Prosiding Seminar Nasional Sains Matematika Informatika dan Aplikasinya IV
Fakultas MIPA Universitas Lampung
ISSN: 2086 – 2342 Vol. 4 Buku 4

Konsep Keterbagian Pada Ideal Dalam Ring Z[i] dan Aplikasinya dalam Penyelesaian Persamaan Diophantine Non Liner Dua Variabel

Karina Sylfia Dewi[1], Amanto[1], Agus Sutrisno[1], Wamiliana[1] dan Asmiati[1]
Ksylfia@gmail.com
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung[1)]

ABSTRAK

Persamaan Diophantine adalah persamaan polinomial atas bilangan bulat dalam n variabel dengan solusi bilangan bulat. Persamaan Diophantine berbentuk $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ dengan f adalah fungsi n variabel dengan $n \geq 2$. Ada 3 masalah dasar yang diperhatikan dalam persamaan Diophantine : apakah persamaan Diophantine mempunyai penyelesaian, penyelesaiannya hingga atau tak hingga, yang terakhir jika mempunyai penyelesaian, tentukan semua penyelesaiannya. Mencari penyelesaian persamaan Diophantine lebih sulit daripada menentukan apakah penyelesaiannya ada atau tidak. Beberapa metode penyelesaian persamaan Diophantine dasar antara lain : dekomposisi, aritmatika modulo, matematika induksi dan metode fermat tak hingga. Sedangkan, metode dalam penelitian ini adalah metode ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ dengan memperhatikan konsep keterbagian, keprimaan serta faktorisasi pada bilangan bulat $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

Kata Kunci: Persamaan Diophantine, norm, prima, ring bilangan bulat Gaussian dalam $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$

1. PENDAHULUAN

Sementara itu, secara umum diketahui bahwa persamaan Diophantine adalah persamaan dengan variabel-variabel tertentu sehingga solusinya merupakan bilangan bulat. Persamaan Diophantine pertama kali dipelajari oleh seseorang yang bernama Diophantus dari Alexandria yang dikenal dengan julukan "bapak dari aljabar". Koefisien dari persamaan Diophantine hanya melibatkan bilangan bulat. Tidak ada bilangan pecahan di persamaan ini (Andreescu dkk, 2010). Persamaan Diophantine tidak harus linear, bisa saja kuadrat, kubik, atau lainnya. Contohnya $ax^2 + by^2 = c$. Persamaan Diophantine bisa memiliki banyak solusi yang beragam, yaitu tidak ada solusi, solusi tunggal dan solusi banyak (tak berhingga).

Pada mulanya persamaan Diophantine khususnya persamaan Diophantine linear menggunakan Algoritma Euclid untuk menyelesaikannya. Beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Diophantine bentuk linear antara lain: metode faktorisasi prima, dengan pertidaksamaan, metode parametrik, metode modulo, metode induksi, *Fermat's Method of Infinite Descent* (FMID). Dalam perkembangannya persamaan Diophantine yang berbentuk kuadrat dan yang memuat persamaan Pell dapat menggunakan metode matriks dan analisis keterbagian (Andreescu dkk, 2010). Persamaan Pell adalah persamaan yang mempunyai solusi penyelesaian bilangan bulat positif dengan bentuk $x^2 - dy^2 = 1$, $x \neq 1$, $y \neq 0$ dengan $d > 1$ dimana d adalah bilangan bulat positif dan bukan kuadrat sempurna .

Dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang konsep keterbagian pada ideal dalam ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ dan juga aplikasinya untuk penyelesaian persamaan Diophantine non linear.

1.1 Konsep Norm Unit dalam Ring Z[i]

Definisi 1.1.1

Bilangan bulat Gaussian adalah bilangan kompleks yang bagian riil dan bagian imajinernya adalah bilangan bulat. Dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks, himpunan bilangan bulat Gaussian membentuk ring yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ dan dituliskan dengan

$$\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}] = \{ a + bi | a,b \in \mathbb{Z} \}$$

(Andreescu dkk, 2010).

Himpunan semua bilangan bulat Gaussian $\mathbb{Z}[i]$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian membentuk ring .

Sebelum membahas unit dalam ring Z[i], terlebih dahulu didefinisikan norm (jarak) pada ring Z[i].

Definisi 1.1.2

Norm pada $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ merupakan fungsi :

$N : \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}] \rightarrow \mathbb{Z}$

dengan rumus $N(a + bi) = a^2 + b^2, \forall (a + bi) \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

Norm di atas menyatakan ukuran besaran dari elemen $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Norm juga digunakan untuk pembuktian eksistansi (keberadaan) unit dan kepriman dalan ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Selain itu, norm juga digunakan untuk mengukur sisa keterbagian pada ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

Berikut ini diberikan sifat multiplikatif dari norm pada $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

Teorema 1.1.1

Fungsi norm $N : \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}] \rightarrow \mathbb{Z}$ bersifat multiplikatif, yaitu :

$(N(\alpha\beta)) = N(\alpha)N(\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$

Sifat multiplikatif norm N pada $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ ini juga dapat digunakan untuk menghubungkan struktur multiplikatif pada $\mathbb{Z}$ dengan struktur multiplikatif pada $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, dan juga dapat untuk menghubungkan keterbagian, keprimaan pada $\mathbb{Z}$ dengan keterbagian serta keprimaan dalam ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

Dengan definisi norm pada $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ pada Definisi 1.1.2 dapat digunakan untuk mengembangkan pengertian unit pada ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ berikut ini :

Definisi 1.1.3

Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Bilangan bulat Gaussian α dikatakan unit dari $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ jika dan hanya jika $\mathrm{N}(\alpha) = 1$.

Sehingga unit dari $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ adalah 1, -1, *i*,-*i*.

1.2 Keterbagian dan Faktorisasi Tunggal Dalam Ring Z[i]

Definisi 1.2.1

Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$. Bilangan α dikatakan membagi β atau ditulis $\alpha \mid \beta$ jika dan hanya jika terdapat bilangan $\gamma \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ sedemikian sehingga $\beta = \alpha\gamma$.

Selanjutnya $\beta \neq 0$ disebut bilangan Gaussian prima dalam $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, yaitu jika β bukan unit sedemikian sehingga pembagi dari β hanya $\pm 1, \pm i, \pm \alpha$, dan $\pm i\alpha$.

Definisi 1.2.2

Bilangan $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ dikatakan relatif prima/ coprima jika faktor persekutuan α, β hanya unit.

Teorema 1.2.1 (Algoritma Euclid)

Misalkan $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ tidak nol. Gunakan relasi rekursif pada teorema pembagian (Teorema 4.1.6), mulai dengan pasangan α, β dan buat pembagi atau faktor dan sisa pada satu persamaan. Hasil bagi

---

dan faktor atau pembagi pada langkah berikutnya, munculkan sisa tak nol :
$\alpha = \beta y_1 + \rho_{2,}\mathbb{N}(\rho_1) < N(\beta)$
$\beta = \rho_1 y_1 + \rho_{2,}\mathbb{N}(\rho_2) < N(\rho_1)$
$\rho_1 = \rho_2 y_3 + \rho_{3,}\mathbb{N}(\rho_3) < N(\rho_2)$
.
.
.

Sisa terakhir tak nol dapat dibagi oleh semua faktor persekutuan dari α dan β, dan sisa tersebut adalah faktor persekutuan, sehingga sisa disebut gcd dari α dan β.

Teorema 1.2.2
Jika norm dari bilangan bulat Gaussian prima dalam $\mathbb{Z}$, maka bilangan bulat Gaussian tersebut prima dalam $\mathbb{Z}[i]$.
Bukti :
Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ mempunyai norm prima, katakan $\mathrm{N}(\alpha) = p$, akan ditunjukkan α hanya mempunyai faktor trivial (faktornya mempunyai norm 1 atau hanya $\mathrm{N}(\alpha)$).
Perhatikan faktorisasi dari $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, katakan $\alpha = \beta\gamma$.
Dari $\mathrm{N}(\alpha) = p$, diperoleh $\mathrm{N}(\beta\gamma) = p$. Sehingga

$$\mathrm{N}(\beta)\mathrm{N}(\gamma) = p$$

Maka $\mathrm{N}(\beta)$ atau $\mathrm{N}(\gamma)$ sama dengan 1. Jadi β atau γ adalah unit, sehingga α prima dalam $\mathbb{Z}[i]$.

Teorema 1.2.3 (Teorema Faktorisasi Tunggal)
Untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $\mathrm{N}(\alpha) > 1$ mempunyai faktorisasi prima tunggal, yaitu:
Jika $\alpha = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_3 = \pi_1'^{\pi_2'} \ldots \pi_3'$,
dengan π_i dan $\pi_j{}'$ prima dalam $\mathbb{Z}[i]$, maka $r = s$ dan π_i kelipatan unit dari π_i'.

2. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:
1. Membangun konsep keterbagian dan faktorisasi tunggal pada ring Z[i]
2. Mengkaji penerapan persamaan Diophantine non linear pada ideal dalam ring $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini akan diberikan contoh penyelesaian persamaan Diophantine non linear dua varibel dengann metode ring Z[i].

1. Tentukan penyelesaian bilangan bulat (*x*, *y*) yang memenuhi persamaan Diophantine non linear $y^2 = x^3 - 1$.
   Penyelesaian :
   Pasangan bilangan bulat (*x*, *y*) = (1,0) jelas memenuhi persamaan
   $y^2 = x^3 - 1$. Selanjtnya akan ditunjukkan bahwa (1,0)
   merupakan satu – satunya solusi untuk persamaan $y^2 = x^3 - 1$.
   Persamaan $y^2 = x^3 - 1$ dituliskan sebagai
   $$x^3 = y^2 + 1$$
   Yang mempunyai faktor
   $$x^3 = (y + i)(y - i) \qquad (3.1)$$
   Jika dua faktor pada ruas kanan (3.1) relatif prima dalam $\mathbb{Z}[i]$, maka karena perkaliannya

merupakan kubik (pangkat 3), maka berdasarkan teorema 4.1.19 faktornya harus kubik. Karena setiap unit adalah kubik, yaitu $1 = 1^3, -1 = (-1)^3, i = (-i)^3, -i = 1^3$, maka x^3 dapat dituliskan dalam bentuk kubik.

Jadi selain $y + i$ dan $y - i$ relatif prima sehingga persamaan (3.1) akan menyatakan $y + i$ dan $y - i$ kubik.

Untuk menunjukkan $y + i$ dan $y - i$ relatif prima, misalkan δ faktor persekutuan dari $y + i$ dan $y - i$ segingga δ membagi selisih $y + i$ dan $y - i$ atau δ membagi $y + i$ dan $y - i = 2i$ atau dengan kata lain $\delta | 2i$. Misalkan $2i = (1 + i)^2$ faktorisasi tunggal dalam $\mathbb{Z}[i]$, maka $\delta = 1, 1 + i$ atau $\delta = (1 + i)^2$ atau kelipatan unit – unitnya.

Andaikan δ bukan unit, maka δ dapat dibagi oleh $1 + i$, sehingga $(1 + i) \mid x^3$. Selanjutnya ambil normnya, sehingga
$\mathrm{N}(1 + \mathrm{i}) \mid \mathrm{N}(\mathrm{x}^3)$ atau

$$2 \mid x^6$$

Sehingga x genap. Maka $y^2 + 1 = x^3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, maka diperoleh $y^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Tetapi $-1 (\mathrm{mod}\ 4)$ bukan suatu bilangan kuadrat. Jadi terjadi kontradiksi . Sehingga yang benar δ merupakan unit.

Sekarang sudah diketahui bahwa $y + i$ dan $y - i$ rekatif prima, maka harus

$$y + i = (m + ni)^3 \qquad (3.2)$$

Untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$.
Persamaan (3.2) diuraikan menjadi :

$$y + i = m^3 + 3m^2ni + 3m(ni)^2 + (ni)^3$$
$$y + i = m^3 - 3mn^2 + (3m^2n - n^3)i \qquad (3.3)$$

Bagian riil dan imajiner dari (3.3) disamakan diperoleh :

$$\begin{aligned} y &= m^3 - 3mn^2 \\ &= m(m^2 - 3n^2) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

dan

$$\begin{aligned} 1 &= 3m^2n - n^3 \\ 1 &= n(3m^2 - n^2) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Dari persamaan (3.5) diperoleh $n = 1$ atau $n = -1$.

(i) Jika $n = 1$, maka $3m^2 - n^3 = 1$
$\Leftrightarrow 3m^2 = 2$
Tidak ada solusi bulat untuk m.

(ii) Jika $n = -1$, maka $1 = (3m^2 - 1)$
$1 = -3m^2 + 1$
$3m^2 = 0$
$m = 0$

Sehingga dari (3.4) diperoleh $y = 0$ jadi diperoleh $x^3 = y^3 + 1 = 1$. Maka $x = 1$. Sehingga terbukti (1,0) merupakan satu – satunya solusi untuk $y^2 = x^3 - 1$.

2. Tentukan penyelesaian pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan Diophantine non linear $x^2 + 1 = y^3$.
Penyelesaian :
Contoh soal no. 1 di atas sebenarnya identik dengan contoh soal no.1, bedanya hanya variabelnya. Pada contoh soal ini akan diselesaikan hanya dengan menggunakan konsep norm dan Lemma Euclid.
Dalam Ring $\mathbb{Z}[i]$, maka berlaku $x^2 + 1 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i}) = y^3$. Berdasarkan Lemma Euclid (Teorema 1.2.1 (1)), $x + \mathrm{i}$ dan $x - \mathrm{i}$ membagi y. Sehingga

$x^2 + 1$ membagi y, katakan:

$$(x^2 + 1)k = y, \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad (3.6)$$

Dengan mensubstitusikan (3.6) pada soal, maka diperoleh:

$$x^2 + 1 = k^3(x^2 + 1)^3$$
$$\Leftrightarrow k^3(x^2 + 1)^3 - (x^2 + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(k^3(x^2 + 1)^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 1) = 0 \text{ atau } (k^3(x^2 + 1)^2 - 1) = 0$$

Untuk $x^2 + 1 = 0$, akan diperoleh solusi x dalam bilangan kompleks.
Sehingga diperoleh

$$k^3(x^2 + 1)^2 = 1 \qquad (3.7)$$

Kedua ruas pada persamaan (3.7) dikenai norm , diperoleh

$$N(k^3)N(x^2 + 1)^2 = N(1) \qquad (3.8)$$

Agar persamaan (3.8) terpenuhi, maka $x^2 + 1$ harus 1. Sehingga diperoleh $x = 0$. Jadi diperoleh solusi untuk pasangan bilangan bulat $(x,y) = (0,1)$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, persamaan Diophantine non linear dapat diselesaikan dengan metode ring $\mathbb{Z}[i]$, yaitu menggunakan sifat – sifat faktorisasi prima tunggal dalam ring Z[i] yang merupakan perumuman sifat pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Dengan menjabarkan persamaan Diophantine menjadi perkalian elemen – elemen prima dalam ring $\mathbb{Z}[i]$, akan diperoleh solusi bilangan bulat yang memenuhi. Persamaan Diophantine yang dapat diselesaikan dengan metode ini adalah persamaan yang dapat difaktorkan menjadi bilangan prima Gaussian dalam ideal ring Z[i]. Selain itu permasalahan persamaan Diophantine non linear juga dapat diselesaikan cukup dengan menggunakan Lemma Euclid dan konsep norm pada ring Z[i].

5. DAFTAR PUSTAKA

Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I. 2010. *An Introduction to Diophantine Equetion.* Birkhauser.

Burton, D.M. 1980. *Elementary Number Theory.* University Of New Hampshire.United State of Afrika.

Dummit, D.S., Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra* . Third Edition. Y&Y. United states of America.

Dudley, U. 1969. *Elementary Number Theory.* W.H. Ferman and Company, San Fransisco.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra.* Sixth Edition. Addison Wesley Publishing Company, Inc. Philippines

Graham, M. 1975. *Modern Elementary Mathematics*. Harcort Brace Jonanovich, inc. New York.

Grillet, P.A. 2007. *Graduate Text In Mathematics.* Second Edition. Springer. New York