunkan dari persamaan sine-Gordon. Dinamika dari sistem-sistem tersebut dapat dipelajari melalui level set dari fungsi integralnya. Telah ditemukan beberapa bifurkasi yang berbeda dari yang ada diliteratur. Deskripsi lengkap dari bifurkasi ini masih perlu untuk diteliti lebih lanjut.

Level set-level set dari fungsi integral pada disertasi ini dapat berpotongan. Ini menginduksi singularitas pada sistem dinamik diskritnya. Hal ini tentu saja tidak dijumpai pada bentuk P $\Delta$ E sine-Gordon. Jadi, singularitas ini dihasilkan oleh reduksi ke O $\Delta$ E sine-Gordon melalui solusi gelombang berjalan. Oleh karena itu, perlu dibangun suatu cara untuk ”memperbaiki” singularitas ini agar pemetaan yang dihasilkan reguler dan ini merupakan topik penelitian tersendiri.

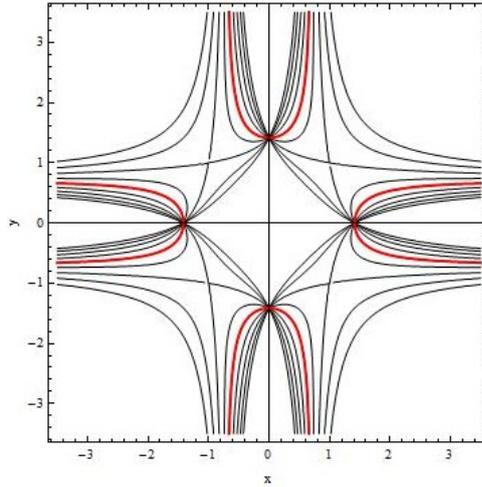
Peluang penelitian lanjutan lainnya dari disertasi ini adalah adanya sejumlah aspek yang belum dianalisa berkenaan dengan sistem (III.3) dan (IV.5). Misalnya, studi perilaku di sekitar titik tetap. Hal ini sehubungan dengan fungsi integral yang memiliki singularitas (level set yang berpotongan untuk nilai yang berbeda). Selain itu, untuk sistem diskrit berdimensi  $z_1 + z_2 > 3$  yang diturunkan dari persamaan generalized  $\Delta\Delta$  sine-Gordon, dinamik dan bifurkasinya juga belum dibahas sama sekali dalam disertasi ini.

### Membangun sistem dinamik diskrit baru yang terintegralkan

Salah satu topik menarik yang merupakan pengembangan dari sistem dinamik diskrit yang terintegralkan adalah membangun pemetaan lain yang terintegralkan dari sebuah pemetaan yang juga terintegralkan tertentu. Salah satu teknik yang dapat digunakan untuk membangun pemetaan baru adalah menukar parameter sistem dengan parameter integral. Teknik ini umumnya menghasilkan sistem baru yang merupakan dual bagi sistem lama (lihat (Quispel dkk., 2005)). Cara lain membangun pemetaan baru adalah dengan cara reparameterisasi.

Pandang sistem dinamik di persamaan (III.3). Dengan menetapkan  $\lambda = 1$ , maka keluarga sistem dinamik tersebut menjadi:

$$\overline{(x, y)} = f_1(x, y) = \left( \frac{(1 - \mu x^2)}{y(x^2 - \mu)}, x \right), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{V.1})$$



Gambar V.1 Level Set  $F_1(x, y) = C$  dengan  $\mu = 0.5$ . Kurva merah ditandai untuk nilai  $C = 0$ .

Dan fungsi integralnya adalah  $F_1(x, y)$  sebagaimana diberikan dalam persamaan (III.11). Ambil  $\mu \in \mathbb{R}$  sebarang (tetapi tetap). Pandang level set  $F_1(x, y) = C$  untuk suatu  $C \in \mathbb{R}$ . Misalkan, level set  $F_1(x, y) = C$  dibatasi untuk  $C = 0$ . Maka

$$\mu = \mu(x, y) = \frac{1+x^2y^2}{x^2+y^2}, \quad \forall (x, y) \in F_1(x, y) = 0 \quad (\text{V.2})$$

Substitusikan  $\mu$  di atas ke sistem di (V.1), maka diperoleh sebuah sistem dinamik baru, yaitu:

$$\overline{(u, v)} = \hat{f}(u, v) = (-v, u), \quad \forall (u, v) \in F_1(u, v) = 0. \quad (\text{V.3})$$

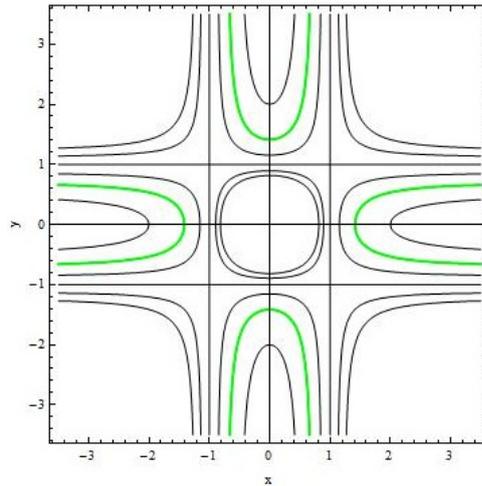
Dapat diperiksa bahwa fungsi

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1+u^2v^2}{u^2+v^2}, \quad \forall (u, v) \in F_1(u, v) = 0 \quad (\text{V.4})$$

merupakan integral bagi sistem di (V.3). Integral ini tidak lain adalah fungsi  $\mu(x, y)$  di persamaan (V.2).

Dalam Gambar V.1 dan Gambar V.2 diperlihatkan beberapa level set dari fungsi integral (III.11) dan (V.4).

Dari apa yang telah diperoleh di atas, dapat diperiksa bahwa hasil reparameterisasi terhadap parameter  $\mu$  pada sistem dinamik (V.1) yang melibatkan solusi sistem



Gambar V.2 Level Set  $\hat{F}(u, v) = K$ . Kurva hijau ditandai untuk nilai  $K = 0.5$ .

tersebut untuk level set  $F_1(x, y) = 0, \mu \in \mathbb{R}$  menghasilkan sebuah sistem dinamik baru yang periodik empat dengan bentuk sistem dinamiknya seperti dinyatakan dalam persamaan (V.3). Adapun solusi dari sistem dinamik baru yang dinyatakan dalam level set-level set  $\hat{F}(u, v) = K, K \in \mathbb{R}$  adalah solusi sistem dinamik yang lama dengan level set  $F_1(x, y) = 0, \mu \in \mathbb{R}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Boiti, M., Pempinelli, F., Prinari, B., and Spire, A., (2002): Integrable discretizations of the sine-Gordon equation, *Inverse Problems* **18**, **PII: S0266-5611(02)22161-9** (Online: stacks.iop.org/IP/18/1309), 1309–1324.
- Cisneros, L., and Minzoni, A., (2008): Asymptotics for kink propagation in the discrete Sine-Gordon equation, *Physica D*, (237), 50–56.
- der Kamp, P. V., and Quispel, G., (2010): The staircase method: integrals for periodic reductions of integrable lattice equations, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**(doi:10.1088/1751-8113/43/46/465207), 1 – 34.
- der Kamp, P. V., Rojas, O., and Quispel, G., (2007): Closed-form expressions for integrals of sine-Gordon and mKdV maps, *J.Phys A.: Math Gen*, **40**, 12789–98.
- Hietarinta, J., (2005): Hirota’s bilinear method and soliton solutions, *Physics AUC*, **15**(1), 31–37.
- Hirota, R., (1977): Nonlinear partial difference III: Discrete sine-Gordon equation, *The Journal of the Physical Society of Japan*, **43**(6), 2079–2086.
- Knobel, R., (2000): *An Introduction to the Mathematical Theory of Waves*, Student Mathematical Library, V.3, American Mathematical Society-Institute For Advanced Study, Providence, R.I.
- Kulenovic, M., and Merino., O., (2002): *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*, Vol. Boca Raton, Florida. USA., Chapman and Hall/CRC.
- Nijhoff, F., Quispel, G., and Capel, H., (1983): Direct linearization of nonlinear difference-difference equations, *Phys. Lett. A*, **97**(4), 125 – 128.
- Orfanidis, S., (1978a): Discrete sine-Gordon, *Physical Review D*, **18**(10), 3822–3827.
- Orfanidis, S., (1978b): sine-Gordon equation and nonlinear  $\tau$  model on a lattice, *Physical Review D*, **18**(10), 3828–3832.
- Quispel, G., Capel, H., Papageorgiou, V., and Nijhoff, F., (1991): Integrable mappings derived from soliton equations, *Physica A*, **173**, 243 – 266.
- Quispel, G., Capel, H., and Roberts, J., (2005): Duality for discrete integrable systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**, 3965–3980.
- Quispel, G., Papageorgiou, V., Capel, H., and Liden, J., (1984): Linear integral equations and non linear difference-difference equations, *Physica 125A*, 344 – 380.
- Rojas, O., der Kamp, P. V., and Quispel, G., (2007), Lax representations for integrable  $O\Delta$ Es, 271–272.
- Tuwankotta, J., and Quispel, G., (2012): Dynamics of 2-Dimensional Mapping Derived From A Discrete sine-Gordon Equation, *Unpublished*, .
- Zakaria, L., and Tuwankotta, J., (2016): Dynamics and Bifurcations in a Two-Dimensional Maps Derived From a Generalized  $\Delta\Delta$  sine-Gordon Equation, *Far East Journal of Dynamical Systems*, **28**(3), 165–194.

## **LAMPIRAN**

## Lampiran A Penurunan Persamaan Bilinear Hirota yang Ekivalen dengan Persamaan sine-Gordon

Dalam lampiran ini diperlihatkan proses penurunan bentuk persamaan bilinear Hirota yang ekivalen dengan persamaan sine-Gordon berpeubah *lightcone*. Dari bentuk bilinear ini kemudian akan didiskritisasi menjadi sebuah persamaan diskrit Hirota.

Pandang persamaan sine-Gordon berpeubah *lightcone*  $u$  dan  $v$  sebagai berikut

$$U_{uv} = \sin U. \quad (\text{A.1})$$

Misalkan fungsi  $\rho(u, v)$  merupakan sebuah fungsi bantu (*auxiliary function*) yang memenuhi kondisi

$$\rho_{uv} = 1 - \cos U. \quad (\text{A.2})$$

Dengan memisalkan peubah kompleks  $w$  yang diberikan dalam bentuk

$$w = e^{\frac{\rho+iU}{4}}, \quad (\text{A.3})$$

kemudian, dengan menurunkannya terhadap  $u$ , diperoleh

$$\frac{1}{w} w_u = \frac{(\rho + iU)_u}{4}$$

atau

$$w_u = w \frac{(\rho + iU)_u}{4}.$$

Selanjutnya, turunkan terhadap  $v$  persamaan di atas, diperoleh bentuk:

$$\begin{aligned} w_{uv} &= w_v \frac{(\rho+iU)_u}{4} + w \frac{(\rho+iU)_{uv}}{4} \\ &= w_v \frac{w_u}{w} + w \frac{(\rho+iU)_{uv}}{4} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dengan mensubstitusikan  $U_{uv}$  dan  $\rho_{uv}$  yang ada dalam (A.4) dengan persamaan (A.1)-(A.2), akan diperoleh

$$\begin{aligned} w_{uv}w - w_uw_v &= \frac{1}{4}w^2 (1 - \cos U + i \sin U) \\ &= \frac{1}{4}w^2 (1 - (\cos U - i \sin U)) \\ &= \frac{1}{4}w^2 (1 - e^{-iU}) \\ &= \frac{1}{4} \left( w^2 - e^{\frac{\rho+iU}{2}} \cdot e^{-iU} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( w^2 - e^{\frac{\rho-iU}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4} (w^2 - \bar{w}^2) \end{aligned}$$

dimana  $\bar{w}$  adalah konyugat dari  $w$ .

Dengan demikian persamaan sine-Gordon (A.1) dapat diekspresikan kedalam

## Lampiran B      Aplikasi Metode *Staircase*: Komputasi Formula Eksplisit untuk Integral O $\Delta$ E sine-Gordon

Pandang pemetaan di  $\mathbb{R}^{z_1+z_2}$  yang dinyatakan dalam bentuk berikut,

$$\begin{aligned}\bar{V}_{z_1+z_2-1} &= \frac{(\theta_3 - \theta_1 V_{z_1} V_{z_2})}{V_0(\theta_2 V_{z_1} V_{z_2} - \theta_1)} \\ \bar{V}_{z_1+z_2-2} &= V_{z_1+z_2-1} \\ &\vdots \\ \bar{V}_1 &= V_2 \\ \bar{V}_0 &= V_1\end{aligned}\tag{B.1}$$

Dalam bagian ini perolehan sejumlah formula eksplisit untuk integral bagi pemetaan (B.1) dengan nilai  $z_1 = 1$  dan beberapa pilihan nilai  $z_2$ , yaitu untuk  $z_2 = 3, 4, 5, 6$ , dan  $7$  diperlihatkan.

**Untuk kasus  $z_1 = 1$  dan  $z_2 = 3$ .**

Dalam kasus ini pemetaan (B.1) didefinisikan pada  $\mathbb{R}^4$ . Komputasi terhadap *trace* matriks monodromi memberikan dua buah integral berikut:

$$H_0 = \theta_1 \left( \frac{V_0}{V_3} + \frac{V_3}{V_0} \right) - \theta_2 (V_0 V_1 + V_2 V_1 + V_2 V_3) - \theta_3 \left( \frac{1}{V_1 V_2} + \frac{1}{V_2 V_3} + \frac{1}{V_0 V_1} \right)$$

dan

$$H_2 = \theta_1 \left( \frac{V_0}{V_1} + \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_3}{V_2} + \frac{V_1}{V_2} + \frac{V_2}{V_3} + \frac{V_1}{V_0} \right) - \theta_2 (V_0 V_3) - \frac{\theta_3}{V_0 V_3}$$

Dapat diperiksa bahwa  $H_g = H_2$  dan  $K_g = H_0$ .

**Untuk kasus  $z_1 = 1$  dan  $z_2 = 4$ .**

Dalam kasus ini pemetaan (B.1) didefinisikan pada  $\mathbb{R}^5$ . Komputasi terhadap *trace* matriks monodromi memberikan dua buah integral berikut:

$$H_0 = \theta_1 \left( \frac{V_0}{V_4} + \frac{V_4}{V_0} \right) - \theta_2 (V_0 V_1 + V_2 V_1 + V_2 V_3 + V_3 V_4) - \theta_3 \left( \frac{1}{V_1 V_2} + \frac{1}{V_2 V_3} + \frac{1}{V_3 V_4} + \frac{1}{V_0 V_1} \right)$$

dan

$$\begin{aligned}H_2 &= \theta_1 \left( \frac{V_3 V_0}{V_1 V_2} + \frac{V_0}{V_2} + \frac{V_3 V_0}{V_1 V_4} + \frac{V_3}{V_1} + \frac{V_4}{V_2} + \frac{V_1 V_4}{V_0 V_3} + \frac{V_1 V_4}{V_2 V_3} + \frac{V_1}{V_3} + \frac{V_1 V_2}{V_0 V_3} + \frac{V_2}{V_4} + \frac{V_2 V_3}{V_1 V_4} + \frac{V_2}{V_0} \right) \\ &- \theta_2 \left( V_0 V_3 + \frac{V_0 V_4 V_3}{V_2} + V_1 V_4 + \frac{V_0 V_1 V_4}{V_2} \right) \\ &- \theta_3 \left( \frac{V_2}{V_0 V_1 V_4} + \frac{V_2}{V_0 V_3 V_4} + \frac{1}{V_0 V_3} + \frac{1}{V_1 V_4} \right)\end{aligned}$$

**Untuk kasus  $z_1 = 1$  dan  $z_2 = 5$ .**

## Riwayat Hidup

Penulis merupakan anak pertama dari tujuh bersaudara, dilahirkan di kota timah (Dabo Singkep), Riau Kepulauan pada tanggal 13 Pebruari 1969 dari orang tua bernama La Taka bin La Raha (Sulawesi Tenggara) dan Nur binti Sahidan (Riau Kepulauan).

Penulis mengikuti pendidikan sekolah dasar hingga sekolah menengah di Dabo Singkep-Riau Kepulauan. Pada tahun 1987, penulis melanjutkan pendidikan tingkat Strata 1 (S1) di Universitas Riau (Unri) Pekanbaru-Riau. Di tingkat S1, penulis diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau Pekanbaru dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada tahun 1993. Kemudian pada tahun 1994, penulis mengikuti seleksi sebagai CPNS sebagai tenaga pengajar di Universitas Lampung dan diterima menjadi staf pengajar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung pada tahun 1995. Pada pertengahan tahun 1998 penulis menerima beasiswa dari program DUE Project Unila-Dikti untuk melanjutkan studi pada program Magister di *School Mathematics, Science and Technology Faculty, La Trobe University, Melbourne-Australia*. Penulis memperoleh gelar Master of Science (M.Sc.) pada Mei 2001. Sempat bertugas sebagai staf pengajar dan sebagai sekretaris Jurusan Matematika FMIPA Unila periode (2001-2008) sebelum melanjutkan pendidikan di tingkat Strata 3 (S3) pada tahun 2011. Untuk program S3, penulis menerima beasiswa BPPDN (d/h BPPS) untuk menempuh studi Doktorat di Kelompok Keahlian Geometri dan Analisis FMIPA Institut Teknologi Bandung yang dibimbing/disupervisi oleh Dr. J.M. Tuwankotta dan Prof. Dr. M.W. Setya-Budhi.

Selama mengikuti Program Doktor, penulis telah mengikuti beberapa kegiatan ilmiah yang dijabarkan sebagai berikut.

### Pemakalah dalam Seminar Internasional

1. L. Zakaria, J.M. Tuwankotta, M.W. Setya-Budhi, *The Normal Form For The Integral Of 3-Dimensional Maps Derived From A  $\Delta\Delta$ -Sine-Gordon Equation on South East Asian Conference On Mathematics And Its Applications-SEACMA 2013*, in Institut Teknologi Surabaya-Indonesia at 13 - 14 November 2013.
2. L. Zakaria, J.M. Tuwankotta, M.W. Setya-Budhi, *Dynamics Of A Re-Parametrization Of Two Dimensional Map Derived From  $\Delta\Delta$ -Sine Gordon Equation on The International Conference on Mathematics and Natural Sciences 2014 (ICMNS 2014) in Institut Teknologi Bandung-Indonesia at 2 - 3 November 2014.*
3. L. Zakaria, J.M. Tuwankotta, *Dynamics of A Reparametrization Of Two-Dimensional Maps  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left( \frac{x_n(\lambda - \mu x_n)}{y_n(x_n - \mu)}, x_n \right)$*  on The 3rd IndoMS ICMA 2015 in UI Jakarta at 3-4 Nopember 2015.

### Pemakalah dalam Seminar Nasional

1. L. Zakaria, J.M. Tuwankotta, *Dinamik Hasil Reparameterisi Pemetaan-Pemetaan Yang Diturunkan Dari Persamaan Generalized  $\Delta\Delta$ -Sine Gordon* dalam Seminar Nasional Analisis, Geometri, dan Aplikasinya, di Unimed-Riset KK ITB Medan pada tanggal 07 Nopember 2015.

### **Publikasi Ilmiah**

1. L. Zakaria, J.M. Tuwankotta, and M.W. Setya Budhi., (2013): The Normal Form For The Integral Of 3-Dimensional Maps Derived From  $\Delta\Delta$ -Sine Gordon Equations *SEACMA Proceeding*, ISBN : 978-979-96152-8-2, – (1) 2013 : M-33.
2. L. Zakaria, and J.M. Tuwankotta., (2016): Dynamics and bifurcations in a two-dimensional maps derived from a generalized  $\Delta\Delta$  sine-Gordon equation, *Far East Journal of Dynamical Systems*, **28(3)**, pp 165–194.

### **Kegiatan Lain**

1. Peserta *Workshop on Integral and Differential Equation-WIDE: Six Lectures on Averaging Method and Normalization for Nonlinear Differential Equations*, Kelompok Keahlian Geometri dan Analisis FMIPA Institut Teknologi Bandung, 22 – 23 Agustus 2013, Institut Teknologi Bandung, Indonesia.
2. Peserta *Workshop on Discrete Solitons: Physics, Numerics, and Analytics*, Kelompok Keahlian Matematika Terapan FMIPA Institut Teknologi Bandung, 26 – 30 Agustus 2013, Institut Teknologi Bandung, Indonesia.
3. Peserta Simposium Nasional Matematika Analisis dan Aplikasinya, Kelompok Keahlian Geometri dan Analisis FMIPA Institut Teknologi Bandung dan KAMINDO, 29 – 30 Agustus 2014, Institut Teknologi Bandung, Indonesia.
4. Panitia *Mathematical Analysis and Geometry Day*, Kelompok Keahlian Geometri dan Analisis FMIPA Institut Teknologi Bandung, 18 April 2015, Institut Teknologi Bandung, Indonesia.

.....  
**Info cetak .....**

Revisi/cetak terakhir: 17 Januari 2017, pukul 17:57

Nomor halaman: i–xii, 1–65      Total: 78 halaman

.....