SIFAT-SIFAT MODUL $\mathcal{U}$-BEBAS

Fitriani[1], Indah Emilia Wijayanti[2], Budi Surodjo[3]

[1,2,3]Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
e-mail: [1]fitriani27@mail.ugm.ac.id, {[2]ind_wijayanti@ugm.ac.id, [3]surodjo_b}@ugm.ac.id

[1]Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, Indonesia

Abstrak. Diberikan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas ring R, X dan V submodul-submodul di $\oplus_\Lambda U_\lambda$, dengan $U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$. Pada himpunan $\sigma(0,\coprod_\Lambda U_\Lambda,M)$ dikoleksi semua submodul X di $\oplus_\Lambda U_\lambda$ sehingga keluarga $\mathcal{U}$ X-sub-bebas linear terhadap M dan pada himpunan $U(M)$ dikoleksi semua submodul V di $\oplus_\Lambda U_\lambda$ sehingga M dibangun oleh $\mathcal{U}_V$. Pasangan (X,V) dikatakan $\mathcal{U}$ -basis dari M jika X elemen maksimal pada himpunan $\sigma(0,\coprod_\Lambda U_\Lambda,M)$ dan V elemen minimal pada himpunan $\mathcal{U}(M)$. Modul M dikatakan $\mathcal{U}$ -bebas jika M memiliki $\mathcal{U}$ -basis. Dalam penelitian ini diselidiki sifat-sifat modul $\mathcal{U}$-bebas dengan memperhatikan sifat-sifat modul pada keluarga $\mathcal{U}$. Andaikan M modul $\mathcal{U}$ -bebas. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa jika K modul V -injektif (V -proyektif), maka K modul M-injektif (M-proyektif). Selanjutnya, jika V modul semisederhana, maka M semisederhana dan jika V modul Noether (Artin), maka M Noether (Artin). Selain itu, jika V modul duo, quasi-injektif dan quasi-proyektif, maka M modul duo dan V-proyektif.

Kata Kunci: pembangun, sub-bebas linear, $\mathcal{U}$-basis, modul $\mathcal{U}$ -bebas

1 PENDAHULUAN

Diberikan ring R. Konsep barisan eksak dari modul-modul atas R merupakan salah satu konsep penting dalam teori modul, di antaranya dalam pendefinisian modul proyektif dan modul injektif. Misalkan $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ barisan eksak, yaitu $Im\, f = Ker\, g = g^{-1}(0)$ [1,2]. Submodul 0 di C dapat diganti dengan sebarang submodul U di C sehingga diperoleh konsep barisan quasi eksak [3]. Barisan modul tersebut dikatakan quasi eksak di B jika terdapat submodul U di C sehingga $Im\, f = g^{-1}(U)$. Dalam hal ini, barisan tersebut disebut barisan U-eksak di B . Sebagai dual dari barisan U -eksak, Davvaz dan Parnian-Garamaleky [3] mendefinisikan barisan V-koeksak (V submodul di A). Barisan $0 \to A \xrightarrow{f} B$ dikatakan V-koeksak jika f injektif, g surjektif dan $f(V) = Ker\, g$.

Selanjutnya, Anvariyeh dan Davvaz [4] memberikan hasil lanjutan mengenai barisan quasi eksak dan menggunakannya untuk memperumum Lemma Schanuel. Selain itu, Davvaz dan Shabani-Solt [5] memberikan perumuman beberapa konsep dalam aljabar homologi menggunakan konsep barisan quasi eksak. Di dalam [6], Anvariyeh and Davvaz memperkenalkan barisan U-terpisah serta kaitan antara barisan U-terpisah dan modul proyektif. Selanjutnya, Madanshekaf [7] memberikan hasil-hasil lanjutan mengenai barisan quasi eksak dan Amizadeh dkk [8] menggunakna konsep barisan quasi eksak untuk memperkenalkan barisan quasi eksak dari S-acts.

Termotivasi dari pendefinisian barisan U-eksak dan barisan V-koeksak, Fitriani dkk. [9] memperkenalkan barisan sub-eksak sebagai generalisasi dari barisan eksak. Misalkan K,L,M modul-modul atas ring R dan X submodul di L. Tripel (K,L,M) dikatakan X-sub-eksak di L jika terdapat homomorfisma f dan g sehingga barisan $\mathrm{K} \xrightarrow{f} \mathrm{X} \xrightarrow{g} \mathrm{M}$ eksak. Jika dipilih $X = L$, maka barisan X-sub-eksak merupakan barisan eksak.

Sebagai aplikasi dari barisan X-sub-eksak, Fitriani dkk. [10] memperkenalkan konsep keluarga modul X-sub-bebas linear. Misalkan M modul atas ring R. Keluarga modul $\mathcal{N} = \{N_{\curlywedge}\}_{\Lambda}$ dikatakan X-sub-bebas linear terhadap M jika terdapat monomorfisma f dari X ke M, dengan X submodul di N, yaitu barisan $0 \to X \xrightarrow{f} M$ eksak. Konsep ini merupakan perumuman dari konsep keluarga modul bebas linear yang dikenalkan Suprapto [11].

Sebagai dual dari modul X-sub-bebas linear, Fitriani dkk. [12] mendefinisikan keluarga $\mathcal{U}_V$-generator dengan menggunakan konsep barisan V-koeksak. Konstruksi definisi keluarga $\mathcal{U}_V$ generator termotivasi dari konsep keluarga generator modul yang dikaji dari [13] dan [14].

Dengan menggabungkan konsep keluarga modul X-sub-bebas linear dan $\mathcal{U}_V$ -generator, didefinisikan basis dan modul bebas relatif terhadap suatu keluarga modul $\mathcal{U}$ sebagai berikut. Pasangan (X,V) submodul-submodul di $\oplus \wedge U_{\curlywedge}$ dikatakan $\underline{\mathcal{U}}$-basis untuk suatu modul M atas R jika keluarga $\mathcal{U}$ $\mathcal{X}$-sub-bebas linear terhadap M dan M dibangun oleh $\mathcal{U}_V$.

Pada himpunan $\sigma\left(0, \coprod_{\Lambda} U_{\curlywedge}, M\right)$ dikoleksi semua submodul X di $\oplus \Lambda U_{\curlywedge}$ sehingga keluarga $\mathcal{U}$ $\mathcal{X}$-sub-bebas linear terhadap M sebagai berikut:

$$\sigma\left(0, \coprod_{\Lambda} U_{\curlywedge}, M\right) = \{X \leq \oplus \Lambda U_{\curlywedge} | \mathcal{U}\mathcal{X} \text{ - sub-bebas linear terhadap } M\}. \quad (1)$$

Selanjutnya, pada himpunan $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ dikoleksi semua submodul V di $\oplus \Lambda U_{\curlywedge}$ sehingga M dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ sebagai berikut.

$$\mathcal{U}(M) = \{V \leq \oplus_{\Lambda} U_{\curlywedge} | M \text{ dibangun oleh } \mathcal{U}_V\}. \quad (2)$$

Pasangan (X,V) dikatakan $\mathcal{U}$-basis dari M jika X elemen maksimal pada $\sigma\left(0, \coprod_{\Lambda} U_{\curlywedge}, M\right)$ dan V elemen minimal pada himpunan $\mathcal{U}(\mathcal{M})$. Modul M dikatakan $\mathcal{U}$-bebas jika M memiliki U-basis. Jika X isomorfis dengan V , maka pasangan (X,V) dikatakan $\mathcal{U}$-basis kuat untuk M dan M disebut modul $\mathcal{U}$-bebas kuat.

Dalam penelitian ini diselidiki sifat-sifat modul $\mathcal{U}$-bebas dengan memperhatikan sifat-sifat modul pada keluarga $\mathcal{U}$. Sifat-sifat yang akan dselidiki antara lain adalah sifat modul M-proyektif, M-injektif, modul Noether, modul Artin dan modul semisederhana yang akan dikaji dari [14], serta sifat modul duo yang akan dikaji dari [15]. Sifat-sifat tersebut juga akan diselidiki pada modul $\mathcal{U}$-bebas kuat.

2 HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum memberikan sifat-sifat modul $\mathcal{U}$-bebas, berikut ini akan diulas kembali mengenai pengertian modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas, modul $\mathcal{U}$-bebas dan modul $\mathcal{U}$-bebas kuat.

Definisi 2.1 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluara modul atas R. Pasangan berurutan submodul-submodul (X,V) dari $\oplus_{\Lambda} U_{\curlywedge} U$ dikatakan $\underline{\mathcal{U}}$-basis dari modul M atas R jika $\mathcal{U}$ modul X-sub-bebas lin-ear terhadap M dan M modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$.*

Berdasarkan Definisi 2.1, jika $(X,V)\mathcal{U}$-basis untuk suatu modul M, maka X termuat di dalam himpunan $\sigma(0,\coprod_{\Lambda} U_{\lambda},M)$ dan V termuat di dalam himpunan $U(M)$. Selain itu, X dan V masing-masing tidak tunggal. Hal ini dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 2.2 *Misalkan $\mathcal{U}=\{\mathbb{Z}_p | p\ prima\}$ keluarga modul atas $\mathbb{Z}$. Pasangan-pasangan berurutan $(0,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3)$, $(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3)$, $(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3)$, $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3)$ merupakan $\underline{\mathcal{U}}$-basis dari modul $\mathbb{Z}_6$ atas $\mathbb{Z}$*

Selanjutnya, karena X dan V masing-masing tidak tunggal, maka dapat ditentukan elemen maksimal pada himpunan $\sigma(0,\coprod_{\Lambda} U_{\lambda},M)$ dan elemen minimal pada himpunan $U(M)$ untuk mendefinisikan modul $\mathcal{U}$-bebas. Hal ini termotivasi dari modul bebas klasik, dimana basis merupakan himpunan pembangun minimal dan himpunan bebas linear maksimal.

Definisi 2.3 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R. Pasangan (X,V) dikatakan $\mathcal{U}$-basis untuk modul M atas R jika (X,V) adalah $\underline{\mathcal{U}}$-basis dari M, X merupakan elemen maximal pada himpunan $\sigma(0,\oplus_{\Lambda}U_{\lambda},M)$ dan V adalah elemen minimal pada himpunan $U(M)$. Modul M atas R dikatakan $\mathcal{U}$-bebas jika M memiliki $\mathcal{U}$-basis.*

Berdasarkan Contoh 2.2, dapat ditentukan $\mathcal{U}$-basis dari modul $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut.

Contoh 2.4 *Misalkan $\mathcal{U}=\{\mathbb{Z}_n | n\ prima\}$ Pasangan $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3)$ adalah $\mathcal{U}$-basis dari modul $\mathbb{Z}_6$ atas $\mathbb{Z}$.*

Jika X isomorfis dengan V, maka pasangan (X,V) disebut $\mathcal{U}$-basis kuat seperti diberikan dalam Definisi berikut.

Definisi 2.5 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R. Pasangan (X,V) dikatakan $\mathcal{U}$ basis kuat jika (X,V) merupakan $\mathcal{U}$-basis dari M dan X isomorfis dengan V. Modul M dan R dikatakan $\mathcal{U}$-bebas kuat jika M memiliki $\mathcal{U}$-basis kuat.*

Diberikan ring R. Jika modul bebas F dan R memiliki basis X, maka $F\cong\oplus_{x\in X}R_x$, dengan $R_x\cong R$ untuk setiap $x\in X$. Jika diambil $\mathcal{U}=\{R\}$, maka $R^{(X)}$ merupakan $\mathcal{U}$-basis kuat dari F. Akibatnya, F modul $\mathcal{U}$-bebas kuat. Jadi, setiap modul bebas F atas R merupakan modul $\mathcal{U}$-bebas kuat dengan mengambil $\mathcal{U}=\{R\}$. Selanjutnya, berikut ini diberikan contoh dari modul $\mathcal{U}$-bebas kuat.

Contoh 2.6 *Diberikan ring komutatif R dengan elemen satuan dan $U=\{U_{\lambda}\}_{\Lambda}$ keluarga modul atas R, dengan $U=Hom_R(R,M_{\lambda})$, untuk setiap $\lambda\in\Lambda$. Didefinisikan $\phi: Hom_R(R,M)\to M$ dengan $\phi(f):=f(1)$. Dapat ditunjukkan bahwa ϕ isomorfisma. Oleh karena itu, M_{λ} dibangun oleh $\mathcal{U}_{U_{\lambda}}$ dan keluarga $\mathcal{U}$ U_{λ}-sub-bebas linear terhadap M. Jadi, M_{λ} modul $\mathcal{U}$-bebas kuat.*

Seperti telah diketahui bahwa modul proyektif merupakan penjumlah langsung modul bebas dan modul M-proyektif merupakan modul proyektif relatif terhadap suatu modul M. Demikian juga dengan dualnya yaitu modul M-injektif yang merupakan modul injektif relatif terhadap suatu modul M. Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan N modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X dan V di $\oplus_{\Lambda}U_{\lambda}$. Dalam proposisi berikut akan ditunjukkan bahwa jika K modul V-proyektif (V-injektif), maka K modul N-proyektif (N-injektif) untuk setiap N modul $\mathcal{U}$-bebas.

Proposisi 2.7 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V submodul dari $\oplus_\Lambda U_\lambda, \mathcal{U}_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $0 \neq N$ merupakan modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\oplus_\Lambda U_\lambda$.*

1. *Jika K modul V-injektif, maka K modul N-injektif.*
2. *Jika K modul V-proyektif, maka K modul N-proyektif.*

Bukti.

1. Berdasarkan asumsi, N modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\oplus_\Lambda U_\lambda$. Oleh karena itu, N dibangun oleh $\mathcal{U}_V$. Sehingga, terdapat epimorfisma $f : V \to N$. Akibatnya, barisan berikut:

$$0 \to Ker\, f \to V \xrightarrow{f} N \to 0 \tag{3}$$

   eksak. Berdasarkan hipotesis, K modul V-injektif. Oleh karena itu, berdasarkan [14] diperoleh bahwa K modul N-injektif.

2. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa jika K modul V -proyektif, maka K modul N-injektif. □

Karena setiap modul $\mathcal{U}$-bebas dan modul $\mathcal{U}$-bebas kuat merupakan modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas, maka sifat ini juga berlaku pada modul $\mathcal{U}$-bebas dan modul $\mathcal{U}$-bebas kuat.

Akibat 2.8 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V submodul dari $\oplus_\Lambda U_\lambda, U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $0 \neq N$ merupakan modul $\mathcal{U}$-bebas ($\mathcal{U}$-bebas kuat) dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\oplus_\Lambda U_\lambda$. Jika K modul V-injektif (V-proyektif), maka K modul N-injektif (N-proyektif).*

Proposisi 2.9 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V submodul dari U , U 2 U, untuk setiap 2 dan 0 6= N merupakan modul U-bebas dengan U-basis (X; V), untuk suatu submodul X di U. Jika V modul semisederhana, maka N semisederhana.*

Bukti. Karena N dibangun oleh UV , maka N bayangan epimorfisma dari V . Selanjutnya, karena V semisederhana dan setiap bayangan homomorfisma tak nol dari modul semisederhana merupakan modul semisederhana, maka N semisederhana.

Akibat 2.10 *Misalkan U keluarga modul atas R dan V submodul dari $\oplus_\Lambda U_\lambda, U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $0 \neq N$ merupakan modul $\mathcal{U}$-bebas ($\mathcal{U}$-bebas kuat) dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\oplus_\Lambda U_\lambda$. Jika V modul semisederhana, maka N semisederhana.*

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa sifat Noether dan Artin pada modul V akan mempengaruhi sifat Noether dan Artin pada modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas.

Proposisi 2.11 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V submodul dari $\bigoplus_\Lambda U_\lambda, U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $0 \neq N$ merupakan modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$. Jika V modul Noether (Artin), maka N Noether (Artin).*

Bukti. Berdasarkan hipotesis, V modul Noether. Karena barisan (3) eksak, maka V modul Noether akan berakibat N modul Noether. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa jika V modul Artin, maka N modul Artin.

Akibat 2.12 *Misalkan U keluarga modul atas R dan V submodul dari U , U 2 U, untuk setiap 2 dan 0 6= N merupakan modul U-bebas (U-bebas kuat) dengan U-basis (X; V), untuk suatu submodul X di U . Jika V modul Noether (Artin), maka N Noether (Artin).*

Proposisi 2.13 *Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V submodul dari $\bigoplus_\Lambda U_\lambda, U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $0 \neq N$ merupakan modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$. Jika V modul duo, quasi-injektif dan quasi-proyektif, maka N modul duo dan V-proyektif untuk setiap $N \in \sigma_V(U)$.*

Bukti. Diketahui V modul duo. Berdasarkan [15], jika quasi-proyektif, maka setiap bayangan homomorfisma dari V merupakan modul duo. Akibatnya, N modul duo. Selanjutnya, berdasarkan Proposisi 2.7 diperoleh N modul V-proyektif.

Akibat 2.14 Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V submodul dari $\bigoplus_\Lambda U_\lambda, U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $0 \neq N$ merupakan modul $\mathcal{U}$-bebas ($\mathcal{U}$-bebas kuat) dengan $\underline{\mathcal{U}}$-basis (X,V), untuk suatu submodul X di $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$. Jika V modul duo, quasi-injektif dan quasi-proyektif, maka N modul duo dan V-proyektif untuk setiap $N \in \sigma_V(U)$.

3 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa sifat-sifat modul pada keluarga modul $\mathcal{U}$ mempengaruhi sifat-sifat modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas, $\mathcal{U}$-bebas dan modul $\mathcal{U}$-bebas kuat. Diberikan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan M modul $\underline{\mathcal{U}}$-bebas, dengan basis (X,V). Jika K modul V-injektif (V-proyektif), maka K modul M-injektif (M-proyektif). Selanjutnya, jika V modul semisederhana, maka M semisederhana dan jika V modul Noether (Artin), maka M Noether (Artin). Selain itu, jika V modul duo, quasi-injektif dan quasi-proyektif, maka M modul duo dan V- proyektif. Hal ini juga berlaku jika M modul $\mathcal{U}$-bebas dan $\mathcal{U}$-bebas kuat.

REFERENCES

[1] W.A. Adkins, S. H. Weintraub, Algebra: An Approach via Module Theory. Springer-Verlag, 1992.

[2] D.S. Dummit, R.M. Foote, Abstract Algebra. John Wiley and Sons Inc., 2004.

[3] B. Davvaz, Y. A. Parnian-Garamaleky, A Note on Exact Sequences, Bull.Malays. Math. Sci. Soc., 22(2) No.1, 53–56, 1999.

[4] S. M. Anvariyeh, B. Davvaz, On Quasi-Exact Sequences, Bull. Korean Math. Soc, 42, No. 1, 149–155, 2005.

[5] B. Davvaz, H. Shabani Solt, A Generalization of Homological Algebra, J. Korean Math. Soc., 39 No. 6, 881–898, 2002.

[6] S. M. Anvariyeh, B. Davvaz, U-Split-Exact Sequences, Far East J. Math. Sci (FJMS), 4 No. 2, 209–219, 2002.

[7] A. Madanshekaf, Quasi-Exact Sequence and Finitely Presented Modules, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 3 No. 2, 49–53, 2008.

[8] R. Aminizadeh, H. Rasouli, A. Tehranian, Quasi-exact Sequences of S-Acts, Bull. Malaysian Math. Soc, 1–11, 2018.

[9] Fitriani, B. Surodjo, I.E. Wijayanti, On X-Sub-Exact Sequences, Far East J. Math. Sci., 100, 1055–1065, 2016.

[10] Fitriani, B. Surodjo, I.E. Wijayanti, On X-Sub-Linearly Independet Modules, J. Phys. Conf. Ser., 893, 2017.

[11] Suprapto, Structure of Family of Linearly Independent Modules and Cohereditary Modules on a Category [M], Disertasi, Universitas Gadjah Mada, 2015.

[12] Fitriani, I.E. Wijayanti, B. Surodjo, Generalization of U-Generator and M-Subgenerator Related to Category [M] , Journal of Mathematics Research, 10, No. 4, 101–106, 2018.

[13] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja, R. Wisbauer, Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory. Birkhauser Verlag, 2006.

[14] R. Wisbauer, Foundation of Module and Ring Theory. Gordon and Breach, Philadelphia, 1991. 48.

[15] A. C¸. Ozcan, A. Harmanci, P. F. Smith, Duo Modules, Glasgow Math. J., 533–545, 2006.