

Kode>Nama Rumpun Ilmu: 121/Matematika

Bidang Fokus : Teknologi Informasi dan Komputer

LAPORAN AKHIR
PENELITIAN BERBASIS KOMPETENSI



ANALISIS PENEMPATAN SENSOR PADA GEDUNG BERTINGKAT
DENGAN PENDEKATAN DIMENSI METRIK GRAF

TIM PENGUSUL

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. (0011047601)

Dr. Suhadi Widosaputra (0009128201)

Dr. rer. nat. Akmal Junaidi (0029017103)

UNIVERSITAS LAMPUNG

NOVEMBER 2018

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : ANALISIS PENEMPATAN SENSOR PADA GEDUNG BERTINGKAT DENGAN PENDEKATAN DIMENSI METRIK GRAF

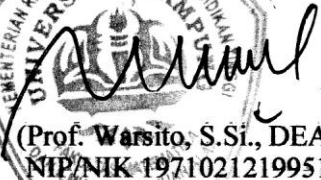
Peneliti/Pelaksana
Nama Lengkap : Dr ASMIATI, S.Si, M.Si
Perguruan Tinggi : Universitas Lampung
NIDN : 0011047601
Jabatan Fungsional : Lektor Kepala
Program Studi : Matematika
Nomor HP : 081369616149
Alamat surel (e-mail) : asmiati308@yahoo.com, asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id

Anggota (1)
Nama Lengkap : Dr SUHADI WIDO SAPUTRO S.Si, M.Si
NIDN : 0009128201
Perguruan Tinggi : Institut Teknologi Bandung

Anggota (2)
Nama Lengkap : Dr.rer.nat. AKMAL JUNAIDI S.Si, M.Sc.
NIDN : 0029017103
Perguruan Tinggi : Universitas Lampung

Institusi Mitra (jika ada)
Nama Institusi Mitra : -
Alamat : -
Penanggung Jawab : -
Tahun Pelaksanaan : Tahun ke 1 dari rencana 3 tahun
Biaya Tahun Berjalan : Rp 81,250,000
Biaya Keseluruhan : Rp 270,000,000

Mengetahui,
Dekan FMIPA UNILA




(Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D)
NIP/NIK 197102121995121001

Kota Bandar Lampung, 4 - 11 - 2018
Ketua,



(Dr ASMIATI, S.Si, M.Si)
NIP/NIK 197604112000122001

Menyetujui,
Ketua LPPM UNILA



(Warsono, Ph.D)
NIP/NIK 196302161987031003

RINGKASAN

Secara umum, himpunan pembeda dalam dimensi metrik yang beranggotakan koleksi titik, dapat diperluas menjadi himpunan pembeda yang beranggotakan koleksi partisi himpunan titik. Konsep perluasan ini kemudian didefinisikan sebagai partisi dimensi. Partisi dimensi ditambahkan syarat pewarnaan titik melahirkan suatu varian yang disebut bilangan kromatik lokasi.

Dalam suatu fasilitas penting dan fasilitas umum, alat pendeteksi suatu ancaman merupakan alat yang wajib ada sebagai bentuk penyediaan keamanan dalam fasilitas tersebut. Akan tetapi, pengeluaran biaya untuk pengadaan dan instalasi alat tersebut juga merupakan permasalahan yang pelik. Oleh karena itu, diperlukan adanya suatu optimasi dalam penentuan banyaknya alat pendeteksi ini. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan memperhatikan pemilihan lokasi penempatan alat tersebut dalam fasilitas penting, maupun fasilitas umum. Permasalahan di atas dapat dimodelkan menjadi suatu graf, dengan memandang ruangan dalam fasilitas sebagai titik, dan koneksi antar ruang sebagai sisi, sedangkan optimasi pengadaan alat pendeteksi dipandang sebagai penentuan dimensi metrik dari graf yang merepresentasikan fasilitas penting atau fasilitas umum tersebut.

Penentuan minimal sensor dan aturan penempatannya pada gedung bertingkat merupakan permasalahan yang menarik untuk dikaji, karena keberhasilan penelitian ini dapat digunakan untuk meminimalkan biaya. Selain itu, dapat mendeteksi dengan cepat ruangan mana terbakar jika terjadi kebakaran. Pada penelitian ini juga akan dibuat sistem penentuan basis dengan menggunakan bahasa Pemrograman C++, sehingga hasil penentuan dimensi metrik secara manual dapat diuji kebenarannya dengan sistem yang dibuat. Pada graf yang sama, varian lain yang akan dikaji adalah bilangan kromatik lokasinya, sehingga akan diperoleh kaitannya dengan dimensi metrik.

Penelitian ini bersifat pengembangan teori keilmuan dengan fokus kajiannya pada pengembangan teori-teori baru yang memiliki nilai aplikasi. Untuk itu, penelitian ini menggunakan suatu metode penyelesaian masalah yang mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik. Hasil dari penelitian teoritik dikembangkan dengan membuat system menggunakan bahasa Pemrograman C++.

Hasil-hasil yang sudah diperoleh pada tahap pertama tahun pertama ini adalah satu artikel yang merupakan penelitian awal telah dipublikasikan ke jurnal internasional, yaitu Asmiati, Lyra Yulianti, C. Ike Tri Widyastuti, Further results on locating chromatic number for amalgamation of stars linking by one path, *Indonesian Journal of Combinatorics* (2) 1, 50-56, 2018. Hasil-hasil utama telah ditulis kedalam artikel berjudul *The Locating Chromatic Number for Certain of Petersen Graphs* dan disubmit ke jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus, yaitu *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences* dan telah diseminarkan pada konferensi internasional yaitu: *International congress of mathematicians*, 1-9 Agustus 2018, di Rio De Janeiro, Brazil. Draf buku referensi yang berjudul "Bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf lingkaran" sedang dalam proses penulisan.

PRAKATA

Rasa syukur atas semua nikmatNya, yang telah memberikan kemudahan dan kelancaran sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian tahap awal ini dengan baik. Sebagai laporan dari hasil penelitian yang telah kami lakukan, kami susun dalam laporan akhir yang berjudul : Analisis Penempatan Sensor pada Gedung Bertingkat dengan Pendekatan Dimensi Metrik Graf.

Terimakasih kepada Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI) yang telah memberikan dana Kompetitif Nasional untuk kategori Penelitian Berbasis kompetensi.

Terimakasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Unila yang telah membantu secara administratif sehingga penelitian ini dapat berjalan sesuai dengan proposal penelitian.

Terimakasih juga kepada Dekan FMIPA Unila yang memberikan dukungan bagi para dosennya untuk meningkatkan penelitian dan publikasi internasional.

Akhirnya, terima kasih kepada semua pihak di Jurusan Matematika FMIPA Unila yang telah membantu dan memberi dukungan yang tak henti-hentinya kepada penulis.

Semoga laporan akhir penelitian tahun pertama ini sebagai langkah awal untuk terus melakukan penelitian hingga selesai waktunya.

Bandar Lampung, November 2018

Ketua Peneliti

DAFTAR ISI

Halaman Pengesahan

Ringkasan

Prakata

Daftar Isi

Daftar Gambar

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

1.2 Perumusan Masalah

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dimensi Metrik Graf

2.2 Dimensi Partisi Graf

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

3.2 Manfaat Penelitian

BAB 4. METODE PENELITIAN

BAB 5. HASIL YANG DICAPAI

5.1 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Gedung Bertingkat

5.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi Bintang Tertentu

BAB 6. RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA

BAB 7. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Graf pohon dengan 8 titik.

Gambar 2. Graf $G_{2,8}$

Gambar 3. Dimensi partisi graf G

Gambar 4. Dimensi partisi graf bintang ganda $S_{3,2}$

Gambar 5. Dimensi partisi graf ulat T_1, T_2, T_3 dan T_4

Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum pada G

Gambar 7. Pewarnaan lokasi minimum dari bintang ganda $S_{a,b}$.

Gambar 8. Pewarnaan lokasi minimum pada graf $4S_{5,3}$

Gambar 9. Pewarnaan lokasi minimum pada graf $nS_{5,3}$

BAB 1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep tentang dimensi metrik dari suatu graf telah diperkenalkan secara terpisah oleh Harary dan Melter [18], dan Slater [21] pada tahun 1976. Slater mengaitkan permasalahan dimensi metrik ini dengan problem di dalam suatu jaringan. Problem tersebut tidak lain adalah permasalahan untuk menentukan banyaknya alat pendeteksi sonar dalam suatu jaringan. Alat-alat tersebut digunakan sebagai acuan sehingga lokasi dari setiap posisi dalam jaringan dapat diketahui. Lokasi ini direpresentasikan sebagai vektor jarak dari posisi itu terhadap semua alat pendeteksi tersebut.

Dalam suatu fasilitas penting dan fasilitas umum, alat pendeteksi suatu ancaman merupakan alat yang wajib ada sebagai bentuk penyediaan keamanan dalam fasilitas tersebut. Akan tetapi, pengeluaran biaya untuk pengadaan dan instalasi alat tersebut juga merupakan permasalahan yang pelik. Oleh karena itu, diperlukan adanya suatu optimasi dalam penentuan banyaknya alat pendeteksi ini. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan memperhatikan pemilihan lokasi penempatan alat tersebut dalam fasilitas penting, maupun fasilitas umum. Optimasi pengadaan alat pendeteksi ini dapat dipandang sebagai penentuan dimensi metrik dari graf yang merepresentasikan fasilitas penting atau fasilitas umum tersebut.

Berbagai permasalahan aplikasi di atas dapat dimodelkan sebagai suatu objek matematika yang sama, yaitu graf. Suatu titik dalam graf dapat dipandang sebagai simbol dari ruangan dalam fasilitas. Adapun sisi dalam graf dapat mewakili koneksi antar fasilitas. Dengan demikian, permasalahan-permasalahan di atas dapat dituliskan menjadi “bagaimana cara memperoleh representasi titik dalam graf sedemikian rupa sehingga titik yang berbeda memiliki representasi jarak yang berbeda?”.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V yang berhingga, dan himpunan sisi E . Jarak dari dua titik berbeda $v, w \in V(G)$, dinotasikan dengan $d(v, w)$, adalah panjang lintasan terpendek dari v ke w di G . Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah subhimpunan titik terurut dari $V(G)$. Untuk setiap titik $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap W didefinisikan sebagai k -pasang terurut $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G jika setiap dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ berlaku $r(x|W) \neq r(y|W)$. Basis dari G adalah himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas terkecil. Adapun kardinalitas dari basis didefinisikan sebagai dimensi metrik, dan dinotasikan dengan $\beta(G)$.

Secara umum, penentuan dimensi metrik dari suatu graf merupakan permasalahan yang sukar. Hingga saat ini, belum ada algoritma yang efektif yang dapat digunakan untuk menentukan basis metrik untuk sebarang graf. Hal tersebut disebabkan oleh beragamnya bentuk dan struktur dari graf. Garey dan Johnson [17] telah membuktikan bahwa masalah tersebut memiliki kompleksitas NP-complete. Walaupun demikian, beberapa kriteria, batasan, dan dimensi metrik dari beberapa kelas tertentu, sudah dapat ditunjukkan. Chartrand dkk. [13] telah menunjukkan bahwa graf G yang berdimensi 1 hanyalah graf lintasan. Lebih jauh lagi, mereka berhasil mengkarakterisasi semua graf G dengan n titik yang mempunyai $\beta(G) = n-1$, dan $\beta(G) = n-2$. Peneliti lainnya, Hernando dkk. [19] telah berhasil menentukan semua kelas graf berorde n dan berdiameter d , serta memiliki dimensi metrik $n-d$.

Para peneliti juga banyak yang menyederhanakan permasalahan ini dengan menerapkannya pada kelas-kelas graf tertentu yang relatif sederhana. Chartrand dkk. [13] telah menentukan dimensi metrik dari graf lingkaran, lintasan, dan graf lengkap. Adapun Bača dkk. [11] telah mengkaji dimensi metrik dari beberapa kelas graf reguler. Dimensi metrik dari keluarga graf lainnya, yaitu graf pohon, telah dipelajari oleh Slater [21].

Pada tahun 2013, Suhadi dkk. [22] telah mengkaji dimensi metrik dari graf multipartit lengkap, dilanjutkan dengan penentuan dimensi metrik dan variannya dari operasi *lexicographic* [23,24,25]. Secara umum, pada tahun 2015 Suhadi dkk. [26,27] telah berhasil mendapatkan dimensi metrik dari graf amalgamasi dan graf hasil kali korona.

Perkembangan dimensi metrik suatu graf, menghasilkan ide kreatif tentang konsep dimensi partisi, yang diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [14] pada tahun 1998. Chartrand dkk. [14], telah mendapatkan dimensi partisi untuk beberapa graf sederhana seperti lintasan, graf bintang, graf bintang ganda, graf caterpillar, dan graf lingkaran. Selanjutnya, pada tahun 2012, Asmiati [9] telah mendapatkan dimensi partisi pada graf amalgamasi bintang. Selanjutnya kombinasi dari dimensi partisi dan pewarnaan graf melahirkan konsep bilangan kromatik lokasi graf, yang pertama kali di perkenalkan oleh Chartrand dkk. [15] tahun 2002. Serupa halnya dengan dimensi metrik, permasalahan bilangan kromatik lokasi merupakan Permasalahan NP-problem yaitu belum adanya suatu algoritma untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf. Kajian tentang bilangan kromatik lokasi untuk beberapa kelas graf telah dilakukan oleh Asmiati dkk. [1,2,3,4,6,8], dan Behtoei dkk. [12]. Kajian karakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi tertentu telah dikaji oleh Chartrand dkk.[16]. Mereka telah mengkarakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi $(n-1)$ atau $(n-2)$. Selanjutnya Asmiati dan Baskoro [7] tahun

2012, telah berhasil mengkarakterisasi graf memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga; Baskoro dan Asmiati [5] untuk karakterisasi graf pohon. Pada tahun 2017, Asmiati dkk. [10] telah memperoleh karakterisasi graf Petersen berbilangan kromatik lokasi empat.

1.2 Perumusan Masalah

Pada penelitian ini akan dikaji tentang penempatan sensor pada gedung bertingkat. Gedung bertingkat (lebih dari satu lantai) dapat dipresentasikan sebagai graf komposisi kubus dengan asumsi posisi dan banyak ruangan pada setiap lantai sama, dinotasikan dengan $G_n, n \geq 1$ lantai. Selain itu juga akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari $G_n, n \geq 1$. Kaitan antara dimensi metrik dan bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan open problem hingga saat ini, maka pada penelitian ini juga akan diteliti kaitan antara dimensi metrik dan bilangan kromatik lokasi dari $G_n, n \geq 1$.

Pada tahapan penelitian selanjutnya, hasil yang sudah diperoleh diaplikasikan dengan menggunakan Bahasa Pemrograman C++ untuk menentukan posisi alternatif peletakan sensor pada ruangan sedemikian rupa sehingga sensor itu masih dapat berfungsi. Aplikasi itu juga dapat digunakan untuk mengecek kebenaran dari basis yang diperoleh secara manual.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dimensi Metrik Graf

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (*resolving set*) pada G . Misalkan u dan v adalah titik-titik dalam graf terhubung G maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G . Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k -vektor (pasangan k -tuple) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G , dinotasikan $\dim(G)$ (Chartrand dkk., 1999). Kardinalitas maksimum pada himpunan pemisah disebut dimensi teratas $\dim^+(G)$ dan himpunan pemisah minimum pada kardinalitas $\dim^+(G)$ disebut basis teratas untuk G . Karena $\dim^+(G)$ merupakan kardinalitas maksimum dan $\dim(G)$ merupakan kardinalitas minimum pada himpunan pemisah maka $\dim(G)$ selalu kurang dari atau sama dengan $\dim^+(G)$ (Chartrand, dkk., 2009).

Teorema 2.1.1 (Chartrand dkk., 2000)

Jika G graf terhubung dengan $n \geq 2$ dan berdiameter d , maka

$f(n, d) \leq \dim(G) \leq n - d$, dengan $f(n, d)$ merupakan bilangan bulat terkecil k untuk setiap $k + d^k \geq n$.

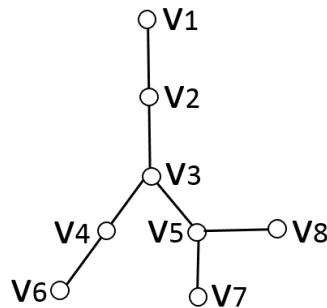
Bukti:

Pertama, tentukan batas atas nya. Diberikan u dan v titik-titik pada G untuk setiap $d(u, v) = d$, $u = v_0, v_1, \dots, v_d = v$ dengan $u - v$ adalah lintasan dengan panjang d dan $W = V(G) -$

$\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$. Karena $d(u, v_1) = i$ untuk setiap $1 \leq i \leq d$ dan $u \in W$, itu menyebabkan W himpunan pemisah dengan kardinalitas $n - d$ untuk G . Sehingga $\dim(G) \leq n - d$.

Selanjutnya, tentukan batas bawah nya. Diberikan B adalah basis untuk G pada dimensi K . Karena setiap representasi dari titik-titik $V(G) - B$ adalah k -vektor, setiap representasi merupakan bilangan bulat positif yang tidak melebihi d , dan semua representasi $n - k$ berbeda, itu menyebabkan $d^k \geq n - k$. Jadi, $f(n, d) \leq k = \dim(G)$. ■

Berikut ini akan diberikan contoh bahwa $f(n, d) \leq \dim(G) \leq n - d$



Gambar 1. Graf pohon dengan 8 titik

Graf pada Gambar 1, dengan $n = 8$ dan diameter $d = 4$, Ambil $W = \{v_1, v_8\}$, representasi titiknya adalah

$$r(v_1|W) = (0,4), \quad r(v_2|W) = (1,3), \quad r(v_3|W) = (2,2),$$

$$r(v_4|W) = (3,2), \quad r(v_5|W) = (3,1), \quad r(v_6|W) = (4,4),$$

$$r(v_7|W) = (4,2), \quad r(v_8|W) = (4,2).$$

Karena representasi semua titik berbeda untuk $W = \{v_1, v_8\}$, maka

$W = \{v_1, v_8\}$ merupakan himpunan pemisah dari basis metrik. Selain itu, banyaknya anggota basis ini merupakan yang paling minimum sehingga banyaknya anggota $W = \{v_1, v_8\}$ dapat dinyatakan sebagai dimensi metrik dari graf tersebut, dengan $\dim(G) = 2$, sehingga $\dim(G) \leq 8 - 4 = 4$. Di sisi lain, graf pada Gambar 5 dengan $n = 8$, diameter 4, dan

$\dim(G) = 2$, sehingga $4^k \geq 8 - k$ maka $k = 2$, dan dimensi $f(8,4) = 2$ ($k = 0$ dan $k = 1$) tidak memenuhi persamaan, sehingga $\dim(T) \geq f(n, d)$.

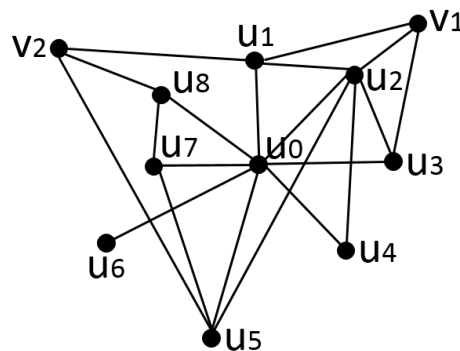
Teorema 2.1.2 (Chartrand, dkk, 1999) Diberikan G graf terhubung nontrivial, maka $\dim(G) \geq \lceil {}^3\log(\Delta(G) + 1) \rceil$.

Bukti:

Misalkan $\dim(G) = k$ dan $v \in V(G)$ dengan derajat maksimum $v = \Delta(G)$. Selain itu, $N(v)$ bertetangga dengan v dan $B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ basis pada G . Perhatikan jika $u \in N(v)$, maka $d(u, v_i)$ adalah salah satu $d(v, u_i)$, $d(v, u_i) + 1$, atau $d(v, u_i) - 1$ untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq k$. Karena B adalah basis, $r(u|B) \neq r(v|B)$ untuk semua $u \in N(v)$. Itu mengakibatkan bahwa ada paling banyak $3^k - 1$ representasi berbeda pada titik-titik di $N(v)$ terhadap B . Oleh karena itu, $|N(v)| = \Delta(G) \leq 3^k - 1$, yang mengakibatkan

$\dim(G) \geq \lceil {}^3\log(\Delta(G) + 1) \rceil$. ■

Berikut ini akan diberikan contoh bahwa $\dim(G) \geq \lceil {}^3\log(\Delta(G) + 1) \rceil$:



Gambar 2. Graf $G_{2,8}$

Derajat maksimum pada $G_{2,8}$ adalah 8 dengan derajat $u_0 = 8$ dan

$N(u_0) = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$. Ambil $W = \{v_1\}$, representasi titiknya adalah

$r(u_1|W) = (1), \quad r(u_2|W) = (1), \quad r(u_3|W) = (1),$

$r(u_4|W) = (2), \quad r(u_5|W) = (2), \quad r(u_6|W) = (3),$

$$r(u_7|W) = (3), \quad r(u_8|W) = (3), \quad r(u_0|W) = (2).$$

Karena ada representasi titik yang sama untuk $W = \{v_1\}$, maka $W = \{v_1\}$ bukan himpunan pemisah dan juga bukan merupakan basis metrik. Sehingga banyaknya anggota $W = \{v_1\}$ tidak dapat dikatakan sebagai dimensi metrik. Oleh karena itu, ambil W yang lain.

Ambil $W = \{v_1, v_2\}$, representasi titiknya adalah

$$r(u_1|W) = (1,1), \quad r(u_2|W) = (1,2), \quad r(u_3|W) = (1,3),$$

$$r(u_4|W) = (2,3), \quad r(u_5|W) = (2,1), \quad r(u_6|W) = (3,3),$$

$$r(u_7|W) = (3,2), \quad r(u_8|W) = (3,1), \quad r(u_0|W) = (2,2).$$

Karena representasi semua titik berbeda untuk $W = \{v_1, v_2\}$, maka

$W = \{v_1, v_2\}$ merupakan himpunan pemisah dari basis metrik. Selain itu, banyaknya anggota basis ini merupakan yang paling minimum sehingga banyaknya anggota

$W = \{v_1, v_2\}$ dapat dinyatakan sebagai dimensi metrik dari graf tersebut dengan $\dim(G_{2,8}) = 2$, sehingga

$$2 \geq {}^3\log(8 + 1)$$

$$2 \geq {}^3\log(9)$$

$$2 \geq {}^3\log 3^2$$

$$2 \geq 2$$

$$\text{Jadi, } \dim(G_{2,8}) \geq \lceil {}^3\log(\Delta(G) + 1) \rceil.$$

Teorema 2.1.3 (Chartrand, dkk, 2000) Jika G graf terhubung dengan $n \geq 2$, maka $1 \leq \dim(G) \leq n - 1$.

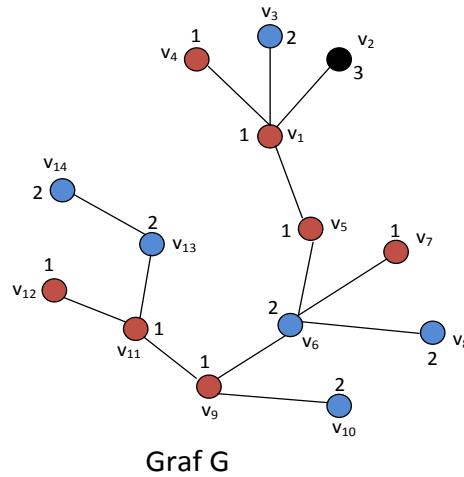
Bukti:

Untuk setiap graf terhubung G dan himpunan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ pada titik-titik di G , representasi ke- i pada $r(w_i|W)$ adalah 0 dan representasi ke- i pada semua representasi titik adalah positif. Sehingga, $r(u|W) = r(v|W)$ menyatakan bahwa $u = v$ untuk $u \in W$. Oleh karena itu, ketika mencoba menentukan apakah sub himpunan pemisah W pada $V(G)$ adalah himpunan pemisah untuk G , hanya perlu ditentukan titik-titik pada $V(G) - W$. Akibatnya, $V(G)$ dan $V(G) - \{v\}$ adalah himpunan pemisah untuk setiap graf nontrivial G dan setiap titik v pada G . Sehingga jika G graf terhubung dengan $n \geq 2$, maka $1 \leq \dim(G) \leq n - 1$. ■

2.2 Dimensi Partisi Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi dan sifat-sifat dari dimensi partisi pada suatu graf yang diambil dari Chartrand dkk (1998).

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S , dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah, $\min\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x . Misalkan $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan S_1, S_2, \dots, S_k kelas-kelas dari Π . Representasi v terhadap Π , dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$, adalah k -tupel terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Selanjutnya, Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G , dinotasikan $pd(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas. Berikut ini akan diberikan graf G dan akan ditentukan dimensinya.



Graf G

Graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_{12}\}$, $S_2 = \{v_3, v_6, v_8, v_{10}, v_{13}, v_{14}\}$ dan $S_3 = \{v_2\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (0, 1, 1)$; $r(v_2|\Pi) = (1, 2, 0)$; $r(v_3|\Pi) = (1, 0, 2)$; $r(v_4|\Pi) = (0, 2, 2)$; $r(v_5|\Pi) = (0, 1, 2)$; $r(v_6|\Pi) = (1, 0, 3)$; $r(v_7|\Pi) = (1, 0, 4)$; $r(v_8|\Pi) = (2, 0, 4)$; $r(v_9|\Pi) = (0, 1, 4)$; $r(v_{10}|\Pi) = (1, 0, 5)$; $r(v_{11}|\Pi) = (0, 1, 5)$; $r(v_{12}|\Pi) = (0, 1, 6)$; $r(v_{13}|\Pi) = (1, 0, 6)$; $r(v_{14}|\Pi) = (0, 1, 7)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(G) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari G . Perhatikan titik v_1 , v_1 memiliki 3 daun yaitu v_2 , v_3 dan v_4 . Jika hanya terdapat dua kelas partisi pembeda, maka dua dari tiga daun tersebut akan memiliki partisi pembeda yang sama. Akibatnya representasi kedua daun itu akan sama, karena memiliki jarak yang sama terhadap titik-titik lainnya pada graf G , kontradiksi. Jadi $pd(G) \geq 3$. Akibatnya, $pd(G) = 3$.

Berikut ini akan diberikan lemma dan teorema penting dari dimensi partisi yang telah dibuktikan Chartrand dkk. (1998).

Lemma 2.2.1

Diberikan G graf terhubung dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$, untuk $u, v \in V(G)$, jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari Π .

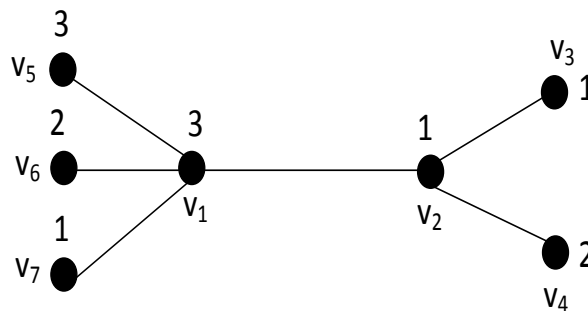
Berikut ini akan diberikan teorema untuk menentukan dimensi partisi pada graf bintang ganda.

Teorema 2.2.1

Jika T adalah graf bintang ganda berorde $n \geq 6$, dengan x dan y dua titik yang bukan daun, maka $pd(T) = \max\{\deg(x), \deg(y)\} - 1$.

Contoh penentuan dimensi partisi graf dari graf bintang ganda.

Diberikan graf bintang ganda $S_{3,2}$, akan tentukan bahwa $pd(S_{3,2}) = 3$.



Gambar 4. Dimensi partisi graf bintang ganda $S_{3,2}$

Graf bintang ganda $S_{3,2}$ dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_2, v_3, v_7\}$, $S_2 = \{v_4, v_6\}$, dan $S_3 = \{v_1, v_5\}$.

Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (1, 1, 0)$; $r(v_2|\Pi) = (0, 1, 1)$; $r(v_3|\Pi) = (0, 2, 2)$; $r(v_4|\Pi) = (1, 0, 2)$; $r(v_5|\Pi) = (2, 2, 0)$; $r(v_6|\Pi) = (2, 0, 1)$; $r(v_7|\Pi) = (0, 2, 1)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf $S_{3,2}$ dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(S_{3,2}) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$ dari G dengan $S_1 = \{v_1, v_3, v_7\}$; $S_2 = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$, maka titik v_5, v_6 akan memiliki representasi yang sama yaitu $(2,0)$, kontradiksi. Jadi $pd(S_{3,2}) \geq 3$. Akibatnya, $pd(S_{3,2}) = 3$.

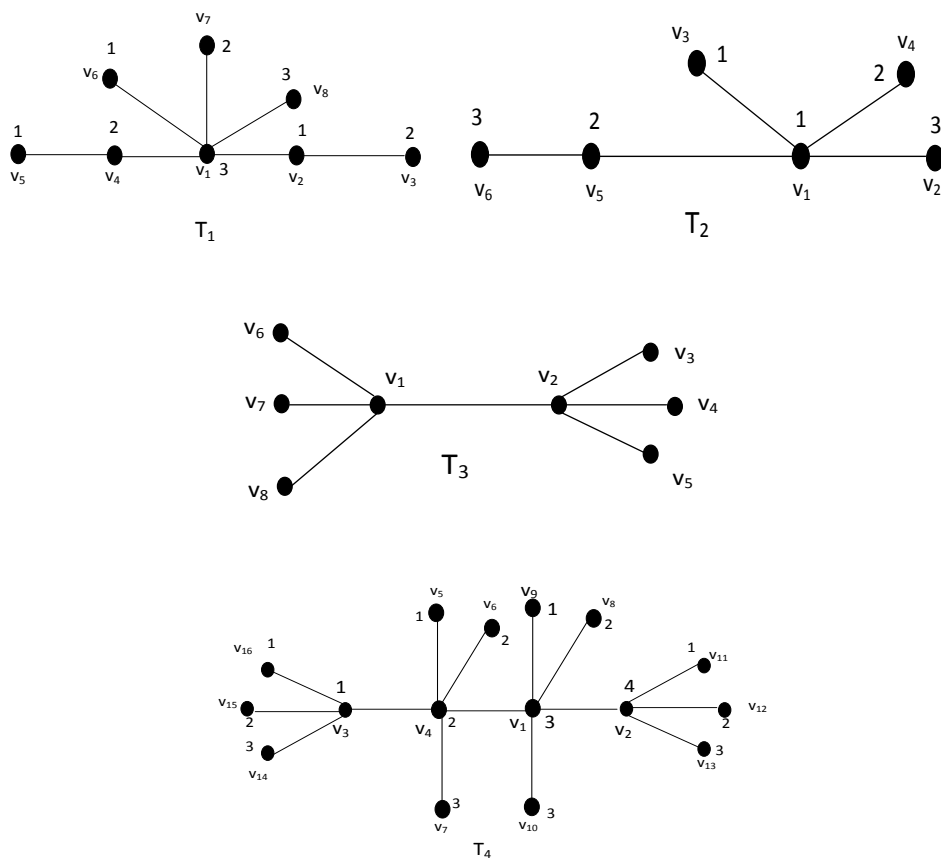
Teorema 2.2.2

Misalkan $K_{1,n}$ graf bintang berode $n \geq 1$, maka $pd(K_{1,n}) = n$.

Teorema 2.2.3

Jika T adalah graf ulat dengan $\Delta_t(T) \geq 3$, maka $\Delta_t(T) - 2 \leq pd(T) \leq \Delta_t(T) + 1$.

Untuk membuktikan Teorema 3.2.4, perhatikan partisi pembeda pada graf-graf ulat berikut ini :



Gambar 5. Dimensi partisi graf ulat T_1, T_2, T_3 dan T_4

Graf ulat T_1 pada Gambar 2.5 memiliki $pd(T_1) = 3 = \Delta_t(T_1) - 2$ dengan minimal partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_2, v_5, v_6\}$; $S_2 = \{v_3, v_4, v_7\}$ dan $S_3 = \{v_1, v_8\}$.

Graf ulat T_2 pada Gambar 2.5 memiliki $pd(T_2) = 3 = \Delta_t(T_2) - 1$ dengan minimal partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_4\}$; $S_2 = \{v_3, v_5\}$ dan $S_3 = \{v_2, v_6\}$.

Graf ulat T_3 pada Gambar 2.5 adalah graf bintang ganda dan berdasarkan teorema 2.2.2 maka $\Delta_t(T_3) = pd(T_3) = 3$.

Graf ulat T_4 pada Gambar 2.5 memiliki $\Delta_t(T_4) = 3$ dengan partisi pembedanya $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dari $V(T_4)$, dengan $S_1 = \{v_3, v_5, v_9, v_{11}, v_{16}\}$; $S_2 = \{v_4, v_6, v_8, v_{12}, v_{15}\}$; $S_3 = \{v_1, v_7, v_{10}, v_{13}, v_{14}\}$ dan $S_4 = \{v_2\}$.

Untuk menunjukkan $pd(T_4) = 4$ cukup dengan menunjukkan bahwa tidak ada partisi pembeda dengan tiga kelas partisi dari $V(T_4)$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ sebagai partisi pembeda dari $V(T_4)$ maka akan ada kesamaan partisi pembeda dari titik v_1 dan v_2 sehingga mengakibatkan representasinya akan sama juga. Sehingga $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$ bukanlah partisi pembeda yang tepat untuk T_4 , kontradiksi. Akibatnya, $pd(T_4) = 4 = \Delta_k(T_3) + 1$.

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

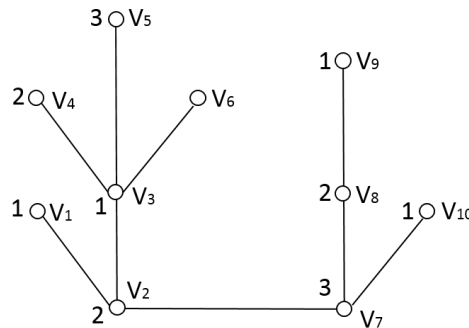
Bilangan Kromatik Lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. (2002). Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf.

Berikut ini definisi dari bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand dkk, (2002).

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan- k sejati dari G . Misalkan pula $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan c . Kode warna, $C_\Pi(v)$ dari v adalah k -tupel $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq k$. Jika semua titik di G mempunyai kode warna berbeda,

maka c disebut *pewarnaan lokasi* dari G . *Bilangan kromatik lokasi* dari G , dinotasikan dengan $X_L(G)$, adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan- k lokasi.

Perhatikan bahwa setiap partisi dari pewarnaan lokasi suatu graf G merupakan partisi pembeda dari dimensi partisinya, akibatnya diperoleh $pd(G) \leq X_L(G)$.



Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum pada G

Gambar II.2, menunjukkan bahwa $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_5, v_7\}$, dan $C_4 = \{v_6\}$. Perhatikan bahwa semua titik memiliki kode warna berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan-4 lokasi.

Untuk menunjukkan $X_L(G) = 4$, andaikan terdapat pewarnaan-3 lokasi c pada G . Karena titik v_3 mempunyai 3 daun, maka akan terdapat dua daun berwarna sama. Perhatikan bahwa kedua daun tersebut mempunyai jarak yang sama terhadap titik-titik yang lain (selain kedua daun tersebut). Akibatnya, kedua daun itu akan mempunyai kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Jadi $X_L(G) = 4$.

Berikut ini adalah teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi. Himpunan dari tetangga titik v , dinotasikan dengan $N(v)$.

Teorema 2.3.1 (Chartrand dkk, 2002) Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . jika u dan v dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v tidak bertetangga sedemikian sehingga himpunan tetangga u dan v sama ($N(u) = N(v)$) maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat dari teorema ini, didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk graf sebarang.

Akibat 2.3.1 (Chartrand dkk, 2003) Misalkan G adalah graf terhubung. Jika G memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $X_L(G) \geq k + 1$.

Chartrand dkk. (2002) telah memberikan batas atas dan bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk graf terhubung, seperti teorema berikut ini.

Teorema 2.3.2 (Chartrand dkk, 2002) Untuk setiap graf terhubung G berorde $n \geq 3$ berlaku $3 \leq X_L(G) \leq n$.

Mudah untuk ditunjukkan bahwa $X_L(K_1) = 1$ dan $X_L(K_2) = 2$.

Bilangan kromatik lokasi suatu graf terhubung erat dengan jarak suatu titik terhadap kelas-kelas warna. Akibatnya diameter dari suatu graf juga memberikan pengaruh pada penentuan banyaknya warna minimum yang dibutuhkan dari pewarnaan lokasinya. Chartrand dkk. (2002), memberikan hubungan antara bilangan kromatik lokasi suatu graf dengan diameternya sebagai berikut.

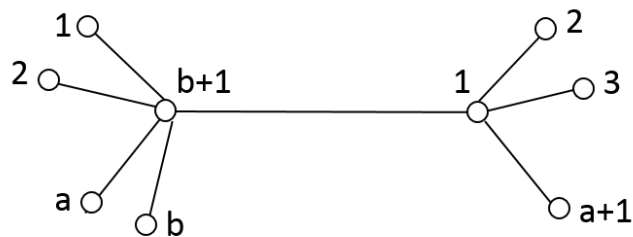
Teorema 2.3.3 (Chartrand dkk, 2002) Misalkan G adalah graf berorde $n \geq 3$ dan diameter $d \geq 3$, maka $\log_{d+1} n \leq X_L(G) \leq n - d + 2$

Untuk mendapatkan batas atas Teorema 3.3, digunakan Teorema 3.2. Sedangkan untuk mendapatkan batas bawahnya, digunakan sifat bahwa setiap koordinat dari suatu kode warna adalah bilangan bulat non-negatif yang tidak lebih dari d dan semua kode warna berbeda, akibatnya $(d + 1)^{X_L(G)} \geq n$. Jadi $\log_{d+1} n \leq X_L(G)$. Teorema berikut ini adalah eksistensi dari bilangan kromatik lokasi.

Teorema 2.3.4 Chartrand dkk. (2002) Untuk setiap pasangan bilangan bulat a dan b dengan $2 \leq a \leq b$, terdapat G dengan $X(G) = a$ dan $X_L(G) = b$.

Chartrand dkk. (2002) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf bintang ganda. Sebuah graf pohon disebut *graf bintang ganda* jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari 1. Jika x dan y berderajat $a + 1$ dan $b + 1$ berturut-turut, maka graf bintang ganda ini dinotasikan dengan $S_{a,b}$.

Teorema 2.3.5 (Chartrand dkk, 2002) Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$ maka Bilangan kromatik lokasi untuk graf bintang ganda $S_{a,b}$ adalah $b + 1$.



Gambar 7. Pewarnaan lokasi minimum dari bintang ganda $S_{a,b}$.

Chartrand dkk. (2002) juga telah mengkonstruksi pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasinya mulai dari 3 sampai dengan n , kecuali $n - 1$. Bentuk dari pohon tersebut disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.3.6 *Chartrand dkk. (2002) Terdapat pohon berorde $n, n \geq 5$, dengan bilangan kromatik lokasi k jika dan hanya jika $k \in \{3, 4, \dots, n - 2, n\}$.*

BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan Penelitian

Tujuan Penelitian ini adalah untuk:

1. Menentukan penempatan sensor pada gedung bertingkat (minimal dua lantai) melalui pendekatan dimensi metrik graf.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf yang didefinisikan, untuk mencari kaitan antara dimensi metrik dan bilangan kromatik lokasinya.
3. Membuat aplikasi penentuan penempatan sensor pada gedung bertingkat dengan menggunakan bahasa Pemrograman C++.
4. Mempublikasi hasil yang didapat pada tiga jurnal internasional bereputasi.
5. Membuat buku referensi yang berisi tentang hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan selama ini yang berkenaan dengan dimensi metrik dan bilangan kromatik lokasi graf.
6. Kerjasama penelitian dengan Kelompok Keahlian Matematika Kombinatorika Prodi Matematika ITB.
7. Mengikutsertakan mahasiswa S2 Matematika dan S3 Program Doktor MIPA Unila untuk dapat terlibat dalam penelitian ini.

3.2 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini menambah khazanah keilmuan teori graf khususnya pada konsep dimensi partisi dan bilangan kromatik lokasi graf. Penelitian ini bersifat pengembangan teori keilmuan dari dimensi metrik graf yang mempunyai nilai aplikasi. Hasil dari penelitian teoritik

dikembangkan dengan membuat system menggunakan bahasa Pemrograman C++. Jadi hasil ini juga dapat dijadikan rujukan bagi peneliti yang ingin mengkaji tentang aplikasi dari dimensi metrik graf.

BAB 4 METODE PENELITIAN

A. Tahap Awal:

Langkah pertama dari penelitian ini adalah dengan melakukan studi literatur untuk melihat apakah sudah ada peneliti lain yang sudah melakukan penelitian ini. Hal ini perlu dilakukan untuk menghindari terjadinya *double* klaim terhadap hasil yang akan diperoleh.

B. Tahap Penelitian:

1. Menentukan penempatan sensor pada gedung bertingkat $G_n, n \geq 1$ melalui pendekatan dimensi metrik graf. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ adalah subhimpunan titik terurut dari $V(G)$. Untuk setiap titik $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap W didefinisikan sebagai k -pasang terurut $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Himpunan W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G jika setiap dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ berlaku $r(x|W) \neq r(y|W)$. Basis dari G adalah himpunan pembeda dari G dengan kardinalitas terkecil. Adapun kardinalitas dari basis didefinisikan sebagai dimensi metrik, dan dinotasikan dengan $\beta(G)$.

Penentuan dimensi metrik dari suatu graf dilakukan dengan cara berikut ini:

- Penentuan batas atas dimensi metrik.

Metode ini dilakukan dengan memilih suatu himpunan titik dari graf yang diteliti sedemikian rupa sehingga himpunan tersebut merupakan suatu himpunan pembeda.

- Penentuan batas bawah dimensi metrik.

Metode ini dilakukan dengan mengkaji struktur dari suatu graf. Kajian ini diperlukan untuk menetapkan posisi titik-titik yang akan menjadi anggota himpunan pembeda. Dimensi metrik graf $G_n, n \geq 1$, dinotasikan dengan $\mu(G_n)$.

2. Menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf yang didefinisikan, $G_n, n \geq 1$ lantai .

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G . Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i , yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna, $c_{\Pi}(v)$ dari v adalah k -urutan $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Metode yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G_n , $n \geq 1$, adalah dengan menentukan batas bawah dan batas atas dari $\chi_L(G_n)$. Karena G_n , $n \geq 1$, merupakan representasi dari gedung dan memuat lingkaran brode 4, maka sekurang-kurangnya dibutuhkan 4 partisi pembeda. Sedangkan untuk mendapatkan batas atas dari bilangan kromatik lokasi ini diperlukan suatu konstruksi pewarnaan yang sesuai. Konstruksi dapat diawali dari pewarnaan sejati dan /atau dari partisi pembeda graf tersebut. Kemudian dimodifikasi sehingga memenuhi kriteria pewarnaan lokasi dengan memperhatikan diameter.

3. Menentukan kaitan antara dimensi metrik dan bilangan kromatik lokasinya.
 - Relasi dari graf G_n , $n \geq 1$, yang diduga memenuhi ketaksamaan $pd(G_n) < \chi_L(G_n)$ didapatkan dengan mencermati hasil yang diperoleh pada problem sebelumnya, kemudian dibandingkan dengan hasil-hasil sebelumnya. Dugaan (konjektur) dari ketidaksamaan tersebut dirumuskan dalam suatu teorema dan dibuktikan.
 4. Membuat aplikasi penentuan penempatan sensor pada gedung bertingkat dengan menggunakan bahasa Pemrograman C++.
- Langkah-langkah yang akan dilakukan adalah:

- Mulai dari gedung G_n untuk $n = 1$, dengan banyaknya kamar atau ruangan dinyatakan sebagai titik dan hubungan antara suatu ruangan ke ruangan lainnya, dinyatakan sebagai sisi. Pada kasus ini banyaknya ruangan minimal 3 dan diasumsikan sama untuk lantai selanjutnya.
 - Menentukan basis sesuai dengan persyaratan pencarian basis dari dimensi metrik.
 - Membandingkan hasil yang diperoleh dengan hasil manual pada Bagian 1.
 - Basis yang diperoleh merupakan tanda letak sensor.
 - Mencari alternatif penempatan sensor yang lain.
 - Selanjutnya, penentuan basis untuk gedung G_n untuk $n > 1$, dengan langkah-langkah serupa untuk $n = 1$.
5. Membuat buku referensi tentang hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan selama ini yang berkenaan dengan dimensi metrik dan bilangan kromatik lokasi graf.

c. Tahap Penulisan dan publikasi

Dalam tahapan ini, semua hasil yang diperoleh akan ditulis dalam tiga artikel internasional bereputasi, terindex *Scopus* atau *Thomson Reuters*, yaitu: *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, *Journal of Indonesian Mathematical Society*, dan *Bulletin of the Korean Mathematical Society*. Artikel ini juga akan dipresentasikan pada konferensi internasional dan nasional.

BAB 5 HASIL YANG DICAPAI

5.1 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Gedung Bertingkat

Berikut ini diberikan definisi graf gedung bertingkat berbentuk graf Petersen, yang dinotasikan dengan $s P_{n,k}$. Misalkan terdapat s buah graf Petersen $P_{n,k}$. Titik luar u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ untuk graf Petersen yang ke- t , $t = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 1$ dinotasikan dengan u_i^t . Titik dalam v_i , $i = 1, 2, \dots, n$ untuk graf Petersen yang ke- t , $t = 1, 2, \dots, s$, $s \geq 1$ dinotasikan dengan v_i^t . Graf Petersen $s P_{n,k}$ diperoleh dari $s \geq 1$ kopi graf $P_{n,k}$, yang mana setiap titik luar u_i^t , $i \in [1, n]$, $t \in [1, s]$ dihubungkan oleh suatu lintasan $(u_i^t u_i^{t+1})$ $t = 1, 2, \dots, s - 1$, $s \geq 2$.

Hasil 1 . Bilangan kromatik lokasi pada graf Petersen $s P_{n,1}$ untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah 5.

Bukti. Untuk membuktikan teorema ini, pandang kasus berikut ini .

Kasus 1. $\chi_L(s P_{3,1}) = 5, s \geq 2$

Akan ditunjukkan batas bawah dari $\chi_L(s P_{3,1})$ untuk $s \geq 2$. Graf Petersen $s P_{3,1}, s \geq 2$, memuat beberapa siklus genap, maka berdasarkan **Teorema 2**, $\chi_L(s P_{3,1}) \geq 4$. Pewarnaan c akan membangun suatu partisi Π pada $V(sP_{3,1})$: $C_1 = \{u_1^t | t \text{ ganjil}\} \cup \{u_2^t | t \text{ genap}\} \cup \{v_2^t | t \geq 3 \text{ ganjil}\}$; $C_2 = \{u_2^t | t \text{ ganjil}\} \cup \{v_1^1\} \cup \{v_2^t | t \text{ genap}\} \cup \{v_3^t | t \geq 3 \text{ ganjil}\}$; $C_3 = \{u_3^t | t \text{ ganjil}\} \cup \{u_1^t | t \text{ genap}\} \cup \{v_2^1\} \cup \{v_3^t | t \text{ genap}\} \cup \{v_1^t | t \geq 3 \text{ ganjil}\}$; $C_4 = \{u_3^t | t \text{ genap}\} \cup \{v_1^t | t \text{ genap}\}$; $C_5 = \{v_3^1\}$. Jadi $\chi_L(s P_{3,1}) \geq 5$ untuk $s \geq 2$.

Akan ditentukan batas atas dari $s P_{3,1}$ untuk $s \geq 2$. Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(s P_{3,1}) \leq 5$ untuk $s \geq 2$, pandang pewarnaan-5 pada $s P_{3,1}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \bullet \quad c(u_i^t) &= \begin{cases} 1 & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } s \text{ ganjil} \\ 2 & \text{untuk } i = 2 \text{ dan } s \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } i = 3 \text{ dan } s \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } s \text{ genap} \\ 1 & \text{untuk } i = 2 \text{ dan } s \text{ genap} \\ 4 & \text{untuk } i = 3 \text{ dan } s \text{ genap} \end{cases} \\ \bullet \quad c(v_i^1) &= \begin{cases} 2 & \text{untuk } i = 1 \\ 3 & \text{untuk } i = 2 \\ 5 & \text{untuk } i = 3 \end{cases} \\ \bullet \quad c(v_i^t) &= \begin{cases} 3 & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } s \geq 3 \text{ ganjil} \\ 1 & \text{untuk } i = 2 \text{ dan } s \geq 3 \text{ ganjil} \\ 2 & \text{untuk } i = 3 \text{ dan } s \geq 3 \text{ ganjil} \\ 4 & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } s \text{ genap} \\ 2 & \text{untuk } i = 2 \text{ dan } s \text{ genap} \\ 3 & \text{untuk } i = 3 \text{ dan } s \text{ genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Pewarnaan c akan membangun suatu partisi Π pada $V(sP_{3,1})$. Akan ditunjukkan bahwa kode warna dari semua titik di $sP_{3,1}$ berbeda. Untuk $s = 1$ diperoleh $c_\Pi(u_1^1) = (0,1,1,2,2)$;

$c_{\Pi}(u_2^1) = (1,0,1,2,2)$; $c_{\Pi}(u_3^1) = (1,1,0,1,1)$; $c_{\Pi}(v_1^1) = (1,0,1,3,1)$; $c_{\Pi}(v_2^1) = (2,1,0,3,1)$; \square
 $c_{\Pi}(v_3^1) = (2,1,1,2,0)$. Untuk $s \geq 3$ ganjil diperoleh $c_{\Pi}(u_1^t) = (0,1,1,2, i + s)$; $c_{\Pi}(u_2^t) = (1,0,1,2, i + s)$; $c_{\Pi}(u_3^t) = (1,1,0,1, s)$; $c_{\Pi}(v_1^t) = (1,1,0,3, s + 2)$; $c_{\Pi}(v_2^t) = (0,1,1,3, i + s)$; $c_{\Pi}(v_3^t) = (1,0,1,2, s + 1)$. Untuk $s \geq 2$ genap diperoleh $c_{\Pi}(u_1^t) = (1,1,0,1, s + 1)$; $c_{\Pi}(u_2^t) = (0,1,1,1, s)$; $c_{\Pi}(u_3^t) = (1,2,1,0, s)$; $c_{\Pi}(v_1^t) = (2,1,1,0, s + 2)$; $c_{\Pi}(v_2^t) = (1,0,1,1, s + 2)$; $c_{\Pi}(v_3^t) = (1,1,0,1, s + 1)$. Karena kode warna dari semua titik $s P_{3,1}$ berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(s P_{3,1}) \leq 5$ untuk $s \geq 2$. Jadi, diperoleh $\chi_L(s P_{3,1}) = 5$ untuk $s \geq 2$.

Kasus 2. $\chi_L(s P_{n,1}) = 5$, untuk $n \geq 4$ genap.

Akan ditunjukkan batas bawah dari $\chi_L(s P_{n,1})$ untuk $n \geq 4$ genap dan $s \geq 2$. Graf Petersen $s P_{n,1}$, untuk $n \geq 4$ genap dan $s \geq 2$, memuat beberapa siklus genap. Maka berdasarkan

Teorema 2, $\chi_L(s P_{n,1}) \geq 4$. Pewarnaan c akan membangun suatu partisi Π pada $V(sP_{n,1})$:

$$C_1 = \{u_1^t | \text{untuk } s \text{ ganjil}\} \cup \{u_n^t | \text{untuk } s \text{ genap}\};$$

$$C_2 = \{u_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \{v_{2j-1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \{u_{2j-1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\} \cup \{v_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\};$$

$$C_3 = \{u_{2j+1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \{v_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \{u_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\} \cup \{v_{2j+1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\};$$

$$C_4 = \{u_n^t | \text{untuk } s \text{ genap}\} \cup \{u_{n-1}^t | \text{untuk } s \text{ genap}\};$$

$$C_5 = \{v_n^1\}$$

Oleh karena itu, kode warna dari semua titik di G adalah :

$$(a) C_1 = \{u_1^t | \text{untuk } s \text{ ganjil}\} \cup \{u_n^t | \text{untuk } s \text{ genap}\}$$

$$c_{\Pi}(u_1^1) = (0,1,2,1,2); u_n^t = (0,1,2,1, s) \text{ untuk } s \geq 2 \text{ genap};$$

$$c_{\Pi}(u_1^t) = (0,1,2,1, s + 1) \text{ untuk } s \geq 3 \text{ ganjil}.$$

$$(b) C_2 = \{u_{2j}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil}, j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j-1}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil}, j > 0\} \cup \{u_{2j-1}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap}, j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap}, j > 0\}$$

Misalkan u_i^t , $1 \leq i \leq n-2$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 2$ untuk s ganjil ; u_i^t , $1 \leq i \leq n-3$; $i = 2j-1$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ untuk s genap dan v_i^t , $1 \leq i \leq n-1$; $i = 2j-1$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ untuk s ganjil ; v_i^t , $1 \leq i \leq n-1$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ untuk $s \geq 2$ genap .

Untuk $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i-1, 0, 1, i, i+s); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i, 0, 1, i, i+s+1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i, 0, 1, i+1, i+s); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i+1, 0, 1, i+2, i+s+1); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

Untuk $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j}^t) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j+s); \text{ untuk } s \text{ ganjil.}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j-1}^t) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j+s); \text{ untuk } s \text{ ganjil.}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j-1}^t) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j+s+1); \text{ untuk } s \text{ genap.}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (2j-1, 0, 1, 2j, 2j+s-1); \text{ untuk } s \text{ genap.}$$

$$(c) C_3 = \{u_{2j+1}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil}, j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil}, j > 0\} \cup \{u_{2j}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap}, j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j+1}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap}, j > 0\}.$$

Misalkan $u_i^t, 1 \leq i \leq n-1; i = 2j+1; 1 \leq j \leq \frac{n}{2}-1$ untuk s ganjil ; $u_i^t, 1 \leq i \leq n-2; i = 2j; 1 \leq j \leq \frac{n}{2}-1$ untuk s genap dan $v_i^t, 1 \leq i \leq n-2; i = 2j; 1 \leq j \leq \frac{n}{2}-1$ untuk s ganjil ; $v_i^t, 1 \leq i \leq n-1; i = 2j-1; 1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ untuk $s \geq 2$ genap.

Untuk $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i-1, 1, 0, i, i+s); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^1) = (i, 1, 0, i+1, i).$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i, 1, 0, i+1, i+2s-2); \text{ untuk } s \geq 3 \text{ ganjil.}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i, 1, 0, i+1, i+s); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i+1, 1, 0, i+1, i+s); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

Untuk $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j+1}^t) = (2j+1, 1, 0, 2j-1, 2j+s-1); \text{ untuk } s \text{ ganjil.}$$

$$c_{\Pi}(v_i^1) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (2j+2, 1, 0, 2j+1, 2j).$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (2j+2, 1, 0, 2j+1, 2j+s+1); \text{ untuk } s \geq 3 \text{ ganjil.}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j+1}^t) = (2j, 1, 0, 2j-1, 2j+s); \text{ untuk } s \text{ genap.}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (2j, 1, 0, 2j-1, 2j+s); \text{ untuk } s \text{ genap.}$$

$$(d) C_4 = \{u_n^t | \text{untuk } s \text{ ganjil}\} \cup \{u_{n-1}^t | \text{untuk } s \text{ genap}\}$$

$$c_{\Pi}(u_n^t) = (1, 2, 1, 0, s); \text{ untuk } s \text{ ganjil.}$$

$$c_{\Pi}(u_{n-1}^t) = (1, 2, 1, 0, s+1); \text{ untuk } s \text{ genap.}$$

$$(e) C_5 = \{v_n^1\}$$

$$c_{\Pi}(u_n^1) = (2, 1, 2, 1, 0)$$

Karena kode warna dari semua titik berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi pada $s P_{n,1}$, jadi $\chi_L(s P_{n,1}) = 5$, untuk $n \geq 4$ genap.

Kasus 3. $\chi_L(s P_{n,1}) = 5$, untuk $n \geq 5$ ganjil.

Akan ditunjukkan batas bawah dari $\chi_L(s P_{n,1})$ untuk $n \geq 5$ ganjil dan $s \geq 2$. Graf Petersen $s P_{n,1}$, untuk $n \geq 4$ genap dan $s \geq 2$, memuat beberapa siklus genap. Maka berdasarkan

Teorema 2, $\chi_L(s P_{n,1}) \geq 4$. Pewarnaan c akan membangun suatu partisi Π pada $V(s P_{n,1})$:

$$C_1 = \{u_1^t | \text{untuk } t \text{ ganjil}\} \cup \{u_n^t | \text{untuk } s \text{ genap}\};$$

$$C_2 = \{u_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \{v_{2j-1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \\ \{u_{2j-1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\} \cup \{v_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\};$$

$$C_3 = \{u_{2j+1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \{v_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup \\ \{u_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\} \cup \{v_{2j+1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\};$$

$$C_4 = \{v_n^t | \text{untuk } t \text{ genap}\} \cup \{v_1^t | \text{untuk } s \text{ genap}\};$$

$$C_5 = \{v_n^1\}$$

Oleh karena itu, kode warna dari semua titik di G adalah :

$$(a) C_1 = \{u_1^t | \text{untuk } t \text{ ganjil}\} \cup \{u_n^t | \text{untuk } s \text{ genap}\};$$

$$u_1^1 = \{0,1,2,2,1\}; u_n^t = \{0,1,1,2, s-1\} \text{ untuk } s \geq 2 \text{ genap};$$

$$u_1^t = \{0,1,2,2, s\} \text{ untuk } s \geq 3 \text{ ganjil}.$$

$$(b) C_2 = \{u_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j-1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup$$

$$\{u_{2j-1}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j}^t | \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap, } j > 0\};$$

Misalkan $u_i^t, 1 \leq i \leq n-1; i = 2j; 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk s ganjil ; $u_i^t, 1 \leq i \leq n-2; i = 2j-1; 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk s genap dan $v_i^t, 1 \leq i \leq n-2; i = 2j-1; 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk s ganjil ; $v_i^t, 2 \leq i \leq n-2; i = 2j; 1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk $s \geq 2$. genap .

Untuk $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i-1, 0, 1, i+1, s+i-1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i, 0, 1, i, s+i); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i, 0, 1, i, s+i-1); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i+1, 0, 1, i-1, s+i); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

Untuk $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j+1}^t) = (i-1, 0, 1, i, 2j+s-1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (i, 0, 1, i-1, 2j+t+1); \text{ untuk } t \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j}^t) = (i-1, 0, 1, i, 2j+s-1); \text{ untuk } t \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j+1}^t) = (i, 0, 1, i-1, 2j+s-1); \text{ untuk } t \text{ genap}$$

Untuk $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j+1}^t) = (2j, 0, 1, 2j, 2j+s-2); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (2j+2, 0, 1, 2j, 2j+s); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j}^t) = (2j, 0, 1, 2j+2, 2j+s-1); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j+1}^t) = (2j, 0, 1, 2j, 2j+s-1); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$(c) C_3 = \{u_{2j+1}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ ganjil, } j > 0\} \cup$$

$$\{u_{2j}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap}, j > 0\} \cup$$

$$\{v_{2j+1}^t \mid \text{untuk } i \text{ ganjil dan } s \text{ genap}, j > 0\};$$

Misalkan u_i^t , $1 \leq i \leq n - 2$; $i = 2j + 1$; $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ untuk $s = 1$; u_i^t , $1 \leq i \leq n$; $i = 2j + 1$; $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk $t \geq 3$ ganjil; u_i^t , $1 \leq i \leq n - 1$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk s genap dan v_i^t , $1 \leq i \leq n - 1$; $i = 2j$; $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk s ganjil; v_i^t , $1 \leq i \leq n$; $i = 2j + 1$; $1 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ untuk $s \geq 1$ genap.

Untuk $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i - 1, 1, 0, i + 1, i + s - 1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i, 1, 0, i, i + s); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = (i, 1, 0, i, i + s); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = (i + 1, 1, 0, i - 1, i + s); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

Untuk $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j+1}^t) = (i - 1, 1, 0, i, 2j + s - 1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j}^t) = (i, 1, 0, i - 1, 2j + s); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j}^t) = (i - 1, 1, 0, i, 2j + s - 1); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j+1}^t) = (i, 1, 0, i - 1, 2j + s + 1); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

Untuk $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ diperoleh:

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j}^t) = (2j + 1, 1, 0, 2j, 2j + s - 1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j+1}^t) = (2j + 1, 1, 0, 2j - 1, 2j + s - 1); \text{ untuk } s \text{ ganjil}$$

$$c_{\Pi}(u_i^t) = c_{\Pi}(u_{n-2j+1}^t) = (2j - 1, 1, 0, 2j + 1, 2j + s - 2); \text{ untuk } s \text{ genap}$$

$c_{\Pi}(v_i^t) = c_{\Pi}(v_{n-2j+2}^t) = (2j - 1, 1, 0, 2j - 1, 2j + s - 2)$; untuk s genap

(d) $C_4 = \{v_n^t | \text{untuk } t \text{ genap}\} \cup \{v_1^t | \text{untuk } s \text{ genap}\}$;

$c_{\Pi}(v_n^t) = (2, 1, 1, 0, s)$; untuk s ganjil.

$c_{\Pi}(v_1^t) = (1, 2, 1, 0, s + 1)$; untuk s genap.

(e) $C_5 = \{v_n^1\}$

$c_{\Pi}(v_n^1) = (1, 1, 2, 1, 0)$

Karena kode warna dari semua titik berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi pada $s P_{n,1}$,

jadi $\chi_L(s P_{n,1}) = 5$, untuk $n \geq 5$ ganjil. □

Hasil-hasil penelitian ini akan dipresentasikan pada *International Congress of Mathematicians di Rio de Janeiro*, Brazil, 1-9 Agustus 2018. Selanjutnya, hasil penelitian ini ditulis ke dalam artikel berjudul *The Locating Chromatic Number for Certain of Petersen Graphs* dan disubmit ke jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus, yaitu *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*.

5.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi Bintang Tertentu

Pada bagian ini akan didiskusikan bilangan kromatik lokasi $nS_{k,m}$ untuk $k > m$ dengan n, k, m bilangan asli.

Lemma 5.2.1

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dari $nS_{k,m}$ menggunakan paling sedikit

$(k - a)$ warna dengan $k > m, k \geq 2, m \geq 2, a \geq 0, a = k - m - 2$. Pewarnaan c adalah pewarnaan lokasi jika dan hanya $c(l_j^i) = c(l_n^s), j \neq n$ dan $i \neq s$ mengakibatkan $\{c(l_{jt}^i) | t = 1, 2, 3, \dots, m\}$ dan $\{c(l_{nt}^s) | t = 1, 2, 3, \dots, m\}$ adalah dua himpunan yang berbeda.

Bukti: Misalkan $P = \{c(l_{jt}^i) | t = 1, 2, 3, \dots, m\}$ dan $Q = \{c(l_{nt}^s) | t = 1, 2, 3, \dots, m\}$. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dari $nS_{k,m}$, $k > m, k \geq 2, m \geq 2, a \geq 0$, dan $c(l_j^i) = c(l_n^s)$, untuk suatu $j \neq n$, dan $i \neq s$. Andaikan $P = Q$. Karena $d(l_j^i, u) = d(l_n^s, u)$ untuk setiap $v \in V \setminus \{\{c(l_{jt}^i) | t = 1, 2, 3, \dots, m\} \cup \{c(l_{nt}^s) | t = 1, 2, 3, \dots, m\}\}$, maka kode warna dari l_j^i dan l_n^s sama. Jadi c bukan pewarnaan lokasi, suatu kontradiksi. Akibatnya $P \neq Q$.

Misalkan Π suatu partisi dari $V(G)$ dari terhadap kelas-kelas warna $|\Pi| \geq m$. Pandang $(l_j^i) = c(l_n^s), j \neq n$, dan $i \neq s$. Karena $P \neq Q$, maka terdapat warna x dan y sedemikian sehingga $(x \in P, x \notin Q)$ atau $(y \in P, y \notin Q)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kode warna untuk setiap $v \in V(nS_{k,m})$ berbeda.

- Jelas bahwa $c_\Pi(l_j^i) \neq c_\Pi(l_n^s)$, karena kedua kode warna tersebut berbeda pada ordinat ke- x atau ke- y .
- Jika $c_\Pi(l_{jt}^i) \neq c_\Pi(l_{nt}^s)$, untuk setiap $l_j^i \neq l_n^s$, dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: Jika $(l_j^i) = c(l_n^s)$, maka berdasarkan premis dari teorema ini, $P \neq Q$. Jadi $c_\Pi(l_{jt}^i) \neq c_\Pi(l_{nt}^s)$.

Kasus 2: Misalkan $c(l_j^i) = p_1$ dan $(l_n^s) = p_2$, dengan $p_1 \neq p_2$. Maka $c_\Pi(l_{jt}^i) \neq c_\Pi(l_{nt}^s)$ karena kedua kode warna tersebut berbeda sekurang-kurangnya pada ordinat yang ke- p_1 dan p_2 .

- Jika $c(x_i) = c(l_{jt}^i)$, maka kode warna dari $c_\Pi(x_i)$ memuat sedikitnya 1 komponen yang bernilai 1. Akibatnya $c_\Pi(x_i) = c_\Pi(l_{jt}^i)$.

- Jika $c(y_i) = c(l_{jt}^i)$, maka kode warna dari $c_{\Pi}(y_i)$ memuat sedikitnya 2 komponen yang bernilai 1. Akibatnya $c_{\Pi}(x_i) = c_{\Pi}(l_{jt}^i)$.

Berdasarkan semua kasus di atas, dapat dilihat bahwa kode warna untuk semua titik di $nS_{k,m}$ berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi. ■

Lemma 5.2.2

Misalkan $n \geq 1$, $a \geq 0$, $a = k - m - 2$ jika c adalah pewarnaan $k - a$ lokasi dari $nS_{k,m}$

dan $H(a) = \left\lfloor \frac{(k-a-1) \binom{k-a-1}{m}}{k-1} \right\rfloor$, maka $n \geq H(a)$.

Bukti: Misalkan c adalah pewarnaan $(k - a)$ lokasi dari $nS_{k,m}$. Untuk suatu j , misalkan $c(l_j^i)$ adalah warna dari titik antara l_j^i , maka banyaknya kombinasi warna dari $\{l_{jt}^i | t = 1, 2, 3, \dots, m\}$ adalah $\binom{k-a-1}{m}$. Karena satu warna sudah digunakan untuk mewarnai titik pusat x , maka terdapat $(k - a - 1)$ warna untuk mewarnai l_j^i untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$.

1. Dari Lemma 4.2, diperoleh nilai maksimum untuk n adalah $\left\lfloor \frac{(k-a-1) \binom{k-a-1}{m}}{k-1} \right\rfloor = H(a)$,

$a \geq 0$. ■

Teorema 5.2.3

Misalkan $nS_{k,m}$ adalah graf amalgamasi bintang tertentu untuk $k > m$,

$k \geq 3$, $m \geq 2$, $a = k - m - 2$

$$\chi_L(nS_{k,m}) = \begin{cases} k - a & ; 1 \leq n \leq H(a) \\ k - a + 1 & ; \text{lainnya} \end{cases} ,$$

Bukti: Pertama-tama akan dicari batas bawah dan batas atas dari $\chi_L(nS_{k,m})$ untuk $1 \leq n \leq$

$$H(a) = \left\lfloor \frac{(k-a-1) \binom{k-a-1}{m}}{k-1} \right\rfloor.$$

(1) Batas bawah dari $\chi_L(nS_{k,m})$

Berdasarkan Akibat 3.1, setiap titik l_j^i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, k-1$ bertetangga dengan $m = k - a - 1$ daun. Dengan demikian $\chi_L(nS_{k,m}) \geq k - a$.

(2) Batas atas dari $\chi_L(nS_{k,m})$

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi dari $V(nS_{k,m})$ menggunakan $(k - a)$ warna.

Misal beri warna:

- $c(x_i) = 1$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- $c(y_i) = 2$, untuk i ganjil dan $c(y_i) = 3$, untuk i genap, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- $c(l_j^i) = \{2, 3, \dots, k - a\}$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$.
- $c(l_{jt}^i) = \{1, 2, 3, \dots, k - a\} \setminus \{c(l_j^i)\}$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan

$j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ dan $t = 1, 2, 3, \dots, m$.

Akibatnya pewarnaan c akan membangun suatu partisi $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_{k-a}\}$ pada $V(nS_{k,m})$, dengan C_i adalah himpunan dari semua titik yang bewarna i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, k - a$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kode warna untuk setiap $V(nS_{k,m})$ berbeda. Misalkan $u, v \in V(nS_{k,m})$ dan $c(u) = c(v)$ maka pandang kasus-kasus berikut ini:

- Jika $u = x_i, v = x_k$ untuk suatu i, k dan $i \neq k$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena $d(u, C_i) \neq d(v, C_i)$.
- Jika $u = x_i, v = l_{jt}^i$ untuk suatu i, j, t , maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$, karena pada $c_\Pi(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat sekurang-kurangnya 1 komponen bernilai satu,

sedangkan pada $c_{\Pi}(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ memuat tepat satu komponen yang bernilai 1.

- Jika $u = x_i, v = l_{jt}^h$ untuk suatu i, h, j, t dan $i \neq h$, maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$, karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat sekurang-kurangnya 1 komponen bernilai satu, sedangkan pada $c_{\Pi}(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ memuat tepat satu komponen yang bernilai 1.
- Jika $u = y_i, v = l_j^i$, untuk suatu i, j maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$, karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat dua komponen yang bernilai 1, sedangkan pada $c(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat sekurang-kurangnya dua komponen bernilai satu.
- Jika $u = y_i, v = l_j^k$, untuk suatu i, k, j dan $i \neq k$ maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$ karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat dua komponen yang bernilai 1, sedangkan pada $c(v)$, titik yang diberi warna $k - a$ terdapat sekurang-kurangnya dua komponen bernilai satu.
- Jika $u = y_i, v = l_{jt}^i$ untuk suatu i, j, t maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$. karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat dua komponen yang bernilai 1, sedangkan pada $c(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat satu komponen yang bernilai satu.
- Jika $u = y_i, v = l_{jt}^k$ untuk suatu i, k, j, t dan $i \neq k$ maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$ karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat dua komponen yang bernilai 1, sedangkan pada $c(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat satu komponen yang bernilai satu.
- Jika $u = l_j^i, v = l_{jt}^i$ maka untuk suatu i, j, t maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$ karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat sekurang-kurangnya dua komponen bernilai

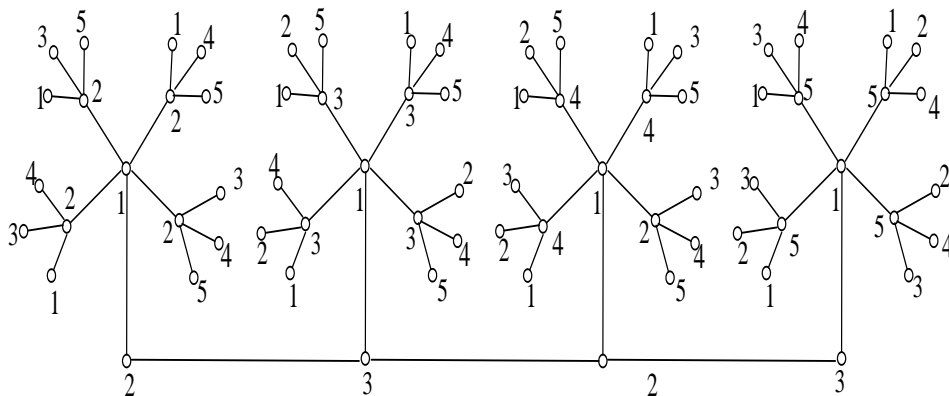
satu, sedangkan pada $c(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat satu komponen yang bernilai satu.

- Jika $u = l_j^i$, $v = l_{ht}^k$, maka untuk suatu i, j, k, h, t dan $i \neq k, j \neq h$ maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$ karena pada $c_{\Pi}(u)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat sekurang-kurangnya dua komponen bernilai satu, sedangkan pada $c(v)$, titik yang diberi warna $(k - a)$ terdapat tepat satu komponen yang bernilai satu.
- Jika $u = l_{jt}^i$, $v = l_{ht}^i$, maka untuk suatu i, j, h, t , $j \neq h$ maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$ karena titik $c(l_j^i) \neq c(l_h^i)$ sehingga $d(u, C_i) \neq d(v, C_i)$.
- Jika $u = l_{jt}^i$, $v = l_{jt}^k$, maka untuk suatu i, j, k, t , $i \neq k$ maka $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$ karena titik $c(l_j^i) \neq c(l_j^k)$ sehingga $d(u, C_i) \neq d(v, C_i)$.

Karena kode warna dari semua titik berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi pada $nS_{k,m}$. Jadi $\chi_L(nS_{k,m}) \leq k - a$ untuk $n \leq H(a)$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa kode warna dari semua $V(nS_{k,m})$ untuk $k > m$, $k \geq 2$ dan $m \geq 2$, $n \leq H(a)$ adalah berbeda.

Akibatnya, $\chi_L(nS_{k,m}) = k - a$ untuk $1 \leq n \leq H(a)$. □

Sebagai ilustrasi, diberikan pewarnaan lokasi $nS_{5,3}$ untuk $1 \leq n \leq 4$ yang dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 8. Pewarnaan lokasi minimum pada graf $4S_{5,3}$

Selanjutnya akan dicari batas bawah dan batas atas untuk $n > H(a)$.

(1) Batas bawah dari $\chi_L(nS_{k,m})$

Berdasarkan akibat 3.1 diperoleh $\chi_L(S_{k,m}) \geq k - a$ untuk $n > H(a)$, tetapi akan ditunjukkan bahwa $(k - a)$ tidaklah cukup untuk mewarnai. Untuk suatu kontradiksi, andaikan terdapat pewarnaan $(k - a)$ lokasi c pada $nS_{k,m}$ untuk $n > m$, $k \geq 2$ dan $m \geq 2$ dan $n > H(a)$. Karena $n > H(a)$., maka terdapat suatu i, j, k, t dengan $i \neq k$ sedemikian hingga $\{c(l_j^i), c(l_{jt}^i)\} = \{c(l_j^k), c(l_{jt}^k)\} = \{1, 2, 3, \dots, k - a\}$. Sangat jelas $c(l_{jt}^i) = c(l_{jt}^k)$ akibatnya $c(l_j^i) = c(l_j^k)$ untuk suatu $j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$, $t = 1, 2, 3, \dots, m$ adalah sama, suatu kontradiksi. Jadi $\chi_L(S_{k,m}) \geq k - a + 1$ untuk $n > H(a)$.

(2) Batas atas dari $\chi_L(nS_{k,m})$

Misalkan c adalah pewarnaan dari $V(nS_{k,m})$ menggunakan $(k - a + 1)$ warna.

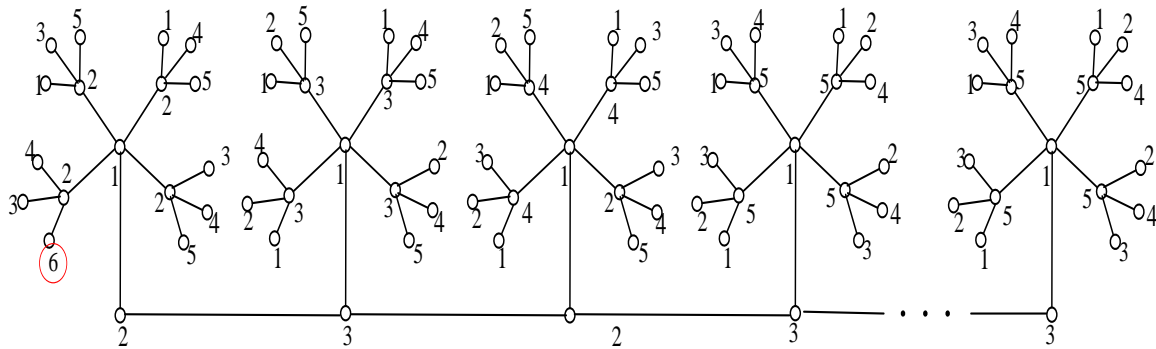
- $c(x_i) = 1$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- $c(y_i) = 2$, untuk i ganjil dan $c(y_i) = 3$, untuk i genap, $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- $c(l_j^i) = \{2, 3, \dots, (k - a + 1)\}$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$
- $c(l_{jt}^i) = \{1, 2, 3, \dots, (k - a + 1)\} \setminus \{c(l_j^i)\}$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ dan $t = 1, 2, 3, \dots, m$
- Jika $A = \{1, 2, 3, \dots, k - a + 1\}$, didefinisikan

$$\{c(l_{jt}^i) | t = 1, 2, 3, \dots, m\} = \begin{cases} A \setminus \{1, 2\} & , \quad \text{jika } i = 1, j = 1 \\ A \setminus \{k - a + 1\} & , \quad \text{lainnya.} \end{cases}$$

Dengan demikian banyaknya titik antara yang diberi warna p tidak lebih dari $\binom{k - a - 1}{m}$, untuk sebarang p . Hal ini dapat dilakukan karena $n > H(a)$. Akibatnya $c(l_j^i) = c(l_n^s)$, $j \neq n$, dan $i \neq s$, maka dapat disusun $\{c(l_{jt}^i) | t = 1, 2, 3, \dots, m\} \neq \{c(l_{nt}^s) | t = 1, 2, 3, \dots, m\}$. Berdasarkan Lemma 5.2, c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(nS_{k,m}) \leq k - a + 1$ untuk $n > H(a)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa kode warna dari semua $V(nS_{k,m})$ untuk $k > m$, $k \geq 3$ dan $m \geq 2$, untuk $n > H(a)$ adalah berbeda. Akibatnya, $\chi_L(nS_{k,m}) = k - a + 1$. □

Sebagai ilustrasi, diberikan pewarnaan lokasi $nS_{5,3}$ untuk $n > 4$ yang dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 9. Pewarnaan lokasi minimum pada graf $nS_{5,3}$

Hasil-hasil penelitian ini telah dipublikasikan yaitu, **Asmiati, Lyra Yulianti, C. Ike Tri Widyastuti, Further results on locating chromatic number for amalgamation of stars linking by one path, Indonesian Journal of Combinatorics (2) 1, 50-56, 2018.**

BAB 6 RENCANA TAHAPAN BERIKUTNYA

Pada tahun berikutnya, kami akan melanjutkan penelitian tentang dimensi metri graf gedung bertingkat; membuat system penentuan basis dengan menggunakan Bahasa Pemrograman C++; dan menentukan dimensi partisi graf gedung bertingkat.

Pada tahun berikutnya, kami akan melanjutkan menulis buku referensi tentang amalgamasi graf linkaran yang dapat diajikan acuan bagi peneliti yang tertarik tentang bilangan kromatik lokasi graf.

BAB 7 KESIMPULAN

Luaran dari penelitian tahun pertama ini adalah:

1. Pemakalah dalam konferensi internasional yaitu: *International congress of mathematicians*, 1-9 Agustus 2018, Rio De Janeiro, Brazil.
2. Publikasi Ilmiah:
 - a. Hasil-hasil penelitian yang diperoleh telah dipublikasikan pada jurnal internasional, yaitu: Asmiati, Lyra Yulianti, C. Ike Tri Widyastuti, Further results on locating chromatic number for amalgamation of stars linking by one path, *Indonesian Journal of Combinatorics* (2) 1, 50-56, 2018.
 - b. Hasil-hasil lain telah ditulis kedalam artikel berjudul *The Locating Chromatic Number for Certain of Petersen Graphs* dan disubmit ke jurnal internasional bereputasi terindeks Scopus, yaitu *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. **Asmiati**. 2017. Locating-chromatic number of banana tree. *International Mathematical Forum*,. **12** (1). 39-45.
- [2]. **Asmiati**. 2016. On the locating-chromatic numbers of non homogeneous caterpillars and firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 100(8). 1305-1316.
- [3]. **Asmiati**. 2016. The Locating-chromatic number for certain of trees. *Bulletin Mathematics*. **8**(2), 125-131.
- [4]. **Asmiati**. 2014. The locating-chromatic number of non-homogeneous amalgamation of stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **93**(1). 89-96.
- [5]. Baskoro, E.T. dan **Asmiati**. 2013. Characterizing all trees with locating-chromatic number 3. *Elec. J. of Graph Theory and Applications*. 1(2). 109-117. 2013.
- [6]. **Asmiati**, Assiyatun, H. Baskoro, E.T. Suprijanto, D. Simanjuntak, R. Uttunggadewa, S. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **3**(1). 11-23.

- [7]. **Asmiati** dan Baskoro, E.T. 2012. Characterizing of Graphs Containing Cycle with Locating-Chromatic Number Three. *AIP Conf. Proc.* **1450**. 351-357.
- [8]. **Asmiati**. Assiyatun, H. Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.Sci.* **43A**. 1-8.
- [9]. **Asmiati**. 2012. Partition dimension of amalgamation of stars *Bulletin Mathematics.* **4(2)**, 161-167.
- [10]. **Asmiati**, Wamiliana, Devriyadi, Some Petersen Graphs having locating chromatic number four or five, accepted (2017)
- [11]. M. Bača, E.T. Baskoro, A.N.M. Salman, **S.W. Saputro**, D. Suprijanto. 2011. The metric dimension of regular bipartite graph, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, **54** (102), No.1, pp. 15-28.
- [12]. Behtoei, A dan Oomoomi, B. 2011. On the locating chromatic number of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics.* 159. 2214-2221.
- [13]. G. Chartrand, L. Eroh, M.A. Johnson, dan O.R. Oellermann. 2000. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Applied Mathematics.* 105, 99-113.
- [14]. Chartrand, G. Salehi, E dan Zhang, P. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer.* **130**. 157-168.
- [15]. Chartrand, G. Erwin. Henning, M.A. Slater, P.J dan Zhang, P. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**. 89-101.
- [16]. Chartrand, G. Erwin. Henning, M.A. Slater, P.J dan Zhang, 2003, Graph of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Math.* **269**. 65-79.
- [17]. M.R. Garey dan D.S. Johnson. 1979. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP Completeness*, W.H. Freeman and Company.
- [18]. F. Harary dan R.A. Melter. 1976. On the metric dimension of a graph, *Ars Combinatori* **2**, 191-195.
- [19]. C. Hernando, M. Mora, I.M. Pelayo, C. Seara, dan D.R. Wood. 2010. Extremal graph theory for metric dimension and diameter, *Electronic Journal of Combinatorics*, **17(30)**, 1-28.
- [20]. A. **Junaidi**, Szilard Vajda, Gernat A. Fink. 2011. Lampung-A new handwritten character benchmark: Database, Labeling and Recognition, *Proceeding The Join Workshop on Multilingual OCR and Analytics for nosy unstructured text data.* 10-18.
- [21]. P.J. Slater. 1975. Leaves of trees, Proc. 6th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, *Congressus Numerantium* Vol **14**, 549-559.
- [22]. **S.W. Saputro**, E.T. Baskoro, A.N.M. Salman, dan D. Suprijanto. 2009. The metric

- dimension of a complete n -partite graph and its Cartesian product with a path, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **71**. 283-293.
- [23]. **S.W. Saputro**, R. Simanjuntak, S. Uttungadewa, H. Assiyatun, E.T. Baskoro, A.N.M. Salman, M. Bača. 2013. The metric dimension of the lexicographic product of Graphs. *Discrete Mathematics*, **313** .1045-1051.
- [24]. **S.W. Saputro** dan E.T. Baskoro, The locating chromatic number of the lexicographic and joint product of graphs, *Graphs and Combinatorics*, submitted.
- [25]. **S.W. Saputro**, D. Suprijanto, E.T. Baskoro, dan A.N.M. Salman. 2012. The metric dimension of a graph composition products with stars, *Journal of Indonesian Mathematics Society*, **18** No. 2. 85-92.
- [26]. R. Simanjuntak, S. Uttungadewa, dan **S.W. Saputro**. 2015. Metric dimension of amalgamation of graphs, *LNCS 8986 Combinatorial Algorithms*. 330-337.
- [27]. D.K. Syofyan, **S.W. Saputro**, E.T. Baskoro, dan I.A. Purwasih, On the locating-chromatic number of corona product graphs, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, accepted.

LAMPIRAN



Further results on locating chromatic number for amalgamation of stars linking by one path

Asmiati^a, L. Yulianti^b, C. Ike Tri Widyastuti^c

^aDepartment of Mathematics, Lampung University, Bandar Lampung, Indonesia

^bDepartment of Mathematics, Andalas University, Limau Manis Padang, Indonesia

^cFransiskus Senior High School, Bandar Lampung, Indonesia

asmiasi.1976@fmpa.unila.ac.id, lyra@sci.unand.ac.id, ike_widyastuti@yahoo.com

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph. Let c be a proper coloring using k colors, namely $1, 2, \dots, k$. Let $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ be a partition of $V(G)$ induced by c and let S_i be the color class that receives the color i . The color code, $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$, where $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ for $i \in [1, k]$. If all vertices in $V(G)$ have different color codes, then c is called as the *locating-chromatic k -coloring* of G . Minimum k such that G has the locating-chromatic k -coloring is called the locating-chromatic number, denoted by $\chi_L(G)$. In this paper, we discuss the locating-chromatic number for n certain amalgamation of stars linking a path, denoted by $nS_{k,m}$, for $n \geq 1$, $m \geq 2$, $k \geq 3$, and $k > m$.

Keywords: locating chromatic number, amalgamation of stars

Mathematics Subject Classification : 05C12, 05C15.

DOI: 10.19184/ijc.2018.2.1.6

THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER FOR CERTAIN OPERATION OF PETERSEN GRAPHS

A. Irawan^{1,2}, Asmiati³, S. Suharsono³, and L. Zakaria³

¹Posgraduate student, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Lampung University

Jl. Sumantri Brodjonegoro No.1, Bandar Lampung, Indonesia

²School of Information and Computer Management Pringsewu, Lampung, Indonesia
Jl. Wisma Rini No.09, Pringsewu, Lampung, Indonesia

³Mathematics Departement, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Lampung University

Jl. Sumantri Brodjonegoro No.1, Bandar Lampung, Indonesia

e-mail : agusirawan814@gmail.com, asmiati.1976@fmipa.unila.ac.id

Abstract. The locating-chromatic number of a graph combined two graph concept, coloring vertices and partition dimension of a graph. The locating-chromatic number, denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest k such that G has a locating k -coloring. In this paper, we discuss the locating-chromatic number for certain operation of Petersen graphs.

Keywords: color code, locating-chromatic number, Petersen graph

1. Introduction

Chartrand et al. [8] in 2002 has introduced the locating-chromatic number of a graph, with derived two graph concept, coloring vertices and partition dimension of a graph. Let $G = (V, E)$ be a connected graph and c be a proper k -coloring of G with color $1, 2, \dots, k$. Let $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ be a partition of $V(G)$ which is induced by coloring c (namely, color classes). The color code $c_\Pi(v)$ of v is the ordered k -tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ where $d(v, C_i) = \min \{d(v, x) | x \in C_i\}$ for any i . If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called k -locating coloring of G . The locating-chromatic number, denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest k such that G has a



CERTIFICATE

ASMIATI ASMIATI

has attended to the International Congress of Mathematicians – ICM2018, held at Riocentro Convention Center, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, from August 1–9, 2018.

Rio de Janeiro, August 9, 2018


Marcelo Viana
ICM2018 Chair



CERTIFICATE

Asmiati Asmiati

participated in the International Congress of Mathematicians – ICM2018, held at Riocentro Convention Center, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, from August 1–9, 2018 and presented the following Short Communication: "Further Results on Locating Chromatic Number of Petersen Graphs".

Rio de Janeiro, August 9, 2018


Marcelo Viana
ICM2018 Chair



CERTIFICATE



We hereby certify that, **Asmiati - Universitas Lampung**, participated in the (WM)² World Meeting for Women in Mathematics, held at Riocentro, Rio de Janeiro on July 31st, 2018.

Rio de Janeiro, July 31st, 2018



Carolina Xiraujo
Organizing Committee

SPONSORERS



ORGANIZERS



INSTITUTIONAL SUPPORT



A SATELLITE

