LAPORAN AKHIR

PENELITIAN DASAR UNGGULAN PERGURUAN TINGGI

KARAKTERISASI GRAF PETERSEN DIPERUMUM BERBILANGAN KROMATIK LOKASI EMPAT ATAU LIMA

Tahun ke 2 dari rencana 3 tahun

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. (00110476001)

Aristoteles, S.Si., M.Si. (0021058103)

Dr. Lyra Yulianti, S.Si., M.Si. (0006077507)

UNIVERSITAS LAMPUNG

NOVEMBER 2018

HALAMAN PENGESAHAN

Judul	: Karakterisasi Graf Petersen Berbilangan Kromatik Lokasi Empat atau Lima
Peneliti/Pelaksana	
Nama Lengkap	: Dr ASMIATI, S.Si, M.Si
Perguruan Tinggi	: Universitas Lampung
NIDN	: 0011047601
Jabatan Fungsional	: Lektor Kepala
Program Studi	: Matematika
Nomor HP	: 081369616149
Alamat surel (e-mail)	: asmiati308@yahoo.com, asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id
Anggota (1)	
Nama Lengkap	: ARISTOTELES S.Si, M.Si
NIDN	: 0021058103
Perguruan Tinggi	: Universitas Lampung
Anggota (2)	
Nama Lengkap	: Dr LYRA YULIANTI S.Si, M.Si
NIDN	: 0006077507
Perguruan Tinggi	: Universitas Andalas
Institusi Mitra (jika ada)	
Nama Institusi Mitra	: -
Alamat	: -
Penanggung Jawab	: -
Tahun Pelaksanaan	: Tahun ke 2 dari rencana 3 tahun
Biaya Tahun Berjalan	: Rp 50,000,000
Biaya Keseluruhan	: Rp 177,500,000

Mengetahui,
Dekan FMIPA Universitas Lampung

(Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D)
NIP/NIK 197102121995121001

Kota Bandar Lampung, 4 - 11 - 2018
Ketua,

(Dr ASMIATI, S.Si, M.Si)
NIP/NIK 197604112000122001

Menyetujui,
Ketua LPPM Universitas Lampung

(Warsono, Ph.D)
NIP/NIK 196302161987031003

RINGKASAN

Chartrand dkk. (2002) telah memperkenalkan konsep bilangan kromatik lokasi yang merupakan perpaduan dari konsep pewarnaan titik dan dimensi partisi graf (Chartrand dkk. (1998)). Kajian penentuan bilangan kromatik lokasi graf merupakan permasalahan *NP-hard* (Chartrand dkk. (2002)), yakni belum adanya teorema atau algoritma yang berlaku umum untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang kelas graf.

Kajian menarik dari bilangan kromatik lokasi adalah karakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi tertentu . Namun, hasil yang diperoleh masih sangat sedikit dan belum memuaskan. Chartrand dkk. (2003) telah melakukan karakterisasi graf berorder n dengan bilangan kromatik lokasinya n, yaitu graf multipartit. Selain itu, mereka juga telah melakukan karakterisasi graf dengan bilangan kromatik lokasinya (n-1). Selanjutnya, Chartrand dkk. (2003) telah mendapatkan sejumlah graf dengan bilangan kromatik lokasinya terbatas diatas oleh (n-2). Khusus untuk karakterisasi graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi 3 telah dikaji oleh Asmiati dkk. (2012), sedangkan Baskoro dan Asmiati (2013) secara umum telah mendapatkan karakterisasi graf pohon dengan bilangan kromatik lokasi 3. Tahun 2014, Asmiati dan Fitriani telah mengkaji graf amalgamasi pohon berbilangan kromatik lokasi empat, sedangkan Asmiati (2016) dan (2017) untuk bilangan kromatik lokasi graf - graf pohon tertentu.

Sejauh penelusuran literatur belum ada kajian tentang bilangan kromatik lokasi pada graf Petersen. Pada penelitian ini akan dikaji tentang karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat atau lima. Hasil yang akan diperoleh dari karakterisasi ini sangat penting untuk mengklasifikasikan graf-graf Petersen berdasarkan bilangan kromatik lokasinya, dan sebagai acuan untuk mengkarakterisasi graf Petersen dengan bilangan kromatik lokasi yang lebih tinggi.

Hasil-hasil yang kami peroleh pada tahun pertama telah kami desiminasikan pada *International Conference on Applied Sciences Mathematics and* Informatics (ICASMI), 13-15 Juli 2017, Bandar Lampung. Satu artikel telah disubmit ke *Science International Lahore*, terindex Thomson Reuters dengan judul *The locating chromatic number of subdivision firecracker graphs*. Hasil lain yang kami peroleh adalah karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat dan telah terbit di *Far East Journal of Mathematical Sciences*, terindex scopus dengan judul *On Some Petersen Graphs Having Locating Chromatic Number Four or Five*. Selanjutnya, kami juga telah mempresentasikan hasil-hasil utama ini pada *International Conference on Graph Theory and Information Security* (ICGTIS), 7-9 Agustus, di Universitas Indonesia.

Pada tahun kedua ini, hasil-hasil yang kami peroleh telah dipresentasikan pada *International Conference on Applied Sciences Mathematics and* Informatics (ICASMI), 9-11 Agustus 2018, di Bandar Lampung; *International Conference on Mathematics, Sciences, Education, and Technology* (ICOMSET), 4-5 Oktober 2018, di Universitas Negeri Padang, Padang. Satu artikel telah dipublikasikan ke jurnal international bereputasi terindeks scopus , yaitu : Asmiati, I Ketut Sadha Gunce Yana, Lyra Yulianti, 2018, On the Locating Chromatic Number of Some Barbell Graphs, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*; Jurnal internasional, yaitu Agus Irawan, Asmiati, 2018, The Locating chromatic number of subdivision firecracker graphs, *International Mathematical Forum*, 13(10), 485-492. Selanjutnya, satu atikel telah disubmit ke *International Journal of Physics Conference Series*, terindex Scopus, berjudul ‘’Locating Chromatic Number of a Disjoint Union of Some

Double Stars''. Draft buku referensi yang berjudul "Bilangan kromatik lokasi graf Petersen terus diperbaiki sehingga pada tahun berikutnya dapat segera terbit".

PRAKATA

Rasa syukur atas semua nikmatNya, yang telah memberikan kemudahan dan kelancaran sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian tahap awal ini dengan baik. Sebagai laporan dari hasil penelitian yang telah kami lakukan, kami susun dalam laporan akhir yang berjudul : Karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat atau lima.

Terimakasih kepada Direktoral Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI) yang telah memberikan dana penelitian Hibah Desentralisasi untuk kategori Penelitian Dasar Unggulan Perguruan Tinggi.

Terimakasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Unila yang telah membantu secara administratif sehingga penelitian ini dapat berjalan sesuai dengan proposal penelitian.

Terimakasih juga kepada Dekan FMIPA Unila yang memberikan dukungan bagi para dosennya untuk meningkatkan penelitian dan publikasi internasional.

Akhirnya, terima kasih kepada semua pihak di Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah membantu dan memberi dukungan yang tak henti-hentinya kepada penulis.

Semoga laporan akhir penelitian tahun kedua ini dapat dijadikan pertimbangan untuk kelanjutan penelitian pada tahun berikutnya.

Bandar Lampung, November 2018

Ketua Peneliti

DAFTAR ISI

Halaman Pengesahan

Ringkasan

Prakata

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Lampiran

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

1.2 Perumusan Masalah

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

3.2 Manfaat Penelitian

BAB 4. METODE PENELITIAN

3.1 Tempat Penelitian
3.2 Tahapan Penelitian
3.3 Road Map Penelitian

BAB 5. HASIL YANG DICAPAI

5.1 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Kembang Api yang Disubdivisi

5.2 Klasifikasi Graf Petersen Berbilangan Kromatik Lokasi Empat atau Lima

5.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel

BAB 6. RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA

BAB 7. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Graf barbel ($B_{n,n}$).

Gambar 2. Graf barbel ($B_{n,n}$) dengan pewarnaan titik.

Gambar 3 Pewarnaan lokasi minimum $B_{6,6}$.

Gambar 4. Graf barbel ($B_{n,m}$).

Gambar 5. Graf barbel ($B_{n,m}$) dengan pewarnaan titik.

Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{P_{6,1}}$.

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1998) sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik. Aplikasi dimensi metrik berperan dalam navigasi robotik (Saenpholphat dan Zhang (2004), optimasi penempatan sensor pendeteksi ancaman (Chatrand dan Zhang (2003)) maupun klasifikasi data senyawa kimia (Jhonson (1993)). Perkawinan antara konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf melahirkan konsep bilangan kromatik lokasi graf.

Pada bidang kimia, ikatan molekul-molekul dari suatu unsur atau senyawa kimia dapat digambarkan sebagai suatu graf. Pendataan terhadap ikatan molekul-molekul kimia dilakukan dengan mengklasifikasikan struktur dari graf yang digambarkan. Permasalahan akan muncul jika graf yang digambarkan adalah graf berukuran besar. Semakin besar graf kimia, semakin besar pula data yang perlu diperhatikan. Untuk memudahkan proses pendataan, digunakan konsep dimensi metrik untuk menentukan molekul-molekul yang menjadikan basis dari graf-graf kimia yang berukuran besar tersebut. Untuk selanjutnya data yang dientri adalah data dari molekul-molekul basis tersebut (Jhonson (1993)).

Penentuan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf secara umum merupakan persoalan NP-hard (Chartrand dkk. (2002)). Karenanya, kajian penentuan bilangan kromatik lokasi graf dilakukan dengan membatasi untuk kelas-kelas graf tertentu atau dengan membatasi untuk bilangan kromatik lokasi tertentu. Hasil yang didapat antara lain pada graf lintasan, lingkaran, dan graf bintang ganda. Chartrand dkk. (2003) telah berhasil mengkonstruksi graf pohon berorder $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasinya bervariasi mulai dari 3 sampai dengan n, kecuali n-1. Kemudian Behtoei dan Omoomi (2011c), telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf Kneser.

Bilangan kromatik lokasi merupakan salah satu kajian yang masih menarik sampai saat ini, beberapa peneliti telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil operasi. Behtoei dan Omoomi (2011b) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari grid, perkalian kartesian untuk lintasan dan graf lengkap, serta perkalian kartesian dari dua buah graf lengkap. Selanjutnya, Behtoei dan Omoomi (2011a) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi untuk perkalian join dari dua graf, graf kipas, graf roda, dan graf persahabatan.

Khusus untuk graf pohon, Asmiati dkk. (2011) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang dan sifat kemonotonannya dan Asmiati dkk. (2012) untuk graf kembang api. Selanjutnya, secara umum Asmiati (2014a) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf amalgamasi bintang tak homogen.

Pada masalah karakterisasi bilangan kromatik lokasi, Chartrand dkk. (2002) telah mendapatkan hasil bahwa satu-satunya graf berorde n dengan bilangan kromatik lokasinya n adalah graf multipartit lengkap. Mereka juga telah berhasil mengkarakterisasi graf berorde n dengan bilangan kromatik lokasinya n atau (n-1). Pada tahun 2012, Asmiati dan Baskoro telah berhasil mengkarakterisasi graf berorde n yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga. Secara umum, Baskoro dan Asmiati (2013) telah berhasil mengkarakterisasi semua graf pohon berorde n berbilangan kromatik lokasi tiga. Pada tahun 2014, Asmiati dan Fitriani telah mendapatkan graf amalgamasi pohon berbilangan kromatik lokasi empat. Berdasarkan hasil yang diperoleh oleh Asmiati dan Fitriani (2014b), maka Asmiati (2016) dan (2017) berhasil menentukan beberapa bilangan kromatik lokasi graf pohon lainnya.

Salah satu kelas graf yang terkenal adalah graf Petersen. Graf Petersen sangat popular untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal (*counter example*) dan mempunyai sifat-sifat menarik. Salah satu aplikasi dimensi metrik adalah menentukan minimum banyaknya alat pendeteksi sensor kebakaran yang harus ditempatkan di beberapa ruangan di dalam sebuah gedung. Letak ruangan di gedung tersebut dapat direpresentasikan sebagai graf Petersen.

1.2 Perumusan Masalah

Sejauh penelusuran literatur belum ada kajian tentang bilangan kromatik lokasi pada graf Petersen. Jadi pada penelitian ini, akan dikaji tentang bilangan kromatik lokasi pada graf Petersen. Lebih jauh lagi akan dilakukan karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi tertentu, yang dimulai dengan mengkarakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat. Hasil yang didapat sebagai parameter untuk melanjutkan karakterisasi graf Petersen dengan bilangan kromatik lokasi lima atau yang lebih besar dari lima.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan definisi bilangan kromatik lokasi beserta sifatnya. Hasil awal dari graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat akan didiskusikan pada sub bab selanjutnya.

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. (2002). Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf.

Konsep pewarnaan graf muncul sebagai model dalam menyelesaikan permasalahan pewarnaan peta. Pada tanggal 23 Oktober 1852, Frederick Guthri (1833-1886), mahasiswa di University College London, mengunjungi profesor matematika, Augustus De Morgan (1806-1871), untuk menyampaikan penemuan matematika dari kakak lelakinya, Francis Guthrie (1831-1899). Beliau mendapatkan konjektur empat warna (*The Four Color Conjecture*) yang menyatakan: Semua negara di peta dapat diwarnai dengan menggunakan maksimal emapat warna sedemikian sehingga dua negara yang berbatasan mempunyai warna berbeda. Keinginan yang kuat dari para matematikawan untuk menyelesaikan permasalahan empat warna tersebut menginspirasi munculnya konsep pewarnaan daerah, titik, sisi, dan graf planar. Konsep inilah yang digunakan untuk mewarnai graf secara umum.

Berikut ini definisi dari bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand dkk. (2002). Misalkan $G=(V,E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u)\neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut *kelas warna*, maka $\Pi=\{C_1,C_2,\ldots,C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. *Kode warna*, $c_\Pi(v)$ dari dari v adalah k-urutan $\left(d(v,C_1),d(v,C_2),\ldots,d(v,C_k)\right)$ dengan $d(v,C_i)=\min\{d(v,x)\,|\,x\in C_i\}$ untuk $1\leq i\leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut *pewarnaan lokasi* dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Hasil yang didapat oleh Chartrand dkk. (2002) antara lain, $\chi_L(P_n)=3$ untuk $n \geq 3$; untuk $n \geq 3$ berlaku $\chi_L(C_n)$, adalah 3 jika n ganjil dan 4 jika n genap; untuk graf bintang ganda $(S_{a,b})$, $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, bilangan kromatik lokasinya adalah $b+1$. Misalkan G graf terhubung berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G)=n$ jika dan hanya jika G graf multipartit lengkap. Chartrand dkk.(2002) juga telah menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi n jika dan hanya jika $k \in \{3,4,...,n-2,n\}$.

Berikut ini adalah hasil-hasil yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk. (2002) .Misalkan $N(v)$ adalah himpunan tetangga dari titik v di G.

Teorema 1. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w)=d(v,w)$ untuk semua $w \in V(G)-\{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u)=N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 1. Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k+1$.

Teorema 2. (Chartrand dkk. (2002))

Bilangan kromatik lokasi graf lingkaran C_n, n titik adalah 3 jika n ganjil dan 4 jika n genap.

BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkarakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi tertentu. Beberapa permasalahan yang akan ditinjau adalah:

1. Melakukan klasifikasi dan karakterisasi semua graf Petersen berbilangan kromatik lokasi 4. Permasalahan ini telah terselesaikan pada tahun pertama.
2. Menentukan klasifikasi dan karakterisasi semua graf Petersen berbilangan kromatik lokasi 5. Permasalahan ini sebagian telah diselesaikan pada tahun kedua.
3. Menentukan klasifikasi dan karakterisasi semua graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lebih besar dari 5. Permasalahan ini akan diselesaikan pada tahun ketiga.

3.2 Manfaat Penelitian

Metode atau teori baru yang diperoleh dari penelitian ini dapat digunakan untuk mengkarakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat, lima, atau lebih besar dari lima. Selain itu, karena graf Petersen memuat siklus, maka diharapkan metode tersebut juga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan karakterisasi graf memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tertentu.

BAB 4 METODE PENELITIAN

4.1. Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas MIPA, Universitas Lampung.

4.2. Tahapan Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan dalam 3 tahapan:

1. Tahap Pendahuluan. Pada tahap ini akan dilakukan pencarian literatur yang berkaitan dengan topik bilangan kromatik lokasi dari suatu graf. Proses pencarian ini diikuti dengan proses pemahaman dan pemetaan penelitian, serta melakukan penelitian awal bilangan kromatik lokasi graf Petersen.

2. Tahap Penelitian. Pada tahapan ini akan dilakukan kajian dari masalah penelitian yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Untuk selengkapnya, tahapan untuk masing-masing masalah adalah sebagai berikut.
   - Metode yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf Petersen P, $\chi_L(P)$ adalah dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari $\chi_L(P)$.
   - Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Petersen.
     Graf Petersen memuat silkus ganjil atau genap. Maka, berdasarkan Teorema 2, untuk graf Petersen yang memuat siklus ganjil sekurang-kurangnya warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf Petersen adalah 3. Jadi, $\chi_L(P) \geq 3$. Sedangkan untuk graf Petersen yang memuat siklus genap sekurang-kurangnya warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf Petersen adalah 4.
   - Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Petersen.
     Batas atas bilangan kromatik lokasi graf Petersen dapat ditentukan dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi. Konstruksi dapat diawali dari pewarnaan sejati dari titik-titik pada graf Petersen sehingga diperoleh kelas-kelas warna atau partisi pembeda graf tersebut. Kemudian dimodifikasi

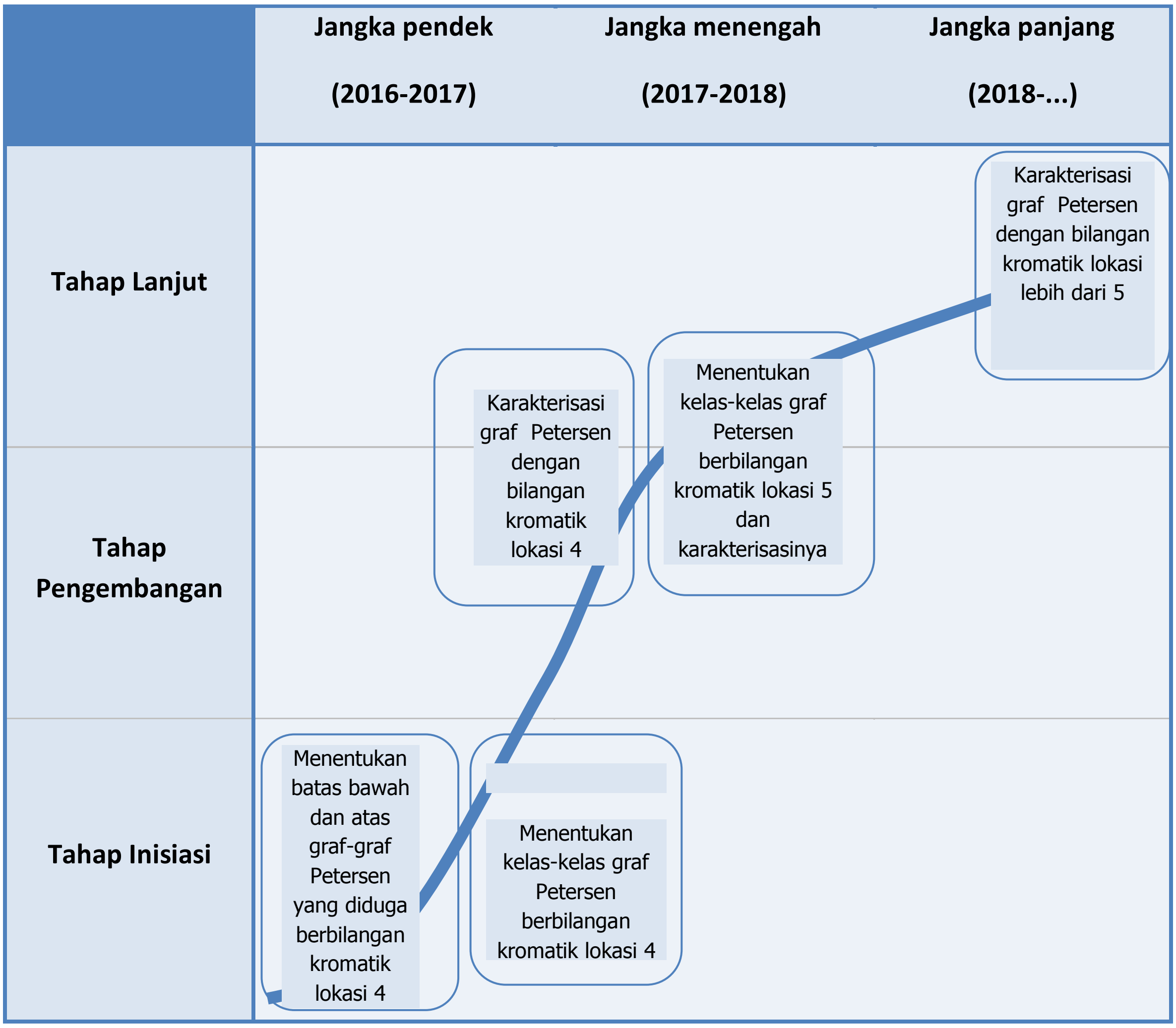
sehingga memenuhi kriteria pewarnaan lokasi dengan memperhatikan bentuk struktuk dari graf Petersen itu.

- Mengklasifikasi graf-graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat atau lima.
- Menentukan syarat perlu dan syarat cukup dari graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat, sehingga diperoleh klasifikasi graf Petersen dengan bilangan kromatik lokasi empat. Setelah itu, dilakukan karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat.
- Membuktikan hasil-hasil karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat yang dirumuskan dalam bentuk teorema.
- Selanjutnya hal yang sama untuk mengklasifikasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima.
- Syarat perlu atau syarat cukup yang telah diperoleh pada Langkah e, dianalisis apakah masih dapat digunakan untuk graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima. Andaikan tidak dapat digunakan maka perlu ditentukan syarat perlu atau cukup suatu graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima.
- Mengkarakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima.
- Membuktikan hasil-hasil karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima yang dirumuskan dalam bentuk teorema.
- Hasil yang didapatkan pada langkah sebelumnya, menjadi parameter untuk mendapatkan karakterisasi graf Petersen dengan bilangan kromatik lokasi yang lebih tinggi.

3. Tahap Penulisan dan publikasi. Dalam tahapan ini, semua hasil yang diperoleh akan ditulis dalam 2 artikel yang akan dipublikasikan ke jurnal internasional atau jurnal internasional bereputasi. Hasil-hasil penelitian ini juga akan diseminarkan dalam forum ilmiah tingkat nasional maupun internasional.

4.3 Road Map Penelitian

Peta jalan untuk penelitian karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik-lokasi empat atau lima, diberikan dalam gambar berikut.



BAB 5 HASIL YANG DICAPAI

Pada bagian akan didiskusikan hasil yang sudah dicapai pada tahun pertama dan kedua. Pada tahun pertama, telah diperoleh karakterisasi graf Petersensen berbilangan kromatik lokasi empat. Pada tahun kedua ini, hasil yang diperoleh adalah klasifikasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima

5.1 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Kembang Api yang di subdivisi.

$F^{s*}_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dengan mensubdivisi graf $F^{*}_{n,k}$ sebanyak $s \geq 2$ titik genap pada masing – masing sisi $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$; $\forall\, i = 1,2,\dots,n$. Akibatnya $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$ menjadi sebuah lintasan ; $\forall\, i = 1,2,\dots,n$. Misalkan lintasan $x_i y_i = \{x_i, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, y_i\}$; $\forall\, r = 1,2,\dots,s$,untuk $s \geq 2$ genap, lintasan $y_i m_i = \{x_i, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ir}, m_i\}$; $\forall\, r = 1,2,\dots,s$,untuk $s \geq 2$ genap.

untuk $k \geq 5$

$$\chi_L(F^{*}_{n,k}) = \begin{cases} k-1 \,;\, 1 \leq n \leq k-1 \\ k \quad\;\; ;\text{lainya} \end{cases}$$

Akan ditunjukan bahwa untuk $k \geq 5$, $\chi_L(F^{*}_{n,k}) = k$ jika $n \geq k$ dan $\chi_L(F^{*}_{n,k}) = k-1$, jika $1 \leq n \leq k-1$ .Pandang dua kasus berikut ini:

Kasus 1. Untuk $k \geq 5$ dan $1 \leq n \leq k-1$.

Pertama akan ditunjukan batas bawah dari $F^{*}_{n,k}$ untuk $k \geq 5$ dan $1 \leq n \leq k-1$ karena setiap titik l_i bertetangga dengan $(k-2)$ daun dan, maka berdasarkan Akibat 1, $\chi_L(F^{*}_{n,k}) \geq\; k-1$. Akan ditunjukan bahwa $\chi_L(F^{*}_{n,k}) \leq\; k-1$ untuk $k \geq 5$ dan $n \leq k-1$. Definisikan suatu pewarnaan $(k-1)$ pada $F^{*}_{n,k}$ sebagai berikut. Beri warna $c(m_i) = i$, untuk $i \in [1,n]$ dan semua daun: $\{l_{ij} | j = 1,2,\dots,k-2\}$ dengan $\{1,2,\dots,k-1\} \backslash \{i\}$ untuk sembarang i. Selanjutnya $c(y_i) = 2$, untuk i ganjil dan 1 untuk i genap. $c(x_i) \neq c(m_i)$ untuk $i \in [1,2,\dots,k-1]$. Akibatnya, pewarnaan c akan membangun suatu partisi $\prod = \{U_1, U_2, \dots, U_{k-1}\}$ pada $V(F^{*}_{n,k})$, dengan U_i adalah himpunan dari semua titik yang berwarna *i*.

Akan ditunjukan bahwa kode warna untuk semua titik di $F^*_{n,k}$ untuk $k \geq 5$ dan $n \leq k-1$. Misalkan $u, v \in V(F^*_{n,k})$ dan $c(u) = c(v)$ maka pandang kasus – kasus berikut ini :

- Jika $u = l_{ij}, v = l_{jl}$ untuk suatu i, j, h, l dan $i \neq j$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena $d(u, U_i) \neq d(v, U_i)$.
- Jika $u = l_{ih}, v = m_j$ untuk suatu i, j, h, dan $i \neq j$, maka karena u bukan titik dominan dan v harus menjadi titik dominan . Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = l_{ih}, v = y_j$ untuk suatu i, j, h, dan $i \neq j$, maka terdapat tepat satu himpunan di Π yang mempunyai jarak 1 di u dan terdapat sedikitnya dua himpunan di Π yang mempunyai jarak 1 di v. Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = l_{ih}, v = x_j$ untuk suatu i, j, h, dan $i \neq j$, maka terdapat tepat satu himpunan di Π yang mempunyai jarak 1 di u dan terdapat sedikitnya dua himpunan di Π yang mempunyai jarak 1 di v. Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = m_i, v = y_j$ untuk suatu i, j dan $i \neq j$, maka karena u harus menjadi titik dominan dan v bukan titik dominan. Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = m_i, v = x_j$ untuk suatu i, j dan $i \neq j$, maka karena u harus menjadi titik dominan dan v bukan titik dominan. Jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = y_i, v = x_j$ untuk suatu i, j dan $i \neq j$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena $d(u, U_i) \neq d(v, U_i)$.
- Jika $u = x_i$ dan $v = x_j$ maka $i = 1$ dan $j = n$ jadi $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.

Berdasarkan semua kasus di atas dapat disimpulkan bahwa kode warna dari semua titik di $F^*_{n,k}$ untuk $k \geq 5$, $n \leq k-1$ adalah berbeda, jadi $\boldsymbol{\chi_L(F^*_{n,k}) \leq k-1}$ untuk $\boldsymbol{1 \leq n \leq k-1}$.

$F^{s*}_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dengan mensubdivisi graf $F^*_{n,k}$ sebanyak $s \geq 2$ titik genap pada $x_i y_i$; $\forall\, i = 1,2, \dots, n$. Akibatnya $x_i y_i$ menjadi sebuah lintasan ; $\forall\, i = 1,2, \dots, n$. Misalkan lintasan $x_i y_i = \{x_i, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, y_i\}$; $\forall$ r = 1,2, …, s ,untuk $s \geq 2$ genap.

Akan ditunjukan bahwa $\chi_L(F^{s*}_{n,k}) \leq k-1$ untuk $k \geq 5$ dan $n \leq k-1$. Definisikan suatu pewarnaan $(k-1)$ pada $F^{s*}_{n,k}$ sebagai berikut. Beri warna $c(m_i) = i$, untuk $i \in [1, n]$ dan semua daun: $\{l_{ij} | j = 1,2, \dots, k-2\}$ dengan $\{1,2,\dots,k-1\} \backslash \{i\}$ untuk sembarang i. Selanjutnya $c(y_i) = 2$, untuk i ganjil dan 1 untuk i genap. $c(x_i) \neq c(m_i)$ untuk $i \in [1,2,\dots,k-1]$. Untuk $a_{ir} = y_i$ untuk r ganjil dan $a_{ir} = x_i$ untuk r genap; $\forall$ $r = 1,2,\dots,s$,untuk $s \geq 2$ genap. Akibatnya, pewarnaan c akan membangun suatu partisi $\Pi = \{U_1, U_2, \dots, U_{k-1}\}$ pada $V(F^*_{n,k})$, dengan U_i adalah himpunan dari semua titik yang berwarna i.

Kasus 2. Untuk Untuk k ≥ 5 dan $n \geq k$

Akan ditentukan batas bawah untuk k ≥ 5 dan $n \geq k$. Berdasarkan akibat ...... , diperoleh $\chi_L(F^*_{n,k}) \geq k-1$, tetapi akan ditujukan bahwa $k-1$ warna tidaklah cukup untuk mewarnai. Untuk suatu kontradiksi, andaikan terdapat pewarnaan $(k-1)$ lokasi c pada $F^*_{n,k}$ untuk k ≥ 5 dan $n \geq k$. Karena $n \geq k$, maka terdapat dua i, j, $i \neq j$ sedemikian sehingga $\{c(l_{ih}) | h = 1,2,\dots,k-2\} = \{c(l_{jl}) | h = 1,2,\dots,k-2\}$ akibatnya kode warna m_i dan m_j akan sama, suatu kontradiksi. Jadi $\boldsymbol{\chi_L(F^*_{n,k}) \geq 4}$ ***untuk*** $\boldsymbol{n \geq k}$.

Akan ditentukan batas atas dari $F^*_{n,k}$ untuk k ≥ 5, $n \geq k$. Untuk menunjukan $F^*_{n,k} \leq k$, $k \geq 5$ dan $n \geq k$ pandang pewarnaan lokasi c pada $F^*_{n,k}$ sebagai berikut :

- $c(x_i) = 1$ jika i ganjil dan $c(x_i) = 3$ jika i genap.
- $c(m_i) = 1$, untuk setiap i.
- $c(y_i) = 2$, untuk setiap i.
- Jika $A = \{1,2,\dots,k\}$, definisikan

$$\{c(l_{ij}) | j = 1,2,\dots,k-1\} = \begin{cases} A \backslash \{1, k-1\} & \text{jika } i = 1 \\ A \backslash \{1, k\} & \text{lainya.} \end{cases}$$

Pewarnaan c akan membangun suatu partisi Π pada $V(F^*_{n,k})$.

Jadi, c adalah pewarnaaan lokasi pada $F^*_{n,k}$ untuk $n \geq k$ dan diperoleh $\chi_L(F^*_{n,k}) = k$ untuk $n \geq k$.

Karena warna k hanya digunakan untuk mewarnai l_{1j}, mengakibatkan kode warna semua titik di $F^*_{n,k}$ adalah berbeda.

$F_{n,k}^{s*}$ adalah graf yang diperoleh dengan mensubdivisi graf $F_{n,k}^{*}$ sebanyak $s \geq 2$ titik genap pada masing – masing sisi $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$; $\forall\, i = 1,2, \ldots, n$. Akibatnya $x_i y_i$ dan $y_i\, m_i$ menjadi sebuah lintasan ; $\forall\, i = 1,2, \ldots, n$. Misalkan lintasan $x_i y_i = \{x_i, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}, y_i\}$; $\forall\, r = 1,2, \ldots, s$,untuk $s \geq 2$ genap, lintasan $y_i m_i = \{x_i, b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ir}, m_i\}$; $\forall\, r = 1,2, \ldots, s$,untuk $s \geq 2$ genap.

Untuk $a_{ir} = y_i$ untuk r ganjil dan $a_{ir} = x_i$ untuk r genap, untuk $b_{ir} = m_i$ untuk r ganjil dan $b_{ir} = y_i$ untuk r genap; $\forall\, r = 1,2, \ldots, s$,untuk $s \geq 2$ genap. Misalkan $u, v \in V(F_{n,k}^{*s})$ dan $c(u) = c(v)$ maka :

- Jika $u = a_{ih}$ dan $v = a_{jl}$ untuk suatu i, j, h, l dan $i \neq j$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = b_{ih}$ dan $v = b_{jl}$ untuk suatu i, j, h, l dan $\neq j$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
- Jika $u = a_{ih}$ dan $v = b_{jl}$ untuk suatu i, j, h, l dan $\neq j$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.

Karena warna k hanya digunakan untuk mewarnai l_{1j}, mengakibatkan kode warna semua titik di $F_{n,k}^{s*}$ adalah berbeda. Hasil-hasil yang telah diperoleh ini telah di presentasikan pada ***International Conference on Applied Sciences Mathematics and* Informatics** (ICASMI), 13-15 Juli 2017, Bandar Lampung dan telah terbit, yaitu Agus Irawan, Asmiati, 2018, The Locating chromatic number of subdivision firecracker graphs, ***International Mathematical Forum***, **13**(**10**), 485-492.

5.2 Klasifikasi Graf Petersen Berbilangan Kromatik Lokasi Empat atau Lima

a. Bilangan kromatik lokasi pada Graf Petersen $P_{n,1}$ dengan $n \geq 3$ ganjil

Pada bagian ini akan didiskusikan tentang bilangan kromatik lokasi graf Petersen $P_{n,1}$ untuk n ganjil. Karena $P_{n,1}$, memuat siklus genap, maka berdasarkan Teorema 2 diperoleh $\chi_L(P_{n,1}) \geq 4$. Selanjutnya untuk menentukan batas atasnya, titik-titik pada $V(P_{n,1})$ dipartisi sebagai berikut :

$C_1 = \{u_1\}$; $C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}$; $C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}$; $C_4 = \{v_n\}$.

Kode warnanya adalah :

$\boldsymbol{C_1 = \{u_1\}}$

Warna 1 hanya terletak pada u_1, karena pembuktian ini mempertahankan warna 1 hanya ada pada satu titik yaitu di titik u_1. Sehingga $c_\Pi(u_1)$ selalu tetap yaitu (0, 1, 1, 2).

$\boldsymbol{C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}}$

Untuk u_i, $2 \leq i \leq n - 1$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dan v_i, $1 \leq i \leq n - 2$; $i = 2j - 1$; $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Untuk $i < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = (i - 1, 0, 1, i + 1)$

$c_\Pi(v_i) = (i, 0, 1, i)$

Untuk $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+1}) = (i - 1, 0, 1, 2j)$

$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j}) = (i, 0, 1, 2j)$

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+1}) = (2j, 0, 1, 2j)$

$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j}) = (2j + 2, 0, 1, 2j)$

$\boldsymbol{C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}}$

Untuk u_i, $3 \leq i \leq n$; $i = 2j + 1$; $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dan v_i, $2 \leq i \leq n - 1$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Untuk $i < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = (i - 1, 1, 0, i + 1)$

$c_\Pi(v_i) = (i, 1, 0, i)$

Untuk $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+2}) = (i - 1, 0, 1, 2j - 1)$

$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j+1}) = (i, 1, 0, 2j - 1)$

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+2}) = (2j - 1, 1, 0, 2j - 1)$

$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j+1}) = (2j + 1, 1, 0, 2j - 1)$

$\boldsymbol{C_4 = \{v_n\}}$

Warna 4 hanya terletak pada v_n, karena pembuktian ini meletakkan warna 4 pada titik terakhir, sehingga warna 4 hanya ada pada satu titik yaitu di titik v_n. Akibatnya $c_\Pi(v_n)$ selalu tetap yaitu (2, 1, 1, 0). Karena tidak ada kode warna yang sama maka C merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya dibutuhkan maksimal 4 warna untuk mewarnai $P_{n,1}$ untuk n

ganjil, jadi $\chi_L(P_{n,1}) \leq 4$. Dapat disimpulkan bahwa, Graf Petersen $P_{n,1}$ untuk $n \geq 3$, $\chi_L(P_{n,1}) = 4$ jika n bilangan ganjil.

b. Bilangan kromatik lokasi pada Graf Petersen $P_{n,1}$ dengan $n \geq 4$ genap

Dipandang untuk sisi $u_i \rightarrow u_{i+1}$ maka jumlah n genap sehingga berdasarkan Teorema 2, maka $\chi_L(P_{n,1}) = 4$. Misalkan, $\chi_L(P_{n,1}) = 4$, maka $C_1 = \{u_1\}$; $C_2 = \{u_{2i}, v_{2i-1}\}$; $C_3 = \{u_{2i+1}, v_{2i}\}$ dan $C_4 = \{u_n\}$ untuk $i > 0$. Maka terdapat kode warna yang sama, yaitu $c_\Pi(u_2) = c_\Pi(v_1)$. Karena terdapat kode warna yang sama maka C bukan pewarnaan lokasi. Akibatnya dibutuhkan minimal 5 warna untuk mewarnai $P_{n,1}$ untuk n genap, jadi $\chi_L(P_{n,1}) \geq 5$.

Selanjutnya akan ditentukan batas atas dari graf Petersen $\chi_L(P_{n,1})$ untuk n genap. Titik-titik pada $V(P_{n,1})$ dipartisi sebagai berikut :

$C_1 = \{u_1\}$; $C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}$; $C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}$; $C_4 = \{u_n\}$; $C_5 = \{v_n\}$.

$C_1 = \{u_1\}$

Warna 1 hanya terletak pada u_1, karena pembuktian ini mempertahankan warna 1 hanya ada pada satu titik yaitu di titik u_1. Sehingga $c_\Pi(u_1)$ selalu tetap yaitu (0, 1, 2, 1, 2).

$C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}$

Untuk u_i, $1 \leq i \leq n-2$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ dan v_i, $1 \leq i \leq n-1$; $i = 2j-1$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$

Untuk $i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = (i-1, 0, 1, i, i+1)$

$c_\Pi(v_i) = (i, 0, 1, i+1, i)$

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j}) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j+1)$

$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j+1}) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j-1)$

$C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}$

Untuk u_i, $1 \leq i \leq n-1$; $i = 2j+1$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ dan v_i, $1 \leq i \leq n-2$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$

Untuk $i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$c_\Pi(u_i) = (i-1, 1, 0, i, i+1)$

$c_\Pi(v_i) = (i, 1, 0, i+1, i)$

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$$c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+1}) = (2j, 1, 0, 2j-1, 2j)$$

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j}) = (2j+2, 1, 0, 2j+1, 2j)$$

$C_4 = \{u_n\}$

Warna 4 hanya terletak pada u_n, karena pembuktian ini meletakkan warna 4 pada titik terakhir, sehingga warna 4 hanya ada pada satu titik yaitu di titik u_n. Akibatnya $c_\Pi(u_n)$ selalu tetap yaitu (1, 2, 1, 0, 1).

$C_5 = \{v_n\}$

Warna 5 hanya terletak pada v_n, karena pembuktian ini meletakkan warna 5 pada titik terakhir, sehingga warna 5 hanya ada pada satu titik yaitu di titik v_n. Akibatnya $c_\Pi(v_n)$ selalu tetap yaitu (2, 1, 2, 1, 0).

Karena tidak ada kode warna yang sama maka C merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya dibutuhkan maksimal 5 warna untuk mewarnai $P_{n,1}$ untuk n genap, jadi $\chi_L(P_{n,1}) \leq 5$. Dapat disimpulkan bahwa, Graf Petersen $P_{n,1}$ untuk $n \geq 3$, $\chi_L(P_{n,1}) = 5$, untuk n bilangan genap.

Hasil- hasil yang telah diperoleh pada bagian ini telah dipublikasikan pada jurnal international bereputasi terindeks Scopus, yaitu: **Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, Lyra Yulianti, 2017, On Some Petersen Graphs Having Locating Chromatic Number Four or Five, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 102(4), 769-778.**

Berdasarkan hasil-hasil klasifikasi graf-graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat atau lima, maka diperoleh suatu konjektur : Graf Petersen P berbilangan kromatik lokasi empat jika dan hanya jika $P = P_{n,1}$, untuk $n \geq 3$ ganjil atau $P_{4,2}$.

Hasil berupa konjektur itu telah di presentasikan pada ***International Conference on Graph Theory and Information Security*** (ICGTIS), 7-9 Agustus, di Universitas Indonesia.

5.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel

a. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel Lengkap Seragam

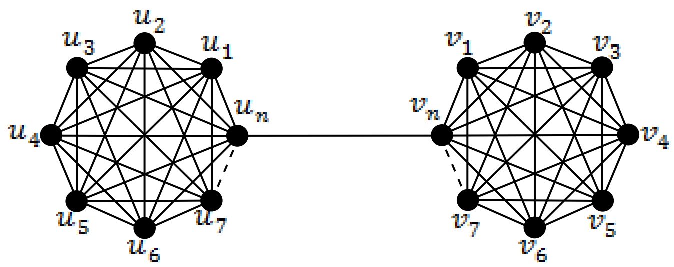
Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya saling bertetangga, dinotasikan dengan (K_n) dengan n adalah banyaknya titik dan $n \geq 2$. Banyaknya sisi pada suatu graf lengkap adalah $n(n-1)/2$ dan masing-masing titik berderajat $n-1$ (Deo, 1989).

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan/jiplakan dari graf lengkap atau graf Petersen yang dihubungkan dengan sebuah jembatan/sisi, yang dinotasikan dengan ($B_{n,n}$) dimana $n \geq 3$ dan n adalah bilangan asli (Ihwan, dkk., 2014).

Hasil 1

Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{n,n}$) adalah $n+1$, untuk $n \geq 3$.

Bukti:

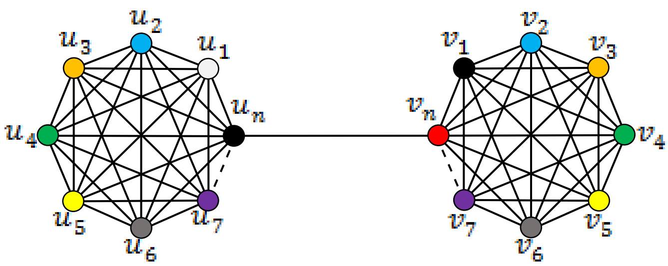


Gambar 1. Graf barbel ($B_{n,n}$).

Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf barbel ($B_{n,n}$). Karena graf barbel ($B_{n,n}$) memuat graf lengkap (K_n) maka berdasarkan Teorema 1, akan memiliki $\chi_L(B_{n,n}) \geq n$. Misalkan c pewarnaan titik dengan menggunakan n warna, maka pada kedua graf lengkap (K_n) yang terdapat pada graf barbel tersebut akan ada yang mempunyai kode warna yang sama. Sehingga kontradiksi untuk $\chi_L(B_{n,n}) = n$, jadi dibutuhkan sekurang-kurangnya $(n+1)$ warna untuk mewarnai graf barbel tersebut.

Sehingga $\chi_L(B_{n,n}) \geq n+1$.

Selanjutnya graf barbel $(B_{n,n})$ diberikan pewarnaan sebagai berikut:



Gambar 2. Graf barbel $(B_{n,n})$ dengan pewarnaan titik.

Diberikan titik-titik di $(B_{n,n})$ sebagai berikut:

Titik di (K_n) pertama : u_i ; $i \in [1,2,\dots,n]$

Titik di (K_n) kedua : v_i ; $i \in [1,2,\dots,n]$

Misalkan c adalah pewarnaan titik yang diberikan dengan menggunakan $n+1$ warna, sedemikian sehingga diperoleh:

$c(u_i) = i$; $1 \leq i \leq n$

$$c(v_i) = \begin{cases} i & ; 2 \leq i \leq n-1 \\ n & ; i = 1 \\ n+1 & ; i \text{ lainnya} \end{cases}$$

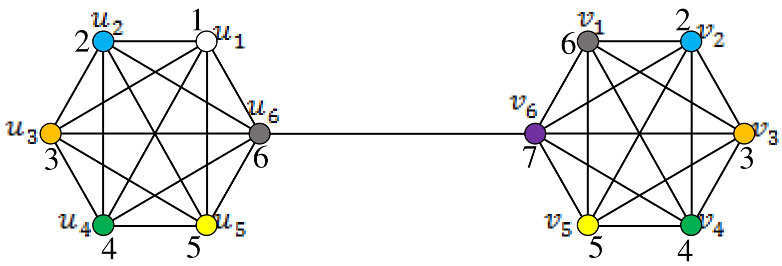
Maka diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$c_\Pi(u_i) = \begin{cases} 0 & ; \text{komponen ke-}(i) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 2 & ; \text{komponen ke-}(n+1) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 & ; \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

$$c_{\Pi}(v_i) = \begin{cases} 0 & ;\text{ komponen ke-}(i) \text{ untuk } 2 \le i \le n-1 \\ & \;\; \text{komponen ke-}(n) \text{ untuk } i = 1 \\ & \;\; \text{komponen ke-}(n+1) \text{ untuk } i = n \\ 3 & ;\text{ komponen ke-}(1) \text{ untuk } 1 \le i \le n-1 \\ 2 & ;\text{ komponen ke-}(1) \text{ untuk } i = n \\ 1 & ;\text{ komponen lainnya} \end{cases}$$

Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L(B_{n,n}) \le n+1$. Jadi, $\chi_L(B_{n,n}) = n+1$, untuk $n \ge 3$.

Berikut ini adalah contoh pewarnaan lokasi pada Graf Barbel lengkap $B_{6,6}$.

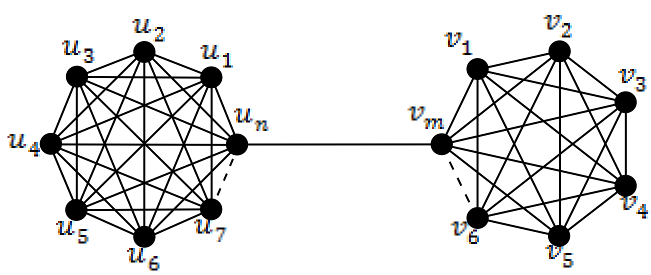


Gambar 3 Pewarnaan lokasi minimum $B_{6,6}$.

b. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel Lengkap Tak Seragam

Hasil 2. Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{n,m}$) adalah $maks\ \{n, m\}$, untuk $n, m \ge 3$ dan $n \ne m$

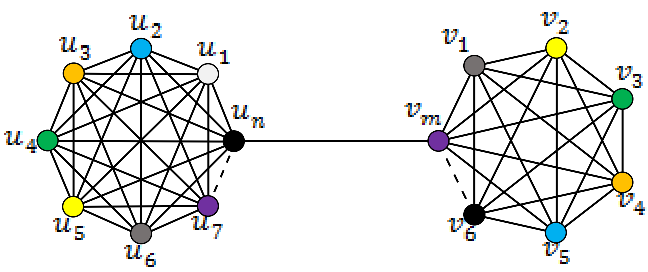
Bukti:



Gambar 4. Graf barbel ($B_{n,m}$).

Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf barbel ($B_{n,m}$). Karena graf barbel ($B_{n,m}$) memuat graf lengkap (K_n) dan (K_m) maka berdasarkan Teorema 1, akan memiliki $X_L\left(B_{n,m}\right) \geq maks\{n,m\}$.

Selanjutnya graf barbel ($B_{n,m}$) diberikan pewarnaan sebagai berikut:



Gambar 5. Graf barbel ($B_{n,m}$) dengan pewarnaan titik.

Diberikan titik-titik di $(B_{n,m})$ untuk $n > m$ sebagai berikut:

Titik di (K_n) : u_i ; $i \in [1,2, \ldots, n]$

Titik di (K_m) : v_i ; $i \in [1,2, \ldots, m]$

Misalkan *c* adalah pewarnaan titik yang diberikan dengan menggunakan $(maks\ \{n,m\})$ warna, sedemikian sehingga diperoleh:

$c(u_i) = i$; $1 \leq i \leq n$

$$c(v_i) = \begin{cases} n - i - 1 & ; 2 \leq i \leq m-2 \\ n-1 & ; i = m \\ n & ; i \text{ lainnya} \end{cases}$$

Maka diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$c_\Pi(u_i) = \begin{cases} 0 & ; \text{komponen ke-}(i) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ 1 & ; \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

$$c_\Pi(v_i) = \begin{cases} 0 & ;\text{ komponen ke-}(n-i-1) \text{ untuk } 1 \le i \le m-2 \\ & \;\text{komponen ke-}(n-1) \text{ untuk } i = m \\ & \;\text{komponen ke-}(n) \text{ untuk } i = m-1 \\ 3 & ;\ (n-m) \text{ komponen pertama untuk } 1 \le i \le n-1 \\ 2 & ;\ (n-m) \text{ komponen pertama untuk } i = n \\ 1 & ;\text{ komponen lainnya} \end{cases}$$

Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $X_L(B_{n,m}) \le maks\ \{n, m\}$.

Karena graf barbel ($B_{n,m}$); untuk $n > m$ akan mempunyai pewarnaan lokasi yang sama dengan graf barbel ($B_{n,m}$); untuk $m > n$, maka cukup satu yang dibuktikan, maka c adalah pewarnaan lokasi untuk graf barbel ($B_{n,m}$), sehingga $X_L(B_{n,m}) = maks\ \{n, m\}$, untuk $n, m \ge 3$ dan $n \ne m$.

c. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel Petersen

Graf Petersen adalah graf yang memiliki 2n titik yaitu titik-titik pada lingkaran luar $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan titik-titik pada lingkaran dalam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ untuk $n \ge 3$. Graf Petersen dinotasikan dengan ($P_{n,k}$), dengan $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ dan $n \ge 3$, serta memiliki sisi $\{u_i u_{i+1}\} \cup \{v_i v_{i+k}\} \cup \{u_i v_i\}$ dimana $\{1 \le i \le n\}$ (Asmiati, dkk., 2017).

Hasil 3

Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{P_{n,1}}$) adalah $X_L(B_{P_{n,1}}) = 4$ untuk n ganjil atau 5 untuk n genap, dengan $n \ge 3$.

Bukti: Untuk membuktikan teorema tersebut dapat dipertimbangkan dalam kasus sebagai berikut:

Kasus 1. $X_L(B_{P_{n,1}}) = 4$, untuk n ganjil.

Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf barbel ($B_{P_{n,1}}$). Karena graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) memuat graf petersen ($P_{n,1}$) dengan n ganjil maka berdasarkan Teorema 2 akan memiliki $X_L(B_{P_{n,1}}) \geq 4$.

Selanjutnya graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) diberikan pewarnaan sebagai berikut:

Diberikan titik-titik di $(B_{P_{n,1}})$ sebagai berikut:

Titik di ($P_{n,1}$) pertama : u_i dan u_{n+i} ; $i \in [1,2, \dots, n]$ dan n ganjil.

Titik di ($P_{n,1}$) kedua : w_i dan w_{n+i} ; $i \in [1,2, \dots, n]$ dan n ganjil.

Misalkan *c* adalah pewarnaan titik yang diberikan dengan menggunakan 4 warna, sedemikian sehingga diperoleh:

$$c(u_i) = \begin{cases} 1 & ; i = 1 \\ 3 & ; i \text{ genap untuk } i \geq 2 \\ 4 & ; i \text{ ganjil untuk } i \geq 2 \end{cases}$$

$$c(u_{n+i}) = \begin{cases} 2 & ; i = 1 \\ 3 & ; i \text{ ganjil untuk } i \geq 2 \\ 4 & ; i \text{ genap untuk } i \geq 2 \end{cases}$$

$$c(w_i) = \begin{cases} 1 & ; i \text{ ganjil untuk } i \leq n-1 \\ 2 & ; i \text{ genap untuk } i \leq n-1 \\ 3 & ; i = n \end{cases}$$

$$c(w_{n+i}) = \begin{cases} 1 & ; i \text{ genap untuk } i \leq n-1 \\ 2 & ; i \text{ ganjil untuk } i \leq n-1 \\ 4 & ; i = n. \end{cases}$$

Maka diperoleh kode warna sebagai berikut:

$$c_\Pi(u_i) = \begin{cases} i & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i \leq \frac{n+1}{2} \\ i-1 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i \leq \frac{n+1}{2} \\ n-i+1 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ n-i+2 & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ 0 & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i \text{ genap dan } i \geq 2 \\ & \ \ \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \geq 2 \\ 1 & ; \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

$$c_\Pi(u_{n+i}) = \begin{cases} i & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i \leq \frac{n+1}{2} \\ i-1 & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i \leq \frac{n+1}{2} \\ n-i+1 & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ n-i+2 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ 0 & ; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i \text{ genap dan } i \geq 2 \\ & \ \ \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \geq 2 \\ 1 & ; \text{komponen lainnya.} \end{cases}$$

$$c_\Pi(w_i) = \begin{cases} i & ;\text{ komponen ke-}(3)\text{ untuk } i \le \frac{n-1}{2} \\ i+1 & ;\text{ komponen ke-}(4)\text{ untuk } i \le \frac{n-1}{2} \\ n-i & ;\text{ komponen ke-}(3)\text{ untuk } i \ge \frac{n+1}{2} \\ n-i+1 & ;\text{ komponen ke-}(4)\text{ untuk } i \ge \frac{n+1}{2} \\ 0 & ;\text{ komponen ke-}(2)\text{ untuk } i \text{ genap dan } i \le n-1 \\ & \quad \text{komponen ke-}(1)\text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \le n-1 \\ 1 & ;\text{ komponen lainnya} \end{cases}$$

$$c_\Pi(w_{n+i}) = \begin{cases} i & ;\text{ komponen ke-}(4)\text{ untuk } i \le \frac{n-1}{2} \\ i+1 & ;\text{ komponen ke-}(3)\text{ untuk } i \le \frac{n-1}{2} \\ n-i & ;\text{ komponen ke-}(4)\text{ untuk } i \ge \frac{n+1}{2} \\ n-i+1 & ;\text{ komponen ke-}(3)\text{ untuk } i \ge \frac{n+1}{2} \\ 0 & ;\text{ komponen ke-}(1)\text{ untuk } i \text{ genap dan } i \le n-1 \\ & \quad \text{komponen ke-}(2)\text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \le n-1 \\ 1 & ;\text{ komponen lainnya} \end{cases}$$

Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $X_L(B_{P_{n,1}}) \le 4$. Jadi, $X_L(B_{P_{n,1}}) = 4$, untuk *n* ganjil

Kasus 2. $X_L(B_{P_{n,1}}) = 5$, untuk n genap.

Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf barbel $(B_{P_{n,1}})$. Karena graf barbel $(B_{P_{n,1}})$ memuat graf petersen $(P_{n,1})$ dengan n genap maka berdasarkan Teorema 2, akan memiliki $X_L(B_{P_{n,1}}) \ge 5$.

Diberikan titik-titik di $(B_{P_{n,1}})$ sebagai berikut:

Titik di $(P_{n,1})$ pertama : u_i dan u_{n+i} ; $i \in [1,2, \dots, n]$ dan n genap.

Titik di $(P_{n,1})$ kedua : w_i dan w_{n+i} ; $i \in [1,2, \dots, n]$ dan n genap.

Misalkan c adalah pewarnaan titik yang diberikan dengan menggunakan 5 warna, sedemikian sehingga diperoleh:

$$c(u_i) = \begin{cases} 1 & ; i = 1 \\ 3 & ; i \text{ genap untuk } 2 \leq i \leq n-1 \\ 4 & ; i \text{ ganjil untuk } 2 \leq i \leq n-1 \\ 5 & ; i = n \end{cases}$$

$$c(u_{n+i}) = \begin{cases} 2 & ; i = 1 \\ 3 & ; i \text{ ganjil untuk } i \geq 2 \\ 4 & ; i \text{ genap untuk } i \geq 2 \end{cases}$$

$$c(w_i) = \begin{cases} 1 & ; i \text{ ganjil untuk } i \leq n-2 \\ 2 & ; i \text{ genap untuk } i \leq n-2 \\ 3 & ; i = n-1 \\ 4 & ; i = n \end{cases}$$

$$c(w_{n+i}) = \begin{cases} 1 & ; i \text{ genap untuk } i \leq n-1 \\ 2 & ; i \text{ ganjil untuk } i \leq n-1 \\ 5 & ; i = n. \end{cases}$$

$$c_\Pi(u_i) = \begin{cases} i & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ dan ke-}(5) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\ i-1 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\ n-i & ; \text{komponen ke-}(5) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ n-i+1 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ n-i+2 & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ 0 & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i \text{ genap dan } 2 \leq i \leq n-1 \\ & \;\; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 & ; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i = 1 \\ & \;\; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i = n \\ 1 & ; \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

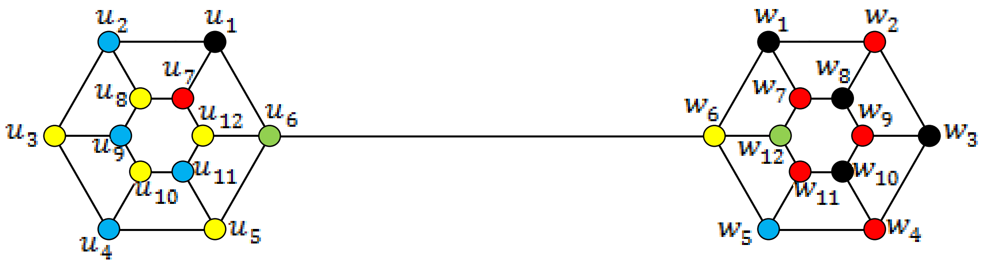
$$c_\Pi(u_{n+i}) = \begin{cases} i & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\ i-1 & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\ i+1 & ; \text{komponen ke-}(5) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\ n-i+1 & ; \text{komponen ke-}(2) \text{ dan ke-}(5) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ n-i+2 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ 0 & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } 2 \leq i \leq n \\ & \;\; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i \text{ genap dan } 2 \leq i \leq n \\ 2 & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i = 1 \\ 1 & ; \text{komponen lainnya} \end{cases}$$

$$
c_{\Pi}(w_i) = \begin{cases}
i & ; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\
i+1 & ; \text{komponen ke-}(5) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\
 & \;\; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i \leq \left(\frac{n}{2}\right) - 1 \\
n-i & ; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\
n-i+1 & ; \text{komponen ke-}(5) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\
n-i-1 & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } \frac{n}{2} \leq i \leq n-1 \\
0 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n-2 \\
 & \;\; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n-2 \\
2 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i = n-1 \\
 & \;\; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i = n \\
1 & ; \text{komponen lainnya}
\end{cases}
$$

$$
c_{\Pi}(w_{n+i}) = \begin{cases}
i & ; \text{komponen ke-}(5) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\
i+1 & ; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i \leq \frac{n}{2} \\
i+2 & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } i \leq \left(\frac{n}{2}\right) - 1 \\
n-i & ; \text{komponen ke-}(3) \text{ untuk } \frac{n}{2} \leq i \leq n-1 \\
 & \;\; \text{komponen ke-}(5) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\
n-i+1 & ; \text{komponen ke-}(4) \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\
0 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ untuk } i \text{ genap dan } i \leq n-1 \\
 & \;\; \text{komponen ke-}(2) \text{ untuk } i \text{ ganjil dan } i \leq n-1 \\
2 & ; \text{komponen ke-}(1) \text{ dan ke-}(3) \text{ untuk } i = n \\
1 & ; \text{komponen lainnya}
\end{cases}
$$

Karena setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $X_L\left(B_{P_{n,1}}\right) \leq 5$. Jadi, $X_L\left(B_{P_{n,1}}\right) = 5$, untuk *n* genap.

Berikut ini adalah contoh pewarnaan lokasi pada graf Barbel Petersen, $B_{P_{6,1}}$.



Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum pada $B_{P_{6,1}}$.

hasil-hasil penelitian ini telah dipublikasikan pada tahun 2018 di ***International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences***, terindeks Scopus, dengan judul ***On the Locating Chromatic Number of Some Barbell Graphs***

BAB 6 RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA

Pada tahun ketiga nanti kami akan menulis paper tentang karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lima. Selain itu, akan melakukan penelitian klasifikasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi lebih dari lima.

Pada tahun ketiga nanti kami juga akan melakukan finalisasi buku referensi tentang bilangan kromatik lokasi pada Graf Petersen. Buku referensi tersebut berisikan tentang konsep dasar bilangan kromatik lokasi dan hasil-hasil yang sudah didapatkan baik dari hasil-hasil sebelumnya ataupun hasil-hasil baru yang sudah kami peroleh.

BAB 7 KESIMPULAN

Luaran dari penelitian ini yang sudah kami lakukan adalah:

1. Pemakalah dalam konferensi internasional
   a. *International Conference on Applied Sciences Mathematics and* Informatics (ICASMI), 13-15 Juli 2017, Bandar Lampung.
   b. *International Conference on Graph Theory and Information Security* (ICGTIS), 7-9 Agustus, di Universitas Indonesia.
   c. *International Conference on Applied Sciences Mathematics and* Informatics (ICASMI), 9-11 Agustus 2018, Bandar Lampung.
   d. *International Conference on Mathematics, Sciences, Education, and Technology* (ICOMSET), 4-5 Oktober 2018, di Universitas Negeri Padang, Padang
2. Publikasi Ilmiah
   a. Jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus.
      - Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, Lyra Yulianti, 2017, On Some Petersen Graphs Having Locating Chromatic Number Four or Five, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **102**(**4**), 769-778. J

- Asmiati, I Ketut Sadha Gunce Yana, Lyra Yulianti, 2018, On the Locating Chromatic Number of Some Barbell Graphs, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.

b. Jurnal internasional

- Agus Irawan, Asmiati, 2018, The Locating chromatic number of subdivision firecracker graphs, *International Mathematical Forum,* **13**(**10**)*,* 485-492.

c. Prosiding internasional terindeks Scopus.

- Locating Chromatic Number of a Disjoint Union of Some Double Stars, submitted ke *International Journal of Physics Conference Series*, terindex Scopus.

DAFTAR PUSTAKA

[1].**Asmiati**. 2017. Locating-chromatic number of banana tree. *International Mathematical Forum*,. **12** (**1**). 39-45.

[2]. **Asmiati**. 2016. On the locating-chromatic numbers of non homogeneous caterpillars and firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 100(8). 1305-1316.

[3]. **Asmiati.** 2014a. The locating-chromatic number of non-homogeneous amalgamation of stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **93(1)**. 89-96.

[4]. **Asmiati** dan Fitriani. 2014b. Graf Amalgamasi Pohon Berbilangan Kromatik Lokasi empat. *Prosiding KNM Ke-17 ITS*. 1399-1407.

[5]. **Asmiati.** Assiyatun, H. Baskoro, E.T. Suprijanto, D. Simanjuntak, R. Uttunggadewa, S. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **3(1)**. 11-23.

[6]. **Asmiati** dan Baskoro, E.T. 2012. Characterizing of Graphs Containing Cycle with Locating-Chromatic Number Three. *AIP Conf. Proc*. **1450**. 351-357.

[7]. **Asmiati.** Assiyatun, H. Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.Sci*. **43A**. 1-8.

[8]. Baskoro, E.T. dan **Asmiati .**2013. Characterizing all trees with locating-chromatic number 3. *Elec. J. of Graph Theory and Applications.* 1(2). 109-117. 2013.

[9]. Behtoei, A dan Omoomi, B. 2011a., The locating chromatic number of the join of graphs. submitted.

[10]. Behtoei, A dan Omoomi, B. 2011b. On the locating chromatic number of cartesian product of graphs. submitted.

[11]. Behtoei, A dan Omoomi, B. 2011c. On the locating chromatic number of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics*. 159. 2214-2221.

[12]. Chartrand, G. Salehi, E dan Zhang, P. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer*. **130**. 157-168.

[13]. Chartrand, G. Erwin. Henning, M.A. Slater, P.J dan Zhang, P. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**. 89-101.

[14]. Chartrand, G. Erwin. Henning, M.A. Slater, P.J dan Zhang, .. 2003, Graph of order n with locating-chromatic number *n-1*. *Discrete Math*. **269**. 65-79.

[15]. Chartrand, G. dan Zhang, P. 2003. The theory and appllications of resolvability in graphs: a survey. *Congr. Numer*. **160**. 47-68.

[16]. Johnson, M.A. 1993. Structure-activity maps for visualizing the graph variables arising in drug design. *J. Biopharm. Statist*. **3**. 203-236.

[17]. Saenpholphat, V dan Zhang, P. 2004. Conditional resolvability: a survey, *Internat. J. Math. Math. Sci*. **38**. 1997-2017.

LAMPIRAN

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)

http://www.pphmj.com
http://dx.doi.org/10.17654/MS102040769
Volume 102, Number 4, 2017, Pages 769-778 ISSN: 0972-0871

ON SOME PETERSEN GRAPHS HAVING LOCATING CHROMATIC NUMBER FOUR OR FIVE

Asmiati[1], Wamiliana[1], Devriyadi[1,2] and Lyra Yulianti[3]

[1]Mathematics Department
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Lampung University
Jl. Brodjonegoro No. 1, Gedung Meneng
Bandar Lampung 35145, Indonesia
e-mail: asmiati308@yahoo.com

[2]SMKN 1, Mesuji Timur, Lampung, Indonesia

[3]Mathematics Department
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Andalas University
Kampus UNAND Limau Manis
Padang 25163, Indonesia

Abstract

In this paper, we determine some Petersen graphs having locating chromatic number four or five. Moreover, we give some conjecture to characterize some Petersen graphs having locating chromatic number four.

Received: March 7, 2017; Revised: April 27, 2017; Accepted: June 12, 2017
2010 Mathematics Subject Classification: 05C12, 05C15.
Keywords and phrases: locating chromatic number, Petersen graph.

Hindawi
International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences
Volume 2018, Article ID 5127504, 5 pages
https://doi.org/10.1155/2018/5127504

Research Article

On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs

Asmiati,[1] **I. Ketut Sadha Gunce Yana**,[1] **and Lyra Yulianti**[2]

[1] *Mathematics Department, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Lampung University, Jl. Brodjonegoro No.1 Bandar Lampung, Indonesia*
[2] *Mathematics Department, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Andalas University, Kampus UNAND Limau Manis, Padang 25163, Indonesia*

Correspondence should be addressed to Asmiati; asmiati308@yahoo.com

Received 27 March 2018; Revised 26 June 2018; Accepted 22 July 2018; Published 5 August 2018

Academic Editor: Dalibor Froncek

The locating chromatic number of a graph G is defined as the cardinality of a minimum resolving partition of the vertex set $V(G)$ such that all vertices have distinct coordinates with respect to this partition and every two adjacent vertices in G are not contained in the same partition class. In this case, the coordinate of a vertex v in G is expressed in terms of the distances of v to all partition classes. This concept is a special case of the graph partition dimension notion. In this paper we investigate the locating chromatic number for two families of barbell graphs.

1. Introduction

The partition dimension was introduced by Chartrand et al. [1] as the development of the concept of metric dimension. The application of metric dimension plays a role in robotic navigation [2], the optimization of threat detecting sensors [3], and chemical data classification [4]. The concept of locating chromatic number is a marriage between the partition dimension and coloring of a graph, first introduced by Chartrand et al in 2002 [5]. The locating chromatic number of a graph is a newly interesting topic to study because there is no general theorem for determining the locating chromatic number of any graph.

Let $G = (V, E)$ be a connected graph. We define the *distance* as the minimum length of path connecting vertices u and v in G, denoted by $d(u, v)$. A k-coloring of G is a function $c : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, where $c(u) \neq c(v)$ for any two adjacent vertices u and v in G. Thus, the coloring c induces a partition Π of $V(G)$ into k color classes (independent sets) $C_1, C_2, \ldots, C_k$, where C_i is the set of all vertices colored by the color i for $1 \leq i \leq k$. The *color code* $c_\Pi(v)$ of a vertex v in

number of G, denoted by $\chi_L(G)$, is the minimum k such that G has a locating coloring.

The following theorem is a basic theorem proved by Chartrand et al. [5]. The neighborhood of vertex u in a connected graph G, denoted by $N(u)$, is the set of vertices adjacent to u.

Theorem 1 (see [5]). *Let c be a locating coloring in a connected graph G. If u and v are distinct vertices of G such that $d(u, t) = d(v, t)$ for all $t \in V(G) - \{u, v\}$, then $c(u) \neq c(v)$. In particular, if u and v are non-adjacent vertices of G such that $N(u) = N(v)$, then $c(u) \neq c(v)$.*

The following corollary gives the lower bound of the locating chromatic number for every connected graph G.

Corollary 2 (see [5]). *If G is a connected graph and there is a vertex adjacent to k leaves, then $\chi_L(G) \geq k + 1$.*

There are some interesting results related to the determination of the locating chromatic number of some graphs. The

International Mathematical Forum, Vol. 13, 2018, no. 10, 485 - 492
HIKARI Ltd, www.m-hikari.com
https://doi.org/10.12988/imf.2018.8844

The Locating-Chromatic Number of Subdivision Firecracker Graphs

Agus Irawan[1,2] and Asmiati[3*]

[1] Posgraduate Student, Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Lampung University, Indonesia

[2] School of Information and Computer Management (STMIK) Pringsewu
Lampung, Indonesia

[3] Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Lampung University, Indonesia
*Corresponding author

Abstract

The locating-chromatic number of a graph was combined two graph concept, coloring vertices and partition dimension of a graph. In this paper, we discuss about locating-chromatic number of a subdivision firecracker graphs.

Keywords: graph, color code, locating-chromatic number

1. Introduction

The locating-chromatic number of a graph was introduced by Chartrand *et al.* [6] in 2002, with derived two graph concept, coloring vertices and partition dimension of a graph. Let $G = (V, E)$ be a connected graph and c be a proper k-coloring of$G$ with color $1, 2, \dots, k$. Let $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ be a partition of $V(G)$ which is induced by coloring c. The color code $c_\Pi(v)$ of v is the ordered k-tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ where $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ for any i. If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called k-locating coloring of G. The locating-chromatic number, denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest k

The Locating Chromatic Number of a Disjoint Union of Some Double Stars

Asmiati[1*], Lyra Yulianti[2], Aldino[3], Aristoteles[4], Akmal Junaidi[5]

· [1,3]Mathematics Departement, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Lampung University, Jl. Brodjonegoro No.1 Bandar Lampung, Indonesia.
[2] Mathematics Departement, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Andalas University, Kampus UNAND Limau Manis, Padang 25163, Indonesia.
[4,5]Computer Science Departement, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Lampung University, Jl. Brodjonegoro No.1 Bandar Lampung, Indonesia
Email: asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id

Abstract

In this paper we discuss the locating chromatic number of a disconnected graph, namely a disjoint union of some double stars. To determine the locating-chromatic number of a graph, first we construct the upper bound of the number and observe the minimum coloring used. Then, to determine the lower bound of the number, we use the trivial lower bound for some leaves which incident to one vertex. Two main theorems about the locating chromatic number of a disjoint union of some double stars. We obtained some original results of the locating chromatic number of disjoint union of some double stars. Moreover, we can generalize the graph such that the locating chromatic number remains the same with the previous one.

INTERNATIONAL CONFERENCE ON GRAPH THEORY AND INFORMATION SECURITY (ICGTIS 2017)

Certificate

This is to certify that

Asmiati

has presented the paper entitled

Characterizing Petersen graphs having locating chromatic number four

in the ICGTIS 2017 held by Department of Mathematics FMIPA Universitas Indonesia (UI) and Indonesian Combinatorial Society (InaCombS) in Depok, Indonesia on August 7 - 9, 2017

Alhadi Bustamam, Ph.D.
Head of Department of Mathematics FMIPA UI

Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Chair of ICGTIS 2017

CERTIFICATE OF APPRECIATION

This certify that

ASMIATI

has Contributed as

PRESENTER

1st International Conference on Applied Sciences Mathematics and Informatics (ICASMI)

"The Role and Innovation of Sciences in the Strengthening of Natural Resources"

Held by Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Lampung

July 13-15, 2017 at Horison Hotel, Lampung, Indonesia

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
Dean

Dr. Mustofa Usman, M.A.
Chairman

CERTIFICATE

The organizing committee certifies that

ASMIATI

has contributed as

PRESENTER

The 2nd International Conference on Applied Sciences, Mathematics and Informatics (ICASMI)
"The Contribution of Sciences on Sustainable Valorization of Natural Resources"

Held by Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Lampung
August 09th-11th, 2018 at Horison Hotel, Bandar Lampung, Indonesia.

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
Dean

Dr. Junaidi, S.Si., M.Sc.
Chairman

Sponsor : Institute of Research and Community Services University of Lampung

PELINDO II

ICOMSET

The 3rd ICOMSET & AMLI 2018

CERTIFICATE

This is to certify that

Asmiati

has participated as **Presenter**

in **The 3rd International Conference on Mathematics, Science, Education and Technology (ICOMSET) & Asosiasi MIPA LPTK Indonesia (AMLI) Meeting 2018**

04 - 05 October 2018 at Universitas Negeri Padang,
Padang, West Sumatra, Indonesia

Padang, 05 October 2018

Prof. Dr. H. Lufri, M.S	**Budhi Oktavia, M.Si., Ph.D**
Dear	General Chairman
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,	of The Organizing Committee
Universitas Negeri Padang	

Supported By: