

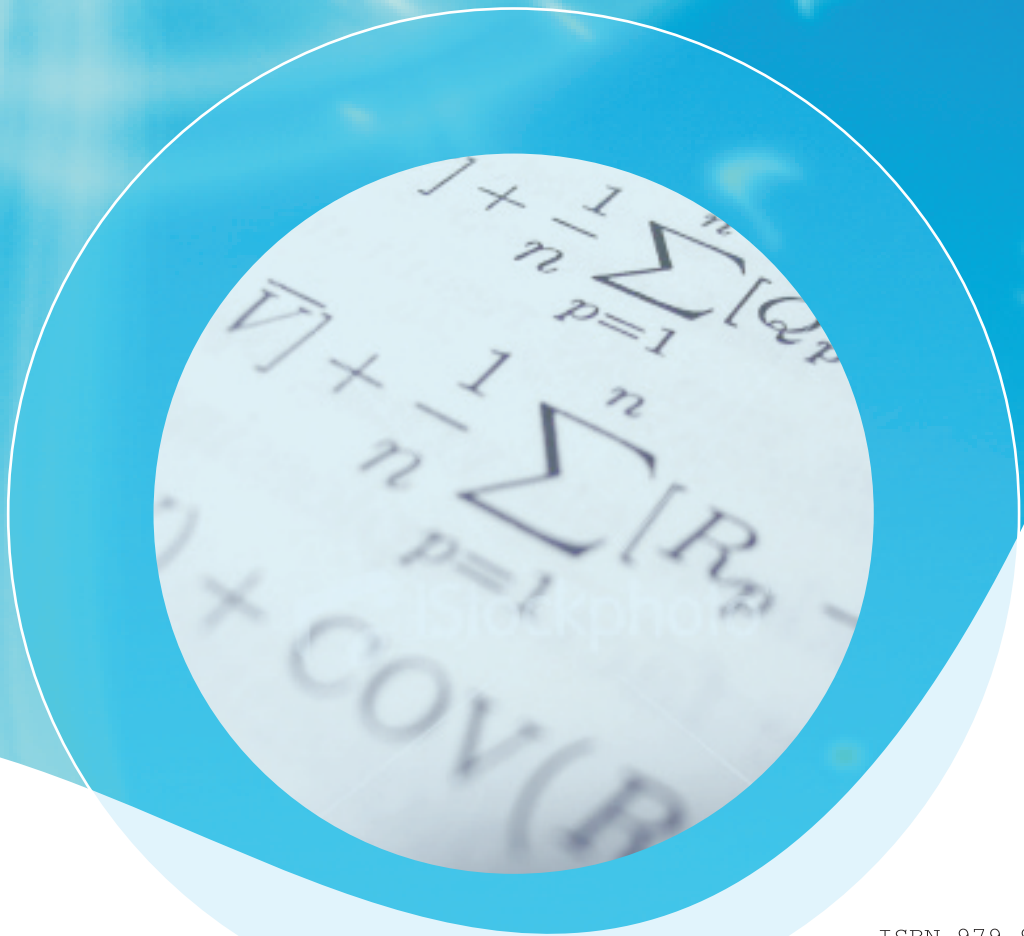
ISBN : 979-978-3456-79-1



PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2010

“MATEMATIKA DALAM RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN”

Surakarta, 7 Agustus 2010



Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta

ISBN 979-978-3456-79-1



9 799783 456791 >

Tim Prosiding

Editor

Irwan Susanto, Diari Indriati, Purnami Widyaningsih,
Winita Sulandari, Titin Sri Martini

Tim Teknis

Ririn Setiyowati, Adi Tri Ratmanto, Adimas Banjar, Ika Susanti
Nugroho Arif Sudibyo , Raditya Wicaksanang, Lilik Prasetyo,
Arrine Yunidha, Herman Setiawan, Fauzia

Layout & Cover

Suryanto Wibowo

Tim Reviewer

Drs. H. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.

Dr. Mardiyana, M.Si.

Drs. Muslich, M.Si.

Drs. Kartiko, M.Si.

Dra. Mania Roswitha, M.Si.

Drs. Pangadi, M.Si.

Drs. Sutrima, M.Si.

Drs. Budi Usodo, M.Si.

Dra Etik Zukhronah, M.Si.

Dra Respatiwulan, M.Si.

Sri Kuntari, M.Si.

Steering Committee

Prof. Dr. Widodo, MS.

Prof. Dr. Sri Haryatmi Kartiko, M.Sc.

Prof. Dr. Budiyono, M.Sc.

Prof. Dr. Sutarno, M.Sc.,Ph.D.

Dr. Eng. Admi Syarif

Drs. H. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.

Sambutan Ketua Panitia

Assalamu'alaikum wr.wb.

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. Berkat rahmat dan hidayahNya pada hari ini kita dapat melaksanakan kegiatan Seminar Nasional Matematika dengan Tema **Matematika dalam Riset, Teknologi dan Pendidikan.**

Pada kesempatan ini perlu kami laporkan bahwa peserta dan pemakalah yang mengikuti seminar ini kurang lebih sebanyak 200 orang yang terdiri dari dosen perguruan tinggi, guru, mahasiswa S1/S2, serta praktisi dan pemerhati matematika. Dalam seminar ini disajikan pula makalah yang meliputi bidang analisis, aljabar, statistika, komputasi, pemodelan matematika dan pendidikan matematika.

Ucapan terima kasih kami haturkan kepada Rektor Universitas Sebelas Maret, jajaran pimpinan FMIPA, para pembicara utama, para pemakalah dan peserta, *steering committee*, rekan – rekan panitia baik para dosen dan mahasiswa, serta kepada semua pihak sponsor atas segala bentuk partisipasi, dukungan dan bantuannya dalam menyukseskan acara ini.

Akhirnya, kami berharap dengan kegiatan ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan matematika dalam bidang riset dan teknologi serta dalam pendidikan matematika. Selanjutnya, kepada seluruh peserta maupun pembicara kami ucapkan selamat berseminar, semoga Allah SWT senantiasa membimbing dan meridhoi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Surakarta, 7 Agustus 2010

Ketua Panitia



Irwan Susanto, DEA

DAFTAR ISI

| | Halaman |
|---|---------|
| Halaman Judul | i |
| Tim Prosiding | ii |
| Tim <i>Reviewer</i> | iii |
| <i>Steering Committee</i> | iv |
| Sambutan Ketua Panitia | v |
| Daftar Isi | vi |
| MAKALAH UTAMA | |
| <i>Genetic Algorithm</i> dan Optimasi <i>Admi Syarif</i> | 1 |
| The Eccentric Digraph of Grap <i>Tri Atmojo Kusmayadi and M. Abdul Rivai</i> | 16 |
| ANALISIS DAN ALJABAR | |
| Aplikasi Metode Alternating Projection Pada Reduksi Orde Model Sistem Linear Parameter Varying <i>Muh. Wakhid Musthofa</i> | 27 |
| Ekivalensi Integral Darboux- α dan Integral Riemann- α Pada \mathbb{R}^2 <i>Muslich dan Supriyadi</i> | 42 |
| Hubungan Antara Order Derivatif- F^α dengan Diemensi- γ Dari Grafik Fungsi Kontinu Holder Berpangkat $\alpha \in (0,1]$ <i>Supriyadi Wibowo</i> | 50 |
| Karakteristik Matriks Invertibel Dalam Aljabar Max-Plus <i>Siswanto</i> | 61 |
| Operasi pada Grup Kurva Eliptik $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ Menggunakan Ruang Proyeksi <i>Santoso Budiwiyono</i> | 71 |
| Permulaan Geometri Hiperbolik <i>Agung Prabowo</i> | 81 |
| Ruang 2-Norma pada $l^2 \times l^2$ <i>Sadjidon dan Sunarsini</i> | 97 |
| PEMODELAN MATEMATIKA/TERAPAN | |
| Analisis Morfologi Sungai Pada Pola Distribusi Sedimentasi <i>Kamiran dan Danang Bagiono</i> | 102 |

| | |
|---|-----|
| Analisis Pengambilan Keputusan Jenis Transportasi dari Tempat Tinggal Menuju Kampus UNS dengan Metode ANP <i>Raditya Wicaksanang dan Diari Indriati</i> | 113 |
| Hubungan Antara Keterkendalian dan Kenormalan Pada Sistem Linear Singular <i>Kris Suryowati</i> | 126 |
| Konstruksi Rumus Kecepatan untuk Mengkhatamkan Al Qur'an <i>Muh. Wakhid Musthofa</i> | 139 |
| Kontur Sedimentasi pada Persimpangan Dua Sungai Utama <i>Basuki Widodo dan Puguh Sasono</i> | 147 |
| Magnetohydrodynamo Solar Activity Simulation Toward The Next Maunder Minimum : Interplanet Global Cooling <i>Bambang Setiahadi</i> | 158 |
| Model <i>Continuous Time Markov Chain (CTMT) SIS</i> <i>Widya Pratesa Aryawati, Respatiwulan, Sri Kuntari</i> | 171 |
| Model Logistik dengan Daya Dukung Lingkungan Sebagai Fungsi Nutrisi untuk Bakteri <i>Lactobacillus delbrueckii</i> <i>Niken Larasati</i> | 179 |
| Noise Removal Of Soho/Lasco Images Using Median Filter <i>Bachtiar Anwar</i> | 187 |
| Path Analysis for Knowing Causal Correlation Among Age, Faculty, Time Duration Using Facebook, and Time Duration Studying to Academic Achievement of Sebelas Maret University Students <i>Heru Triswianti, Yuliana Susanti, Tri Atmojo K</i> | 198 |
| Pemodelan Tinggi Muka Air Jurug Menggunakan <i>Radial Basis Function Network</i> <i>Winita Sulandari dan Titin Sri Martini</i> | 208 |
| Penyelesaian Persamaan Integral Volterra Linear dalam Bentuk Fredholm dengan Metode Fungsi Walsh <i>Purnami Widyaningsih</i> | 216 |
| Perilaku Kualitatif Model Epidemik SVIR Tanpa Kematian Karena Penyakit <i>Marsudi</i> | 224 |
| Prediksi Bilangan Bintik Matahari Maksimum pada Siklus 24 Berdasarkan Modifikasi Model Xanthakis <i>John Maspupu</i> | 239 |
| Profil Sedimentasi pada Sungai Model Shazy Shabayek <i>Basuki Widodo, Miftahus Saidin</i> | 252 |
| Solusi Efisien dalam Masalah Optimisasi Multi-Tujuan dengan Metode Kendala- ϵ yang Diperluas <i>Solikhatun dan Siti Nurazima Firmanti</i> | 262 |
| Spektrum Nilai Eigen Masalah Sturm-Liouville Nonlinear <i>Sutrima</i> | 271 |

STATISTIKA

| | |
|--|-----|
| Analisis Faktor Resiko pada Mahasiswa FMIPA UNS Surakarta Terhadap Indeks Prestasi Rendah <i>Sri Sulistijowati H. dan Winita Sulandari</i> , | 282 |
| Analisis Kurva Pertumbuhan Bobot Badan Ayam Broiler <i>Wayan Surya Wardhani</i> | 292 |
| Analisis Pengelompokan Kabupaten/Kotamadya Berdasarkan Indikator Partisipasi Perempuan Propinsi Jawa Timur <i>Dimas Okky, Ismaini Zain, dan Dwiatmono A.W</i> | 300 |
| Analisis Pola Data Sebagai Alternatif dalam Penentuan Orde Intervensi Multi Input <i>Dewi Anugeraheni Sahari, Winita Sulandari, dan Siswanto</i> | 310 |
| Analisis Regresi Tobit pada Pendapatan Perempuan Kawin dalam Kegiatan Ekonomi di Jawa Timur <i>Mei Puspita Rini, Ismaini Zain, dan Dwiatmono Agus Widodo</i> | 320 |
| Analisis Regresi <i>Tobit</i> pada Pengeluaran Biaya Kesehatan pada Rumah Tangga di Jawa Timur <i>Imam Uddin Hanief, Ismaini Zain, dan Dwiatmono A.W</i> | 336 |
| Comparison Of The Properties Of Coronal Mass Ejections <i>Bachtiar Anwar</i> | 349 |
| Delta Untuk Harga Opsi Asia Pada <i>Traded Account</i> <i>Didit Budi Nugroho</i> | 361 |
| Determining Poverty Map Using Small Area Estimation Method <i>Eko Yuliasih dan Irwan Susanto</i> | 368 |
| Estimasi Parameter Model Buhlmann Straub pada Teori Kredibilitas <i>Affiaty O., Dedi Rosadi, dan Adhitya RE</i> | 379 |
| Model Fungsi Transfer Multi Input untuk Jumlah Wisatawan Mancanegara Melalui Bandara Adi Soemarmo <i>Ratna Dewi Ayu Nestri, Sri Sulistijowati H., dan Siswanto</i> | 385 |
| Model Optimal Produksi Padi di Indonesia Menggunakan Estimasi Kuadrat Terkecil dan Estimasi-M <i>Yuliana Susanti dan Hasih Pratiwi</i> | 395 |
| Penggolongan Resiko Jumlah Klaim Asuransi Kendaraan Pada Model Regresi Generalized Poisson Dengan R <i>Neva Satya Hadewi, Dedi Rosadi, dan Adhitya Ronnie Effendi</i> | 408 |
| Optimisasi Portofolio <i>Mean-Var</i> Dengan Volatilitas Tak Konstan dan Efek <i>Long Memory</i> <i>Sukono, Subanar dan Dedi Rosadi</i> | 423 |
| Pemilihan Jenis Kartu Telepon Seluler di Surakarta Menggunakan Analisis Faktor <i>Astika Ratnawati, dan Etik Zukhronah</i> | 436 |

| | |
|---|-----|
| Penanganan Overdispersi dengan Model Regresi Binomial Negatif I pada Faktor-faktor yang Mempengaruhi Angka Kematian yang disebabkan oleh Kanker Paru-Paru <i>Devni Prima Sari, Dedi Rosadi, dan Adhitya Ronnie Effendi</i> | 445 |
| Pendekatan Metode Bayesian untuk Faktor Kredibilitas <i>Setyo Wira Rizky, Dedi Rosadi, dan Adhitya Ronnie Effendi</i> | 453 |
| Penerapan Model Regresi Logistik <i>Polytomous</i> untuk Menentukan Pola Hubungan Antara Tingkat Kesehatan Masyarakat dan Indeks Gini <i>Respatiwulan dan Hasih Pratiwi</i> | 465 |
| Pengklastran dengan Menggunakan Diagram Voronoi dan Algoritma K-Means <i>Alvida Mustikarukmi</i> | 477 |
| Reduksi Dimensi Data Persen Transmittan Kurkumin dengan Transformasi Wavelet Diskret Menggunakan OSS-R <i>Aniq Atiqi Rohmawati, Yanti Lina Mayasari, Elly Anna, dan Nur Chamidah</i> | 485 |
| Reliabilitas Konsistensi Internal Instrumen Pengukur Tingkat Kepuasan Mahasiswa Sebagai Pelanggan Internal <i>Gagak Margono</i> | 494 |
| PENDIDIKAN MATEMATIKA | |
| Matematika Sebagai Aktifitas Manusia <i>Agung Prabowo</i> | 508 |
| Pemanfaatan Internet dalam Pembelajaran Matematika Pokok Bahasan Persamaan Garis Lurus untuk Kelas VII SMP <i>Yuni Yamasari, Ika Kurniasari, dan Alfath Famela Rokhim</i> | 525 |
| Pengetahuan Konten Pedagogik Guru Matematika <i>Trusti Hapsari</i> | 538 |
| Perancangan Model Peta Profil Dosen Perguruan Tinggi di Indonesia <i>Ngarap Im Manik</i> | 548 |
| Strategi Pembelajaran Peningkatan Kemampuan Berpikir (Suatu Upaya Meningkatkan Kualitas Pembelajaran Matematika) <i>Mulin Nu'man</i> | 559 |
| INFORMATIKA/KOMPUTASI | |
| Penentuan Jurusan Di SMAN 8 Surakarta Dengan <i>Fuzzy Inference System (FIS)</i> Mamdani <i>Moh.Glesung Gautama, Titin Sri Martini, dan Sri Kuntari</i> | 575 |
| Perancangan Piranti Lunak Komputer Pengujian Struktur Aljabar <i>Group, Ring dan Field</i> <i>Ngarap Im Manik</i> | 583 |

GENETIC ALGORITHM DAN OPTIMASI

Admi Syarif

Program Studi Ilmu Komputer Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung
admisyarif@unila.ac.id

***Abstract** – Research on optimization problems have taken great interest of researchers because of its great impact on engineering and economics. For real world applications, the optimization problems are usually associated with various constraints. Thus it becomes difficult to solve it exactly. Genetic Algorithm (GA) is known as one of powerful heuristic methods for solving various optimization problems. In this several years, we have applied GA on many variants of optimization problems such as Transportation Problem (TP), Traveling Salesman Problem (TSP), Vehicle Routing Problems (VRP), Production Distribution and Inventory Problem (PDI), Supply Chain Management (SCM), Scheduling and so on. We have shown that GA, in general, would give good solution for those problems.*

***Keywords:** Genetic Algorithm, Network and Engineering design, Heuristic, Optimization*

1. PENDAHULUAN

Persoalan optimisasi sangat sering kita jumpai dalam kehidupan kita sehari-hari. Umumnya persoalan ini terkait pencarian nilai maksimum atau nilai minimum dari suatu fungsi dengan sejumlah pembatas yang harus dipenuhi. Karenanya persoalan optimisasi biasanya sangat kompleks dan sulit diselesaikan dengan metode-metode konvensional. Gen dan Cheng (2000) mengelompokkan persoalan optimisasi menjadi empat kelompok sebagai berikut: Optimisasi tanpa pembatas (*Unconstraint Optimization*), Optimisasi dengan pembatas (*Constraint Optimization*), Optimisasi kombinatorik (*Combinatorial Optimization*) dan Optimisasi dengan beberapa fungsi tujuan (*Multi-objective optimization*)

Riset yang mensimulasikan proses evolusi (*evolutionary process*) untuk menyelesaikan persoalan-persoalan optimasi yang sulit diselesaikan dengan metode matematika tradisional telah banyak dilakukan sejak tahun 1960-an. Beberapa diantaranya yang termasuk kelompok ini adalah *Genetic Algorithm* (GA) (Holland, 1975), *Evolutionary Strategies* (ES) (Rechenberg, 1973), *Evolutionary Programming* (Fogel, 1966) dan *Genetic Programming* (GP) (Koza, 1992 dan 1994). Diantara metode-metode tersebut, GA dapat dikatakan sebagai metode yang sangat populer saat ini. GA banyak dipakai pada berbagai aplikasi bisnis,

teknik maupun pada bidang-bidang keilmuan lain.

Berbeda dengan metode-metode lainnya, GA melakukan pencarian terhadap solusi optimal dengan empat cara berikut (Goldberg, 1989) :

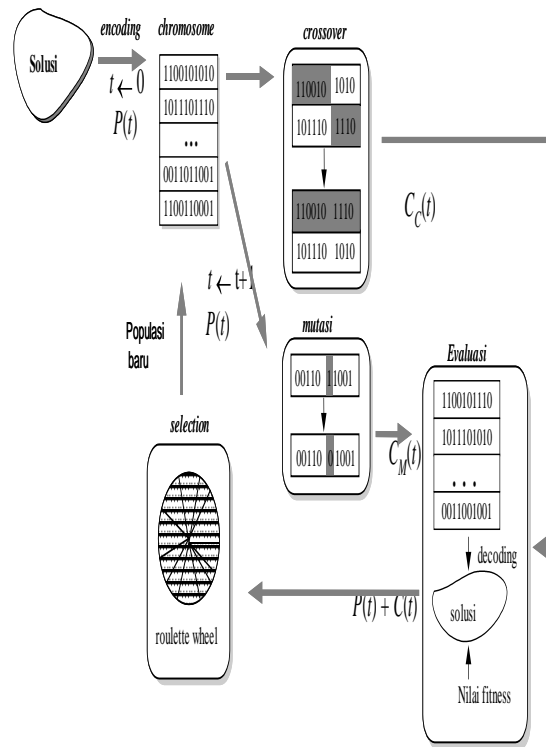
1. GA bekerja dengan proses coding dari parameter.
2. GA melakukan proses pencarian menggunakan sekumpulan kandidat solusi (kromosom).
3. GA bekerja dengan memanfaatkan informasi dari fungsi tujuan dan bukan menggunakan fungsi turunan atau sejenisnya.
4. GA bekerja menggunakan aturan probabilitas.

Dalam beberapa tahun terakhir, kami telah fokus pada riset implementasi GA pada berbagai persoalan optimisasi. Makalah ini bertujuan memberikan rangkuman aplikasi GA pada berbagai persoalan optimasi diantaranya: diantaranya: *Transportation Problem (TP)*, *Traveling Salesman Problem (TSP)*, *Vehicle Routing Problems (VRP)*, *Production Distribution and Inventory Problem (PDI)*, *Supply Chain Management (SCM)*, *Scheduling* dll.

2. GENETIC ALGORITHM (GA)

Dilihat dari namanya akan sangat mudah diketahui bahwa GA adalah suatu metode yang meniru mekanisme pada proses evolusi. Proses evolusi ini dilakukan pada sekumpulan kandidat solusi (kromosom) dengan mengikuti prinsip seleksi alam yang dikembangkan oleh Darwin. GA pertama kali diperkenalkan oleh Holland pada tahun 1975. Kemudian, beberapa ahli mempopulerkan GA diantaranya Goldberg (1989), Gen dan Cheng (1997 dan 2000) dan Michalewicz (1994).

Telah dikenal luas bahwa kinerja dari GA sangat dipengaruhi oleh 5 komponen : Cara merepresentasikan kromosom; Cara pembentukan generasi awal; evaluasi kromosom; Metode operasi genetika dan nilai dari parameter GA misalnya ukuran populasi, probabilitas crossover, probabilitas mutasi dan maksimum generasi. Secara umum struktur dasar dari GA secara umum disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Struktur GA

2.1. Representasi kromosom

Pada saat mengimplementasikan GA, suatu hal yang pertama kali harus dipertimbangkan adalah bagaimana merepresentasikan kandidat solusi (kromosom) yang sesuai untuk persoalan yang akan diselesaikan. Proses ini dikenal dengan istilah *encoding*. Disini kita harus menyatakan karakteristik dari persoalan dalam bentuk sekumpulan *string* (bilangan atau alphabet). Representasi yang baik haruslah mampu mempresentasikan semua parameter dan solusi yang mungkin (*feasible solutions*) dari persoalan.

Penentuan metode representasi kromosom sangat berpengaruh pada komponen-komponen lain dari GA misalnya evaluasi, *crossover*, mutasi dan seleksi. Karenanya metode representasi mempunyai peran yang sangat penting terhadap efektifitas dan efisiensi dari GA.

2.2. Pembentukan generasi awal

Pada umumnya, generasi awal dari proses GA berisikan kromosom yang dibangkitkan secara random. Untuk menghindari diperolehnya solusi yang tidak layak (*infesible solution*), setiap kromosom generasi awal harus diuji kelayakannya untuk semua pembatas (*constraint*) yang ada. Kromosom yang tidak memenuhi salah satu pembatas dikatakan sebagai kromosom yang tidak layak. Ada dua cara yang sering dipakai untuk menangani kromosom yang tidak layak pada generasi awal. Pertama, membuang kromosom tersebut dan membangkitkan kromosom baru hingga diperoleh kromosom yang layak (*rejecting strategy*). Cara kedua adalah dengan membuat suatu prosedur tertentu untuk memperbaiki kromosom tersebut (*repairing strategy*).

2.3. Evaluasi kromosom

Ada banyak metode yang digunakan untuk mengevaluasi suatu kromosom. Namun demikian, metode yang paling sering digunakan adalah dengan menghitung nilai fungsi tujuan sebagai *fitness value*. Metode lain yang juga sering digunakan adalah metode penskalaan (*scaling function*).

2.4. Operasi genetika

2.4.1 Crossover

Crossover merupakan suatu proses pembentukan kromosom turunan (*offspring*) dengan menggabungkan elemen dari kromosom induk yang terpilih (*parent*). Proses ini dilakukan dalam upaya pembentukan kromosom baru dengan solusi yang lebih baik. Ada banyak metode *crossover* yang dibahas pada berbagai literatur. Penggunaan metode *crossover* sangatlah berkaitan dengan metode representasi yang kita pilih.

2.4.2 Mutasi (*Mutation*)

Proses mutasi biasanya dilakukan dengan melakukan perubahan terhadap gen pada suatu kromosom. Proses ini bertujuan meningkatkan keragaman kromosom yang ada pada populasi sehingga kita tidak terbawa pada solusi optimum local (*local optimum*).

2.4.3 Seleksi (*Selection*)

Salah satu hal penting pada proses GA adalah bagaimana memilih kromosom yang akan diikutkan ke generasi berikutnya. Berdasarkan teori evolusi Darwin, hanya kromosom yang

terbaik yang dipilih ke generasi berikutnya. Pada proses GA dikenal beberapa metode yang digunakan untuk memilih kromosom. Metode seleksi tersebut secara umum dapat dikelompokkan menjadi dua kelompok. Kelompok pertama adalah metode seleksi yang dilakukan dengan memilih kromosom berdasarkan nilai *fitness relative* terhadap nilai *fitness* kromosom lain yang ada pada populasi atau sering dikenal dengan metode proporsional (*proportional selection methods*). Yang termasuk kelompok ini diantaranya *roulette wheel selection*, *stochastic universal selection* dsb. Kelompok kedua adalah metode seleksi berdasarkan ranking suatu kromosom pada populasi. Pemberian ranking ini tentu saja didasarkan pada nilai *fitness cromosome* tersebut. Kelompok ini sering dikenal dengan *ordinal-based selection methods*. Adapun metode seleksi yang termasuk pada kelompok ini adalah *elitist selection*, *tournament selection*, *rank selection*, $(\mu + \lambda)$ selection dan lain sebagainya.

Parameter GA

Pada saat mengaplikasikan GA pada suatu persoalan, kita harus menentukan nilai-nilai dari beberapa parameter diantaranya Probabilitas Crossover (p_C), Probabilitas Mutation (p_M), Population size (pop_size), Maksimum generasi (max_gen).

3. IMPLEMENTASI GA

3.1. Persoalan Logistik

TP dikenal sebagai salah satu persoalan LP yang diperkenalkan oleh Hitchcock (Hitchcock, 1941). Persoalan ini memformulasikan penentuan cara pengiriman produk dari beberapa sumber ke beberapa tujuan tertentu. Untuk beberapa aplikasi tertentu, sering kali TP memiliki beberapa tambahan pembatas (*constraint*). Cao (1992, 1995) memperkenalkan TP dengan *nonlinear side constraint* dan metode *branch-and-bound* untuk menyelesaikannya. Metode GA untuk menyelesaikan persoalan ini juga dikembangkan oleh Admi and Gen (2003a).

Persoalan lain yang dikenal dengan *exclusionary side constraint transportation problem* (escTP) diperkenalkan oleh Sun (1998). Pada persoalan ini, pengiriman produk ke suatu tujuan dari dua sumber yang berbeda tidak diperkenankan. Tentu saja persoalan ini menjadi lebih sulit diselesaikan. Aplikasi persoalan ini pada dunia sangat banyak dijumpai

diantaranya: pada suatu pengiriman, bahan kimia yang berbeda tidak boleh disimpan dalam satu ruangan, makanan dan racun tidak boleh dikirim secara bersama-sama dsb.

Untuk menyelesaikan persoalan ini, telah dikembangkan implementasi GA yang berbasis *spanning tree* dan dihibridisasi dengan *fuzzy logic controller* (FLC) (Admi dan Gen, 2003a). Makalah ini menjelaskan pengembangan kriteria kelayakan kromosom, metode penanganan *constraint* dan FLC untuk meningkatkan kinerja GA (Wang, Wang and Hu, 1997).

Model pengembangan persoalan TP yang lain adalah *two-stage transportation problem* (tsTP) diperkenalkan oleh Heragu. Model persoalan ini diberikan oleh Heragu. tsTP merepresentasikan persoalan pengiriman sejumlah bahan mentah dari beberapa *supplier* ke beberapa pabrik dan selanjutnya pengiriman produk dari pabrik untuk memenuhi permintaan pelanggan. Fungsi tujuannya adalah meminimisasi total biaya transportasi. Heragu menyelesaikan persoalan ini dengan mentransformasikan tsTP ke bentuk *solid transportation problem* (sTP). Pada riset terdahulu, kami mengimplementasikan GA untuk persoalan ini (Admi dan Gen, 2003b). Metode yang dikembangkan mampu menyelesaikan tsTP tanpa perlu mentransformasikannya ke bentuk sTP.

Riset pada persoalan logistik multi tahap juga cukup banyak menarik perhatian peneliti dalam beberapa dekade terakhir. Tujuan umumnya adalah menentukan aliran dan jumlah produk / bahan mentah yang harus diproduksi atau dikirimkan mulai dari supplier hingga ke pelanggan sedemikian hingga total biayanya minimum.

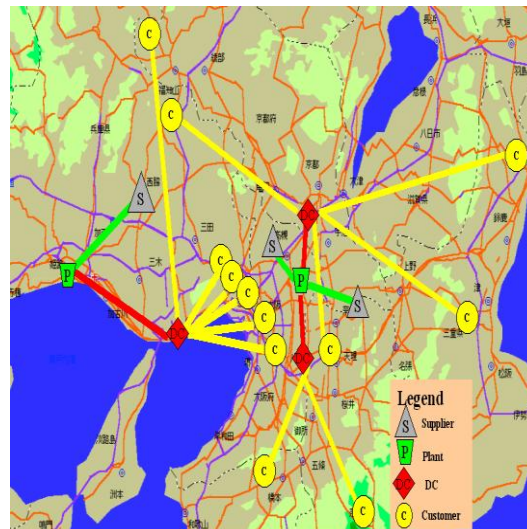
Admi, Yun, dan Gen (2002) mengembangkan model *multi-stage logistic system problem*. Pada model ini ditambahkan pembatas jumlah pabrik dan gudang yang akan dibuka. Persoalan ini dapat dilihat sebagai kombinasi dari *multiple-choice Knapsack problem* dan *location-allocation problem* secara simultan. Dengan demikian persoalan ini akan termasuk kelompok *NP-hard* (Gen and Cheng, 1997). Ilustrasi persoalan ini dapat dilihat pada Gambar 2 (Yu, 1997).

Implementasi GA untuk menyelesaikan persoalan ini dikembangkan oleh Admi, Yun dan Gen (2002). Metode ini mengadopsi representasi berbasis *Tree* yang dihibridisasi dengan FLC. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan GA representasi matriks.

3.2 Traveling Salesman Problem (TSP)

Traveling Salesman Problem (TSP) dikenal sebagai salah satu masalah optimisasi yang

cukup banyak aplikasinya dalam dunia nyata dan banyak menarik perhatian para peneliti sejak beberapa dekade terdahulu (Eisele, Castaneda, dan Galindo, 2003; Reinelt, 1994).



Gambar 2. Ilustrasi *three-stage logistics system*

Secara sederhana, TSP dideskripsikan sebagai permasalahan untuk menentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang *salesman*, yang berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali kemudian kembali lagi ke kota semula.

Meskipun tidak begitu jelas, siapa yang pertama kali memperkenalkan TSP, TSP dikarakteristikan kedalam permasalahan *NP-complete* (Aarth dan Lenstra, 1997). Berbagai metode telah banyak dilaporkan, namun demikian, sampai saat ini diyakini belum ada metode atau algoritma yang dapat memberikan solusi eksak untuk TSP yang berukuran besar. Para peneliti terkemuka dunia terus berupaya mengembangkan metode-metode yang dapat memberikan solusi optimal (<http://www.tsp.gatech.edu/>).

Implementasi GA yang dihibridisasi dengan local search untuk memperoleh solusi optimal dari TSP telah (Admi, Wamiliana dan Yasir. 2007). Untuk persoalan TSP, representasi kromosom yang biasanya digunakan adalah representasi permutation-based encoding. Sebagai *Local Search* digunakan dua metode yaitu *algoritma 2-opt* dan *algoritma 3-opt*.

Eksperimen dilakukan terhadap 15 contoh persoalan standard (*Benchmark Test Problems*) untuk TSP (Beasley,1993). Pada tabel 1 disajikan hasil eksperimen implementasi

GA pada persoalan TSP yang dibandingkan dengan hasil dari metode-metode lain.

Tabel 1. Hasil Eksperimen untuk TSP

| No | TSPLIB | Optimum | METODE HEURISTIC | | | | | |
|----|---------|---------|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | | Gr | Br | NN | L-K | sGA | hGA |
| 1 | eil51 | 426 | 521 | 541 | 486 | 426 | 488 | 426 |
| 2 | eil76 | 538 | 631 | 574 | 634 | 538 | 588 | 538 |
| 3 | rat99 | 1211 | 1487 | 1387 | 1424 | 1211 | 1375 | 1211 |
| 4 | kroA100 | 21282 | 24287 | 25446 | 25525 | 21282 | 24192 | 21282 |
| 5 | lin105 | 14379 | 16766 | 16479 | 17052 | 14467 | 16397 | 14379 |
| 6 | pr144 | 58537 | 65844 | 67638 | 60964 | 58537 | 98943 | 58537 |
| 7 | kroA150 | 26524 | 31892 | 32266 | 33745 | 26525 | 31580 | 26524 |
| 8 | pr152 | 73682 | 84703 | 81132 | 85427 | 73682 | 116689 | 73682 |
| 9 | pr226 | 80369 | 96178 | 87953 | 94520 | 80369 | 140108 | 80369 |
| 10 | A280 | 2579 | 3016 | 2903 | 3281 | 2579 | 2935 | 2579 |
| 11 | pr299 | 48191 | 60766 | 58220 | 60585 | 48627 | 60857 | 48191 |
| 12 | lin318 | 42029 | 49744 | 48690 | 50306 | 42174 | 50282 | 42029 |
| 13 | rat575 | 6773 | 8059 | 7859 | 8201 | 6787 | 8098 | 6773 |
| 14 | rat783 | 8806 | 10180 | 10020 | 11024 | 8814 | 10500 | 8806 |
| 15 | pr1002 | 259045 | 297719 | 299001 | 319514 | 260414 | 416539 | 260575 |

Keterangan:

Gr : *Greedy*

L-K : *Lin-Kernighan*

sGA : Standar Genetika Algoritma

hGA : hybrid Genetika Algoritma

Br : *Boruvka*

NN : Nearest Neighbor

3.3. Problem Lokasi/Alokasi (*Facility Location / Allocation Problem*)

Permasalahan lokasi atau alokasi dari suatu fasilitas merupakan persoalan yang sangat sering dihadapi pada berbagai aplikasi di dunia industri. Fasilitas yang dimaksud disini dapat berupa suatu pabrik, gudang, sekolah, rumah sakit dan lainnya. Pada persoalan ini, biasanya kita dihadapkan pada penentuan lokasi dari suatu fasilitas dan strategi pengalokasian fasilitas-fasilitas untuk memenuhi keinginan pelanggan sedemikian hingga diperoleh total biaya operasional terkecil. Total biaya yang dimaksud biasanya terdiri dari biaya tetap (pengoperasian fasilitas) dan biaya pengalokasian (misalnya biaya transportasi untuk memenuhi keinginan pelanggan).

Ada sangat banyak variasi model dari persoalan ini untuk berbagai aplikasi yang berbeda. Namun demikian, secara umum kita dapat mengelompokkan menjadi dua kelompok berdasarkan keberadaan pembatas kapasitas dari fasilitas. Untuk persoalan dimana setiap fasilitas dilengkapi dengan batasan kapasitas maksimum, dikenal dengan istilah *Capacitated Facility Location/Allocation Problem* (cLAP). Sebaliknya untuk persoalan lokasi / alokasi yang mengasumsikan bahwa tidak terdapat pembatas kapasitas (atau dengan kapasitas tak terhingga) dikenal dengan istilah *Uncapacitated Facility Location/Allocation Problem* (uLAP).

uLAP dikenal sebagai suatu persoalan yang termasuk kelompok persoalan. Beberapa peneliti melaporkan metode heuristik untuk penyelesaian uLAP. Al-Sultan and Al-Fawzan (1999) melaporkan penggunaan *Tabu Search Algorithm*. Disini, mereka menggunakan suatu algoritma yang disebut algoritma *Net Benefid Heuristic* (NBH) untuk memperoleh solusi heuristik dari uLAP. Selanjutnya Al-Fawzan juga melaporkan suatu algoritma sebagai suatu pengembangan dari algoritma NBH. Metode Heuristik yang lain untuk menyelesaikan persoalan ini juga dikembangkan oleh Kuehn and Hamburger (1963).

Aplikasi GA untuk menyelesaikan uLAP diberikan oleh Admi dan Gen (2005). Admi menggunakan Paralel GA yang dihibridisasi dengan *Fuzzy Logic Controller* (FLC). Konsep sub-populasi (*sub-population*) diperkenalkan untuk mempertinggi tingkat keragaman kromosom. Disini kromosom pada setiap generasi dibagi menjadi dua sub-populasi. Pada masing-masing sub-populasi, dipergunakan operasi genetika (*crossover* dan mutasi) yang berbeda. Untuk memperoleh hasil yang lebih baik, Admi dan Gen (2003a) melakukan hibridisasi GA dengan metode *Fuzzy Logic Controller* (FLC). Mereka mempergunakan metode Wang-Wang-Hu (1997).

Untuk menguji efektifitas GA, dilakukan penelitian menggunakan persoalan standar yang diberikan oleh *OR-library* (Beasley,1993). Untuk masing-masing persoalan, *hp-GA* dijalankan 10 kali dan diperoleh hasil pada Tabel 2.

3.4 Persoalan Penjadwalan (*Scheduling Problem*)

Masalah penjadwalan merupakan salah satu permasalahan yang menjadi perhatian utama para praktisi yang berkecimpung dalam dunia industri. Penjadwalan atau sering disebut dengan *scheduling* didefinisikan sebagai suatu kegiatan untuk mengerjakan sekumpulan pekerjaan / *job* dalam suatu periode tertentu. Pekerjaan diproses pada setiap sumber daya dengan urutan tertentu selama waktu tertentu. Pada umumnya, Fungsi tujuan dari penjadwalan adalah meminimumkan waktu penyelesaian semua tugas (*makespan*), keterlambatan pengerjaan, waktu tunggu pada mesin, biaya, dan lain-lain.

Dalam beberapa literatur, masalah penjadwalan dikelompokkan menjadi dua kelompok yaitu: *flow shop scheduling* dan *job shop scheduling*. *Job Shop Scheduling* merupakan satu dari masalah penjadwalan mesin yang menentukan urutan proses operasi pada tiap mesin dengan tujuan meminimumkan waktu penyelesaian maksimum. JSP merupakan salah satu persoalan yang dikarakteristikan sebagai *NP-complete*. (Betrianis dan Aryawan, 2003). JSP merupakan persoalan yang telah banyak diaplikasikan pada berbagai persoalan dunia nyata diantaranya perencanaan pembangunan dan perencanaan produksi dsb. Pengembangan metode heuristik untuk penyelesaian persoalan ini cukup banyak dilakukan diantaranya: *Neural Network*, *Simulated Annealing*, *Tabu Search*, dll.

Pada riset terdahulu, kami mengimplementasikan GA untuk persoalan JSP. Pengujian Implementasi GA untuk persoalan ini dilakukan dengan menggunakan 10 persoalan standard Pengembangan aplikasi GA untuk JSP dilakukan dengan menggunakan Software Aplikasi Dev C++. Tabel 3 menunjukkan perbandingan hasil GA dan metode-metode lain yang ada pada literatur. Ilustrasi, solusi penjadwalan terbaik pada persoalan ta061 diberikan pada Gambar 3.

Tabel 2. Hasil Eksperimen untuk uLAP

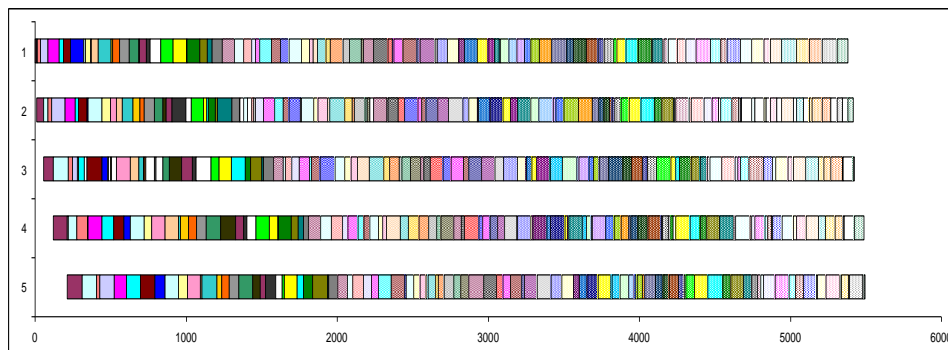
| Data File | m | n | Pop_size | Max_gen | Best | Average | %error | ACT | Optimal |
|-----------|----|----|----------|---------|------------|------------|--------|--------|------------|
| Cap 72 | 16 | 50 | 100 | 3000 | 977799.4 | 977799.40 | 0 | 9.03 | 977799.4 |
| Cap 73 | 16 | 50 | 100 | 3000 | 1010641.45 | 1010641.45 | 0 | 7.89 | 1010641.45 |
| Cap 74 | 16 | 50 | 100 | 3000 | 1034976.98 | 1034976.98 | 0 | 8.45 | 1034976.98 |
| Cap 101 | 25 | 50 | 100 | 4000 | 796648.44 | 796734.52 | 0.09 | 49.37 | 796648.44 |
| Cap 102 | 25 | 50 | 100 | 4000 | 854704.20 | 855801.20 | 0.11 | 51.28 | 854704.20 |
| Cap 103 | 25 | 50 | 100 | 4000 | 893782.11 | 894937.58 | 0.13 | 58.76 | 893782.11 |
| Cap 104 | 25 | 50 | 100 | 4000 | 928941.75 | 928941.75 | 0 | 38.9 | 928941.75 |
| Cap 131 | 50 | 50 | 100 | 5000 | 793439.56 | 794217.63 | 0.1 | 203.34 | 793439.56 |
| Cap 132 | 50 | 50 | 100 | 5000 | 851495.33 | 853362.75 | 0.21 | 186.45 | 851495.33 |
| Cap 133 | 50 | 50 | 100 | 5000 | 893076.71 | 894252.26 | 0.13 | 247.83 | 893076.71 |
| Cap 133 | 50 | 50 | 100 | 5000 | 928941.75 | 930432.32 | 0.16 | 192.67 | 928941.75 |

Tabel 3. Hasil Eksperimen untuk Persoalan Penjadwalan

| No | Test | Job | Mach | Metode Job Shop Scheduling | | | | | | | | Optimal |
|----|------|-----|------|----------------------------|-------|---------|-------------|-------------------------|---------------------------------------|----------------------|------------------------------|---------|
| | | | | GA | | | SA | Tabu Search | Local Search with Shifting Bottleneck | Taboo Search with NS | Applegate & Cook's Algorithm | |
| | | | | Best | Worst | Average | | | | | | |
| 1 | ta02 | 15 | 15 | 1022 | 1062 | 1040,6 | - | 1244 (NS) | - | - | 1244 (VA) | 978 |
| 2 | ta09 | 15 | 15 | 1065 | 1112 | 1078,1 | - | 1274 (B) | 1274 (BV) | - | 1274 (VA) | 1040 |
| 3 | ta13 | 20 | 15 | 1199 | 1230 | 1213,2 | - | - | 1342 (H2) | 1282 (S) | 1271 (VA) | 1180 |
| 4 | ta17 | 20 | 15 | 1267 | 1312 | 1289,1 | - | - | 1478 (BV) | 1462 (S,Nsb) | 1458 (VA) | 1256 |
| 5 | ta24 | 20 | 20 | 1440 | 1500 | 1474,7 | 1646 (ZLGR) | - | 1659 (BV) | - | 1602 (VA) | 1408 |
| 6 | ta26 | 20 | 20 | 1454 | 1514 | 1476,3 | - | 1655 (We) | 1647 (H2) | 1645 (Nsd) | 1539 (VA) | 1402 |
| 7 | ta31 | 30 | 15 | 1764 | 1764 | 1764 | - | 1764 (Ta1) 1766 (NS) | - | 1764 (AHLS) | - | 1764 |
| 8 | ta40 | 30 | 15 | 1604 | 1673 | 1638,8 | 1673 (ZLGR) | 1673 (Ta1) | 1681 (BV) | 1674 (Nsb) | 1631 (VA) | 1590 |
| 9 | ta45 | 30 | 20 | 1893 | 1948 | 1908,9 | - | - | - | 2000 (Nsb) | 1997 (VA) | 1785 |
| 10 | ta50 | 30 | 20 | 1863 | 1920 | 1901,8 | - | 1926 (JPC) | 1967 (BV) | - | 1807 (VA) | 1809 |

Keterangan :

- GA (Genetic Algorithm)
- SA(Simulated Annealing)
- ZLGR=CY Zhang,P Li,Z Guan,Y Rao (2005)
- Taboo Search
 - NS= E. Nowicki, C. Smutnicki (1993)
 - B=Wolfgang Brinkkoetter (27.1.1999)
 - Ta1= E. D. Taillard, (1994)
 - We = M. Wennink (1995)
- Local Search with Shifting Bottleneck
 - BV= E. Balas, A. Vazacopoulos (1995)
- H2 = André Henning (2002)
- Taboo Search with Neighborhood Structure
 - S = R. Schilham (11.7.2000)
 - Nsb= E.Nowicki, C.Smutnicki, (2001)
 - Nsd= E.Nowicki, C.Smutnicki, (2002)
 - JPC = João Paulo Caldeira (2003)
- Applegate & Cook's Algorithm
 - VA = R.J.M. Vaessens (1995)
 - Vaa = R.J.M. Vaessens (1996), (Adi, 2009)



Gambar 3 : Contoh Gant Chart untuk ta61

3.4. Vehicle Routing Problem

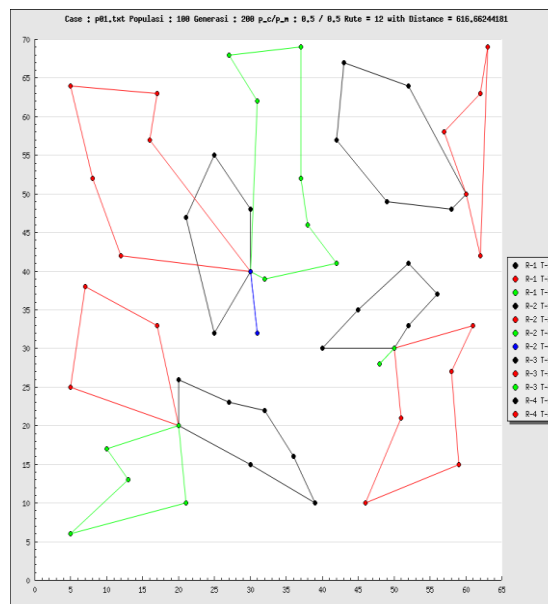
Permasalahan *Vehicle Routing Problem* (VRP) adalah sebuah permasalahan optimasi kombinatorial yang kompleks, yang didefinisikan sebagai persoalan pencarian rute dari sejumlah *vehicle* (kendaraan) yang harus mengunjungi sejumlah tempat untuk mengantar dan/atau menjemput orang/barang (Fisher, 1995). Setiap tujuan hanya boleh dilayani oleh satu *vehicle* saja. Hal ini dilakukan dengan mempertimbangkan kapasitas *vehicle* dalam satu kali angkut, untuk meminimalkan biaya yang diperlukan. Di dunia nyata, sangat sering kita jumpai aplikasi dari persoalan VRP. VRP merupakan kombinasi antara persoalan *Bin Packing Problem* (BPP) dan *Traveling Salesman Problem* (TSP). Baik BPP dan TSP, keduanya dikategorikan sebagai permasalahan *NP-hard* (Falkenauer, 1996).

Selama satu dekade terakhir, setidaknya ada enam metode metaheuristic untuk aplikasi VRP yang ditemukan, metode - metode tersebut adalah *Simulated Annealing* (SA), *Deterministic Annealing* (DA), *Tabu Search* (TS), *Ant Systems* (AS), *Neural Network* (NN), dan *Genetic Algorithm* (Bambang, 2007).

Pada penelitian kami terdahulu, kami telah mengimplementasikan GA untuk persoalan *multi-depot VRP* (mdVRP) (Gen, Admi, dan Adiguna, 2010). Persoalan ini merupakan pengembangan dari VRP dengan sejumlah depot untuk melayani permintaan pelanggan. Perjalanan truk dimulai dari suatu depot

tertentu dan kembali ke depot semula. Tujuan utama adalah menjawab beberapa pertanyaan terkait beberapa hal berikut: dari depot dan rute mana pelanggan dilayani; urutan dalam rute pelayanan pelanggan.

Implementasi GA dilakukan dengan menggunakan PHP. Eksperimen dilakukan dengan menggunakan beberapa persoalan standard yang ada pada literatur. Sebagai ilustrasi, berikut disajikan hasil yang diperoleh



Gambar 4 : Hasil eksperimen untuk mdVRP

4. KESIMPULAN

Pada penelitian terdahulu, kami telah mengimplementasikan GA untuk berbagai persoalan logistik, TSP, *Scheduling* dan VRP dll. Implementasi GA diuji dengan menggunakan persoalan standard yang ada pada literatur dan perbandingan terhadap metode metode yang ada.

Hasil eksperimen menunjukkan bahwa GA mampu memberikan solusi yang baik dari persoalan tersebut. Dengan hasil yang diperoleh, diharapkan penelitian ini dapat dilanjutkan mengaplikasikannya pada berbagai persoalan dunia nyata.

UCAPAN TERIMA KASIH

Riset penulis dibiayai oleh Hibah Penelitian (Hibah Kompetensi dan Hibah Bersaing) dari DP2M DIKTI

DAFTAR PUSTAKA

- Aarth, E. H. L. dan Lenstra, J. K.,** *Local Search in Combinatorial Optimization*, John and Wiley, London, 1997.
- Adi, S.,** Analisis Kinerja *Genetic Algorithm* Pada *Job Shop Scheduling*, skripsi Jurusan Matematika FMIPA-Universitas Lampung, 2009 (pembimbing Admi Syarif)
- Admi, S., dan Gen, M.,** Solving Exclusionary Side Constrained Transportation Problem by Using A Hybrid Spanning Tree-based Genetic Algorithm, *the Journal of Intelligent Manufacturing*, Vol .14(3/4), pp. 389-399, 2003a
- Admi, S., dan Gen, M.,** Double Spanning Tree-Based Genetic Algorithm for Two Stage Transportation Problem, *The International Journal of Knowledge-based Engineering Systems*, Vol. 7, No. 4, pp. 214-221, 2003b
- Admi, S, Wamiliana dan Yasir, W.,** Solving Traveling Salesman Problem by Hybridized Genetic Algorithm, *Proceedings of International Conference on Green Engineering and Engineering*, pp. 373-381, 2007
- Admi, S, Young Su Yun, dan Gen, M.** Study on Multi-Stage Logistics Chain Network: A Spanning Tree Based Genetic Algorithm, 2002
- Al-sultan, K. S. and Al-Fawzan, M. A.,** A new approach to the Uncapacitated Facility Location Problem, *Annal. Of Operations Research*, 86, pp. 91-103, 1999
- Bambang E, H.,** *Implementasi Algoritma Paralel Genetic Algorithm Untuk Penyelesaian Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem*, Department : Teknik Informatika FTIf-ITS, 2007 (skripsi mahasiswa)
- Beasley, J. E.,** "OR-Library: Distributing test problems by electronic mail", *Journal of the Operational Research Society*, No. 41, pp.1069, <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/orlib/>, 1993
- Betrianis dan Aryawan., P.T.,** Penerapan *Algoritma Tabu Search* dalam Penjadwalan *Job Shop*. Makara. *Jurnal Teknik Industri*, Vol 7 (3), 2003
- Cao, B. and G. Uebe.,** Solving Transportation Problems with Nonlinear Side Constraints with Tabu Search, *Computer Ops. Res.* Vol 22, No. 6, pp 593-603, 1995.
- Cao, B.,** Transportation Problems with Nonlinear Side Constraints: a branch-and- bound approach, *Zeitschrift Operations Research*, 36, pp 185-197, 1992

- Eisele, J.G., Castaneda R, dan Galindo, O.,** Usefulness of Solution of the Travelling Salesman Problem in Typing of Biological Sequences in a Clinical Laboratory Setting, 2002, (di download 2006).
- Falkenauer, E.** *A hybrid grouping genetic algorithm for bin packing.* Journal of Heuristics, 2:5-30, 1996.
- Fisher, M.** *Vehicle routing. Handbooks of Operations Research and Management Science,* chapter 1, 8:1-31, 1995
- Fogel, L., A. Owens, and M., Walsh -** *Artificial Intelligence through Simulated Evolution,* John Wiley & Sons, 1966.
- Gen, M. dan R. Cheng.,** *Genetic Algorithms and Engineering Design,* John Wiley & Sons, New York, 1997.
- Gen, M. dan R Cheng.,** *Genetic Algorithms and Engineering Optimization,* John Wiley & Sons, New York, 2000.
- Gen, M, Admi, S, dan Adiguna, S.,** *Genetic Algorithms and Engineering Optimization,* Asia Pasific Industrial and Engineering Conference, Melaka, Malaysia 2010 (*accepted*).
- Goldberg., D. E.,** *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.* Addison-Wesley Publishing Company, Incorporated, Reading, Massachusetts, 1989
- Hitchcock, F. L.,** The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, *J. Math. Phys,* Vol. 20, pp. 24-230, 1941
- Holland, J., -** *Adaptation in Natural and Artificial Systems,* University of Michigan Press, 1975 and MIT Press, 1992
- <http://www.tsp.gatech.edu/history/milestone.html>,
- Koza, J. R.,** *Genetic Programming II,* MIT Press, 1994
- Kuehn, A. A. and Hamburger, M, L.,** A heuristic program for location warehouse, *Management Science,* 9, pp.643-666, 1963.
- Michalewicz, Z.,** *Genetic Algorithms + Data Structures =Evolution Programs,* 2nd ed., Springer-Verlag, 1994.
- Rechenberg, I.,** *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution,* Frommann- Holzboog, 1973.
- Reinelt, G.,** *The Travelling Salesman:Computational Solutions for TSP Applications,* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Sun, M., A Tabu Search Heuristic Procedure for Solving the Transportation Problems with Exclusionary Side Constraints, *Journal of Heuristic*, Vol. 3: pp. 305-326, 1998

Wang, P. T., G. S. Wang and Z. G. Hu., “Speeding Up the Search Process of Genetic Algorithm by Fuzzy Logic”, *Proc. of the 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, pp. 665-671, 1997

Yu, H. ILOG in supply chain. *ILOG Technical Report*. 1997

AUTHOR BIOGRAPHIES



Dr. Eng. Admi Syarif lahir di Bandar Lampung, 03 Januari 1967. Sejak 1992, Ia adalah dosen program studi Ilmu Komputer, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung. Saat ini, ia menjabat sebagai Ketua Lembaga Penelitian Universitas Lampung. Bidang riset yang ditekuni saat ini *mathematical programming, Combinatorial Optimization, Genetic Algorithm and Supply Chain Management*. Ia juga telah mempublikasikan karya tulis penelitiannya pada jurnal internasional diantaranya: *International Journal of Inverse Problems, International Journal of Applied Mathematics, Journal for Analysis and its Applications, Journal of Plant Engineer Society of Japan, International Journal of Computer and Industrial Engineering, International Journal of Intelligent Manufacturing, International Journal of Smart Engineering, International Journal of Knowledge Engineering and System Design* dll. Beberapa karya tulis penelitiannya telah dipresentasikan pada berbagai konferensi internasional di berbagai Negara: Jepang, USA (Los Angeles, San Francisco, Las Vegas, Florida, Hawaii, Maui island), Hong Kong, Australia, Singapore, Beijing, Greece, Canada, South Korea, New Zeland, Taiwan, Ireland dan Indonesia. Salah satu karya tulis penelitiannya telah diikutkan pada buku berjudul *Fuzzy Set and System* yang diterbitkan oleh *Springer Verlag*. Ia menjadi *reviewer European Journal of Operational Research (EJOR), Central European Journal of Operational Research (CEJOR), IEE Japan* dan editor ahli pada *Jurnal Teknik Industri, Universitas Petra, Indonesia*. Beberapa penghargaan dianugerahkan kepadanya. salah satunya memperoleh penghargaan dari Menteri Negara Riset dan Teknologi pada tahun 2008 sebagai peneliti terbaik dengan memperoleh anugerah peneliti program instentif bidang Teknologi Informasi dan Komunikasi. (admi_syarif@unila.ac.id)

THE ECCENTRIC DIGRAPH OF A GRAPH

Tri Atmojo Kusmayadi and M. Abdul Rivai
Department of Mathematics Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sebelas Maret University Surakarta 57126
trikusma@uns.ac.id

ABSTRACT. Let G be a graph with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. The distance from vertex u to vertex v in G , denoted by $d(u, v)$, is the length of the shortest path from vertex u to v . The eccentricity of vertex u in graph G is the maximum distance from vertex u to any other vertices in G , denoted by $e(u)$. Vertex v is an eccentric vertex from u if $d(u, v) = e(u)$. The eccentric digraph $ED(G)$ of a graph G is a graph that has the same set of vertices as G , and there is an arc (directed edge) joining vertex u to v if v is an eccentric vertex from u . In this paper, we answer the open problem proposed by Boland and Miller [1] to find the eccentric digraph of various classes of graphs. In particular, we determine the eccentric digraph of a graph called the ladder graph L_n .

Key words : Eccentric, digraph, ladder, graph

1. INTRODUCTION

Most of the notations and terminologies follow that of Chartrand and Oellermann [2] and Gallian [3]. Let G be a graph with a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. The distance from vertex u to vertex v in G , denoted by $d(u, v)$, is the length of the shortest path from vertex u to v . If there is no a path joining vertex u and vertex v , then $d(u, v) = \infty$. The eccentricity of vertex u in graph G is the maximum distance from vertex u to any other vertices in G , denoted by $e(u)$, and so $e(u) = \max\{d(u, v) \mid v \in V(G)\}$. Radius of a graph G , denoted by $rad(G)$, is the minimum eccentricity of every vertex in G . The diameter of a graph G , denoted by $diam(G)$, is the maximum eccentricity of every vertex in G . If $e(u) = rad(G)$, then vertex u is called central vertex. Center of a graph G , denoted by $cen(G)$, is an induced subgraph formed from central vertices of G . Vertex v is an eccentric vertex from u if $d(u, v) = e(u)$. The eccentric digraph $ED(G)$ of a graph G is a graph that has the same set of vertices as G , $V(ED(G)) = V(G)$, and there is an arc (directed edge) joining vertex u to v if v is an eccentric vertex from u . An arc of a digraph D joining vertex u to v and vertex v to u is called a symmetric arc. Further, Fred Buckley concluded that almost in every graph G , its eccentric digraph is $ED(G) = \overline{G}^*$, where \overline{G}^* is a complement of G which is every edge replaced by a symmetric arc.

One of the topics in graph theory is to determine the eccentric digraph of a given graph. The eccentric digraph of a graph was initially introduced by Fred Buckley (Boland and Miller [1]). Some authors have investigated the problem of finding the eccentric digraph. For example, Boland and Miller [1] determined the eccentric digraph of a digraph, while Gimbert, et.al [4] found the characterisation of the eccentric digraphs. Boland and Miller [1] also proposed an open problem to find the eccentric digraph of various classes of graphs. Some results related to this open problem can be found in [6, 7, 8, 9].

In this paper, we also answer the open problem proposed by Boland and Miller [1]. In particular, we determine the eccentric digraph of a graph called the ladder graph L_n .

2. MATERIALS AND METHODS

The materials of this research are mostly from the papers related to the eccentric digraph.

There are three steps to determine the eccentric digraph from the given graph. The first step, we determined the distance from vertex u to any vertex v in the graph, denoted by $d(u, v)$, using Breadth First Search (BFS) Moore Algorithm taken from Chartrand and Oellermann [2] as follows.

- (1) Take any vertex, say u , and labeled 0 stating the distance from u to itself, and other vertices are labeled ∞
- (2) All vertices having label ∞ adjacent to u are labeled by 1
- (3) All vertices having label ∞ adjacent to 1 are labeled by 2 and so on until the required vertex, say v , has already labeled.

The second step, we determined the vertex eccentricity u by choosing the maximum distance from the vertex u , and so we obtained the eccentric vertex v from u if $d(u, v) = e(u)$.

The final step, by joining an arc from vertex u to its eccentric vertex, so we obtained the eccentric digraph from the given graph.

According to Hosoya and Harary [5] and Noy and Ribó [10], the ladder graph on n vertices, denoted by L_n , can be defined as the graph Cartesian product $L_n = K_2 \times P_n$, $n \geq 2$.

The following are the examples of the ladder graphs L_3 and L_4 , respectively.

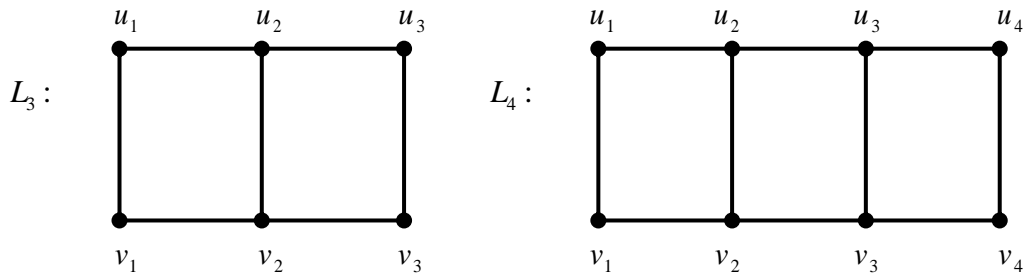


Figure 1. The Ladder Graphs L_3 and L_4

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

Let L_n be a ladder graph with vertex set $V L_n = u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ and edge set $E L_n = e_1, e_2, e_3, \dots, e_{3n-2}$, where edge $e_i = u_i u_{i+1}$, edge $e_{i+n-1} = v_i v_{i+1}$ for $i = 1, 2, \dots, n-1$, and edge $e_{i+2n-2} = u_i v_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$.

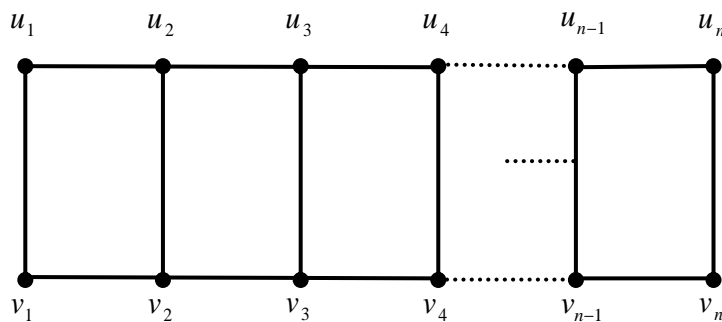


Figure 2. The Ladder Graph L_n

The following is the result of the eccentric digraphs of the ladder graph L_n for n even.

Lemma 1. *Let L_n be a ladder graph, for n even, then the eccentricity of vertex u_i*

$$e(u_i) = \begin{cases} n+1-i & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ i & \text{for } i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases}$$

and the eccentricity of vertex v_i

$$e(v_i) = \begin{cases} n+1-i & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ i & \text{for } i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n. \end{cases}$$

Proof. By observation the farthest distance from vertex u_i to vertex v_n and vertex v_1 are $n+1-i$ for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, and i for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$, respectively. So the eccentricity of vertex u_i , $e u_i$, is $n+1-i$ for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, and i for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$. Now, the farthest distance of vertex v_i to vertex u_n and vertex u_1 is $n+1-i$ for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, and i for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$, respectively. So the eccentricity of vertex v_i , $e v_i$, is $n+1-i$ for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, and i for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$, as required. \square

Lemma 2. Let L_n be a ladder graph, for n even, then the eccentric vertices of vertex u_i are vertex v_n for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$ and vertex v_1 for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$, respectively, and the eccentric vertices of vertex v_i are vertex u_n for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$ and vertex u_1 for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$, respectively.

Proof. The obtained eccentricity of all vertices from Lemma 1 are used to determine the eccentric vertex of all vertices of the ladder graph L_n for n even. Hence the result. \square

Lemma 3. Let L_n be a ladder graph with n even, then its eccentric digraph is a digraph having the vertex set

$$V \text{ ED } L_n = u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$$

and the arc set

$$A(\text{ED}(L_n)) = \begin{cases} u_i v_n & \text{for } i=1,2,\dots,\frac{n}{2} \\ u_i v_1 & \text{for } i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n \\ v_i u_n & \text{for } i=1,2,\dots,\frac{n}{2} \\ v_i u_1 & \text{for } i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n. \end{cases}$$

Proof. The arcs can be obtained by joining every vertex to its eccentric vertex of the ladder graph L_n for n even. From Lemma 2, the eccentric vertices of u_i are vertex v_n for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$, and vertex v_1 for $i=\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n$, and so u_i is joined to v_n forming arc $u_i v_n$ for $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$ and u_i is joined to v_1 forming arc $u_i v_1$ for

$i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. On the other hand, the eccentric vertices of v_i are vertex u_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, and vertex u_1 for $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$, and so v_i is joined to u_n forming arc $v_i u_n$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ and v_i is joined to u_1 forming arc $v_i u_1$ for $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. Hence we have the eccentric digraph of the ladder graph L_n having the vertex set $V(ED L_n) = V L_n$ and the arc set $A(ED L_n)$ for n even. \square

Theorem 4. Let L_n be a ladder graph, for n even, then the eccentric digraph $ED L_n$ is a digraph $Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cup R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ having the vertex set

$$V(ED(L_n)) = \begin{cases} V(Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \begin{cases} V_1 = u_i & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ V_2 = v_i & \text{for } i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \\ V(R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \begin{cases} V_3 = v_i & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ V_4 = u_i & \text{for } i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

and the arc set

$$A(ED(L_n)) = \begin{cases} A(Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \begin{cases} u_1 v_n & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ v_i u_1 & \text{for } i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \\ A(R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \begin{cases} v_i u_n & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \\ u_i v_1 & \text{for } i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

Proof. By Lemma 3, the arc from vertex u_i is adjacent to the vertex v_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, and adjacent to vertex v_1 for $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$. Again, the arc from vertex v_i is adjacent to vertex u_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, and adjacent to vertex u_1 for $i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$, and so their arcs are not all symmetric. Based on these arcs, the vertex set $V(ED L_n)$ can be partitioned into four subsets of vertices $V_1 = u_i \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, $V_2 = v_i \mid i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$, $V_3 = v_i \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, and $V_4 = u_i \mid i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n$, such that there is no arc joining vertices in the same

subset. Therefore the digraph can be formed into the union of two bipartite digraphs.

By observation, the $ED(L_2)$ is a digraph $Q_{1,1} \cup R_{1,1}$, $ED(L_4)$ is a digraph $Q_{2,2} \cup R_{2,2}$, and $ED(L_6)$ is a digraph $Q_{3,3} \cup R_{3,3}$. Then we conclude that the eccentric digraph of the ladder graph $ED L_n$, for n even, is a bipartite digraph $Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cup R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, where $Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ and $R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ are bipartite digraphs.

It is easy to check that the digraph $Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ has vertex set $V_1 = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ and $V_2 = \{v_i \mid i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n\}$, and the arc set $A(Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \{u_i v_n \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \cup \{v_i u_1 \mid i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n\}$. While the digraph $R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ has vertex set $V_3 = \{v_i \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ and $V_4 = \{u_i \mid i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n\}$, and the arc set $A(R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) = \{v_i u_n \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\} \cup \{u_i v_1 \mid i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n\}$, as required. \square

The following figure is a ladder graph L_6 and its eccentric digraph. It is easy to check that the number of arcs of the ladder graph L_n for n even is $|A(ED L_n)| = 2n$.

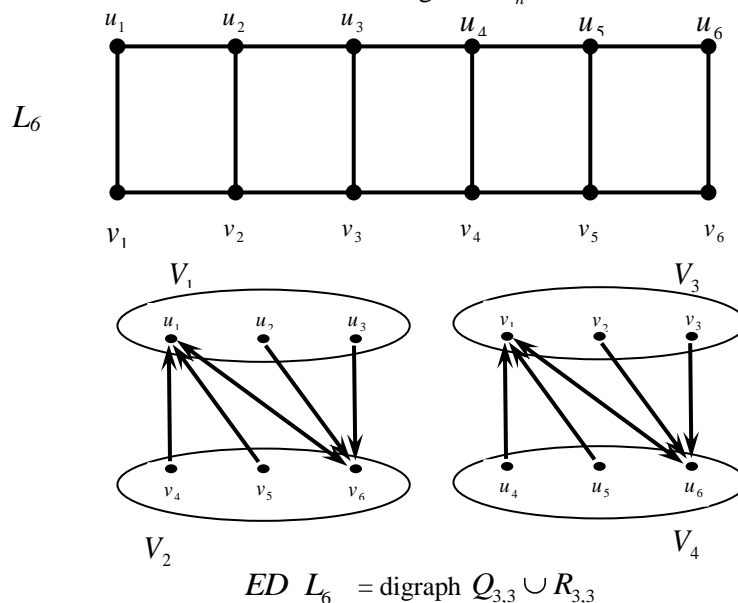


Figure 3. The Ladder graph L_6 and Its Eccentric Digraph

Now we determine the eccentric digraph of the ladder graph L_n for n odd.

Lemma 5. *Let L_n be a ladder graph, for n odd, then the eccentricity of vertex u_i*

$$e(u_i) = \begin{cases} n+1-i & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ i & \text{for } i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n \end{cases}$$

and the eccentricity of vertex v_i

$$e(v_i) = \begin{cases} n+1-i & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ i & \text{for } i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n. \end{cases}$$

Proof. By observation the farthest distance from vertex u_i to vertex v_n and vertex v_1 are $n+1-i$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and i for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, respectively. So the eccentricity of vertex u_i , $e u_i$, is $n+1-i$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and i for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$. Now, the farthest distance of vertex v_i to vertex u_n and vertex u_1 is $n+1-i$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and i for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, respectively. So the eccentricity of vertex v_i , $e v_i$, is $n+1-i$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and i for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, as required. \square

Lemma 6. *Let L_n be a ladder graph, then for n odd, the eccentric vertices of vertex u_i are vertex v_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ and vertex v_1 for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, respectively, and the eccentric vertices of vertex v_i are vertex u_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ and vertex u_1 for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, respectively.*

Proof. The obtained eccentricity of all vertices from Lemma 5 are used to determine the eccentric vertex of all vertices of the ladder graph L_n for n odd. Hence the result. \square

Lemma 7. *Let L_n be a ladder graph with n odd, then its eccentric digraph is a digraph having vertex set*

$$V \text{ ED } L_n = u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$$

and arc set

$$A(ED(L_n)) = \begin{cases} u_i v_n & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ u_i v_1 & \text{for } i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n \\ v_i u_n & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ v_i u_1 & \text{for } i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n. \end{cases}$$

Proof. The arcs can be obtained by joining every vertex to its eccentric vertex of the ladder graph L_n for n odd. From Lemma 6, the eccentric vertices of u_i are vertex v_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and vertex v_1 for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, and so u_i is joined to v_n forming arc $u_i v_n$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ and u_i is joined to v_1 forming arc $u_i v_1$ for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$. On the other hand, the eccentric vertices of v_i are vertex u_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and vertex u_1 for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$, and so v_i is joined to u_n forming arc $v_i u_n$ for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ and v_i is joined to u_1 forming arc $v_i u_1$ for $i = \frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n$. Hence we have the eccentric digraph of the ladder graph L_n having vertex set $V(ED(L_n)) = V(L_n)$ and arc set $A(ED(L_n))$ for n odd. \square

Theorem 8. Let L_n be a ladder graph, for n odd, then the eccentric digraph $ED(L_n)$ is a bipartite digraph $B_{n,n}$ having the vertex set

$$V(ED(L_n)) = \begin{cases} V_1 = u_i & \text{for } i = 1, 2, \dots, n \\ V_2 = v_i & \text{for } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

and the arc set

$$A(ED(L_n)) = \begin{cases} u_i v_n & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ u_i v_1 & \text{for } i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n \\ v_i u_n & \text{for } i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2} \\ v_i u_1 & \text{for } i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Proof. By Lemma 7, the arc from vertex u_i is adjacent to the vertex v_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and adjacent to the vertex v_1 for $i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n$. In addition, the arc from vertex v_i is adjacent to vertex u_1 for $i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n$, and adjacent to the vertex u_n for $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$, and so their arcs are not all symmetric. Based on these arcs, the vertex set $V(ED(L_n))$ can be partitioned into two subsets of vertices, namely $V_1 = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ and $V_2 = \{v_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, such that there is no arc joining two

vertices at the same subset. Therefore the digraph can be formed into bipartite digraph. By observation, it is found that $ED(L_3)$ is a bipartite digraph $B_{3,3}$, $ED(L_5)$ is a bipartite digraph $B_{5,5}$, and $ED(L_7)$ is a bipartite digraph $B_{7,7}$. Hence we conclude that the eccentric digraph of the ladder graph $ED L_n$, for n odd, is a bipartite digraph $B_{n,n}$ having the vertex set $V(ED(L_n)) = \{V_1 = u_i \text{ and } V_2 = v_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ and the arc set $A(ED(L_n)) = \{u_i v_n, v_i u_n / i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}\} \cup \{u_i v_1, v_i u_1 / i = \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n\}$. \square

It is easy to check that the number of arcs of the ladder graph L_n for n odd is $|A ED L_n| = 2n + 2$. The following figure is the ladder graph L_7 and its eccentric digraph.

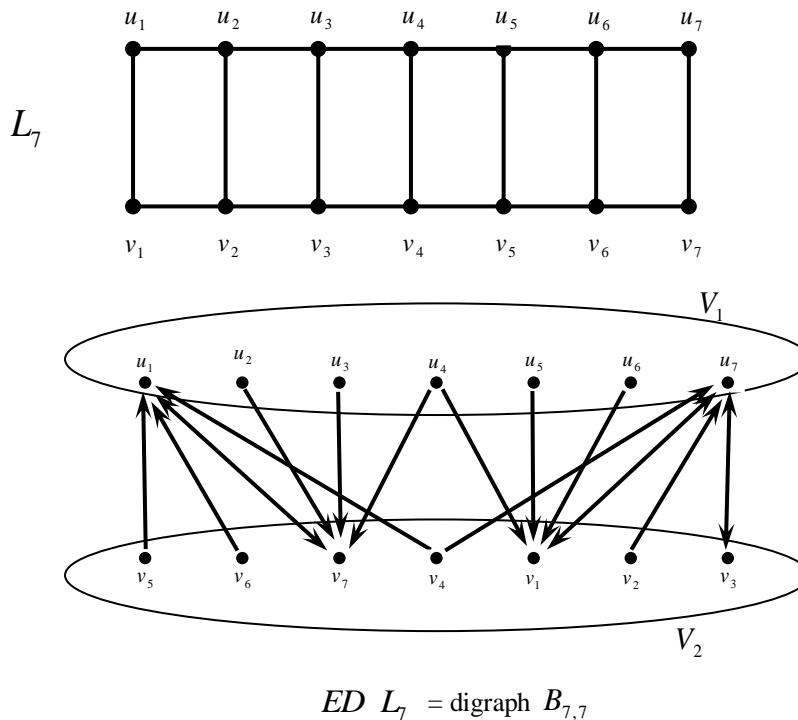


Figure 4. The Ladder Graph L_7 and Its Eccentric Digraph

4. CONCLUSION

The results show that the eccentric digraphs of ladder graph L_n for n even, $ED(L_n)$, is a digraph $Q_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} \cup R_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, and the eccentric digraphs of ladder graph L_n for n odd, $ED(L_n)$, is a bipartite digraph $B_{n,n}$.

As mentioned in previous sections the main goal of this paper is to find the eccentric digraph of a given class of graph. Some authors have conducted research on this such problem. Most of them have left some open problems on their paper for the future research. We suggest readers to investigate the problem proposed by Boland and Miller [1] by considering other classes of graphs.

5. ACKNOWLEDGEMENT

The author would like to thank to Directorate General of Higher Education Republic of Indonesia cq Directorate of Research and Community Services for funding this research in 2009.

REFERENCES

- [1] Boland, J. and M. Miller, *The Eccentric Digraph of a Digraph*, Proceeding of AWOCA'01, Lembang-Bandung, Indonesia, 2001.
- [2] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.
- [3] Gallian, J. A. Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2009, #16, 1-219.
- [4] Gimbert, J., N. Lopez, M. Miller, and J. Ryan, Characterization of eccentric digraphs, *Discrete Mathematics*, 2006, Vol. 306, Issue 2, 210 - 219.
- [5] Hosoya, H. and Harary, F. "On the Matching Properties of Three Fence Graphs." *J. Math. Chem.* 1993, Vol. 12, 211-218.
- [6] Kusmayadi, T.A. and M. Rivai. *The Eccentric Digraph of an Umbrella Graph*, Proceeding of INDOMS International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA), Gadjah Mada University Yogyakarta, Indonesia 2009, ISBN 978-602-96426-0-5, pp 0627-0638
- [7] Kusmayadi, T.A. and M. Rivai. *The Eccentric Digraph of a Double Cones Graph*, Proceeding of INDOMS International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA), Gadjah Mada University Yogyakarta, Indonesia 2009, ISBN 978-602-96426-0-5, pp 0639-0646

- [8] Kusmayadi, T. A., and F. Fathmawatie. Digraf Eksentrik dari Graf *Lintang*, *submitted for publication*, 2010.
- [9] Kusmayadi, T. A., and Yayan U. U. Digraf Eksentrik dari Graf *Banana*, *submitted for publication*, 2010.
- [10] Noy, M. and Ribó, A. "Recursively Constructible Families of Graphs." *Adv. Appl. Math.*, 2004, Vol. **32**, 350-363.

APLIKASI METODE ALTERNATING PROJECTION PADA REDUKSI ORDE MODEL SISTEM LINEAR PARAMETER VARYING

Muhammad Wakhid Musthofa

Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta

e-mail : mwakhid_m@yahoo.com

ABSTRACT. *This paper discusses the implementation of alternating projection method in reducing model order of linear parameter varying systems. This implementation is enabled by the model order reduction theorem with a constraint sets in the form of linear matrix inequalities. Model order reduction is a non-convex feasibility problem which can be solved using the alternating projection method. This method solely provides local convergency hence the initial value computation of the alternating projection method should be taken from the neighbourhood of the feasible solution.*

Keyword : *alternating projection method, model order reduction, LPV systems.*

1. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam bidang matematika terapan yang dapat diformulasikan menjadi mencari titik yang berada di suatu irisan beberapa himpunan yang tertutup. Salah satu metode untuk mencari titik tersebut adalah dengan cara melakukan proyeksi berturut-turut pada setiap himpunan tersebut. Jika himpunan-himpunan tersebut berupa himpunan yang semuanya konveks, maka metode proyeksi berturut-turut pada setiap himpunan tersebut akan konvergen ke sebuah titik yang berada pada irisan semua himpunan tersebut. Dalam istilah matematika metode proyeksi berturut-turut ini sering diistilahkan dengan metode *alternating projection*. Sehingga *alternating projection* dapat didefinisikan sebagai prosedur proyeksi iteratif untuk mencari titik yang berada di suatu irisan beberapa himpunan yang konveks dan tertutup. Barisan proyeksi yang dihasilkan dari metode ini disebut dengan barisan *alternating projection*. Beberapa permasalahan telah dapat diselesaikan dengan menggunakan metode ini, diantaranya adalah *image recontruction*, *statistical estimation*, *covariance control*, desain pengontrol berorde tetap, dan masalah reduksi orde model norm H_∞ [9]. Dalam perkembangannya metode *alternating projection* telah diperumum untuk menyelesaikan masalah *feasibility* yang non konveks [7]. Dalam makalah berikut metode *alternating*

projection akan digunakan untuk menyelesaikan masalah reduksi orde model sistem *linear parameter varying* (LPV) politopik.

2. METODE ALTERNATING PROJECTION

Diberikan H ruang Hilbert berdimensi hingga, dengan $\| \cdot \|$ adalah norm dari H yang diinduksi dari hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Fokus perhatian dalam makalah ini adalah masalah *feasibility* sebagai berikut.

Diberikan keluarga himpunan-himpunan tutup $Q_\alpha \in H$, dengan $\alpha \in \mathfrak{I}$ untuk sebuah himpunan indeks \mathfrak{I} . Akan dicari titik $x^* \in H$ sedemikian sehingga $x^* \in Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$.

Untuk suatu vektor $\hat{x} \in H$, operator proyeksi P_{Q_α} pada himpunan Q_α didefinisikan sebagai $P_{Q_\alpha} \hat{x} := x \in Q_\alpha$, sedemikian sehingga

$$\|\hat{x} - P_{Q_\alpha} \hat{x}\| = \inf_{y \in Q_\alpha} \|\hat{x} - y\| = \rho(\hat{x}, Q_\alpha). \quad (1)$$

Proyeksi pada himpunan konveks adalah tunggal. P_α dengan $\alpha \in \mathfrak{I}$ disebut dengan putaran proyeksi. Barisan *alternating projection* x^n diberikan oleh

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n (P_{\alpha_n} x^n - x^n), \quad 0 \leq \lambda_n \leq 2, \quad (2)$$

dengan $P_{\alpha_n} x^n = P_{Q_{\alpha_n}} x^n$.

Khususnya untuk $\lambda_n = 1$ didapat

$$x^{n+1} = P_{\alpha_n} x^n. \quad (3)$$

Urutan putaran himpunan indeks \mathfrak{I} dalam barisan *alternating projection* (2) diatur dengan urutan sebagai berikut. Misalkan $\mathfrak{I} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, maka

$$\alpha_n = \alpha_{n \bmod m + 1}, \quad (4)$$

dengan $n \bmod m$ adalah sisa yang didapat dari membagi n dengan m . Terkait dengan (1), didefinisikan

$$\rho(x^n, Q_{\alpha_n}) = \sup_{\alpha \in A} \rho(x^n, Q_\alpha) = \Phi(x^n). \quad (5)$$

Berikut ini disajikan sebuah teorema yang akan menjamin kekonvergenan barisan *alternating projection* (2) [6].

Teorema 1. Diberikan himpunan Q_α tutup dan konveks dengan $Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$ tak kosong dan $0 \leq \varepsilon_1 \leq \lambda_n \leq 2 - \varepsilon_2$, dengan $\varepsilon_2 > 0$. Misalkan kondisi-kondisi berikut dipenuhi :

(a) $Q_{\bar{\alpha}} \cap \left(\bigcap_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq \bar{\alpha}}} Q_\alpha \right)^0$ tak kosong, dengan $\left(\bigcap_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq \bar{\alpha}}} Q_\alpha \right)^0$ menotasikan himpunan titik-titik

interior

dari $\left(\bigcap_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq \bar{\alpha}}} Q_\alpha \right)$.

(b) Q_α konveks seragam untuk semua Q_α dengan $\alpha \neq \bar{\alpha}$, yaitu terdapat fungsi $\delta, \tau > 0$

dengan $\tau > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, y \in Q_\alpha$ berakibat $z \in Q_\alpha$ untuk semua z dengan

$$\left\| z - \frac{x+y}{2} \right\| \leq \delta \|x-y\| .$$

(c) H berdimensi hingga.

(d) $\mathfrak{I} = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ berhingga, dan semua Q_α memenuhi $Q_\alpha = \{x \mid \langle c_i, x \rangle \leq \beta_i\}$.

Maka, untuk sembarang nilai awal x^0 , barisan *alternating projection* x^n konvergen ke sebuah titik $x^* \in Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$.

Untuk membuktikan Teorema 1 di atas, terlebih dahulu dipaparkan lemma-lemma berikut yang akan digunakan dalam pembuktian [6].

Lemma 1 Diberikan titik $x \in H$ dengan proyeksi x pada himpunan Q dinotasikan dengan Px , maka vektor $x - Px$ memenuhi

$$\langle x - Px, y - Px \rangle \leq 0, \quad (6)$$

untuk semua $y \in Q$.

Lemma 2 Diberikan titik $x, y \in H$ dengan proyeksi x dan y pada himpunan Q berturut-turut dinotasikan dengan Px dan Py . Maka, operator proyeksi P memenuhi

$$\|Px - Py\| \leq \|x - y\|. \quad (7)$$

Lemma 3 Diberikan barisan *alternating projection* x^n $_{n=0}^{\infty}$, dengan

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n (P_{\alpha_n} x^n - x^n), \quad 0 \leq \lambda_n \leq 2.$$

Untuk sembarang pemilihan α_n , untuk setiap titik kekonvergenan $x \in Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$, dan

untuk semua n berlaku

$$\|x^{n+1} - x\| \leq \|x^n - x\|. \quad (8)$$

Lemma 4 Diberikan barisan *alternating projection* x^n $_{n=0}^{\infty}$ dengan

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n (P_{\alpha_n} x^n - x^n), \quad 0 \leq \lambda_n \leq 2, \quad \alpha_n = \alpha_{n \bmod m+1},$$

dan $0 \leq \varepsilon_1 \leq \lambda_n \leq 2 - \varepsilon_2$ dengan $\varepsilon_2 > 0$. Maka, berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x^n) = 0 \quad \text{dengan} \quad \Phi(x^n) = \sup_{\alpha \in A} \rho(x^n, Q_\alpha). \quad (9)$$

Lemma 5 Jika syarat-syarat (a) – (d) dalam Teorema 1 dipenuhi, maka untuk suatu barisan terbatas x^n $_{n=0}^{\infty}$ yang memenuhi Lemma 4, kondisi berikut dipenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^n, Q) = 0. \quad (10)$$

Lemma 6 Untuk suatu himpunan tutup dan konveks Q dan untuk suatu x^n yang memenuhi (7) dan (9), x^n konvergen ke $x^* \in Q$.

Bukti Teorema 1

Berdasarkan Lemma 4, dengan asumsi kondisi (4) dipenuhi, maka metode *alternating projection* memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x^n) = 0, \quad \text{dengan} \quad \Phi(x^n) = \sup_{\alpha \in A} \rho(x^n, Q_\alpha). \quad (11)$$

Dan berdasarkan Lemma 5, karena kondisi (a) – (d) dipenuhi, maka untuk sembarang barisan terbatas yang memenuhi (11) berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^n, Q) = 0. \quad (12)$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 3, maka dalam metode *alternating projection* untuk suatu pemilihan α_n dan untuk setiap titik kekonvergenan $x \in Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$ serta untuk semua n dipenuhi

$$\|x^{n+1} - x\| \leq \|x^n - x\|. \quad (13)$$

Maka, dari (11), (12), (13) dan berdasarkan Lemma 6, x^n konvergen ke $x \in Q$.

3. RUMUSAN MASALAH REDUKSI MODEL SISTEM LPV POLITOPIK

Diberikan model sistem LPV yang stabil kuadratik berrorde n dengan representasi ruang keadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (14)$$

dengan $x(t)$ vektor keadaan, $u(t)$ vektor masukan, dan $y(t)$ vektor keluaran,

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p \quad . \quad A: \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B: \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C: \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n},$$

$D: \mathfrak{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ adalah fungsi-fungsi kontinu dari vektor parameter $\rho(t) \in \mathfrak{I}$. Himpunan variasi parameter \mathfrak{I} menotasikan himpunan dari semua fungsi kontinu bagian demi bagian dari \mathbb{R}_+ (waktu) ke \wp sub himpunan dari ruang vektor \mathfrak{R}^s dengan sejumlah hingga diskontinuitas dalam suatu interval:

$$F_\wp = \rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \wp \mid \rho_{\min} \leq \rho_i \leq \rho_{\max}, \quad i=1,2,\dots,s.$$

Fungsi transfer dari realisasi sistem (1) diatas adalah

$$T_\alpha = \sum_{i=1}^L \alpha_i \cdot [C_i \ sI - A_i]^{-1} B_i + D_i, \quad \forall \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1 \quad (15)$$

Masalah reduksi orde model sistem LPV (14) dapat dirumuskan sebagai mencari model sistem LPV berrorde $k < n$ yang tetap stabil kuadratik (notasi r pada A^r, B^r, C^r , dan D^r melambangkan sistem tereduksi) [8] :

$$\begin{aligned} \dot{x}^r(t) &= A^r(\rho(t)) x^r(t) + B^r(\rho(t)) u(t), \\ y^r(t) &= C^r(\rho(t)) x^r(t) + D^r(\rho(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (16)$$

sedemikian sehingga $\|T_\alpha - T_\alpha^r\|_\infty < \gamma$, untuk suatu γ yang diberikan.

Notasi $\|T_\alpha - T_\alpha^r\|_\infty$ menyatakan norm H_∞ dari selisih fungsi transfer T_α dan T_α^r yang didefinisikan sebagai $\|T_\alpha - T_\alpha^r\|_\infty := \sup_{\omega} \hat{\sigma}(T_\alpha - T_\alpha^r(j\omega))$, dengan $\hat{\sigma}$ menyatakan nilai singular Hankel yang diperumum terbesar dari sistem (14).

Untuk menyelesaikan masalah tersebut, terdapat teorema berikut yang memberikan syarat cukup eksistensi reduksi orde model pada sistem LPV beserta bentuk model tereduksinya [8].

Teorema 2. Diberikan sistem LPV berrorde n yang stabil kuadratik

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t)) x(t) + B(\rho(t)) u(t), \\ y(t) &= C(\rho(t)) x(t) + D(\rho(t)) u(t), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (14)$$

dan $\gamma > 0$. Terdapat model tereduksi berrorde $k < n$ dari sistem (14) yaitu

$$\begin{aligned} \dot{x}^r(t) &= A^r(\rho(t)) x^r(t) + B^r(\rho(t)) u(t), \\ y^r(t) &= C^r(\rho(t)) x^r(t) + D^r(\rho(t)) u(t), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (17)$$

sedemikian sehingga $\|T_\alpha \cdot -T_\alpha^r \cdot \|_\infty < \gamma$ jika terdapat matriks definit positif dan simetri

$X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_i \\ B_i^T X & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad i=1, \dots, L, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} A_i^T Y + Y A_i & C_i^T \\ C_i & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad i=1, \dots, L, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n+k. \quad (21)$$

Jika (18) – (21) dipenuhi, maka salah satu solusi *feasible* dari masalah reduksi orde model diberikan oleh :

$$\begin{aligned} A_i^r &= N^{-1} M N^{-T} - N^{-1} A_i N, & B_i^r &= -N^{-1} Y B_i, \\ C_i^r &= -C_i N^{-T}, & D_i^r &= D_i. \end{aligned}$$

4. PENYELESAIAN REDUKSI MODEL SISTEM LPV POLITOPIK DENGAN METODE ALTERNATING PROJECTION

Selanjutnya untuk mencari pasangan matriks definit positif dan simetri X, Y yang memenuhi kendala (18) – (21) pada Teorema 2 di atas, didefinisikan himpunan-himpunan kendala sebagai berikut.

$$C_{1a} := \left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X \geq \delta I, \begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i & X B_i \\ B_i^T X & -\gamma I \end{bmatrix} \leq -\delta I \right\},$$

$$C_{1b} := \left\{ Y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid Y \geq \delta I, \begin{bmatrix} A_i^T Y + Y A_i & C_i^T \\ C_i & -\gamma I \end{bmatrix} \leq -\delta I \right\},$$

$$C_2 := \left\{ X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \right\},$$

$$C_3 := \left\{ X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{rank} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \leq n + k \right\}.$$

Berikut ini prosedur metode *alternating projection* dalam mencari pasangan matriks definit positif dan simetri X, Y yang memenuhi kendala (18) – (21) :

Pertama, ambil pasangan matriks X_0 dan Y_0 dari hasil metode pemotongan setimbang sebagai nilai awal barisan *alternating projection*.

Kedua, cari X_1 yaitu proyeksi orthogonal X_0 pada C_{1a} dan Y_1 yaitu proyeksi orthogonal Y_0 pada C_{1b} . Masalah mencari proyeksi X_0 pada C_{1a} dapat direformulasikan sebagai masalah optimisasi LMIs dengan mendefinisikan kendala baru Z [2] :

$$\begin{bmatrix} Z & \hat{X} - X \\ \hat{X} - X & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

Secara sama, masalah mencari proyeksi Y_0 pada C_{1b} dapat direformulasikan menggunakan LMIs yang sejenis [2].

Ketiga, cari X_2, Y_2 sebagai proyeksi orthogonal X_1, Y_1 pada himpunan C_2 dengan

$$Y_2 = Y_1 + X_1 + L\Lambda_+L^T / 2, \quad X_2 = Y_1 + X_1 - L\Lambda_+L^T / 2. \quad (24)$$

dimana matriks $L\Lambda L^T$ adalah dekomposisi nilai eigen dari $Y_1 - X_1$, dan Λ_+ didapat dari mengganti nilai eigen negatif dari Λ dengan nol [5].

Keempat, cari X_3, Y_3 sebagai proyeksi orthogonal X_2, Y_2 pada himpunan C_3 dengan

$$Y_3 = Y_2 + X_2 + U \Sigma_k V^T / 2, \quad X_3 = Y_2 + X_2 - U \Sigma_k V^T / 2 \quad (25)$$

dimana matriks $U \Sigma V^T$ adalah dekomposisi nilai singular dari $Y_2 - X_2$, dan Σ_k didapat dari mengganti $n - k$ nilai singular terkecil dari Σ dengan nol [5].

Dengan pasangan matriks X_3, Y_3 yang kita dapatkan, maka dapat dibentuk model tereduksi (22). Jika model tereduksi yang didapat belum sesuai dengan yang diharapkan, maka kembali ke langkah pertama dengan nilai awal diambil dari matriks X_3, Y_3 . Prosedur tersebut dapat dilakukan berulang sehingga didapatkan model tereduksi yang diinginkan. Berikut diberikan algoritma reduksi orde model sistem LPV dengan menggunakan metode *alternating projection*.

1. Pilih suatu ε sebagai batas toleransi kesalahan reduksi.
2. Definisikan sistem LPV politop A_i, B_i, C_i, D_i , $i = 1 \dots L$.
3. Cari *balanced realization* dari sistem A_i, B_i, C_i, D_i , $i = 1 \dots L$.
4. Cari matriks $\hat{\Sigma}$, γ_{ub} , γ_{lb} .
5. Hitung $X_0 = \gamma_{ub} \hat{\Sigma}^{-1}, Y_0 = \frac{1}{\gamma_{ub}} \hat{\Sigma}$.
6. Uji apakah $\gamma_{ub} - \gamma_{lb} \leq \varepsilon$. Jika $\gamma_{ub} - \gamma_{lb} \leq \varepsilon$, maka proses selesai, lanjut ke langkah 11. Jika $\gamma_{ub} - \gamma_{lb} > \varepsilon$ lanjut ke langkah 7.
7. Lakukan biseksi $\gamma = \frac{\gamma_{lb} + \gamma_{ub}}{2}$.
8. Lakukan prosedur *alternating projection* sebagai berikut :

8.a Cari $X_1 = P_{C_{1a}} X_0$ dengan menyelesaikan masalah *feasibility* X

$$\text{dalam } \left\{ X, Z \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \left[\begin{array}{c|c} Z & \hat{X} - X \\ \hline \hat{X} - X & I \end{array} \right] \geq 0 \right\}.$$

8.b Cari $Y_1 = P_{C_{1b}} Y_0$ dengan menyelesaikan masalah *feasibility* Y

$$\text{dalam } \left\{ Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \left[\begin{array}{c|c} Z & \hat{Y} - Y \\ \hline \hat{Y} - Y & I \end{array} \right] \geq 0 \right\}.$$

8.c Cari X_2 dan Y_2 dengan

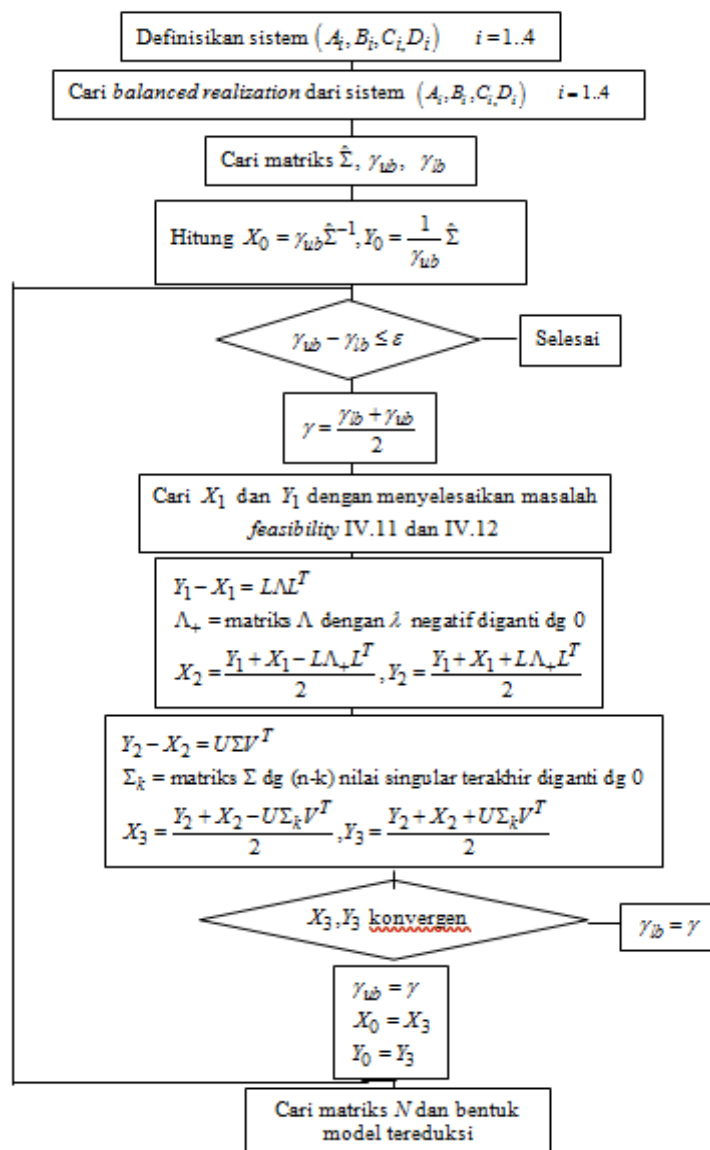
$$X_2 = \frac{Y_1 + X_1 - L \Lambda_+ L^T}{2}, \quad Y_2 = \frac{Y_1 + X_1 + L \Lambda_+ L^T}{2}.$$

8.d Cari X_3 dan Y_3 dengan

$$X_3 = \frac{Y_2 + X_2 - U\Sigma_k V^T}{2}, \quad Y_3 = \frac{Y_2 + X_2 + U\Sigma_k V^T}{2}.$$

9. Uji apakah X_3, Y_3 konvergen. Jika X_3, Y_3 konvergen, set $\gamma_{ub} = \gamma, X_0 = X_3, Y_0 = Y_3$. Jika X_3, Y_3 tidak konvergen, set $\gamma_{lb} = \gamma$.
10. Kembali ke langkah 6.
11. Cari matriks N yang memenuhi $Y - X = NN^T$.
12. Cari bentuk model tereduksi dari persamaan (22)

Secara skema, algoritma diatas dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1. Skema algoritma reduksi orde model sistem LPV dengan menggunakan metode *alternating projection*

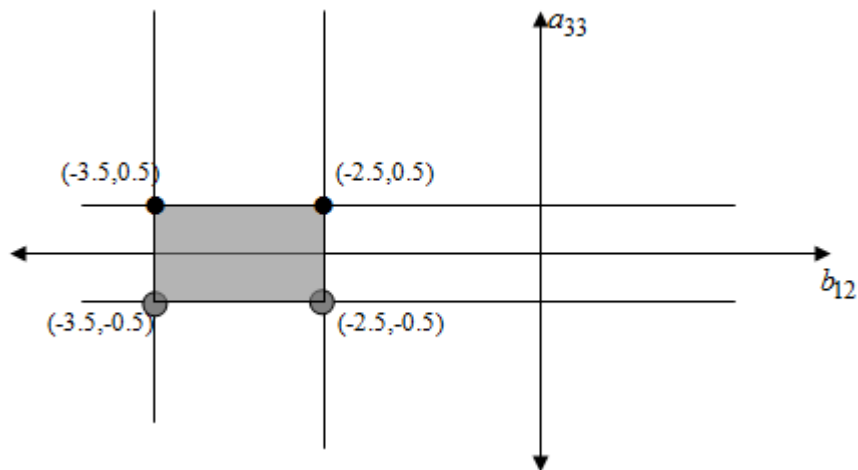
5. SIMULASI PROGRAM

Berikut ini disajikan sebuah contoh reduksi orde model pada sistem LPV menggunakan metode *alternating projection*. Diberikan sebuah sistem LPV politopik [8]

$$\begin{aligned} \dot{x} \ t = & \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \ t & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x \ t + \begin{bmatrix} -2.5 & b_{12} \ t & -1.2 \\ 1.3 & -1 & 1 \\ 1.6 & 2 & 0 \\ -3.4 & 0.1 & 2 \end{bmatrix} u \ t \\ y \ t = & \begin{bmatrix} -2.5 & 1.3 & 1.6 & -3.4 \\ 0 & -1 & 2 & 0.1 \\ -1.2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x \ t , \end{aligned} \quad (26)$$

dengan $a_{33} \in [-3.5, -2.5]$ dan $b_{12} \in [-0.5, 0.5]$.

Parameter a_{33} dan b_{12} berada pada politop konveks yang dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2. Data parameter a_{33} dan b_{12} dalam politop konveks

Dengan demikian maka matriks ruang keadaan sistem (26) berkembang pada politop konveks

$$\Omega = \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, i=1 \dots 4 \right\},$$

dengan

$$A_1 = A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 & -1.2 \\ 1.3 & -1 & 1 \\ 1.6 & 2 & 0 \\ -3.4 & 0.1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.5 & -1.2 \\ 1.3 & -1 & 1 \\ 1.6 & 2 & 0 \\ -3.4 & 0.1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.3 & 1.6 & -3.4 \\ 0 & -1 & 2 & 0.1 \\ -1.2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Metode pemotongan setimbang menghasilkan matriks Gramian keterkendalian dan sekaligus matriks Gramian keterobservasian

$$P = Q = \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6.791 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.9863 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1440 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8950 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan algoritma reduksi orde model, untuk reduksi orde model sistem LPV politopik di atas dari orde 4 ke orde 3 didapat model tereduksi yang berkembang pada politop konveks

$$\Omega^{r,3} = \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} A_i^r & B_i^r \\ C_i^r & D_i^r \end{pmatrix}, i=1 \dots 4 \right\},$$

dengan

$$A_1^r = A_2^r = \begin{bmatrix} -15.2060 & 2.2443 & 0 \\ 1.9673 & -0.8512 & 8.6613 \\ 0 & -5.2727 & -2.7048 \end{bmatrix}, \quad A_3^r = \begin{bmatrix} -15.2060 & 2.2443 & 0 \\ 1.9673 & -0.6080 & 8.6613 \\ 0 & -5.2727 & -2.7048 \end{bmatrix}$$

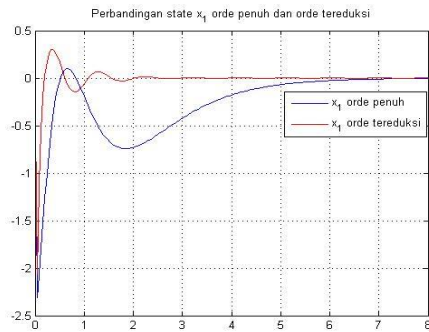
$$A_4^r = \begin{bmatrix} -15.2060 & 2.2443 & 0 \\ 1.9673 & -0.8512 & 8.6613 \\ 0 & -5.2727 & -2.7048 \end{bmatrix}$$

$$B_1^r = B_2^r = B_3^r = B_4^r = \begin{bmatrix} -3.7006 & 2.8466 & -2.8466 \\ -1.2615 & -1.5768 & 0 \\ 3.1126 & -0.0915 & -1.8310 \end{bmatrix},$$

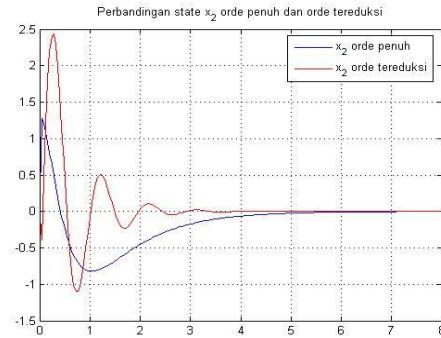
$$C_1^r = C_2^r = C_3^r = C_4^r = \begin{bmatrix} -3.7006 & -1.2615 & 3.1126 \\ 2.8466 & -1.5768 & -0.0915 \\ -2.8466 & 0 & -1.8310 \end{bmatrix},$$

$$D_1^r = D_2^r = D_3^r = D_4^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

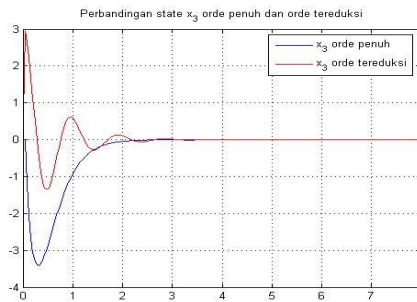
Berikut disajikan perbandingan state $x_1, x_2,$ dan x_3 sebelum direduksi dan setelah direduksi.



Gambar 3. Perbandingan state x_1 orde penuh dan orde tereduksi



Gambar 4. Perbandingan state x_2 orde penuh dan orde tereduksi



Gambar 5. Perbandingan state x_3 orde penuh dan orde tereduksi

Sedangkan untuk reduksi orde model sistem LPV politopik di atas dari orde 4 ke orde 2 didapat model tereduksi yang berkembang pada politop konveks

$$\Omega^{r,2} = \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} A_1^r & B_2^r \\ C_3^r & D_4^r \end{pmatrix}, i=1 \dots 4 \right\},$$

dengan

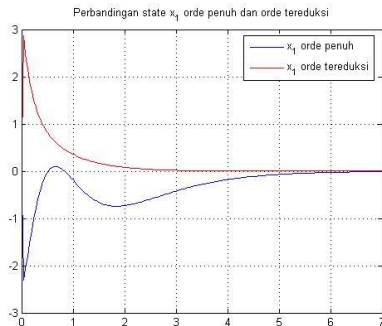
$$A_1^r = A_4^r = \begin{bmatrix} -3.7030 & -8.1306 \\ 8.3918 & -0.0553 \end{bmatrix}, \quad A_2^r = A_3^r = \begin{bmatrix} -3.7030 & -8.1306 \\ 8.3918 & -0.0395 \end{bmatrix},$$

$$B_1^r = B_2^r = B_3^r = B_4^r = \begin{bmatrix} 3.3363 & -0.0981 & -1.9625 \\ -1.1403 & -1.4253 & 0 \end{bmatrix},$$

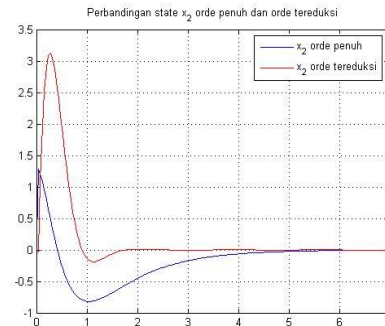
$$C_1^r = C_2^r = C_3^r = C_4^r = \begin{bmatrix} 3.3363 & -1.1403 \\ 0.0981 & -1.4253 \\ -1.9625 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1^r = D_2^r = D_3^r = D_4^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Perbandingan state x_1 dan x_2 sebelum direduksi dan setelah direduksi disajikan dalam gambar berikut.



Gambar 6. Perbandingan state x_1 orde penuh dan orde tereduksi



Gambar 7. Perbandingan state x_2 orde penuh dan orde tereduksi

Berdasarkan nilai-nilai singular Hankel yang diperumum dalam matriks $\hat{\Sigma}$, mereduksi orde sistem LPV politopik (24) dari orde 4 ke orde 3 berarti mengabaikan state yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel keempat yaitu 0.8950. Sedangkan mereduksi orde sistem LPV politopik (26) dari orde 4 ke orde 2 berarti mengabaikan state yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel ketiga dan keempat yaitu 3.1440 dan 0.8950. Dikarenakan selisih nilai singular Hankel ketiga dan keempat lebih kecil dibandingkan dengan selisih nilai singular Hankel kedua dan ketiga, maka mereduksi orde sistem LPV politopik (26) dari orde 4 ke orde 3 menghasilkan sistem tereduksi yang lebih baik dari pada mereduksi orde sistem LPV politopik (26) dari orde 4 ke orde 2. Hal ini juga dapat kita lihat dari gambar 2 – 6 yaitu meskipun model tereduksi orde tiga dan model tereduksi orde dua sama-sama konvergen pada detik keenam, tetapi perilaku masing-masing state pada model tereduksi orde 3 lebih dekat ke sistem asli dibandingkan dengan model tereduksi orde dua.

6. KESIMPULAN

Dalam makalah ini telah dikaji pemanfaatan metode *alternating projection* untuk mereduksi orde model sistem *Linear Parameter Varying* (LPV) politopik. Metode ini menghasilkan kekonvergenan lokal sehingga nilai awal dari barisan *alternating projection* harus diambil dari daerah yang berada dalam lingkungan dari solusi *feasible*. Namun demikian, dikarenakan algoritma ini menggunakan proyeksi yang berturut-turut

pada tiap himpunan kendala, maka untuk model-model yang berorde besar algoritma ini akan memerlukan waktu komputasi yang cukup lama dikarenakan kekonvergenannya yang lambat jika dibandingkan dengan metode-metode yang telah ada. Sehingga pengembangan metode komputasi yang lebih efektif dan yang menghasilkan kekonvergenan yang lebih cepat menjadi permasalahan yang masih harus dikaji lebih lanjut. Masalah mempercepat kekonvergenan barisan *alternating projection* dapat dilakukan dengan cara analitik yaitu menyelesaikan masalah reduksi orde model yang berupa masalah *feasibility* non konveks, maupun dengan cara numerik yaitu dengan membuat rumusan barisan *alternating projection* yang mempercepat kekonvergenan ke irisan dari himpunan-himpunan kendala.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Apkarian, P., P. Gahinet, G Becker, Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-varying Systems : a Design Exemple, *Automatica* 31, 1995, 1251-1261.
- [2] Boyd, S., L. El-Ghaoui, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Philadelphia, 1994.
- [3] Combettes, P.L., H.J. Trussell., Method of Successive Projections for Finding a Common Point of Sets in Metric Spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications* 67, 1990, 487-507.
- [4] Gahinet, P., A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 4, 1994, 421-448.
- [5] Grigoriadis, K.M., R.E Skelton., Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods, *Automatica* 32, 1995, 1117-1125.
- [6] Gubin., L.G, B.T. Polyak., E.V. Raik., The Method of Projections for Finding The Common Point of Convex Sets, Moscow 1966.
- [7] Musthofa, M.W., Kekonvergenan Barisan Alternating Projection pada Himpunan yang Tak Semuanya Konveks, *Jurnal Kaunia* 4 no. 1, 2008, 121 – 135.
- [8] Musthofa, M.W., Reduksi Orde Model Sistem Linear Parameter Varying Melalui Linear Matrix Inequalities, *Prosiding Seminar Nasional Matematika Universitas Katolik Parahyangan 2009* , 121 – 132.

- [9] Wu, F., Induced L_2 -norm Model Reduction of Polytopic Uncertain Linear Systems, *Automatica* 32, 1996, 1417-1426.
- [10] Wu, F., Induced L_2 -Norm Control for LPV Systems with Bounded Parameter Variation Rates, *International Journal of Nonlinear and Robust Control*. 1997.

EKUIVALENSI INTEGRAL DARBOUX- α DAN INTEGRAL RIEMANN- α PADA R^2 *

Muslich dan SupriyadiWibowo
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret
muslich_mus@yahoo.com
supriyadi_w@yahoo.co.id

ABSTRAK. Tulisan ini bertujuan membahas integral Darboux pada R^2 yang berlandaskan pada konsep fungsi luas α pada sel $E \subset R^2$. Sejalan dengan pembahasan pada integral Darboux pada R^1 maka pembahasan integral Darboux- α pada R^2 diperoleh hasil antara lain (i) criteria Darboux- α dan (ii) teorema ekuivalensi antara integral Darboux- α dan integral Riemann- α berlaku.

Kata Kunci : integral Darboux, integral Riemann dan fungsi luas.

1. PENDAHULUAN

Integral konstruktif pertama kali dibangun oleh Riemann (1826-1866). Integral ini dibangun berdasarkan nilai limit jumlah, terkait dengan penyusunan partisi pada interval $[a,b] \subset R^1$. Hasilnya cukup menakjubkan, sebab beberapa fungsi yang tidak terintegral secara deskriptif Newton ternyata dapat diintegalkan secara konstruktif Riemann, sebagai contoh adalah fungsi tangga. Perkembangan teori integral tidak berhenti sampai pada integral Riemann saja, namun terus berkembang yaitu pada kurun waktu hamper bersamaan muncul sebuah integral yang dibangun oleh Darboux (1842-1917) yang selanjutnya dikenal dengan integral Darboux. Integral Darboux ini disusun berdasarkan pada konsep nilai maksimum dan minimum suatu fungsi pada setiap sub-interval $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b] \ i=1,2,3,\dots,n$. Selanjutnya menurut Henstock [1] telah ditunjukkan bahwa konsep integral Riemann dan integral Darboux pada $[a,b] \subset R^1$ adalah ekuivalen.

Semua pembahasan integral di atas adalah tipe integral pada ruang Euclide berdimensi-1 atau merupakan bentuk integral pada garis lurus sebagai daerah integrasinya. Penulis tertarik untuk membahas integral Darboux pada ruang Euclide berdimensi-2 atau pada R^2 yaitu pembahasan integral Darboux pada bidang datar sebagai daerah integrasinya.

Hal ini dilakukan karena permasalahan integral tidak hanya terbatas dengan integral pada garis lurus R^1 saja, namun perkembangannya menuntut bentuk integral sampai pada bidang R^2 atau bahkan pada R^n sebagai daerah integrasinya, seperti masalah rambatan panas, masalah aliran fluida, masalah aliran gas dan lain-lain.

2. PARTISI DAN INTEGRAL

Misalkan R^2 adalah himpunan pasangan terurut atas bilangan real yaitu $R^2 = R \times R = \{ \bar{x} = (x_1, x_2), x_i \in R, i=1,2 \}$. Jika pada R^2 dilengkapi metrik d dengan

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in R^2$ maka (R^2, d) merupakan ruang metrik biasa.

Menurut Zachriwan [7], jika $\bar{x} \in R^2$ maka persekitaran \bar{x} dengan jari-jari $r > 0$ didefinisikan sebagai $N_r(\bar{x}) = \{ \bar{y}, d(\bar{x}, \bar{y}) < r \}$ dengan $d(\bar{x}, \bar{y})$ dimaksud jarak (metrik) antara dua titik $\bar{x}, \bar{y} \in R^2$. Jika $\bar{a}, \bar{b} \in R^2$ dengan $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$ makadimaksudkan

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{ \bar{x} \in R^2 : \bar{a} \leq \bar{x} \leq \bar{b} \}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \{ \bar{x} \in R^2 : \bar{a} < \bar{x} < \bar{b} \}$$

Jika $E = [\bar{a}, \bar{b}] \subset R^2$ maka E merupakan daerah empat persegi panjang pada R^2 dan disebut interval tertutup (sel) yang diartikan sebagai :

$$\begin{aligned} E = [\bar{a}, \bar{b}] &= \prod_{i=1}^2 [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \\ &= \{ \bar{x} = (x_1, x_2) \in R^2, a_i \leq x_i \leq b_i, i=1,2 \} \end{aligned}$$

Selanjutnya koleksi berhingga pasangan sel-titik

$$P = \{(E, \bar{x})\} = \{(E_1, \bar{x}_1), (E_2, \bar{x}_2), \dots, (E_n, \bar{x}_n)\}$$

disebut partisi pada E jika $\bar{x}_j \in E_j \subset N_\delta(\bar{x}_j)$, untuk setiap $j=1,2,\dots,n$ dan $E_i^o \cap E_j^o = \emptyset$

, $i \neq j$ dan $\bigcup_{j=1}^n E_j \subseteq E$. Adanya partisi P pada sel E ini dijamin oleh Pfeffer [5].

Jika $\mathcal{S}(E)$ adalah koleksi semua sel $E \subset R^2$ maka fungsi positif $\alpha : \mathcal{S}(E) \rightarrow R$ didefinisikan sebagai luas sel E dengan notasi $\alpha(E)$. Misalkan $\pi(E)$ adalah koleksi semua partisi P pada E maka sejalan dengan Nila dan Soeparna [4] dalam mendefinisikan integral bawah Henstock-Darboux- α dan integral atas Henstock-Darboux- α maka dapat didefinisikan konsep integral bawah Darboux- α dan integral atas Darboux- α pada ruang R^2 sebagai berikut.

Diberikan fungsi terbatas $f: E \rightarrow \mathbf{R}$, dengan $P = \{(E, \bar{x})\} = \{(E_1, \bar{x}_1), (E_2, \bar{x}_2), \dots, (E_n, \bar{x}_n)\}$ sebarang partisi pada sel E dan didefinisikan :

$$m = \inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in E\} \text{ dan } M = \sup\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in E\}$$

$$m_j = \inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in E_j, j=1,2,3,\dots,n\} \text{ dan } M_j = \sup\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in E_j, j=1,2,3,\dots,n\}$$

Karena f terbatas pada E maka nilai m , M , m_j dan M_j dijamin ada. Selanjutnya dibentuk jumlah Darboux- α bawah (lower Darboux- α sum):

$$L(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n m_j \alpha(E_j)$$

dan jumlah Darboux- α atas (upper Darboux- α sum) :

$$U(f, P, \alpha) = \sum_{j=1}^n M_j \alpha(E_j),$$

Definisi 1

Diberikan fungsi terbatas $f: E \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, dengan $P = \{(E, \bar{x})\} = \{(E_1, \bar{x}_1), (E_2, \bar{x}_2), \dots, (E_n, \bar{x}_n)\}$ sebarang partisi pada sel E dan fungsi luas α pada sel $E \subset \mathbf{R}^2$.

a. Fungsi f dikatakan terintegral bawah Darboux- α pada E ditulis $f \in \underline{D}(E, \alpha)$ jika terdapat bilangan real I sehingga

$$(\underline{D}) \iint_E f \, d\alpha = \sup_{P \in \pi(E)} \{L\{f, P, \alpha\}\} = I$$

b. Fungsi f dikatakan terintegral atas Darboux- α pada E ditulis $f \in \overline{D}(E, \alpha)$ jika terdapat bilangan real J sehingga

$$(\overline{D}) \iint_E f \, d\alpha = \inf_{P \in \pi(E)} \{U\{f, P, \alpha\}\} = J$$

c. Fungsi f dikatakan terintegral Darboux- α pada E ditulis $f \in D(E, \alpha)$ jika

$$(\underline{D}) \iint_E f \, d\alpha = (\overline{D}) \iint_E f \, d\alpha$$

Jadi suatu fungsi terbatas f dikatakan terintegral Darboux- α pada E ditulis $f \in D(E, \alpha)$

jika nilai $(D) \iint_E f \, d\alpha = (\underline{D}) \iint_E f \, d\alpha = (\overline{D}) \iint_E f \, d\alpha$ yaitu $I=J$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada awal bagian ini akan diperlihatkan tentang Kriteria Darboux yang menunjukkan keintegralan sebuah fungsi yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1 (Kriteria Darboux- α).

Diberikan fungsi terbatas $f: E \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dan fungsi luas α pada sel $E \subset \mathbf{R}^2$. Fungsi f terintegral Darboux- α pada E jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada E sehingga $U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) < \varepsilon$.

Bukti :

(i) Syarat perlu

Diketahui $f \in D(E, \alpha)$ maka terdapat bilangan I dan J sehingga $I=J$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ dengan menggunakan sifat supremum dan infimum maka terdapat partisi P_1 dan P_2 pada E sehingga

$$I - \frac{1}{2} \varepsilon < L(f, P_1, \alpha) \leq I = J \leq U(f, P_2, \alpha) < J + \frac{1}{2} \varepsilon$$

Ambil $P = P_1 \cup P_2$ maka P adalah partisi pada E dan berlaku

$$I - \frac{1}{2} \varepsilon < L(f, P_1, \alpha) \leq L(f, P, \alpha) \leq I = J \leq U(f, P, \alpha) \leq U(f, P_2, \alpha) < J + \frac{1}{2} \varepsilon$$

dan berakibat

$$U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) < J + \frac{1}{2} \varepsilon - (I - \frac{1}{2} \varepsilon) = \varepsilon$$

(ii) Syarat cukup

Berdasarkan hipotesa untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada E sehingga

$$U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) < \varepsilon.$$

Menurut Definisi 1 berlaku

$$L(f, P, \alpha) \leq (\underline{D}) \iint_E f \, d\alpha \leq (\overline{D}) \iint_E f \, d\alpha \leq U(f, P, \alpha)$$

Jadi diperoleh

$$(\overline{D}) \iint_E f \, d\alpha - (\underline{D}) \iint_E f \, d\alpha \leq U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang maka $(\overline{D}) \iint_E f \, d\alpha = (\underline{D}) \iint_E f \, d\alpha$, dan menurut Definisi

1 maka fungsi f terintegral Darboux- α pada E .

Definisi 2.2

Jika fungsi $f: E \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ terbatas pada E , dan $P = \{(E, \bar{x})\} = \{(E_1, \bar{x}_1), (E_2, \bar{x}_2), \dots, (E_n, \bar{x}_n)\}$ sebarang partisi pada sel E maka dapat didefinisikan jumlah Darboux- α (Darboux- α sum) fungsi f pada E yaitu :

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{E_j \in P} f(\bar{x}_j) \alpha(E_j) = \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j) \alpha(E_j)$$

dengan $\bar{x}_j \in E_j$ diambil sebarang.

Definisi 2.3

Jika $P = \{(E_j, \bar{x}_j)\}$ partisi pada E dan $E_j = [\bar{a}_j, \bar{b}_j]$ dengan $\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j})$ dan $\bar{b}_j = (b_{1j}, b_{2j})$ maka norma partisi P pada E didefinisikan dengan

$$\|P\| = \max \{ \sqrt{(a_{1j} - b_{1j})^2 + (a_{2j} - b_{2j})^2} : j = 1, 2, \dots, n \}$$

Sejalan dengan Haripamnyu [2] dalam mendefinisikan bentuk integral konstruktif McShane, demikian juga Muslim dan Soeparna [3] dalam mendefinisikan bentuk integral konstruktif Henstock fungsi bernilai barisan, maka berdasarkan konsep norma $\|P\|$ selanjutnya didefinisikan konsep integral Riemann- α sebagai limit jumlah sebagai berikut.

Definisi 2.4

Diberikan fungsiterbatas $f: E \subset R^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dan fungsi luas α pada sel $E \subset R^2$. Fungsi f dikatakan terintegral Riemann- α ke suatu nilai A pada E ditulis $f \in R(E, \alpha)$ jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{(E, \bar{x})\}$ pada E dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(f, P, \alpha) - A| = \left| \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j) \alpha(E_j) - A \right| < \epsilon$$

Bilangan A disebut nilai integral Riemann- α fungsi f pada sel E yang biasa dituliskan dengan

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P, \alpha) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \alpha(E_i) = \iint_E f \, d\alpha = A$$

Selanjutnya himpunan semua fungsi terintegral Riemann- α pada E dituliskan dengan $R(E, \alpha)$ dan dapat dibuktikan teorema ekuivalensi antara integral Darboux- α dengan integral Riemann- α pada R^2 .

Teorema 2.5

Diberikan fungsi $f: E \subset R^2 \rightarrow \mathbf{R}$ terbatas dan fungsi luas α pada sel $E \subset R^2$. Fungsi f terintegral Darboux- α pada E jika hanya jika fungsi f terintegral Riemann- α pada E .

Bukti:

(i).Syarat perlu

Diketahui f terintegral Riemann- α pada E , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{(E, \bar{x})\}$ pada E dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(f, P, \alpha) - A| = \left| \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j^*) \alpha(E_j) - A \right| < \varepsilon$$

atau

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j^*) \alpha(E_j) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hal ini berlaku untuk setiap $x_j^* \in E_j, j=1,2,3,\dots,n$.Ambil $\bar{x}_j^* \in E_j$ sedemikian hingga $f(\bar{x}_j^*) = M_j$ maka berlaku

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, P, \alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ambil $\bar{x}_j^* \in E_j$ sedemikian hingga $f(\bar{x}_j^*) = m_j$ maka berlaku

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P, \alpha) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga diperoleh $U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) < (A + \frac{\varepsilon}{2}) - (A - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada E dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $U(f, P, \alpha) - L(f, P, \alpha) < \varepsilon$, jadi f terintegral Darboux- α pada E .

(ii) Syarat cukup

Diketahui f terintegral Darboux- α pada E maka terdapat bilangan I dan J sehingga $I = J$,dengan $I = \sup_{P \in \pi(E)} \{L(f, P, \alpha)\}$ dan $J = \inf_{P \in \pi(E)} \{U(f, P, \alpha)\}$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut sifat supremum dan infimum maka terdapat partisi P_1 dan P_2 pada E dengan $\|P_1\| < \delta_1$, $\|P_2\| < \delta_2$ dan berakibat

$$I - \varepsilon < L(f, P_1, \alpha) \leq I \text{ dan } J \leq U(f, P_2, \alpha) < J + \varepsilon$$

Dan selalu berlaku

$$I - \varepsilon < L(f, P_1, \alpha) \leq I = J \leq U(f, P_2, \alpha) < J + \varepsilon$$

Diambil $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$, dan dibentuk partisi $P = P_1 \cup P_2$ maka P partisi pada E dengan $\|P\| < \delta$ dan berlaku

$$\begin{aligned} L(f, P, \alpha) &\leq L(f, P_1, \alpha) \leq L(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha) \leq U(f, P_2, \alpha) \\ I - \varepsilon &< L(f, P_1, \alpha) \leq L(f, P, \alpha) \leq S(f, P, \alpha) \leq U(f, P, \alpha) \leq U(f, P_2, \alpha) < J + \varepsilon \\ I - \varepsilon &\leq S(f, P, \alpha) \leq J + \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $I=J$, sebut $I=J=A$ maka

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< S(f, P, \alpha) - A < \varepsilon \\ |S(f, P, \alpha) - A| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dan untuk setiap partisi P pada E dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $|S(f, P, \alpha) - A| < \varepsilon$, terbukti bahwa f terintegral Riemann- α pada E .

Berdasarkan Teorema 2.5 ini dapat disimpulkan bahwa integral Darboux- α dan integral Riemann- α adalah ekuivalen, sehingga $D(E, \alpha) = R(E, \alpha)$ yaitu setiap fungsi terintegral Darboux- α pada E juga terintegral Riemann- α pada E , begitu pula sebaliknya.

4. KESIMPULAN

Sejalan dengan pembahasan integral Darboux pada R^1 , maka hasil pembahasan integral Darboux pada R^2 diperoleh hasil antara lain (1) berlakunya criteria Darboux- α dan (ii) berlakunya teorema ekivalensi antara integral Darboux- α dan integral Riemann- α .

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulisan makalah ini merupakan sebagian dari hasil penelitian dengan judul Integral Darboux pada R^2 . Sehubungan dengan itu penulis mengucapkan terima kasih kepada Dekan FMIPA UNS yang telah membiayai penelitian ini melalui dana DIPA BLU FMIPA tahun anggaran 2010 sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Henstock, R, 1988. *Lectures on the Theory of Integration*, Series in Real Analysis Volume I, World Scientific.

-
- [2] Haripamnyu, 2003. *Integral Mcshane-Pettis*, Prosiding Seminar Nasional Matematika Statistika VI Jurusan Statistika- ITS Surabaya, ISBN, 979-96700-1-2
- [3] Muslim, A dan Soeparna D, 2002. *Integral Henstock Fungsi Bernilai Barisan*, Jurnal Matematika atau Pembelajarannya, Th VIII, Edisi Khusus, hal. 190-196
- [4] Nila Kesumawati dan Soeparna D, 2002. *Beberapa Teorema Kekonvergenan Pada Integral Henstock-Darboux Pada Ruang Euclidean R^n* . Jurnal Matematika atau Pembelajarannya, Th VIII, Edisi Khusus, hal. 197-205
- [5] Pfeffer, W, F. 1993. *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, New York.
- [6] Wittaya Naak-In, 1975. *Non Absolute Integration on The Real Line*, Master Thesis, University of Pilippines.
- [7] Zachriwan, dkk, 2003, *Integral Henstock Fungsi Bernilai di Dalam Ruang Barisan l^p , $1 \leq p < \infty$ dan Lemma Henstock*. Prosiding Seminar Nasional Matematika Statistika VI Jurusan Statistika- ITS Surabaya, ISBN 979-96700-1-2

HUBUNGAN ANTARA ORDER DERIVATIF- F^α DENGAN DIEMENSI- γ DARI GRAFIK FUNGSI KONTINU HOLDER BERPANGKAT

$$\alpha \in (0,1]$$

Supriyadi Wibowo
Jurusan Matematika F MIPA UNS Surakarta
Email. supriyadi_w@yahoo.co.id

ABSTRAK. Sebarang fungsi yang terdiferensial order satu di suatu titik dapat didekati oleh garis lurus yang menyinggung fungsi di titik tersebut. Tampak bahwa order derivatif ($\alpha=1$) dan dimensi dari obyek ($d=1$) akan memenuhi hubungan $\alpha+d=2$. Dalam makalah ini akan diselidiki hubungan antara order derivatif- F^α untuk $\alpha \in (0,1]$ dengan dimensi- γ dari grafik fungsi d untuk fungsi kontinu Holder berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$ apakah juga berlaku $\alpha+d=2$. Dengan menggunakan sifat-sifat derivatif- F^α dan fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha \in (0,1]$, dapat dibuktikan bahwa jika d adalah dimensi- γ dari grafik fungsi untuk fungsi kontinu Holder f berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$, maka fungsi f terdiferensial- F^α dengan order $\alpha=2-d$, $\alpha \in (0,1]$ dan dimensi- γ himpunan perfek- α $F \subset R$ adalah $\alpha=2-d$, $\alpha \in (0,1]$.

Kata Kunci: derivatif- F^α , fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha \in (0,1]$, dimensi- γ dari grafik fungsi, himpunan perfek- α

1. PENDAHULUAN

Kurva-kurva kontinu tetapi mempunyai struktur yang tidak teratur seperti fungsi anak tangga Cantor disebut juga fungsi singular Lebesgue-Cantor yaitu fungsi $S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3} : C_{1/3} \rightarrow R$ dengan $C_{1/3}$ adalah himpunan pertigaan Cantor (himpunan fraktal), $\ln 2/\ln 3$ adalah order dari fungsi anak tangga Cantor, dan juga merupakan dimensi- γ dari $C_{1/3}$. Fungsi ini merupakan fungsi kontinu, monoton naik dan tidak terdiferensial biasa (order-1) pada $C_{1/3}$ yaitu $D^1(S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}(x)) = \infty, x \in C_{1/3}$, tetapi terdiferensial dengan order $\ln 2/\ln 3$ (Jones [1], Parvate and Gangal [3],[4]). Fungsi anak tangga Cantor dapat diperumum untuk sebarang himpunan fraktal $F \subset [a,b]$ menjadi fungsi anak tangga $S_F^\alpha : F \rightarrow R$ dengan order $\alpha \in (0,1)$ yang juga merupakan dimensi- γ himpunan

fraktal F . Fungsi ini bukan merupakan penyelesaian persamaan diferensial biasa, oleh karena itu kalkulus biasa tidak dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi tersebut, sehingga perlu dikembangkan kalkulus baru yang didasarkan pada himpunan fraktal $F \subset R$ yang selanjutnya disebut kalkulus- F^α . Dalam kalkulus baru ini, juga memuat formulasi tentang derivatif dengan order $\alpha \in (0,1]$ yang didasarkan pada himpunan fraktal $F \subset R$ dan selanjutnya disebut derivatif- F^α , dimana derivatif biasa (order-1) tidak dapat bekerja pada himpunan fraktal $F \subset R$ (Parvate and Gangal [3],[4]).

Fungsi anak tangga S_F^α memainkan peranan sentral dalam kalkulus- F^α , dalam derivatif- F^α kuantitas $(S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x))$ menggantikan posisi $(y-x)$ yaitu panjang interval $[x, y]$ atau jarak antara titik x dan y dalam kalkulus biasa. Sehingga derivatif dari fungsi anak tangga Cantor $S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}$ terhadap derivatif- F^α adalah fungsi karakteristik $\chi_C(x)$ yaitu fungsi yang bernilai satu untuk $x \in C_{1/3}$ dan bernilai nol untuk x yang lain (Parvate and Gangal [3],[4]).

Fungsi kontinu $f: F \subset R \rightarrow R$ dikatakan fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha \in (0,1]$, jika terdapat konstanta $c > 0$ yang memenuhi $|f(y) - f(x)| \leq c|y-x|^\alpha$ untuk semua $x, y \in F$. Jika fungsi f adalah fungsi kontinu Holder berpangkat satu ($\alpha = 1$), maka f adalah fungsi Lipschitz. Nilai maksimal $\alpha \in (0,1)$ yang memenuhi fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha \in (0,1)$ adalah berhubungan dengan keberadaan derivatif- F^α fungsi f pada himpunan fraktal F (Ross, Samko et.al [5]). Supriyadi dalam [8] membuktikan bahwa fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha \in (0,1]$ merupakan syarat cukup agar fungsi tersebut terdiferensial- F^α dengan order $\alpha \in (0,1]$, sebagai contoh fungsi anak tangga Cantor $S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}$ merupakan fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha = \ln 2/\ln 3$, sehingga akan terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = \ln 2/\ln 3$.

Fungsi $f(x)$ yang terdiferensial order satu di x_0 dapat didekati oleh garis lurus yang menyinggung fungsi $f(x)$ di x_0 . Tampak bahwa order derivatif ($\alpha = 1$) dan

dimensi dari obyek ($d=1$) akan memenuhi hubungan $\alpha+d=2$ (Li, Essex et.al [2]). Sedangkan dalam artikel ini akan diselidiki hubungan antara order derivatif- F^α untuk $\alpha \in (0,1]$ dengan dimensi- γ dari grafik fungsi (d) untuk fungsi kontinu Holder berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$ apakah juga berlaku $\alpha+d=2$.

2. LANDASAN TEORI

Diberikan himpunan $F \subset [a,b]$, berikut didefinisikan konten (*content*) atau massa- α dari F , *coarse-grained mass (cgm)* dan fungsi massa dengan order- $\alpha \in (0,1]$.

Definisi 2.1 (Parvate and Gangal [3]) *Subdivisi (subdivision) $P_{[a,b]}$ dari interval $[a,b]$, $a < b$ adalah himpunan titik-titik berhingga $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, dengan $x_i < x_{i+1}$. Sebarang interval yang berbentuk $[x_i, x_{i+1}]$ disebut interval komponen (component interval) atau komponen dari subdivisi P . Jika Q adalah sebarang subdivisi dari $[a,b]$ dan $P \subset Q$, maka dikatakan Q sebagai penghalus dari P . Jika $a = b$, maka himpunan $\{a\}$ adalah hanya subdivisi dari $[a,b]$.*

Definisi 2.2 (Parvate and Gangal [3]) *Diberikan bilangan bulat positif n dan $a \leq b$, coarse-grained mass (cgm) dari $F \cap [a,b]$ dituliskan $\gamma_n^\alpha(F, a, b)$ dan didefinisikan dengan*

$$\gamma_n^\alpha(F, a, b) = \inf_{\{P_{[a,b]} : |P| \leq 1/n\}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \theta(F, [x_i, x_{i+1}])$$

dengan $|P| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ dan $\theta(F, [x_i, x_{i+1}]) = 1$, jika $F \cap [x_i, x_{i+1}]$ tidak

kosong dan bernilai nol untuk yang lain, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Definisi 2.3 (Parvate and Gangal [3]) *Fungsi massa $\gamma^\alpha(F, a, b)$ didefinisikan dengan*

$$\gamma^\alpha(F, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^\alpha(F, a, b).$$

Berdasarkan keserupaan definisi antara fungsi massa dengan ukuran luar Hausdorff (*Hausdorff outer measure*), maka fungsi massa dapat digunakan untuk

mendefinisikan dimensi fraktal, yang selanjutnya disebut dimensi- γ dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4 (Parvate and Gangal [3]) *Dimensi- γ dari himpunan $F \cap [a, b]$, dinotasikan dengan $\dim_\gamma(F \cap [a, b])$ dan didefinisikan sebagai*

$$\begin{aligned} \dim_\gamma(F \cap [a, b]) &= \inf \{ \alpha : \gamma^\alpha(F, a, b) = 0 \} \\ &= \sup \{ \alpha : \gamma^\alpha(F, a, b) = \infty \} \end{aligned}$$

Berikut ini akan didefinisikan fungsi anak tangga (*staircase function*) S_F^α dengan order $\alpha \in (0, 1)$ yang terdefinisi pada himpunan fraktal $F \subset [a, b]$, serta merupakan perumuman fungsi anak tangga Cantor $S_{C_{1/3}}^{\ln 2 / \ln 3}$ yang terdefinisi pada himpunan pertigaan Cantor $C_{1/3}$.

Definisi 2.5 (Parvate and Gangal [3]) *Misalkan a_0 adalah konstanta real. Fungsi anak tangga (*staircase function*) $S_F^\alpha(x)$ dengan order $\alpha \in (0, 1]$ untuk himpunan F didefinisikan oleh*

$$S_F^\alpha(x) = \begin{cases} \gamma^\alpha(F, a_0, x), & a_0 \leq x \\ -\gamma^\alpha(F, x, a_0), & a_0 > x \end{cases}$$

Dalam bagian ini akan diberikan definisi limit- F dengan metrik biasa (*usual metric*).

Definisi 2.6 (Parvate and Gangal [3]) *Diberikan $F \subset R$, $f : R \rightarrow R$ dan $x \in F$. Bilangan l dikatakan limit- F untuk $y \rightarrow x$, jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ yang memenuhi*

$$y \in F \text{ dan } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon.$$

Jika bilangan tersebut ada, maka dituliskan dengan

$$l = F - \lim_{y \rightarrow x} f(y).$$

Sebagaimana turunan order satu, turunan- F^α juga merupakan limit pembagian, tetapi dengan limit- F sedangkan penyebutnya adalah nilai dari fungsi anak tangga S_F^α di dua titik anggota himpunan perfek- α (α -*perfect*), yaitu himpunan tertutup dan semua titiknya adalah titik limit- F .

Definisi 2.7 (Parvate and Gangal [3]) *Jika F adalah himpunan perfek- α (α -perfect), maka derivatif- F^α dari fungsi f didefinisikan oleh*

$$D_F^\alpha (f(x)) = \begin{cases} F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)}, & x \in F \\ 0 & , x \notin F \end{cases}$$

jika limit- F ada.

Derivatif- F^α terhadap fungsi anak tangga akan menghasilkan fungsi karakteristik yaitu fungsi yang bernilai satu pada F dan bernilai nol untuk yang lain, sebagaimana diberikan oleh lemma berikut.

Lemma 2.8 (Parvate and Gangal [4]) *Derivatif- F^α dari fungsi $S_F^\alpha(x), x \in F$ adalah fungsi karakteristik $\chi_F(x)$, yaitu*

$$D_F^\alpha (S_F^\alpha(x)) = \chi_F(x).$$

Teorema 2.9 (Supriyadi [7]) *Diberikan $F \subset [a, b]$ dan untuk setiap $a, b \in F$.*

Maka kedua pernyataan berikut ekuivalen

$$\begin{aligned} \text{i. } & 0 < \gamma^\alpha(F, a, b) < \infty \\ \text{ii. } & \gamma^\beta(F, a, b) = \begin{cases} \infty, & 0 < \beta < \alpha \leq 1 \\ 0, & 0 < \alpha < \beta \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Definisi 2.10 (Supriyadi [7]) *Fungsi $f : F \subset [a, b] \rightarrow R$ dikatakan mempunyai order- α terhadap derivatif- F^α untuk setiap titik $x \in F$, jika*

$$\alpha = \inf \{ \beta : D_F^\beta (f(x)) = \infty, 0 < \beta \leq 1 \} = \sup \{ \beta : D_F^\beta (f(x)) = 0, 0 < \beta \leq 1 \}.$$

Teorema 2.11 (Supriyadi [7])

Diberikan himpunan perfek- α $F \subset R$ dan fungsi $f : R \rightarrow R$. Untuk semua $x \in F$, maka kedua pernyataan berikut ekuivalen

$$\begin{aligned} \text{a. } & 0 < |D_F^\alpha (f(x))| < \infty \\ \text{b. } & D_F^\beta (f(x)) = \begin{cases} 0, & 0 < \beta < \alpha \leq 1 \\ \infty, & 0 < \alpha < \beta \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dari Teorema 2.9 dan Teorema 2.11 dapat disimpulkan bahwa dimensi himpunan perfek- α $F \subset R$ sama dengan order derivatif fungsi $f : F \rightarrow R$.

Fungsi kontinu $f : F \rightarrow R$ dikatakan fungsi kontinu Holder berpangkat α , jika terdapat konstanta $c > 0$ yang memenuhi $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^\alpha$ untuk semua $x, y \in F$ (Ross, Samko et.al [5]). Jika fungsi f kontinu Holder berpangkat satu ($\alpha = 1$), maka f adalah fungsi Lipschitz. Nilai maksimal α yang memenuhi fungsi kontinu Holder berpangkat α adalah berhubungan dengan keberadaan derivatif fungsi f pada himpunan F . Supriyadi dalam [8] membuktikan bahwa fungsi kontinu Holder berpangkat $\alpha \in (0, 1]$ merupakan syarat cukup agar fungsi tersebut terdiferensial- F^α yaitu bernilai 0 untuk $0 < \beta < \alpha \leq 1$ dan bernilai ∞ untuk $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

3. PEMBAHASAN

Jika dimensi grafik fungsi $f : F \rightarrow R$ dinotasikan dengan d dan didefinisikan dengan $d = \dim_\gamma \{(x, f(x)) | x \in F\}$, maka grafik fungsi dengan turunan kontinu akan mempunyai dimensi satu, sedangkan fungsi kontinu yang cukup tidak teratur dimungkinkan mempunyai dimensi grafiknya lebih besar dari satu. Sedangkan dalam artikel ini akan diselidiki hubungan antara order derivatif- F^α untuk $\alpha \in (0, 1]$ dengan dimensi- γ dari grafik fungsi (d) untuk fungsi kontinu Holder berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$ apakah juga berlaku $\alpha + d = 2$.

Teorema 3.1 Diberikan himpunan perfek- α $F \subset R$ dan fungsi kontinu $f : R \rightarrow R$ yang memenuhi $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{2-d}$, $c > 0, 1 \leq d \leq 2$ dan $x, y \in F$, maka fungsi f terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = 2 - d$ untuk semua $x \in F$ atau

$$D_F^\alpha (f(x)) = \begin{cases} 0 & , 0 < \alpha < 2 - d \leq 1 \\ \text{bernilai hingga} & , \alpha = 2 - d \\ \infty & , 0 < 2 - d < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Bukti

a. Diberikan sebarang $x, y \in F$, akan dibuktikan fungsi f terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = 2 - d$

Karena $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{2-d}$, $c > 0, 1 \leq d \leq 2$ dan

$$D_F^\alpha(f(x)) = F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} |D_F^\alpha(f(x))| &= F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)} \right| = F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)|} \\ &\leq F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{c|y - x|^{2-d}}{|S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)|} \\ &= F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{c|y - x|^{2-d}}{\left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\{P_{[a,b]} : |P| \leq \delta\}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^\alpha}{\Gamma(\beta + 1)} \theta(F, [x_i, x_{i+1}]) \right|} \\ &= F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{c\Gamma(\alpha + 1)|y - x|^{2-d}}{\left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\{P_{[a,b]} : |P| \leq \delta\}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^\alpha \theta(F, [x_i, x_{i+1}]) \right|} \\ &\leq F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{c\Gamma(\alpha + 1)|y - x|^{2-d}}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^\alpha \theta(F, [x_i, x_{i+1}]) \right)} \\ &\leq F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} \frac{c\Gamma(\alpha + 1)|y - x|^{2-d}}{|(y - x)|^\alpha} \\ &= c\Gamma(\alpha + 1) F\text{-}\lim_{y \rightarrow x} |y - x|^{(2-d)-\alpha} \end{aligned}$$

Jadi untuk $\alpha < 2 - d$, diperoleh $D_F^\alpha(f(x)) = 0$.

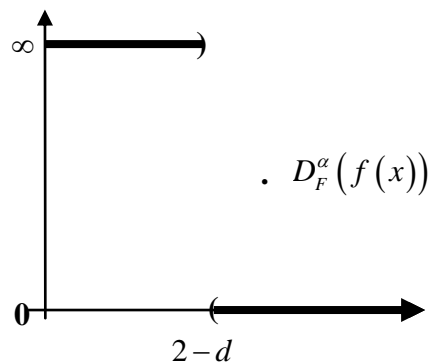
b. Dengan Teorema 2.5 dan analog dengan bukti di atas untuk $\alpha > 2-d$, maka diperoleh

$$D_F^\alpha(f(x)) = \infty$$

Dari a dan b terbukti fungsi f terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = 2-d$ atau

$$D_F^\alpha(f(x)) = \begin{cases} 0 & , 0 < \alpha < 2-d \leq 1 \\ \text{bernilai hingga} & , \alpha = 2-d \\ \infty & , 0 < 2-d < \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Hubungan antara order derivatif- F^α untuk $\alpha \in (0,1]$ dengan dimensi- γ dari grafik fungsi (d) untuk fungsi kontinu Holder berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$, diberikan oleh Gambar 3.1.



Gambar 3.1

Corollary 3.2 Diberikan himpunan perfek- α $F \subset R$ dan fungsi kontinu $f : R \rightarrow R$ yang memenuhi $|f(y) - f(x)| \leq c|y-x|^{2-d}$, $c > 0, 1 \leq d \leq 2$ dan $x, y \in F$, maka berlaku

$$\dim_\gamma(F) + \dim_\gamma\{(x, f(x)) | x \in F\} = 2 .$$

Bukti Dengan Teorema 2.9 dan Teorema 2.10 diperoleh bahwa dimensi himpunan perfek- α $F \subset R$ sama dengan order derivatif fungsi $f : F \rightarrow R$, kemudian dengan Teorema 2.1 terbukti

$$\dim_\gamma(F) + \dim_\gamma\{(x, f(x)) | x \in F\} = 2 .$$

Contoh 3.3 Diberikan himpunan Cantor $C_{1/3}$ dan fungsi anak tangga $S_C^{\ln 2/\ln 3}$ dan dimensi- γ himpunan pertigaan cantor adalah $\alpha = \ln 2/\ln 3$ ($\dim_\gamma(C_{1/3}) = \ln 2/\ln 3$), maka dari Teorema 2.11, diperoleh bahwa fungsi anak tangga Cantor $S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}$ tidak terdiferensial order satu ($\alpha = 1$), tetapi terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = \ln 2/\ln 3$ atau

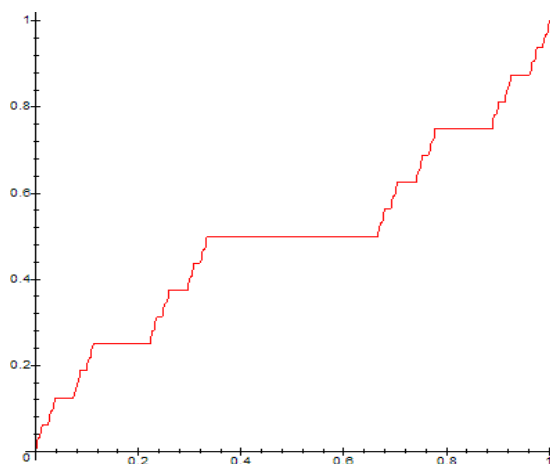
$$D_{C_{1/3}}^\beta \left(S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}(x) \right) = \begin{cases} 0, & 0 < \beta < \ln 2/\ln 3 \leq 1 \\ 1, & \beta = \ln 2/\ln 3 \\ \infty, & 0 < \ln 2/\ln 3 < \beta \leq 1 \end{cases}.$$

Misal grafik fungsi anak tangga $S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}$ mempunyai dimensi $1 \leq d < 2$ dan memenuhi fungsi kontinu Holder berpangkat $2-d \in (0,1]$, yaitu

$$\left| S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}(x) - S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}(y) \right| \leq c|x-y|^{2-d}$$

maka dengan Teorema 2.1 diperoleh fungsi anak tangga $S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}$ terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = 2-d$ dengan $\alpha = \ln 2/\ln 3$ dan dimensi- γ dari grafik fungsinya adalah

$$d = \dim_\gamma \left\{ \left(x, S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}(x) \right) \mid x \in C_{1/3} \right\} = 2 - \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$



Gambar 3.2

Gambar 3.2 adalah gambar grafik fungsi singular Lebesgue-Cantor $\Gamma\left(\frac{\ln 2}{\ln 3} + 1\right) S_{C_{1/3}}^{\ln 2/\ln 3}$, dimana fungsi tersebut terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = \ln 2/\ln 3$ dan dimensi- γ dari grafik fungsinya adalah $d = 2 - \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

4. SIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa

1. jika d adalah dimensi- γ dari grafik fungsi untuk fungsi kontinu Holder f berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$, maka fungsi f terdiferensial- F^α dengan order $\alpha = 2-d$, $\alpha \in (0,1]$.
2. jika d adalah dimensi- γ dari grafik fungsi untuk fungsi kontinu Holder f berpangkat $(2-d)$, $1 \leq d < 2$, maka dimensi- γ himpunan perfek- α $F \subset R$ adalah $\alpha = 2-d$, $\alpha \in (0,1]$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Jones.F (1993) " *Lebesgue Integration on Euclidean Space* " Jones and Bartlett Publisher, Inc. Boston.
- [2] Li.X, Essex.C and Davidson.M (2003) " A Local Fractional Derivative " *Proceedings Of DETC 03. ASME 2003 Design Engineering Technical Conference, Chicago, Illinois, USA, September 2-6, 2003*, http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/asme_detc03_vib/48385.pdf.
- [3] Parvate.A and Gangal.A.D (2003) " *Calculus on Fractal Subset of Real Line I:Formulation*", http://arxiv.org/PS_cache/math-ph/pdf/0310/0310047v1.pdf.
- [4] Parvate.A and Gangal.A.D (2005) " Fractal differential Equations and Fractal-Time Dynamical System" *Pramana. Journal of Physics*.Vol. 64, no, 3. March 2005. pp. 389-4009, <http://www.ias.ac.in/pramana/v64/p389/fulltext.pdf>.
- [5] Ross.B, Samko.S.G and Love.E.R (1994/5) " Functions That Have No First Order Derivative Might Have Fractional Derivatives Of All Orders Less Than One" *Real Analysis Exchange Vol.20(2)*, pp. 140-147.

-
- [6] Spurrer.K.G (2004) ” *Continuous Nowhere Differentiable Functions* ” Senior Thesis, University of South, <http://people.virginia.edu/~kgs5c/seniorthesis.pdf>.
- [7] Supriyadi.W (2009) ” Hubungan antara Derivatif- F^α dari Fungsi $f : F \rightarrow R$ dengan Dimensi- γ dari Himpunan Fraktal F ” *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA UNY, 16 Mei 2009*.
- [8] Supriyadi.W (2009) ” *Hubungan Antara Derivatif F^α dengan Fungsi Kontinu Holder Berpangkat $\alpha \in (0,1)$* ” Simposium Analisis Matematika dan Aplikasinya, Jurusan Matematika F MIPA Universitas Brawijaya, 15 Agustus 2009.

KARAKTERISTIK MATRIKS INVERTIBEL DALAM ALJABAR MAX-PLUS

Siswanto
Jurusan Matematika FMIPA UNS
sis.mipauns@yahoo.co.id

ABSTRACT. The objective of this research is to show characteristic of invertible matrix (matrix that has invers) in algebra Max-Plus. Algebra Max-Plus is collection $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ completed by two binary operations maximum and plus be semifield idempotent commutative. A matrix $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ invertible if and only if A be a permuted diagonal matrix.

Keyword : Invertible matrix, algebra Max-Plus, a permuted diagonal matrix.

1. PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi paralel, dan lalu lintas. (Baccelli, *et. al*, [2]). Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi maksimum dan plus merupakan semifield idempoten yang komutatif. Dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen dalam aljabar Max-Plus, ditulis $\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$. Himpunan ini merupakan dioid yaitu semiring yang idempoten (Akian, *et. al*, [1], Sergeev [7]). Himpunan matriks berukuran $n \times m$ atas \mathfrak{R}_{\max} ditulis $\mathfrak{R}_{\max}^{n \times m}$. Khusus untuk $m = 1$, diperoleh himpunan vektor atas \mathfrak{R}_{\max} ditulis \mathfrak{R}_{\max}^n (Farlow [4]).

Dalam aljabar linear konvensional dikenal matriks yang elemen-elemennya merupakan bilangan real. Berkaitan dengan matriks ini, telah dibahas mengenai invers matriks (Hefferon [5], Meyer [6]). Suatu matriks berukuran $n \times n$ mempunyai invers jika nilai determinannya tidak sama dengan nol atau dikenal dengan matriks nonsingular.

Sejalan dengan yang telah dibahas oleh Hefferon [5] dan Meyer [6] yaitu tentang pengertian invers matriks dalam aljabar linear konvensional, Farlow [4] telah membahas dalam aljabar Max-Plus. Selanjutnya, dalam penelitian ini penulis akan mengkaji ulang tentang invers matriks yaitu bagaimana karakteristik matriks invertibel dalam aljabar Max-Plus dengan penyempurnaan bukti teorema maupun pembahasannya.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat dirumuskan permasalahan yaitu bagaimana karakteristik matriks invertibel dalam aljabar Max-Plus.

2. MATERI DAN METODE

Materi pokok sebagai dasar penelitian ini adalah karya ilmiah hasil penelitian para ahli baik yang dimuat didalam buku maupun jurnal. Oleh karena itu, metode penelitian yang digunakan adalah metode teoritik. Dengan metode tersebut hasil penelitian dan uraiannya dituangkan dalam bentuk pengetahuan baru atau pengertian dasar berupa konsep-konsep pengetahuan, lemma, dan hukum-hukum atau teorema.

3. LANDASAN TEORI

A. Aljabar Max Plus

Akian, *et. al*, [1] dan Sergeev [7] telah membahas beberapa pengertian berkaitan dengan aljabar Max-Plus, yang digunakan dalam penelitian ini yaitu :

Definisi 3.1

Monoid abelian K adalah suatu himpunan yang dilengkapi dengan operasi \oplus bersifat assosiatif dan komutatif serta mempunyai elemen nol yaitu $-\infty$ dinotasikan dengan ε .

Definisi 3.2

Semiring adalah monoid abelian yang dilengkapi dengan operasi \otimes bersifat asosiatif, distributif terhadap \oplus , mempunyai elemen identitas yaitu 0 dinotasikan dengan e dan ε adalah elemen penyerap yaitu $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$.

Definisi 3.3

Dioid adalah semiring yang idempoten, yaitu $a \oplus a = a, \forall a \in K$.

Definisi 3.4

Semifield adalah semiring dengan operasi \otimes invertibel dalam $K_* = K \setminus \varepsilon$.

Definisi 3.5

Semifield yang juga dioid disebut semifield yang idempoten.

Definisi 3.6

Struktur-struktur di atas dikatakan komutatif jika terhadap operasi \otimes bersifat komutatif.

Definisi 3.7

Didefinisikan himpunan $\mathfrak{R} \cup -\infty$ dengan \mathfrak{R} himpunan bilangan real yang dilengkapi dengan operasi $\oplus = \text{maks}$ dan $\otimes = +$, dinotasikan dengan \mathfrak{R}_{\max} .

Sifat 3.8

Struktur aljabar dari \mathfrak{R}_{\max} adalah semifield idempoten yang komutatif. Himpunan ini selanjutnya disebut aljabar Max-Plus.

B. Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Telah dibicarakan oleh Farlow [4] dan Cuninghame-Green, Butkovi'c [3] tentang matriks yang elemen-elemennya merupakan elemen dari aljabar Max-Plus, selanjutnya disebut matriks dalam aljabar Max-Plus. Adapun definisi matriks dalam aljabar Max-Plus serta operasi penjumlahan dan perkalian didalamnya sebagai berikut :

Definisi 3.9

Himpunan matriks berukuran $n \times m$ dengan elemen-elemen dalam \mathfrak{R}_{\max}

dinotasikan dengan $\mathfrak{R}_{\max}^{n \times m}$, yaitu $\mathfrak{R}_{\max}^{n \times m} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathfrak{R}_{\max} \right\}$.

Elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times m}$ dinyatakan oleh a_{ij} atau $[A]_{ij}$.

Definisi 3.10

1. Untuk matriks $A, B \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times m}$, didefinisikan $A \oplus B$ dengan

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max [a_{ij}, b_{ij}].$$

2. Untuk $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times k}$, $B \in \mathfrak{R}_{\max}^{k \times m}$, didefinisikan $A \otimes B$ dengan

$$[A \otimes B]_{il} = \bigoplus_{j=1}^k [a_{ij} \otimes b_{jl}] = \max_{j \in \{1, 2, 3, \dots\}} [a_{ij} + b_{jl}]$$

3. Tranpose dari matriks ditulis A^T dan didefinisikan seperti dalam aljabar konvensional $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$

4. Matriks identitas Max-Plus ditulis E_n , dengan $E_n \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ didefinisikan :

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

5. Untuk suatu matriks $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dan bilangan bulat positif k , pangkat k dari A ditulis $A^{\otimes k}$ didefinisikan oleh $A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k \text{ kali}}$. Untuk $k = 0$, $A^{\otimes 0} = E_n$.
6. Untuk sebarang matriks $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times m}$ dan $\alpha \in \mathfrak{R}_{\max}$, $\alpha \otimes A$ didefinisikan oleh $[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$.

Beberapa definisi berkaitan dengan vektor dan matriks dalam aljabar konvensional yang akan digunakan dalam pembicaraan selanjutnya, disampaikan sebagai berikut :

Definisi 3.11 (Hefferon [4])

Matriks permutasi adalah matriks persegi dimana setiap baris dan setiap kolomnya mempunyai tepat satu elemen sama dengan 1 dan semua elemen lainnya sama dengan 0.

Definisi 3.12 (Meyer [5])

Suatu n -permutasi adalah barisan bilangan yang terdiri dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, ..., n .

Selanjutnya, misalkan diberikan 3-permutasi yaitu $\phi_1 = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\phi_2 = \langle 1, 3, 2 \rangle$, $\phi_3 = \langle 2, 1, 3 \rangle$, $\phi_4 = \langle 2, 3, 1 \rangle$, $\phi_5 = \langle 3, 1, 2 \rangle$, dan $\phi_6 = \langle 3, 2, 1 \rangle$ maka tiga matriks permutasi

yang bersesuaian adalah $P_{\phi_2} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_3 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{\phi_4} = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan

$$P_{\phi_5} = \begin{pmatrix} t_3 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini dibahas mengenai karakteristik matriks invertibel dalam aljabar Max-Plus. Akan diselidiki apakah konsep mengenai invers matriks di dalam aljabar linear konvensional sama dengan konsep di dalam aljabar Max-Plus. Dalam aljabar linear

konvensional diketahui bahwa tidak semua matriks mempunyai invers. Suatu matriks mempunyai invers jika determinan matriks tersebut tidak sama dengan nol. Terdapat karakteristik khusus agar matriks dalam aljabar Max-Plus invertibel.

Berikut adalah definisi matriks invertibel, invers kanan dari suatu matriks dan matriks permutasi.

Definisi 4.1

Suatu matriks $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dikatakan invertibel jika ada matriks B sehingga $A \otimes B = E_n$ dan ditulis $A^{\otimes -1} = B$. Secara khusus B disebut invers kanan.

Definisi 4.2

Matriks permutasi adalah matriks dimana setiap baris dan setiap kolomnya mempunyai tepat satu elemen sama dengan e dan semua elemen lainnya sama dengan ε .

Jika $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ suatu permutasi, didefinisikan matriks permutasi

$$\text{Max-Plus } P_\sigma = [p_{ij}] \text{ dengan } p_{ij} = \begin{cases} e, & i = \sigma(j) \\ \varepsilon, & i \neq \sigma(j) \end{cases} \text{ sehingga kolom ke-}j \text{ dari } P_\sigma$$

mempunyai elemen e pada baris ke- $\sigma(j)$.

Jika suatu matriks dikalikan dari kiri oleh baris-baris suatu matriks P_σ maka baris ke- i dari matriks A muncul sebagai baris ke- $\sigma(i)$ dari matriks $P_\sigma \otimes A$. Selanjutnya diberikan definisi dari matriks diagonal.

Definisi 4.3

Misalkan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \in \mathfrak{R}_{\max}$, $\lambda_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\text{didefinisikan matriks diagonal, yaitu } D(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda_2 & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Mengenai karakteristik dari matriks invertibel dalam aljabar Max-Plus dapat diketahui dari Teorema 4.4 yaitu suatu matriks diagonal yang dipermutasikan.

Teorema 4.4

Matriks $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ mempunyai invers kanan jika dan hanya jika ada permutasi σ dan nilai $\lambda_i > \varepsilon$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ dengan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Bukti :

Misalkan bahwa ada matriks B sehingga $A \otimes B = E$. Berarti :

- (a). $\max_k (a_{ik} + b_{ki}) = e = 0$ untuk setiap i .
 (b). $\max_k (a_{ik} + b_{kj}) = \varepsilon = -\infty$ untuk setiap $i \neq j$.

Menurut (a), untuk setiap i ada suatu k sehingga $a_{ik} + b_{ki} = e = 0$. Oleh karena itu, terdapat fungsi $k = \theta(i)$ dengan $b_{\theta(i)i} > \varepsilon$.

Menurut (b), diperoleh $a_{i\theta(j)} = \varepsilon$ untuk semua $i \neq j$ (c).

Karena $a_{i\theta(i)} > \varepsilon = a_{i\theta(j)}$ untuk $i \neq j$, berarti θ suatu injeksi dan oleh karena itu merupakan suatu permutasi. Menurut (c), $a_{i\theta(i)}$ merupakan elemen dari kolom ke $\theta(i)$

yang tidak sama dengan ε . Sekarang misalkan $\tilde{A} = P_\theta \otimes A$, baris ke $\theta(i)$ dari \tilde{A} adalah baris ke- i dari A yang mempunyai elemen lebih besar dari ε dalam kolom ke $\theta(i)$. Oleh

karena itu, diperoleh bahwa semua elemen diagonal dari \tilde{A} lebih besar dari ε . Juga diperoleh, bahwa A hanya mempunyai satu elemen bukan ε dalam setiap kolom. Ini

juga benar untuk \tilde{A} . Oleh karena itu, $P_\theta \otimes A = \tilde{A} = D(\lambda_i)$ dengan $\lambda_i = a_{\theta^{-1}(i)i} > \varepsilon$.

Misalkan $\sigma = \theta^{-1}$, karena $P_\sigma \otimes P_\theta = E_n$, bahwa $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$. Sebaliknya,

$A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ dengan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \in \mathfrak{R}_{\max}$ dan $\lambda_i > \varepsilon$. Jika ini benar, dimisalkan $B = D(-\lambda) \otimes P_{\sigma^{-1}}$ dengan $-\lambda = -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$. Catat bahwa,

$-\lambda_i = \lambda_i^{\otimes -1}$. Oleh karena itu,

$A \otimes B = P_\sigma \otimes D(\lambda) \otimes D(-\lambda) \otimes P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma \otimes E_n \otimes P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma \otimes P_{\sigma^{-1}} = E_n$. Oleh karena

itu, B invers kanan dari matriks A .

Selanjutnya dalam Teorema 4.5, dapat ditunjukkan bahwa invers kanan juga merupakan invers kiri.

Teorema 4.5

Untuk $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ jika $A \otimes B = E_n$ maka $B \otimes A = E_n$ dan B ditentukan secara tunggal oleh A .

Bukti :

Menurut teorema 4.4, diketahui bahwa $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ untuk suatu $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_i > \varepsilon$ dan permutasi σ . Dapat diselidiki bahwa $\bar{B} = D(-\lambda) \otimes P_{\sigma^{-1}}$ dengan $-\lambda = -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$ dan permutasi σ^{-1} , merupakan invers kiri dari matriks A , yaitu $\bar{B} \otimes A = D(-\lambda) \otimes P_{\sigma^{-1}} \otimes P_\sigma \otimes D(\lambda) = D(-\lambda) \otimes E_n \otimes D(\lambda) = D(-\lambda) \otimes D(\lambda) = E_n$.

Selanjutnya, jika $A \otimes B = E_n$ maka

$\bar{B} = \bar{B} \otimes E_n = \bar{B} \otimes (A \otimes B) = (\bar{B} \otimes A) \otimes B = E_n \otimes B = B$. Tampak bahwa B ditentukan secara tunggal oleh A dan merupakan invers kiri.

Dalam Lemma dan Teorema berikut dibahas sifat tentang perkalian dua matriks invertibel dan matriks invertibel kaitannya dengan suatu pemetaan linear.

Lemma 4.6

Jika $A, B \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ invertibel maka $A \otimes B$ invertibel.

Bukti :

Misalkan matriks $A = P_{\sigma_a} \otimes D(\lambda^a)$ dan $B = D(\lambda^b) \otimes P_{\sigma_b}$ untuk suatu $\lambda^a = \lambda_1^a, \lambda_2^a, \dots, \lambda_n^a$, $\lambda^b = \lambda_1^b, \lambda_2^b, \dots, \lambda_n^b$ dengan $\lambda_i^a > \varepsilon$, dan permutasi σ_a, σ_b . Oleh karena itu,

$$A \otimes B = P_{\sigma_a} \otimes D(\lambda^a) \otimes D(\lambda^b) \otimes P_{\sigma_b} = P_{\sigma_a} \otimes D(\lambda^a \otimes \lambda^b) \otimes P_{\sigma_b},$$

dengan $\lambda^a \otimes \lambda^b = \lambda_1^a \otimes \lambda_1^b, \lambda_2^a \otimes \lambda_2^b, \dots, \lambda_n^a \otimes \lambda_n^b$.

Tampak bahwa, $A \otimes B$ merupakan matriks diagonal yang dipermutasikan. Jadi $A \otimes B$ invertibel.

Teorema 4.7

Misalkan $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $L_A : \mathfrak{R}_{\max}^n \rightarrow \mathfrak{R}_{\max}^n$ pemetaan linear $L_A(x) = A \otimes x$. Pernyataan berikut ekuivalen.

- i. $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ untuk suatu permutasi σ dan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_i > \varepsilon$.
- ii. L_A surjektif.
- iii. A mempunyai invers kanan : $A \otimes B = E_n$.
- iv. A mempunyai invers kiri : $B \otimes A = E_n$.
- v. L_A injektif.

Bukti :

- a. (i \Rightarrow ii)

Diketahui $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ untuk suatu permutasi σ dan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_i > \varepsilon$. Berarti, A mempunyai invers kanan yang sekaligus merupakan invers kiri yaitu $\bar{B} = D(-\lambda) \otimes P_{\sigma^{-1}}$ dengan $-\lambda = -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$ dan permutasi σ^{-1} . Ambil sebarang $y \in \mathfrak{R}_{\max}^n$, selalu terdapat $x \in \mathfrak{R}_{\max}^n$ dengan $x = \bar{B} \otimes y$ sehingga $y = E_n \otimes y = (A \otimes \bar{B}) \otimes y = A \otimes (\bar{B} \otimes y) = A \otimes x = L_A(x)$.

- b. (ii \Rightarrow iii)

Diketahui L_A surjektif.

Berarti, untuk setiap $y \in \mathfrak{R}_{\max}^n$ selalu terdapat $x \in \mathfrak{R}_{\max}^n$ sehingga $y = L_A(x) = A \otimes x$.

Ambil $y_1 = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, ..., $y_n = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n \end{pmatrix}$. Karena L_A surjektif maka selalu terdapat x_i, i

$= 1, 2, \dots, n$ sehingga $y_i = L_A(x_i) = A \otimes x_i$. Dibentuk matriks $B = x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n$, sehingga $A \otimes B = E_n$. Terbukti A mempunyai invers kanan.

- c. (iii \Rightarrow iv)

Menurut Teorema 4.5.

- d. (iv \Rightarrow v)

Diketahui A mempunyai invers kiri yaitu $B \otimes A = E_n$, akan dibuktikan L_A injektif.

Misalkan $L_A(x_1) \neq L_A(x_2)$, berarti

$A \otimes x_1 \neq A \otimes x_2 \Leftrightarrow B \otimes A \otimes x_1 \neq B \otimes A \otimes x_2 \Leftrightarrow E_n \otimes x_1 \neq E_n \otimes x_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$. Terbukti L_A injektif.

e. (v \Rightarrow i)

Diketahui L_A injektif, akan dibuktikan $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ untuk suatu permutasi σ dan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan $\lambda_i > \varepsilon$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk setiap i didefinisikan himpunan,

$$F_i = \{j \mid a_{ji} > \varepsilon\} \text{ dan } G_i = \{j \mid a_{jk} > \varepsilon \text{ untuk suatu } k \neq i\}.$$

Klaim bahwa $F_i \not\subset G_i$. Andaikan $F_i \subset G_i$, akan diperlihatkan ini kontradiksi dengan

kenyataan bahwa L_A injektif. Definisikan $x = x_k$ dengan $x_k = \begin{cases} \varepsilon, & k \neq i \\ \lambda_i, & k = i \end{cases}$. Misalkan

$b = A \otimes x = \bigoplus_{k \neq i} a_{*k}$ dimana a_{*k} menyatakan kolom ke k dari A . Sekarang misalkan

$j \in F_i$, ini berarti bahwa ada $k \neq i$ dengan $a_{jk} > \varepsilon$. Oleh karena itu, kita mempunyai $b_j \geq a_{jk} > \varepsilon$. Karena $a_{ji} > \varepsilon$ maka diperoleh $\beta_j > \varepsilon$ sehingga $\beta_j \otimes a_{ji} \leq b_j$. Jika $j \notin F_i$ maka $a_{ji} = \varepsilon$. Sekarang misalkan $\beta = \min_{j \in F_i} \beta_j$. Berarti $\beta > 0$ dan $\beta \otimes a_{ji} \leq b_j$

untuk semua j .

Ini dikatakan bahwa, $A \otimes [x \oplus \beta \otimes e_i] = [A \otimes x] \oplus [\beta \otimes A \otimes e_i] = b \oplus \beta \otimes a_{*i} = b$.

Selanjutnya, $\tilde{x} = x \oplus \beta \otimes e_i$, $L_A(\tilde{x}) = L_A(x)$. Tetapi, $x = \varepsilon < \tilde{x} = \beta$. Kontradiksi dengan L_A injektif. Berarti, klaim sudah terbukti.

Karena $F_i \not\subset G_i$ berarti bahwa, untuk setiap i ada suatu indeks $j = \sigma(i)$ dengan sifat bahwa $a_{ji} > \varepsilon$ tetapi $a_{jk} = \varepsilon$ untuk semua $k \neq i$. Dengan kata lain, a_{ji} satu-satunya elemen yang bukan ε dalam baris $j = \sigma(i)$. Tetapi jika $j = \sigma(i')$ maka $i = i'$, berarti σ injektif. Akibatnya, σ suatu permutasi. Oleh karena itu, setiap baris j ada kolom dengan tunggal i ($j = \sigma(i)$) sehingga a_{ji} elemen tunggal yang tidak sama dengan ε . Untuk setiap kolom i dan sebarang baris k dengan $k \neq \sigma(i)$ kita tahu bahwa $k = \sigma(i')$ untuk suatu $i' \neq i$. Ini berarti a_{ki} elemen yang tidak tunggal dan tidak sama dengan ε pada baris ke k , sehingga $a_{ji} = \varepsilon$. Oleh karena itu, $a_{\sigma(i)i}$ adalah elemen yang tidak sama

dengan ε dalam kolom i . Oleh karena itu, A matriks diagonal yang dipermutasikan, $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$, dengan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i = a_{\sigma(i)} > \varepsilon$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$.

5. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

1. Matriks $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ mempunyai invers kanan jika dan hanya jika ada permutasi σ dan nilai $\lambda_i > \varepsilon$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga $A = P_\sigma \otimes D(\lambda)$ dengan $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Selanjutnya, jika B invers kanan, yaitu $A \otimes B = E_n$ maka $B = D(-\lambda) \otimes P_{\sigma^{-1}}$ dengan $-\lambda = -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$.
2. Untuk $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ jika $A \otimes B = E_n$ maka $B \otimes A = E_n$ dan B ditentukan secara tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. P., and Viot, M. Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1994. Zurich, Switzerland.
- [2] Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. *Synchronization and Linearity*, New York : Joh Wiley & Sons. 2001.
- [3] Cuninghame-Green, R.A. Butkovi'c, P. Bases in Max-Algebra. *Linear Algebra and its Applications* (2004). 389. 107–120
- [4] Farlow, K. G. *Max-Plus Algebra*, Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics. 2009.
- [5] Hefferon, J. *Linear Algebra*, Vermont USA 05439 : Mathematics, Saint Michael's College Colchester. 2001.
- [6] Meyer, C. D. *Matriks Analysis and applied linear Algebra*, New York : The Mac millan Publishing Company. 2000.
- [7] Sergeev, S. Max-Plus Definite Matrix Closures and Their Eigenspaces. *arXiv:math.MG/0506177 v2*. 2006.

OPERASI PADA GRUP KURVA ELIPTIK $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ MENGUNAKAN RUANG PROYEKSI

Santoso Budiwiyo
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta

ABSTRACT. Fixed adding operation which is defined geometrically for the set of points of the Elliptic Curve and point at infinity satisfy the group Axiom. The projectif space $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ is the set of all equivalent class was formed since \sim equivalent relation of set $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. By mean of a fixed transformation can be obtained formulas for compute adding elemens of the elliptic curve group that do not involve inverse operation such that computation to be come more Efficient. The purpose of this paper is to presents how does to compute operation of elements of the elliptic curve in the projectif space.

Key word : *Elliptic curve, group, equivalent relation, projectif space, point at infinity.*

1. PENDAHULUAN

Algoritma Kriptografi Kurva Eliptik (ECC) yang menarik perhatian bidang industri maupun akademik dikenalkan oleh Miller dan Koblitz pada tahun 1985 [2]. Alasan yang mendasari penggunaan Kurva eliptic atas Lapangan hingga (*Finite field*) dalam kriptografi secara teoritis adalah karena kemudahannya mendapatkan atau memilih Grup Abelian hingga [5]. Dari segi keamanan Kriptografi Kurva Eliptik mempunyai kemampuan untuk mencapai keamanan pada level yang sama dengan sistem Kriptografi yang berbasis pada faktorisasi intejer dengan panjang kunci yang lebih pendek sehingga menghasilkan proses encripsi dan decripsi yang lebih cepat[3]. Ukuran kunci 160-bit pada kriptografi kurva eliptik dapat mempunyai tingkat keamanan yang sama dengan 1024-bit di dalam kriptografi RSA [1].

Artikel ini adalah study literatur yang berkaitan dengan Geometri, kurva eliptik , Grup, lapangan \mathbb{Z}_p dan Ruang proyeksi dan membahas cara menjumlahkan dua unsur grup kurva eliptik menggunakan ruang proyeksi.

2. GRUP KURVA ELIPTIK

Kurva Eliptik dapat digunakan sebagai alat untuk menghasilkan himpunan unsur-unsur yang dapat dioperasikan berdasarkan aturan Grup (*Group Law*), sehingga memungkinkan untuk implementasi pada beberapa skema Kriptografi.

Operasi pada kurva eliptik didefinisikan secara geometrik pada bidang \mathbb{R}^2 dan selanjutnya dihitung atas lapangan \mathbb{Z}_p .

2.1 Kurva Eliptik $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ atas lapangan \mathbb{R}

Kurva eliptik atas lapangan F secara umum didefinisikan sebagai berikut.

Definisi : Kurva eliptik E atas lapangan F ditentukan oleh persamaan,

$$E \equiv y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + b$$

dengan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in F$ dan memenuhi ,

$$-d_2^2d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2d_4d_6 \neq 0$$

$$d_2 = a_1^2 + 4a_2$$

$$d_4 = 2a_4 + a_1a_3$$

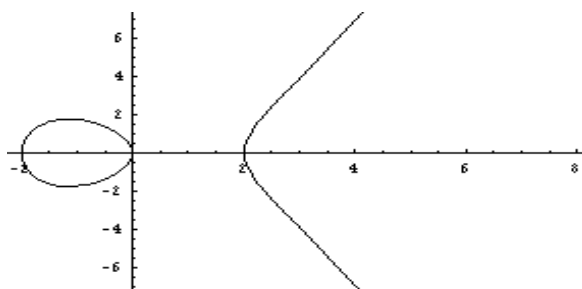
$$d_6 = a_3^2 + 4a_6$$

$$d_8 = a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2$$

Mengikuti definisi di atas maka dapat dibentuk kurva eliptik $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ atas lapangan bilangan real \mathbb{R} sebagai himpunan titik-titik di bidang \mathbb{R}^2 , yaitu $E(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x^3 + ax + b, -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{O}\}$ dengan \mathbf{O} adalah titik khusus yang dinamakan *point at infinity* (titik di tak hingga).

Sebagai contoh jika dipilih $a = -4$ dan $b = 0$ maka $-16(4(-2)^3 + 27(0)^2) \neq 0$ dipenuhi, sehingga diperoleh kurva eliptik $E(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x^3 - 4x\} \cup \{\mathbf{O}\}$.

Secara geometri grafik kurva eliptik $E \equiv y^2 = x^3 - 4x$ atas lapangan \mathbb{R} diperlihatkan pada Gambar 2.1.

Gambar 2.1. Kurva eliptik $E \equiv y^2 = x^3 - 4x$.

Operasi penjumlahan tertentu yang didefinisikan secara geometri pada $E(\mathbb{R})$ memenuhi aksioma grup.

2.2 Kurva Eliptik atas lapangan \mathbb{Z}_p .

Mengikuti definisi 2.1 dapat dibentuk himpunan $E(\mathbb{Z}_p)$ sebagai himpunan solusi persamaan $y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}$ bersama dengan \mathbf{O} (*point at infinity*), yaitu himpunan

$$E(\mathbb{Z}_p) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \mid y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}, a,b \in \mathbb{Z}_p, -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0\} \cup \{\mathbf{O}\}.$$

Operasi penjumlahan dapat didefinisikan pada $E(\mathbb{Z}_p)$ sehingga $(E(\mathbb{Z}_p), +)$ merupakan grup abelian. Kriptografi yang diimplementasikan pada grup kurva eliptik atas suatu lapangan dinamakan Kriptografi kurva eliptik (*Elliptic Curve Cryptography*).

Operasi penjumlahan pada $E(\mathbb{Z}_p)$ untuk bilangan prima $p > 3$ didefinisikan sebagai berikut:

1. $P + \mathbf{O} = \mathbf{O} + P = P$ untuk semua $P \in E(\mathbb{Z}_p)$
2. Jika $P = (x, y) \in E(\mathbb{Z}_p)$ maka $P + (-P) = \mathbf{O}$. ($-P = (x, -y) \in E(\mathbb{Z}_p)$ disebut negative P).
3. Jika $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{Z}_p)$ dan $P \neq \pm Q$, maka $P + Q = (x_3, y_3)$ dengan

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \quad \text{dan} \quad \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4. Jika $P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{Z}_p)$ dengan $P \neq -P$, maka $P + P = 2P = (x_3, y_3)$ dengan

$$x_3 = \lambda^2 - 2x_1, \quad y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \quad \text{dan} \quad \lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}.$$

Operasi 4. dinamakan penggandaan titik (*point doubling*)[3].

Contoh : Kurva eliptik $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ atas lapangan \mathbb{Z}_{29} yaitu $E(\mathbb{Z}_{29})$ untuk $a = 4$ dan $b = 20$, mempunyai unsur-unsur :

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{O} & (2,6) & (4,19) & (8,10) & (13,23) & (16,2) & (19,16) & (27,2) \\ (0,7) & (2,23) & (5,7) & (8,19) & (14,6) & (16,27) & (20,3) & (27,27) \\ (0,22) & (3,1) & (5,22) & (10,4) & (14,23) & (17,10) & (20,26) & \\ (1,5) & (3,28) & (6,12) & (10,25) & (15,2) & (17,19) & (24,7) & \\ (1,24) & (4,10) & (6,17) & (13,6) & (15,27) & (19,13) & (24,22) & \end{array}$$

Contoh penjumlahan pada kurva eliptik di atas $(5,22)+(16,27) = (13,6)$ dan $2(1,5) = (4,19)$

3. KURVA ELIPTIK PADA RUANG PROYEKSI

Relasi r pada $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ yang didefinisikan oleh $(x_1, y_1, z_1) r (x_2, y_2, z_2)$ jika ada skalar $\alpha \neq 0$ yang memenuhi $x_1 = \alpha^c x_2$, $y_1 = \alpha^d y_2$ dan $z_1 = \alpha z_2$ adalah Relasi ekuivalensi.[2] Selanjutnya himpunan dari semua kelas-kelas ekuivalensi tersebut beserta satu kelas khusus $P(\mathbb{R}^3)^\circ$ yang merupakan garis di takhingga (titik-titik yang proyeksinya di tak hingga) dinamakan ruang proyeksi dan ditulis dengan notasi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$.

Dengan memilih $c = 1$ dan $d = 1$ maka diperoleh ruang proyeksi baku $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) = \{(X : Y : Z) / Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3, a, b \in \mathbb{R}\} \cup P(\mathbb{R}^3)^\circ$ untuk kurva eliptik $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ dan korespondensi 1-1 antara himpunan $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ dan himpunan $E(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x^3 + ax + b, -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{O}\}$. Dalam hal ini terjadi korespondensi antara $P(\mathbb{R}^3)^\circ = (0 : 1 : 0)$ dengan *point at infinity* \mathbf{O} , $(X : Y : Z)$ dengan $(X/Z, Y/Z)$ dan negatif untuk $(X : Y : Z)$ adalah $(X : -Y : Z)$.

Dengan cara yang serupa jika dipilih $c = 2$ dan $d = 3$ diperoleh ruang proyeksi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) = \{(X : Y : Z) / Y^2 = X^3 + aXZ^4 + bZ^6, a, b \in \mathbb{R}\} \cup P(\mathbb{R}^3)^\circ$ yang koordinatnya dinamakan koordinat proyeksi Jacobian (*Jacobian projective coordinates*)[3]. Dalam hal ini terjadi korespondensi antara $P(\mathbb{R}^3)^\circ = (1 : 1 : 0)$ dengan \mathbf{O} , $(X : Y : Z)$ dengan $(X/Z^2, Y/Z^3)$ dan negatif untuk $(X : Y : Z)$ adalah $(X : -Y : Z)$.

Aturan menghitung koordinat proyeksi Jacobian untuk penggandaan satu titik (*point doubling*) dan penjumlahan dua titik berbeda dan yang bukan dengan negatifnya di bidang affin $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ menggunakan ruang proyeksi $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^3)$ dirumuskan sebagai berikut.

Penggandaan titik (*point doubling*)

Jika $P = (X_1, Y_1) \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_p^2)$ dengan $P \neq -P$ maka terdapat $P = (X_1/Z_1^2 : Y_1/Z_1^3 : 1)$ di dalam $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^3)$ sehingga diperoleh

$$X'_3 = \left(\frac{3\frac{X_1^2}{Z_1^4} + a}{2\frac{Y_1}{Z_1^3}} \right)^2 - 2\frac{X_1}{Z_1^2} = \frac{(3X_1^2 + aZ_1^4)^2 - 8X_1Y_1^2}{4Y_1^2Z_1^2}$$

$$Y'_3 = \left(\frac{3\frac{X_1^2}{Z_1^4} + a}{2\frac{Y_1}{Z_1^3}} \right) \left(\frac{X_1}{Z_1^2} - X'_3 \right) - \frac{Y_1}{Z_1^3} = \frac{3X_1^2 + aZ_1^4}{2Y_1Z_1} \left(\frac{X_1}{Z_1^2} - X'_3 \right) - \frac{Y_1}{Z_1^3}$$

Untuk mengeliminasi penyebut pada ruas kanan dari kedua persamaan di atas dilakukan dengan cara menetapkan $X_3 = X'_3 Z_3^2$ dan $Y_3 = Y'_3 Z_3^3$ dengan $Z_3 = 2Y_1 Z_1$, dan $2P = (X_3 : Y_3 : Z_3)$ dihitung menggunakan aturan:

$$\begin{aligned} X_3 &= (3X_1^2 + aZ_1^4)^2 - 8X_1Y_1^2 \\ Y_3 &= (3X_1^2 + aZ_1^4)(4X_1Y_1^2 - X_3) - 8Y_1^4 \\ Z_3 &= 2Y_1Z_1 \end{aligned}$$

Dengan menyimpan elemen perantara X_3, Y_3, Z_3 penggandaan satu titik dapat dihitung dengan menggunakan enam operasi perpangkatan dan empat operasi perkalian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A &\leftarrow Y_1^2, \quad B \leftarrow 4X_1A, \quad C \leftarrow 8A^2, \quad D \leftarrow 3X_1^2 + aZ_1^4, \\ X_3 &= D^2 - 2B, \quad Y_3 \leftarrow D.(B - X_3) - C, \quad Z_3 \leftarrow 2Y_1Z_1 \end{aligned}$$

Penjumlahan dua titik menggunakan koordinat campuran Jacobian-Affin

Jika $P = (X_1 : Y_1 : Z_1) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^3)$, $Z_1 \neq 0$ dan $Q = (X_2 : Y_2 : 1)$ dengan $P \neq \pm Q$. Karena

$P = (X_1/Z_1^2 : Y_1/Z_1^3 : 1)$, maka bentuk penjumlahan $P + Q = (X'_3 : Y'_3 : 1)$ dalam $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^3)$ dapat

dihitung dengan menggunakan koordinat campuran dan diperoleh:

$$X'_3 = \left(\frac{Y_2 - \frac{Y_1}{Z_1^3}}{X_2 - \frac{X_1}{Z_1^2}} \right)^2 - \frac{X_1}{Z_1^2} - X_2 = \left(\frac{Y_2 Z_1^3 - Y_1}{(X_2 Z_1^2 - X_1) Z_1} \right)^2 - \frac{X_1}{Z_1^2} - X_2$$

dan

$$Y'_3 = \left(\frac{Y_2 - \frac{Y_1}{Z_1^3}}{X_2 - \frac{X_1}{Z_1^2}} \right) \left(\frac{X_1}{Z_1^2} - X'_3 \right) - \frac{Y_1}{Z_1^3} = \left(\frac{Y_2 Z_1^3 - Y_1}{(X_2 Z_1^2 - X_1) Z_1} \right)^2 - \frac{X_1}{Z_1^2} - X_2$$

Untuk mengeliminasi penyebut pada ruas kanan dari dua persamaan untuk X'_3 dan Y'_3 di atas ditetapkan $X_3 = X'_3 \cdot Z_3^2$ dan $Y_3 = Y'_3 \cdot Z_3^3$ dengan $Z_3 = (X_2 Z_1^2 - X_1) Z_1$, dan diperoleh perhitungan untuk menghitung $P + Q = (X_3 : Y_3 : Z_3)$ dalam koordinat jacobian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X_3 &= (Y_2 Z_1^3 - Y_1)^2 - (X_2 Z_1^2 - X_1)^2 (X_1 + X_2 Z_1^2) \\ Y_3 &= (Y_2 Z_1^3 - Y_1) \left(X_1 (X_2 Z_1^2 - X_1)^2 - X_3 \right) - Y_1 (X_2 Z_1^2)^3 \\ Z_3 &= (X_2 Z_1^2 - X_1) Z_1 \end{aligned}$$

Dengan menyimpan beberapa elemen perantara, X_3 , Y_3 , Z_3 dapat dihitung dengan menggunakan tiga operasi perpangkatan dan delapan operasi perkalian sebagai berikut:

$$A \leftarrow Z_1^2, B \leftarrow Z_1 \cdot A, C \leftarrow X_2 \cdot A, D \leftarrow Y_2 \cdot B, E = C - X_1, F = D - Y_1, G = E^2,$$

$$H = G \cdot E, I = X_1 \cdot G, X_3 \leftarrow F^2 - (H + 2I), Y_3 \leftarrow F \cdot (I - X_3) - Y_1 \cdot H, Z_3 \leftarrow Z_1 \cdot E$$

Sebagai contoh untuk $a = -3$ maka bentuk $3X_1^2 + aZ_1^4$ pada dua penjumlahan di atas dihitung hanya dengan satu operasi perpangkatan dan satu operasi perkalian karena $3X_1^2 - 3Z_1^4 = 3(X_1 - Z_1^2) \cdot (X_1 + Z_1^2)$.

Melihat fakta bahwa $2Y_1$ muncul beberapa kali dan dengan menukar kelipatan 4 dengan dengan kelipatan 8 dengan pembagi 2 maka *point Doubling* dapat dipercepat dengan cara penyimpanan sebagai berikut.

$$A \leftarrow 3(X_1 - Z_1^2) \cdot (X_1 + Z_1^2), B \leftarrow 2Y_1, Z_3 \leftarrow B \cdot Z_1, C \leftarrow B^2,$$

$$D \leftarrow C \cdot X_1, X_3 \leftarrow A^2 - 2D, Y_3 \leftarrow (D - X_3) \cdot A - C^2 / 2$$

Prosedur *point Doubling* dan *point Addition* untuk kasus $a = -3$ diberikan dalam algoritma 3.1 dan 3.2.

Algoritma 3.1 *Point doubling* ($y^2 = x^3 - 3x + b$, koordinat jacobian)

Input: $P = (X_1 : Y_1 : Z_1)$ dalam koordinat jacobian

Output: $2P = (X_3 : Y_3 : Z_3)$ dalam koordinat jacobian

1. Jika $P = \mathbf{O}$ selesai ($2P = \mathbf{O}$)
2. $T_1 \leftarrow Z_1^2 \cdot \{T_1 \leftarrow Z_1^2\}$
3. $T_2 \leftarrow X_1 - T_1 \cdot \{T_2 \leftarrow X_1 - Z_1^2\}$
4. $T_1 \leftarrow X_1 + T_1 \cdot \{T_1 \leftarrow X_1 + Z_1^2\}$
5. $T_2 \leftarrow T_2 \cdot T_1 \cdot \{T_2 \leftarrow X_1^2 - Z_1^4\}$
6. $T_2 \leftarrow 3T_2 \cdot \{T_2 \leftarrow A = 3(X_1 - Z_1^2)(X_1 + Z_1^2)\}$
7. $Y_3 \leftarrow 2Y_1 \cdot \{Y_3 \leftarrow B = 2Y_1\}$
8. $Z_3 \leftarrow Y_3 \cdot Z_1 \cdot \{Z_3 \leftarrow BZ_1\}$

9. $Y_3 \leftarrow Y_3^2 \cdot \{Y_3 \leftarrow C = B^2\}$
10. $T_3 \leftarrow Y_3 \cdot X_1 \cdot \{T_3 \leftarrow D = CX_1\}$
11. $Y_3 \leftarrow Y_3^2 \cdot \{Y_3 \leftarrow C^2\}$
12. $Y_3 \leftarrow Y_3/2 \cdot \{Y_3 \leftarrow C^2/2\}$
13. $X_3 \leftarrow T_3^2 \cdot \{X_3 \leftarrow A^2\}$
14. $T_1 \leftarrow 2T_3 \cdot \{T_1 \leftarrow 2D\}$
15. $X_3 \leftarrow X_3 - T_1 \cdot \{X_3 \leftarrow A^2 - 2D\}$
16. $T_1 \leftarrow T_3 - X_3 \cdot \{T_1 \leftarrow D - X_3\}$
17. $T_1 \leftarrow T_1 \cdot T_2 \cdot \{T_1 \leftarrow (D - X_3)A\}$
18. $Y_3 \leftarrow T_1 - Y_3 \cdot \{T_1 \leftarrow (D - X_3)A - C^2/2\}$
19. Selesai ($2P = (X_3 : Y_3 : Z_3)$)

Algoritma 3.2 *Point addition* ($y^2 = x^3 - 3x + b$, koordinat jacobian-affin)

Input: $P = (X_1 : Y_1 : Z_1)$ dalam koordinat jacobian, $Q = (x_2, y_2)$ dalam koordinat affin

Output: $P + Q = (X_3 : Y_3 : Z_3)$ dalam koordinat jacobian

1. Jika $Q = \mathbf{O}$ selesai ($(X_3 : Y_3 : Z_3) = P$)
2. Jika $P = \mathbf{O}$ selesai ($(X_3 : Y_3 : Z_3) = Q$)
3. $T_1 \leftarrow Z_1^2 \cdot \{T_1 \leftarrow A = Z_1^2\}$
4. $T_2 \leftarrow T_1 \cdot Z_1 \cdot \{T_2 \leftarrow B = Z_1 A\}$
5. $T_1 \leftarrow T_1 \cdot x_2 \cdot \{T_1 \leftarrow C = X_2 A\}$
6. $T_2 \leftarrow T_2 \cdot y_2 \cdot \{T_2 \leftarrow D = Y_2 B\}$
7. $T_1 \leftarrow T_1 - X_1 \cdot \{T_1 \leftarrow E = C - X_1\}$
8. $T_2 \leftarrow T_2 - Y_1 \cdot \{T_2 \leftarrow F = D - Y_1\}$
9. Jika $T_1 = 0$ maka

9.1 Jika $T_2 = 0$ maka gunakan Algoritma 3.1 untuk menghitung

$$(X_3 : Y_3 : Z_3) = 2(X_2 : Y_2 : 1) \text{ Selesai } ((X_3 : Y_3 : Z_3) = 2P)$$

9.2 selesai $((X_3 : Y_3 : Z_3) = \mathbf{O})$.

10. Jika tidak maka lakukan :

11. $Z_3 \leftarrow Z_1 \cdot T_1$ $\{Z_3 \leftarrow Z_1 E\}$
12. $T_3 \leftarrow T_1^2$ $\{T_3 \leftarrow G = E^2\}$
13. $T_3 \leftarrow Y_3 \cdot X_1$ $\{T_3 \leftarrow D = CX_1\}$
14. $Y_3 \leftarrow Y_3^2$ $\{Y_3 \leftarrow C^2\}$
15. $Y_3 \leftarrow Y_3/2$ $\{Y_3 \leftarrow C^2/2\}$
16. $X_3 \leftarrow T_3^2$ $\{X_3 \leftarrow A^2\}$
17. $T_1 \leftarrow 2T_3$ $\{T_1 \leftarrow 2D\}$
18. $X_3 \leftarrow X_3 - T_1$ $\{X_3 \leftarrow A^2 - 2D\}$
19. $T_1 \leftarrow T_3 - X_3$ $\{T_1 \leftarrow D - X_3\}$
20. $T_1 \leftarrow T_1 \cdot T_2$ $\{T_1 \leftarrow (D - X_3)A\}$
21. $Y_3 \leftarrow T_1 - Y_3$ $\{T_1 \leftarrow (D - X_3)A - C^2/2\}$
22. Selesai $(P + Q = (X_3 : Y_3 : Z_3))$

4. KESIMPULAN

Grup kurva eliptik $E \equiv y^2 = x^3 + ax + b$ atas lapangan \mathbb{Z}_p secara geometri adalah himpunan titik-titik pada kurva eliptik beserta satu titik di tak hingga dan operasi pada grup kurva eliptik ini untuk bilangan prima $p > 3$ dapat dilakukan melalui proyeksinya pada ruang proyeksi $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p^3)$.

Operasi grup kurva eliptik yang dilakukan melalui ruang proyeksi dapat meniadakan operasi invers sehingga proses perhitungan lebih efisien.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anoop MS, *Elliptic Curve Cryptography, An implementation Tutorial*, Tata Elxsi, India, Januari 5, 2007.

- [2] Enge, Andreas, 1999, *Elliptic Curve And their Applications To Cryptography, An Introduction*, Kluwer Academic Publishers, London
- [3] Harkerson Darel, Menezes A.J., Vanstone S., 2004, *Guide to Elliptic Curve Cryptography*, Springer-Verlag, New York
- [4] Leung, K.T., 1972, *Linear Algebra And Geometry*, Hongkong University Press, Knowloon.
- [5] Koblitz, Neal, 1987, *A Course in Number Theory and Cryptography*, Second Edition, Springer-Verlag, New York

PERMULAAN GEOMETRI HIPERBOLIK

Agung Prabowo

Program Studi Matematika - Fakultas Sains dan Teknik

Universitas Jenderal Soedirman – Purwokerto

e-mail: agung_nghp@yahoo.com

ABSTRACT. This paper was based on literature review with a background research on the tracing of the history of the birth of hyperbolic geometry. The research was done to address the problems surrounding the birth of hyperbolic geometry and its implications for the development of mathematics and other sciences. Tracing the history is tracked starting from the emergence of discourses about the Euclid's fifth postulate (the parallel postulate) at about second century BC until to the receipt of the new geometry systems that reject the Euclid's parallel postulate. This acceptance raises results very different from what had been already known in Euclidean geometry. The appearance of the hyperbolic geometry also provides the philosophical implications of developments in mathematics and science it supports.

Keywords: hyperbolic geometry, parallel postulates, history

1. PENDAHULUAN

Mungkinkah jumlah sudut-sudut pada sebarang segitiga kurang dari 180^0 ? Apakah jumlah sudut-sudut pada sebarang segitiga harus selalu 180^0 ? Jawaban atas kedua pertanyaan tersebut akan merujuk pada terdapatnya sistem geometri yang satu sama lain mempunyai pandangan (anggapan/asumsi) yang saling berbeda mengenai postulat kesejajaran. Berdasarkan pada postulat kesejajaran Euclid, maka jumlah sudut-sudut pada sebarang segitiga harus selalu (tepat) 180^0 , tidak lebih dan tidak kurang. Diskursus yang terjadi mengenai postulat kesejajaran Euclid, tidak pernah terbukti bahwa postulat kesejajaran Euclid dapat diturunkan dari postulat-postulat lainnya. Namun, diskursus tersebut pada akhirnya menyadarkan akan kemungkinan adanya sistem geometri lain yang tidak didasarkan pada postulat kesejajaran Euclid. Kesadaran tersebut sudah terrekam dalam karya-karya Saccheri dan Gauss, yang baru dapat diwujudkan oleh Lobachevsky dan Janos Bolyai. Geometri yang diciptakan oleh Lobachevsky dan Janos Bolyai disebut geometri hiperbolik, dan dalam geometri hiperbolik berlaku jumlah sudut-sudut pada sebarang segitiga kurang dari 180^0 . Bersama-sama dengan geometri eliptik yang dibangun oleh Georg Friedrich Bernhard Riemann, geometri hiperbolik disebut geometri non-Euclid karena dibangun tanpa menggunakan postulat kesejajaran Euclid.

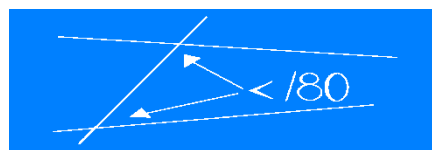
Kajian pustaka ini merupakan kelanjutan dari penelusuran terhadap diskursus (wacana) mengenai postulat kelima Euclid atau yang sering disebut postulat kesejajaran yang telah dilakukan penulis. Tujuan penulisan ini adalah untuk merekam sejarah kelahiran geometri hiperbolik dan implikasinya, sehingga tulisan ini diawali dengan

menyajikan sekilas diskursus postulat kesejajaran Euclid, kelahiran geometri hiperbolik, dan diakhiri dengan hasil-hasil dan implikasi filosofis yang dipicu oleh kemunculan geometri hiperbolik tersebut.

2. PEMBAHASAN UTAMA

Dari keseluruhan karya Euclid, yang memicu lahirnya geometri non-Euclid adalah lima buah postulat Euclid yang terdapat pada buku pertama dari tiga belas buku *the Elements*. Buku pertama tersebut mengandung 23 definisi, 48 proposisi, dan sepuluh aksioma. Euclid memisahkan sepuluh aksioma tersebut menjadi lima buah *common-notions* dan lima buah postulat. Empat postulat pertama bersifat trivial (bermakna tunggal) dan secara intuitif, kebenarannya bersifat *self-evident* dan masuk akal/*common sense*. Sementara itu, postulat kelima mampu menimbulkan kegelisahan yang kreatif. Apakah postulat kelima tersebut memang benar-benar suatu postulat, ataukah suatu teorema? Jika merupakan teorema, mengapa Euclid tidak cukup pintar memperoleh buktinya dan justru menyatakannya sebagai suatu postulat saja?

Postulat kelima Euclid adalah: jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membentuk sudut-sudut dalam sepihak yang kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis jika diperpanjang tak terbatas, akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku (*If straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles*).^[2]

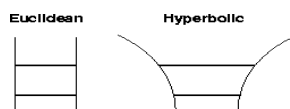


Gambar 1. Ilustrasi Postulat Kelima Euclid ^[2]

Postulat ini sangat panjang, tidak mudah dipahami, menimbulkan banyak pertanyaan dan ketidakpastian dan sepanjang masa selalu merisaukan para matematikawan. Namun, yang demikian justru memunculkan kegairahan yang kreatif dan mendorong perlunya dilakukan studi terhadap postulat tersebut. Sebagai suatu postulat, tentulah diterima tanpa pembuktian dan tanpa perlu melakukan pengujian empirik menggunakan obyek geometri (seperti titik, garis, dan bidang) maupun obyek kongkrit sehari-hari, meskipun banyak matematikawan yang meyakiniya sebagai suatu proposisi (teorema) dan dapat dibuktikan dengan menggunakan keempat postulat sebelumnya.

Saat ini postulat kelima Euclid dikenal sebagai postulat kesejajaran, namun yang dimaksudkan adalah postulat kesejajaran Playfair. Euclid sendiri tidak pernah menyebutnya dengan postulat kesejajaran. Jika dicermati, dalam postulat kelima tersebut sama sekali tidak terkandung istilah kesejajaran. Postulat tersebut dapat disajikan dalam kalimat yang berbeda tetapi memiliki makna yang sama, sebagai berikut: *melalui titik P yang terletak di luar garis m, terdapat paling banyak (tepat) satu garis yang akan melalui titik P dan sejajar dengan garis m.*^[2] Pernyataan ini dikenal sebagai Postulat Kesejajaran Playfair sebab dipopulerkan oleh John Playfair (1748 – 1819), meskipun sudah diungkapkan jauh hari oleh Proclus (410 – 485). Postulat Playfair jauh lebih sederhana, lebih mudah dipahami serta tidak menimbulkan pemahaman yang berbeda. Postulat inilah yang sekarang diberikan di ruang-ruang kelas dan bukannya postulat kelima Euclid yang sangat panjang.

Euclid sendiri memberikan suatu definisi mengenai garis sejajar (*parallel lines*) sebagai *dua buah garis yang terletak pada satu bidang yang sama, jika diperpanjang terus-menerus (sampai tak hingga) pada kedua arahnya, maka kedua garis tersebut tidak akan bertemu*^[17]. Jadi, syarat dua garis sejajar adalah jika diperpanjang pada kedua arahnya maka tidak akan bertemu, tidak penting apakah jarak keduanya tetap sama (konstan) ataukah jaraknya semakin besar (jika jaraknya semakin kecil pasti akan bertemu atau berpotongan). Adanya definisi ini mendukung argumentasi bahwa Euclid tidak pernah menyebut postulat kelimanya sebagai postulat kesejajaran. Berangkat dari definisi garis sejajar ini ditemukan geometri baru yang bukan geometri Euclid.



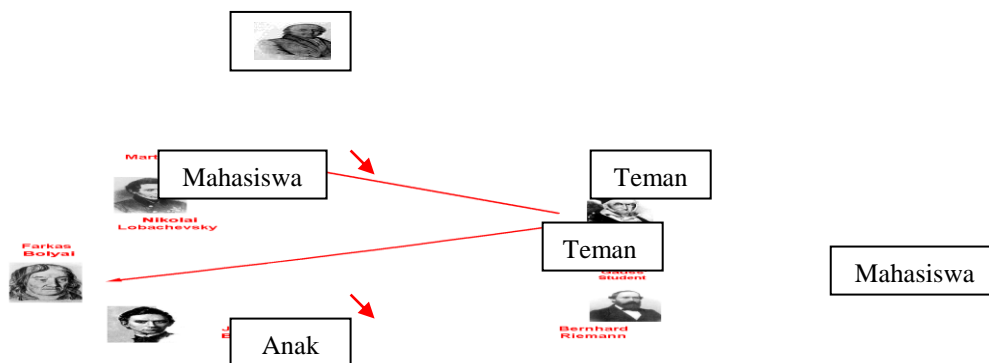
Gambar 2. Jarak Dua Garis Sejajar yang Tetap Sama dan Semakin Besar^[3]

Beberapa matematikawan yang menganggap postulat kelima adalah teorema melakukan pembuktian dengan menggunakan pembuktian langsung. Dalam pembuktiannya, yang mereka buktikan bukanlah postulat kelima Euclid, tetapi proposisi yang senilai (ekuivalen) dengan postulat kelima tersebut. Beberapa lagi menggunakan pembuktian dengan kontradiksi/*reductio ad absurdum* dengan sebelumnya menegaskan postulat kesejajaran Playfair. Usaha untuk membuktikan postulat kelima bahkan sudah dimulai tidak lama sejak Euclid merumuskan sistem geometrinya. Beberapa diantara mereka yang mencoba membuktikan bahwa postulat kelima adalah teorema antara lain Poseidonius (135 SM – 51 SM), Claudius Ptolemy (85 – 165), Proclus (410 – 485), Ibnu al-Haytam atau Alhazen (965-1039), Omar Khayyam (1048-1131), Nasir Eddin at-Tusi (1201 –

1274) dan anaknya Sad'r al-Din at-Tusi, John Wallis (1616 – 1703), Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765), John Playfair (1748 – 1819), Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), dan Adrien Marie Legendre (1752 – 1833).

Usaha tersebut tidak ada yang membuahkan hasil maksimal, sehingga nampaklah keunggulan Euclid di antara para matematikawan sesudahnya. Namun diluar kesadaran mereka semua, usaha tersebut di kemudian hari justru memunculkan sistem geometri lain yang sekarang dikenal dengan geometri non-Euclid (geometri hiperbolik dan geometri eliptik). Geometri non-Euclid juga masih mendasarkan pada keempat postulat pertama Euclid, hanya berbeda pada postulat kelima mengenai kesejajaran. Para matematikawan yang menyadari adanya geometri baru selain geometri Euclid adalah Karl Friedrich Gauss dari Jerman (1777 – 1855), bapak dan anak dari Hungaria Wolfgang Farkas Bolyai (1775 – 1856) dan Janos (Johann) Bolyai (1802 – 1860), Nikolay Ivanovich Lobachevsky dari Rusia (1793 – 1856) dan Georg Bernhard Riemann (1826-1866) yang adalah murid dari Gauss.

Dari seluruh nama yang telah disebutkan, dapatlah dipilah menjadi dua kelompok yaitu *forerunners* dan *founders*. *Forerunners* adalah mereka yang berjasa dalam menjembatani dan memberi jalan bagi lahirnya geometri non-Euclid dan *founders* adalah mereka yang secara langsung membidani kelahiran geometri non-Euclid. Mereka yang termasuk *forerunners* adalah Girolamo Saccheri (1667-1733), John (Johann) H. Lambert (1728-1777), Adrien Marie Legendre (1752-1833), Farkas Bolyai (1775-1856), Karl Friedrich Gauss (1777-1855), dan dua nama yang jarang dikenal yaitu F.L. Wachter (1792-1817) dan J.M.C. Bartels. Mereka yang termasuk *founders* adalah Janos Bolyai, Ivanovich Lobachevsky dan Bernhard Riemann. Keterkaitan antara beberapa *forerunners* dan *founders* diilustrasikan pada gambar 3.



Gambar 3. *Forerunners* dan *Founders* Geometri Non-Euclid

Dua nama yang disebut-sebut membidani kelahiran geometri hiperbolik adalah Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856) dan Janos “Johann” Bolyai (1802-1860). Keduanya bekerja secara terpisah dan tidak pernah tahu apa yang sedang dikerjakan masing-masing. Hasil-hasil yang diperoleh Lobachevsky dan Janos Bolyai saat ini disebut geometri hiperbolik dan diklasifikasikan dalam geometri non-Euclid. Dibandingkan dengan Janos Bolyai, Lobachevsky dikenal lebih dahulu dalam mempublikasikan karyanya di bidang geometri hiperbolik, berselisih tiga atau empat tahun. Nama-nama lainnya yang berkontribusi pada awal-awal kelahirannya adalah Eugenio Beltrami (1835-1900), Felix Christian Klein (1849-1925), Jules Henry Poincare (1854-1912) dan Mauritius Cornelious Escher (1898-1972).

Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856). Pengkajian Lobachevsky sudah dimulainya tahun 1823 dan pada tahun 1826 ia mulai mendalami *Gauss's Alternate to the Parallel Postulate*. Menurutnya, postulat Gauss bersifat independen terhadap keempat postulat Euclid dan dapat menciptakan geometri baru.^[15] Lobachevsky menyebutnya dengan geometri imajiner karena ketiadaan model yang dapat mewakilinya dan ketiadaan aplikasi pada dunia fisik yang nyata.^[15] Menurutnya, geometri yang dihasilkannya murni hanya permainan otak dan hasil deduksi matematika saja.^[13] Namun, ia juga punya keyakinan bahwa model untuk geometri imajiner tersebut ada dan dapat dibuat. Keyakinan tersebut belakangan terbukti benar, setelah Poincare, Klein dan Escher berhasil membuat model untuk geometri baru tersebut.

Pada tahun 1828^[1] (atau 1829^{[2], [11], [12], [13], [14], [17]}), Lobachevsky mempublikasikan artikel berjudul *Principles of Geometry* atau *On Geometry Fundaments* pada *Kazan Messenger*. Dalam publikasinya, ia memperlihatkan bahwa geometri non-Euclid bersifat konsisten. Meskipun ia adalah matematikawan pertama yang mempublikasikan hasil-hasil dalam geometri non-Euclid secara terbuka, tetapi karena dilakukan di Rusia, publikasinya kurang mendapat sambutan yang luas.

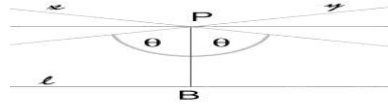
Pada masa itu, dunia ilmiah tidak begitu antusias dan tertarik dengan geometri baru tersebut. Lobachevsky, yang banyak berseberangan dengan para matematikawan pada jamannya dan tidak pernah sepaham dengan cara berpikir “komunitas sains” (kecuali dengan Gauss), pada akhirnya melepaskan jabatannya sebagai rektor dan tetap memilih meneruskan karirnya di matematika sampai dengan meninggalnya dalam keadaan buta.

Penolakan terhadap geometri hiperbolik karena geometri tersebut terasa aneh dan mengerikan serta tidak sesuai dan bahkan bertentangan dengan pengalaman sehari-hari. Keanihan tersebut antara lain adalah sebuah persegi panjang tidak terdiri dari empat

sudut siku-siku serta teorema Pythagoras dan rumus jarak dalam geometri analitik menjadi tidak berlaku. Meskipun aneh, tetapi keanehan geometri hiperbolik adalah konsisten. Pada tahun tersebut, Eugenio Beltrami (1835-1900) memberikan model Euclid untuk geometri hiperbolik. Dapat ditunjukkan bahwa jika geometri hiperbolik mengandung sebarang kontradiksi logika, maka kontradiksi tersebut juga dapat ditranslasikan menjadi kontradiksi dalam geometri Euclid.^[11] Berdasarkan asumsi tersebut, karena geometri Euclid bersifat konsisten, maka tidak ada ketidakkonsistenan pada geometri hiperbolik. Dipenuhinya syarat konsistenan menyebabkan geometri hiperbolik diterima sebagai bagian dari matematika.

Publikasi internasional pertama dilakukan Lobachevsky tahun 1937 dalam *Grelle's Journal* di Perancis yang langsung mendapat pujian luas meskipun komunitas matematikawan belum siap untuk menerima revolusi besar tersebut.^[12] Selanjutnya pada tahun 1938 ia mempublikasikan buku berjudul *New Foundations of Geometry*^[14] dan pada tahun 1940 mempublikasikan sebanyak 61 halaman buku dengan judul *Geometrical Investigations (Researchers) on the Theory of Parallels* di Jerman.^[12]

Dalam buku tersebut, Lobachevsky membahas secara luas geometri hiperbolik. Ia menyatakan bahwa semua garis lurus yang berada pada suatu bidang dan melalui satu titik yang sama, jika ditinjau dari sebuah garis lurus lainnya yang sebidang, maka akan diperoleh dua kelompok garis yaitu akan memotong dan tidak akan memotong garis lurus yang diberikan.^[11] Garis-garis pembatas yang membagi ke dalam dua kelompok disebut garis yang sejajar dengan garis yang diberikan. Oleh karena itu, menurut Lobachevsky akan terdapat dua buah garis lurus yang sejajar dengan garis lurus yang diberikan. Fakta ini digunakan oleh Lobachevsky untuk mengganti postulat kelima Euclid dengan menyatakan terdapat dua garis yang sejajar sehingga lahirlah geometri hiperbolik. Pada perkembangan selanjutnya terbukti bahwa banyaknya garis yang sejajar tersebut adalah tak hingga banyak, atau paling sedikit dua, atau lebih dari satu.^{[2], [12]} Lobachevsky dapat menjelaskan bahwa postulat kelima Euclid bukanlah suatu teorema dan menyatakan bahwa postulat kelima Euclid dapat digantikan oleh postulat lainnya sehingga diperoleh geometri baru, disebut Postulat Kesejajaran Lobachevsky, yaitu melalui suatu titik P yang terletak di luar garis l , terdapat **tepat dua** garis yang melalui titik P dan sejajar garis tersebut.^[11]



Gambar 4. Ilustrasi Postulat Kesejajaran Lobachevsky^[12]

Menurutnya, keberadaan kesejajaran garis ditentukan oleh sudut kesejajaran $\Pi \phi$ yang besarnya berubah-ubah, tergantung pada jarak titik P dengan garis l .^[10] Jika pada geometri Euclid hanya ada satu sudut kesejajaran dan besarnya konstan yaitu 90^0 , maka dalam geometri yang dibangunnya, besar sudut tersebut antara 0^0 dan 90^0 . Jika titik P semakin dekat dengan garis l , besar sudut kesejajaran menuju 90^0 sehingga jika titik P terletak pada garis l akan diperoleh geometri Euclid.

Buku terakhir ditulis tahun 1855 berjudul *Pangeometry*. Lobachevsky menggunakan *horocycle*, sebuah lingkaran dengan radius tak hingga sebagai garis-garis dan *horosphere*, sebuah *sphere* dengan radius tak hingga sebagai bidang.

Sama seperti Gauss, Lobachevsky juga melakukan eksperimen non-Euclid dengan melakukan pengukuran astronomis. Ia mengukur jumlah sudut-sudut segitiga antara bumi, matahari dan bintang Sirius.^[16] Hasilnya adalah jumlah sudut-sudut segitiga raksasa tersebut 0,000004 kurangnya dari 180^0 . Eksperimen ini sesuai dengan hasil dalam geometri hiperbolik bahwa jumlah sudut-sudut segitiga kurang dari 180^0 , tetapi karena kurangnya sangat kecil dibandingkan dengan kesalahan pengukuran, maka eksperimen Lobachevsky dapat diabaikan sebagai bukti empirik adanya semesta yang bergaya geometri hiperbolik.

Janos “Johann” Bolyai (1802-1860). Anak muda yang bernama Janos (Johann) Bolyai (1802-1860) dengan penuh keberanian (*brave*) membangun geometri non-Euclid dan mempublikasikan karyanya secara luas. Menurutnya, daya tarik geometri baru ini sangat luar biasa sehingga Janos Bolyai dikenal dengan kredonya *out of nothing I have created a strange new universe*.^[12] Hasil kerja Janos tidak mendapat sambutan luas dan bahkan memperoleh cacian hingga akhirnya ia mengalami depresi.

Janos Bolyai lahir di Kolzsvar (sekarang Napoca, Rumania) tahun 1802 sebagai anak dari matematikawan Wolfgang Farkas Bolyai. Ia mempunyai karakter pribadi yang arogan dan tidak mau diatur. Kebiasaannya adalah memainkan biola dan berkelahi serta berkelahi. Pernah berkarir di militer dan berkelahi dengan 13 orang anggota pasukan kavaleri, hingga akhirnya ia meninggalkan karirnya di militer.

Saat berusia 21 tahun, Janos Bolyai menulis surat kepada ayahnya dan mengatakan bahwa dirinya telah menciptakan semesta baru dari ketiadaan sesuatu/kekosongan. Ia menulis mengenai *strange new world* (dunia baru yang aneh) yang kemudian diterbitkan tahun 1832 sebagai apendik sebanyak 24 halaman berjudul *Essay for Students Youths on the Elements of Mathematics* dari buku yang ditulis bapaknya, Farkas Bolyai, berjudul *Tentamen*. Ia yang berharap dapat menunjukkan postulat kelima Euclid salah, justru sampai kepada kesimpulan bahwa postulat kelima Euclid bukanlah satu-satunya postulat yang dapat digunakan untuk membangun geometri. Meskipun bekerja secara sendiri-sendiri tanpa pernah bertemu dan melakukan korespondensi, hasil yang diperoleh Janos Bolyai analog dengan yang diperoleh Lobachevsky.

Karl Friedrich Gauss membaca apendik tersebut. Farkas Bolyai juga mengirimkan hasil-hasil Janos Bolyai yang lainnya kepada Gauss. Salah satu balasannya adalah Gauss menyatakan kepada Farkas Bolyai bahwa ia juga memperoleh hasil-hasil yang sama beberapa waktu sebelumnya. János Bolyai mengembangkan ide dan pemikiran yang berkaitan dengan *absolute geometry* atau geometri tanpa postulat ke-5 Euclid. János juga mengatakan bahwa jumlah dari sudut-sudut dalam (*interior angle*) dari sebuah segitiga adalah kurang dari dua kali sudut siku. Saat ini konsep ini dikenal sebagai geometri hiperbolik. Dalam kesempatan yang berbeda ia mengungkapkan bahwa jumlah dari sudut-sudut dalam (*interior angle*) dari sebuah segitiga akan lebih dari dua kali sudut siku, walaupun ia sebenarnya agak ragu untuk mengembangkannya yang kedua ini. Pemikirannya yang kedua ini, kemudian dikenal sebagai geometri sferik atau geometri eliptik.

Semasa hidupnya Janos Bolyai menerima banyak caci maki atas prestasinya di bidang geometri ini hingga akhirnya memutuskan untuk meninggalkan matematika. Janos Bolyai kemudian membangun rumah tangga dengan Rosalie von Orban, 1834, dan mempunyai 3 anak. Walaupun secara logika geometri yang dihasilkan oleh Lobachevsky dan Janos Bolyai dapat diterima, tetapi tetap saja sangat sulit untuk mengaplikasikannya dalam dunia nyata. Oleh karenanya, geometri ini lebih sering disajikan dalam *pure mind games* secara visual.

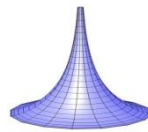
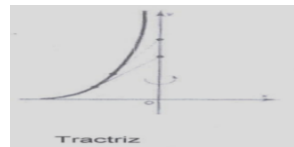
Di dalam geometri hiperbolik, Saccheri diakui sebagai orang yang memberikan ide dasar, dan Gauss adalah yang kemudian menyempurnakannya. Tetapi Janos Bolyai dan Lobachevsky yang memberikan kontribusi nyata yang sangat besar dalam perkembangan geometri hiperbolik. Sebagian besar matematikawan menamakan kajian geometri sebagai

hasil dari kerja keras Saccheri, Gauss, Janos Bolyai dan Lobachevsky ini sebagai geometri hiperbolik.

Untuk memperkenalkan geometri hiperbolik, dapat ditempuh dengan memperkenalkan hasil-hasil yang telah diperoleh selama ini, antara lain hasil dari Beltrami, Klein, Poincare, Escher dan lain-lain. Hasil-hasil tersebut juga dapat menunjukkan bahwa geometri hiperbolik tetap memiliki lahan untuk mengaplikasikannya, sehingga bukan hanya sebagai permainan otak belaka, namun merupakan hasil deduksi matematika yang dapat memberikan manfaat nyata. Di kemudian hari, Einstein menggunakan geometri hiperbolik untuk merumuskan teori relativitasnya. Jadi, hasil-hasil matematika yang abstrak yang semula kelihatannya tidak mempunyai kegunaan praktis, seiring berjalannya waktu, tercipta ruang untuk mempraktekkannya dan memberi kesejahteraan bagi umat manusia.

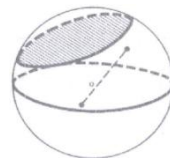
Eugenio Beltrami (1835-1900). Pada tahun 1868, Beltrami memberikan model nyata dari geometri Lobachevsky. Dalam makalahnya yang berjudul *Essay on the Interpretation of non-Euclidean Geometry*,^[11] Beltrami membuat model geometri non-Euclid 2 dimensi di dalam geometri Euclid 3 dimensi. Hasilnya adalah suatu permukaan yang disebut *pseudosphere*. Bentuk permukaan geometri yang dibuatnya memiliki kemiripan dengan *Lobachevsky's plane*. Pencapaian Beltrami memberikan bukti bahwa geometri non-Euclid (dalam hal ini geometri hiperbolik) adalah konsisten.

Dari kurva bidang berbentuk *tractrizes* (gambar 5) dan dengan memutarkannya mengitari sumbu Y akan diperoleh *pseudosphere* (gambar 6). Ternyata, dari bentuk *tractrizes* diperoleh suatu *pseudosphere* dan karena *pseudosphere* mempunyai *curvature* negatif, maka Beltrami berhasil memperlihatkan bahwa sistem geometri hiperbolik konsisten. Berkaitan dengan hal ini, geometri hiperbolik disebut juga geometri pseudosferik, karena geometri dalam *pseudosphere* tidak lain merupakan bidang (*plane*) Lobachevsky. Di dalam dunia nyata sehari-hari juga dapat dijumpai benda kongkrit yang bergaya geometri hiperbolik (gambar 7). Pada tahun yang sama, 1868, Beltrami juga berhasil mendemonstrasikan independensi postulat kesejajaran Euclid dari keempat postulat lainnya.^[11] Artinya, postulat kelima benar-benar merupakan postulat yang tidak dapat diperoleh dari keempat postulat lainnya.



Gambar5. *Tractriz/Tactrix* ^[13] Gambar 6. *Pseudosphere* ^[13] Gambar 7. Benda Nyata Hiperbolik ^[4]

Felix Christian Klein (1849-1925). Pada tahun 1870 (beberapa menyebut 1871), Felix Klein berhasil memberikan penggambaran dari model geometri hiperbolik pada *Lobachevsky's space* yang merupakan perbaikan model geometri hiperbolik yang dibuat Beltrami.^[13] Klein memodelkan bagian interior dari sebuah bola bumi, seperti pada gambar 8. Titik (*ordinary point*) adalah bagian dalam suatu lingkaran, garis dalam sebuah bola bumi seperti halnya senar (*string/chords*) sedangkan bidang (*plane*) adalah sebuah lingkaran yang garis kelingnya terletak pada permukaan bola bumi. Titik-titik ideal (*omega points*) adalah titik-titik yang berada pada lingkaran. Jadi, garis-garis sejajar akan bertemu pada lingkaran. Titik-titik ultra ideal (*gamma points*) adalah titik-titik yang berada di luar lingkaran. Namun demikian, permukaan sebuah *sphere* termasuk juga titik-titik ekstrim dari sebuah *string*, serta keliling lingkaran semuanya berada di luar *Klein's sphere*.



Gambar 8. *Klein's Sphere: Model untuk Lobachevsky's Space* ^[13]

Klein memperlihatkan bahwa pada dasarnya terdapat tiga jenis geometri yang berbeda, ditinjau berdasarkan titik-titik berjauhan yang berjarak tak hingga.^[11] Tipe pertama adalah geometri hiperbolik. Pada geometri hiperbolik, setiap garis lurus mempunyai dua buah titik yang saling berjauhan berjarak tak hingga. Tipe kedua adalah geometri eliptik yang tidak mempunyai titik-titik berjauhan dengan jarak tak terhingga. Tipe ketiga adalah geometri Euclid yang membatasi kedua jenis sebelumnya. Pada geometri Euclid, titik-titik yang saling berhimpit yang terdapat pada setiap garis merupakan titik-titik yang saling berjauhan dan berjarak tak hingga.

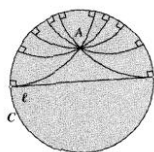
Klein menyimpulkan bahwa geometri Lobachevsky lebih mudah dipahami dan mempunyai kegunaan nyata yang lebih sederhana. Model-model yang dibuat dari geometri Lobachevsky lebih kongkrit dalam memberikan kejelasan geometri dari sebuah lingkaran atau bola bumi. Geometri Lobachevsky dapat menjadi model nyata dari

geometri suatu lingkaran atau *sphere*. Lebih menarik adalah, apa yang dihasilkan oleh Klein tidak bertolak belakang dengan aksioma-aksioma yang telah dihasilkan oleh Euclid, khususnya teorema-teorema tentang bidang (*plane*) atau *sphere* (*space*).

Model yang diberikan Klein mengandung beberapa kelemahan seperti jarak tidak dapat direpresentasikan dengan tepat, *string/chords* dapat mempunyai panjang yang tak hingga. Demikian pula dengan sudut yang tidak dapat direpresentasikan dengan tepat sehingga dalam model Klein masih mungkin dibuat sebuah persegi *Euclidean* (persegi yang mengikuti definisi persegi dalam geometri Euclid, yaitu jumlah sudut-sudutnya 360^0 yang seharusnya tidak ada dalam geometri Lobachevsky).

Jules Henry Poincare (1854-1912). Poincare memberikan kontribusi yang sangat besar dalam perkembangan geometri hiperbolik, terutama dalam bidang Lobachevsky. Karya-karyanya didasarkan dengan mengambil lingkaran sebagai sebuah bidang, disebut *Poincare's Disc Model*. Ilustrasi postulat kesejajaran geometri hiperbolik pada model Poincare diberikan pada gambar 9.

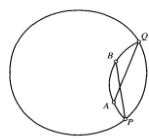
Di dalam model-modelnya, lingkaran adalah sebuah bidang (*plane*), titik adalah bola terbuka dengan jari-jari satu dan garis adalah diameter atau garis lurus lengkung (busur/arc) dari keliling lingkaran yang tegak lurus terhadap keliling lingkaran luar dan termuat di bagian dalam. Titik-titik ideal (*omega points*) adalah semua titik yang terletak pada lingkaran, sedangkan titik ultra ideal (*gamma points*) tidak diadakan atau tidak dapat direpresentasikan dalam model Poincare.



Gambar 9.

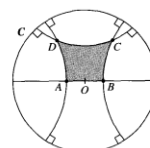
Postulat Kesejajaran^[9]

$$d(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AQ}{BQ} \times \frac{BP}{AP} \right) \right|$$



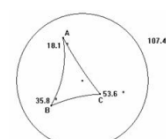
Gambar 10.

Jarak Dua Titik^[9]



Gambar 11.

Segiempat Saccheri^[9]



Gambar 12.

Segitiga bersudut $107,4^0$ ^[7]

Di dalam model Poincare, jarak dan sudut dapat diukur (direpresentasikan) dengan tepat. Rumus jarak antara dua titik A dan B dalam model Poincare diberikan pada gambar 10. Dengan dapat diukurnya sudut, maka dalam model Poincare dapat diperoleh Segiempat Saccheri (gambar 11) dan dapat diperoleh segitiga yang jumlah sudut-sudutnya kurang dari 180^0 , seperti tampak pada gambar 12.

Mauritius Cornelious Escher (1898-1972). M.C. Escher lahir tahun 1898 di Leeuwarden, Belanda dan meninggal di rumah peristirahatannya 27 Maret 1972. Escher sangat terkenal sebagai seniman grafis dengan karya-karya yang sangat melimpah,

khususnya kerja seni dengan menggunakan geometri non-Euclid, antara lain berupa 400 gambar pada batu/logam datar (*lithograph*), lukisan dari ukiran kayu (*woodcut*), ukiran kayu (*wood engraving*) dan 2000 buah lukisan. Escher dikenal sangat piawai dalam menghasilkan lukisan dari kayu dengan bentuk yang *impossible*, seperti gambar 13. Minat dan keahlian lainnya adalah pengubinan (*tessellation*) yaitu lukisan dengan menggunakan perulangan dirinya sendiri sehingga nampak seperti kepingan *puzzle*, seperti gambar 14. Dalam berkarya, ia memulai dengan penggunaan benda-benda geometris dua dimensi seperti segitiga, persegi, dan segi enam. Dari dua dimensi bergeser ke bentuk tiga dimensi serta perbesaran dan pengecilan. Metode yang digunakannya adalah penggunaan simetri dan pengulangan (*repetisi*).

Escher pernah belajar di *School for Architecture and Decorative Arts*, sesuai keinginan orang tuanya, namun tidak pernah diselesaikannya. Escher lebih meminati seni grafis dan secara otodidak mempelajari geometri non-Euclid dan matematika. Perjalanannya mengelilingi Belanda, Swiss, Belgia, dan Italia memberinya inspirasi untuk hal-hal yang dikerjakannya kemudian. Nilai penting karya-karyanya menunjukkan bahwa seni dan matematika bisa saling memberi kontribusi.

Karya-karya Escher disebut *Circular Limits* atau *Circle Limits* (gambar 15) dan dapat membantu memahami geometri serta mendalami matematika. Escher menciptakan suatu model tampilan yang cukup artistik dari ruang Lobachevsky dengan menggunakan *Poincare's Plane*. Dengan menikmati keindahannya seolah-olah sedang berada di dalam alam semesta hiperbolik.

Tabel 1. Perbandingan untuk Ketiga Jenis Geometri

| No | Karakteristik | Geometri Euclid (Parabolik) | Geometri Hiperbolik (Lobachevsky-Bolyai) |
|----|--|---|--|
| 1 | Jumlah garis sejajar yang dibentuk dari satu titik di luar suatu garis | Satu | Minimal dua (tak hingga) |
| 2 | Garis sejajar | Di setiap tempat, sama jauhnya | Tidak di setiap tempat, jauhnya tidak sama |
| 3 | Garis lurus | Tidak terbatas dan tidak terhingga panjangnya | Tidak berhingga panjangnya |
| 4 | Antara dua titik terdapat satu garis | Ya | Ya |

| | | | |
|----|--|---|--|
| 5 | Perpotongan dua garis yang berbeda | 1 titik | 1 titik |
| 6 | Dua garis yang tegak lurus terhadap sebuah garis | Sejajar | Sejajar |
| 7 | Dua garis sejajar terhadap garis ketiga | Sejajar | Bisa jadi sejajar |
| 8 | Jika sebuah garis memotong satu dari dua garis sejajar | Memotong yang lain | Bisa jadi memotong yang lain |
| 9 | Jumlah sudut suatu segitiga | $= 180^0$ | $< 180^0$ |
| 10 | Dua segitiga dengan sudut-sudut yang berkorespondensi sama | Serupa (sama) | Kongruen |
| 11 | Luas segitiga | $\frac{1}{2} \text{ alas} \times \text{tinggi}$ | $\frac{\pi}{180} \times \text{defect}$ $\text{defect} = 180 - \text{jumlah sudutnya}$ |
| 12 | Luas maksimal segitiga | Tidak ada | Ada |
| 13 | Teorema Pythagoras | $c^2 = a^2 + b^2$ | $c^2 > a^2 + b^2$ |
| 14 | Persegi panjang | Ada | Tidak ada |
| 15 | Sudut puncak <i>Saccheri Quadrilateral</i> | Siku-siku | Lancip |
| 16 | Jumlah sudut pada segiempat | $= 360^0$ | $< 360^0$ |
| 17 | Nilai pi | $= \pi$ | $> \pi$ |
| 18 | Keliling lingkaran | $= 2\pi r$ | $> 2\pi r$ |
| 19 | Rasio Keliling terhadap Diameter | $= \pi$ | $> \pi$ |
| 20 | Luas lingkaran | $= \pi r^2$ | $< \pi r^2$ |

Tabel 2. Teorema Pythagoras, Sinus dan Cosinus

| No | Karakteristik | Geometri Euclid (Parabolik) | Geometri Hiperbolik (Lobachevsky-Bolyai) |
|----|-----------------------------------|--|--|
| 1 | Teorema Pythagoras siku-siku di C | $c^2 = a^2 + b^2$ | $\cosh c = \cosh a \cosh b$ |
| 2 | Hukum Sinus | $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ | $\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$ |
| 3 | Hukum Cosinus | $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ | $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C$ |
| 4 | Hukum Cosinus | Tidak ada | $\cosh c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B}$ |

Tabel 3. Alam Semesta Menurut Geometri Euclid dan Hiperbolik

| No | Karakteristik | Geometri Euclid (Parabolik) | Geometri Hiperbolik (Lobachevsky-Bolyai) |
|----|--------------------------------------|--|--|
| 1 | Visualisasi | Bidang | Pelana |
| 2 | Garis-garis sejajar | Sejajar | Divergen |
| 3 | Kurvatur | Nol | Negatif |
| 4 | Bentuk kurva ruang | Tidak melengkung | Melengkung ke luar |
| 5 | Bentuk alam semesta (jagad) | Datar (<i>flat</i>) | Terbuka |
| 6 | Batas jagad raya | Tidak terbatas | Tidak terbatas (<i>infinite</i>) |
| 7 | Luas dan Volume | Luas tidak terbatas | Luas dan volume tidak terbatas |
| 8 | Pertambahan Volume | Normal | Sangat cepat |
| 9 | Awal dan akhir ekspansi alam semesta | Bereksansi terus-menerus hingga berhenti | Bereksansi terus-menerus dan tidak pernah berhenti |
| 10 | Aplikasi Sehari-hari | Euclid bekerja sebagai <i>builder, surveyor, carpenter</i> | Lobachevsky-Bolyai menjadi fisikawan teoritis, astronom, atau menjadi astronot |

3. KESIMPULAN

Dalam perkembangan matematika masa kini, telah dibangun beberapa sistem geometri yang ternyata tidak kompatibel dengan geometri Euclid, sehingga proposisi-proposisi dalam geometri Euclid tidak harus berlaku, seperti misalnya proposisi (1) dua buah titik menentukan tepat satu garis yang menghubungkannya, dan (2) dalam sebarang segitiga, jumlah sudut-sudutnya sama dengan 180^0 . Geometri baru tersebut dinamakan geometri hiperbolik yang dikembangkan oleh Janos Bolyai dan Nikolay Ivanovich Lobachevsky.

Secara umum, kedua jenis geometri tersebut hanya berbeda pada postulat kesejajaran, sementara keempat postulat lainnya sama, meskipun mengganti salah satu postulat dari geometri Euclid memerlukan beberapa modifikasi atas aksioma-aksioma geometri Euclid agar diperoleh bangunan geometri hiperbolik yang konsisten. Hasil-hasil yang telah diperoleh menunjukkan bahwa geometri hiperbolik adalah konsisten secara relatif dengan geometri Euclid. Dengan kata lain, kedua jenis geometri tersebut mempunyai validitas logis yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chandrasekhar, T.R. *Non-Euclidean Geometry from Early Times to Beltrami*. Indian Journal of History of Science. (1989). 24 (4), 249-256. [Online]. Tersedia: http://www.new.dli.ernet.in/rawdataupload/upload/insa/INSA_1/20005b60_249.pdf [2 Desember 2009].
- [2] De Wald, M., dan Barret, K. *xxxx . The Strange New Worlds: the Non-Euclidean Geometries*. [Online]. Tersedia: <http://webpace.ship.edu/kgmcgi/m400/Presentations/chapter19.ppt>. [2 Desember 2009].
- [3] <http://images.google.co.id/imglanding?q=hyperbolic%20geometry&imgurl>. [3 Desember 2009].
- [4] <http://images.google.co.id/imglanding?q=negative%20curvature&imgurl>. [3 Desember 2009].
- [5] <http://nsfmli.rice.edu/presentations/2009%20Summer%20Presentations/Non-Euclidean%20Geometry%20by%20Ricardo%20Chapa%20&%20Daphne%20Hoar d.pdf>. [2 Desember 2009]
- [6] <http://www.baermath.googlepages.com/tesselations.ppt>. [2 Desember 2009].

- [7] <http://www.google.co.id/imglanding?q=hyperbolic%20triangle&imgurl>.
[3 Desember 2009].
- [8] http://www.kerpoof.com/edu/.../Escher/MC_Escher_Relativity_Introduction.ppt.
[3 Desember 2009].
- [9] <http://www.math.cudenver.edu/~wcherowi/courses/m3210/lecchap9.pdf>.
[2 Desember 2009].
- [10] <http://www.math.uconn.edu/~kaufmann/math242Wf04/Lecture4.ppt>. [2 Desember 2009].
- [11] Kalimuthu, S. 2009. *The Parallel Postulate Return of the Roaring Lion*. Indian Journal of Science and Technology. (2009). 2 (4), 16-22. [Online]. Tersedia: <http://indjst.org/archive/vol.2.issue.4/apr09kalimuth.pdf>. [6 April 2010].
- [12] Preda, A. xxxx. *History of Mathematics*. [Online]. Tersedia: <http://www.yorku.ca/bwall/math5400/projects/euclid.ppt>. [3 Desember 2009].
- [13] Pinilos, M.G. xxxx. *The History of the Fifth Postulate: The Birth of Non Euclidean Geometries*. [Online]. Tersedia: <http://cerezo.pntic.mec.es/mgarc144/marcohistoria/The%20Fifth%20Postulate.pdf>. [2 Desember 2009]
- [14] Tn. xxxx. *Creation of Non-Euclidean Geometry*. [Online]. Tersedia: <http://math.boisestate.edu/~tconklin/.../Main/.../Noneuclidean%20Geometry.ppt>. [3 Desember 2009].
- [15] Tn. xxxx. *Euclidean Verses Non Euclidean Geometries*. [Online]. Tersedia: <http://www.radford.edu/~wacase/math%20116%20section%207.4%20new%20v1.pdf>. [2 Desember 2009].
- [16] Tn. xxxx. *Non-Euclidean Geometry*. [Online]. Tersedia: <http://mtsu32.mtsu.edu:11208/Chap11Pres.ppt>. [3 Desember 2009].
- [17] Tn. xxxx. *Remainder of Euclid's Five Postulates*. [Online]. Tersedia: http://www.cst.cmich.edu/users/piate1kl/MTH_553_F07/non-euclidean_geometries_small.pdf. [2 Desember 2009].

RUANG 2-NORMA PADA $\ell^2 \times \ell^2$

Sadjidon dan Sunarsini
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
djjidon@matematika.its.ac.id
soenarsini@yahoo.com

ABSTRAK. Norm Space X is a linear space that equipped with a norm function. In this paper , 2-norm space is developed on X , especially on ℓ^2 which obtained by linking the space of dual. Furthermore, with the same analogy for the 2-norm space on ℓ^2 , so the function of 2-norm can be constructed on space $\ell^2 \times \ell^2$.

Keywords : 2-norm space, Dual Space, Space $\ell^2 \times \ell^2$

1. PENDAHULUAN

Analisis fungsional merupakan salah satu cabang matematika analisis klasik. Metode analitik fungsional sangat besar peranannya dalam berbagai bidang matematika dan aplikasinya. Dalam analisis fungsional dipelajari lebih umum tentang “ruang” dan “fungsi” yang terdefinisi padanya. Sebagai contoh, himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan “fungsi jarak”, dinamakan ruang metrik, kemudian ruang linear yang dilengkapi dengan “fungsi norma” dinamakan ruang norma serta ruang linear yang dilengkapi dengan “fungsi inner product” dinamakan ruang inner product (ruang hasil kali dalam)[4].

Berbicara mengenai ruang norma, [2,3] mengembangkan ruang n-norma sebagai generalisasi dari norma standarnya, khususnya pada ruang $l^p, 1 \leq p \leq \infty$. Sementara [1,5] menjabarkan n-norma ($n = 2$) dengan konsep ruang dual dan orthogonalitas. Dengan mengembangkan penelitian dari [1,2,3,5], maka tujuan utama paper ini adalah mengkonstruksi 2-norma pada ℓ^2 dan $\ell^2 \times \ell^2$ dengan mengaitkan ruang dual serta fungsi inner productnya.

2. RUANG n-NORMA

Misalkan S himpunan semua barisan bilangan real dan merupakan ruang vektor atas field \mathbf{R} . Setiap subruang vektor S juga merupakan ruang barisan.

Definisi 1. [2]

Misalkan X subruang S . Fungsi bernilai real $\|\square, \dots, \square\|$ pada X^n yang memenuhi sifat-sifat:

- (1) $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = 0$ jika dan hanya jika x_1, x_2, \dots, x_n bebas linier
- (2) $\|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ invarian terhadap permutasi
- (3) $\|x_1, x_2, \dots, \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, x_2, \dots, x_n\|$ untuk setiap $\alpha \in R$
- (4) $\|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z\|$

disebut n-norma pada X dan pasangan $(X, \|\square, \dots, \square\|)$ disebut ruang n-norma.

Sebagai contoh, untuk sebarang ruang hasil kali dalam $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dapat dilengkapi dengan n-norma standar $\|x_1, \dots, x_n\| := \sqrt{\det(\langle x_i, x_j \rangle)}$ yang dapat diinterpretasikan sebagai volume paralelepipedum n-dimensi yang direntang oleh x_1, \dots, x_n dalam X . Pada R^n , n-norm standarnya dapat dinyatakan sebagai $\|x_1, \dots, x_n\| = |\det(x_{ij})|$ dengan $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in R^n$.

3. RUANG 2-NORMA PADA $\ell^2 \times \ell^2$

Pada bagian ini dibahas cara mengkonstruksi 2-norma standar pada ruang ℓ^2 yang diperoleh dengan mengaitkan ruang dual dari ruang ℓ^2 . Selanjutnya, dengan analogi yang sama pada ruang ℓ^2 , maka dapat dikonstruksi 2-norma pada ruang $\ell^2 \times \ell^2$.

Seperti telah diketahui bahwa ruang ℓ^2 adalah ruang yang memuat semua bilangan real $x = (x_j)$ sehingga $\sum_j |x_j|^2 < \infty$. Ruang ℓ^2 yang dilengkapi dengan suatu norma standar $\|x\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang Banach. Kemudian, ruang ℓ^2 dengan inner product $\langle x, y \rangle = \sum_j x_j y_j$ merupakan ruang inner product. Lebih lanjut, ruang dual dari ruang ℓ^2 yaitu himpunan dari semua fungsional linier kontinu pada ruang ℓ^2 , dinotasikan dengan $(\ell^2)^*$, adalah ruang ℓ^2 . Jika $f \in (\ell^2)^*$, maka $f \in \ell^2$ dan dapat diinterpretasikan untuk $f(x) = \sum_j x_j z_j = \langle x, z \rangle$, dengan $x \in \ell^2, z \in (\ell^2)^* = \ell^2$. Jika

$f \in (\ell^2)^*$, maka didefinisikan norma untuk f sebagai $\|f\| = \{ \sup \|f(x)\|, x \in \ell^2, \|x\| \leq 1 \}$ [4]. Dengan analogi yang sama untuk norma pada $(\ell^2)^*$ maka dapat dikonstruksi 2-norma pada ruang ℓ^2 seperti yang tertuang dalam teorema berikut:

Teorema 1:

Ruang ℓ^2 merupakan ruang 2-norma terhadap 2-norma:

$$\|x, y\| = \text{Sup} \left\{ \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix} : z, w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \leq 1 \right\} = \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in \ell^2$, dan $z, w \in (\ell^2)^*$ dengan $\|z\|, \|w\| \leq 1$. Dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \langle z, z \rangle & \langle z, w \rangle \\ \langle w, z \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \leq \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ merupakan batas atas dari himpunan

$\left\{ \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix} : z, w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \leq 1 \right\}$. Hal ini berarti bahwa:

$$\text{Sup} \left\{ \begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix} : z, w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \leq 1 \right\} \leq \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Selanjutnya untuk

$z = \frac{x}{\|x\|}$, $w = \frac{y - \alpha x}{\|y - \alpha x\|} = \frac{y'}{\|y'\|}$ dengan z dan y' orthogonal, juga memenuhi

$\|z\|, \|w\| \leq 1$, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle & \left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\ \left\langle x, \frac{y'}{\|y'\|} \right\rangle & \left\langle y, \frac{y'}{\|y'\|} \right\rangle \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y' \rangle & \langle y, y' \rangle \end{vmatrix}}{\|x\| \|y'\|} = \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}}{\|x\| \|y'\|}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat determinan dan sifat-sifat inner product diperoleh juga bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y' \rangle & \langle y, y' \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y' \rangle & \langle y, y' \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y' \rangle & \langle y, y' \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \|x\| \|y'\| \text{ sehingga} \\ \frac{\begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}} &= \frac{\|x\| \|y'\| \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\|x\| \|y'\|} = \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\|x\| \|y'\|} \end{aligned}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y' \rangle & \langle y, y' \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \text{Sup} \left\{ \frac{\begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} : z, w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \leq 1 \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Dengan demikian dari (1) dan (2) diperoleh 2-norma pada ruang ℓ^2 adalah

$$\|x, y\| = \text{Sup} \left\{ \frac{\begin{vmatrix} \langle x, z \rangle & \langle y, z \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle y, w \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} : z, w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \leq 1 \right\} = \frac{\begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle y, x \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\|x\| \|y\|} \blacksquare$$

Sekarang, diberikan fungsional linier kontinu pada $\ell^2 \times \ell^2$ sebagai berikut:

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^1 + x_k^2) w_k = \langle x_1, w \rangle + \langle x_2, w \rangle, \quad \text{dengan} \quad u = (x_1, x_2) \in \ell^2 \times \ell^2,$$

$w \in (\ell^2)^* = \ell^2$ dan $\|u\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Menurut [1,5], fungsi 2-norma pada ruang $\ell^2 \times \ell^2$

didefiniskan sebagai $\|u, v\| = \text{Sup} \left\{ \frac{\begin{vmatrix} f(u) & f(v) \\ f(v) & g(v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(u) & f(v) \\ f(v) & g(v) \end{vmatrix}}, f, g \in (\ell^2)^* = \ell^2, \|f\|, \|g\| \leq 1 \right\}$

dengan $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_1)$.

Dengan analogi penjabaran yang sama dengan 2-norma pada ruang ℓ^2 seperti Teorema 1, maka dapat dikonstruksi fungsi 2-norma pada ruang $\ell^2 \times \ell^2$.

Teorema 2:

Ruang $\ell^2 \times \ell^2$ merupakan ruang 2-norma terhadap 2-norma:

$$\|u, v\| = \text{Sup} \left\{ \begin{array}{l} \langle x_1 + x_2, w \rangle \quad \langle y_1 + y_2, w \rangle \\ \langle x_1 + x_2, z \rangle \quad \langle y_1 + y_2, z \rangle \end{array} \right\}, w, z \in (\ell^2)^* = \ell^2, \|w\|, \|z\| \leq 1$$

4. KESIMPULAN

Dari penjabaran dan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa 2-norma pada ℓ^2 dapat diperoleh dengan mengaitkan ruang dualnya. Dengan analogi yang sama, maka dapat dikonstruksi fungsi 2-norma pada ruang $\ell^2 \times \ell^2$.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Dalam penulisan makalah ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Prof. DR. Hendra Gunawan, Departemen Matematika Institut Teknologi Bandung yang membimbing kami pada magang penelitian tahun 2005.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Diminnie, C.R. A new Orthogonality Relation for Normed Linear Spaces, *Math.Nachr.* 1983. Vol.114, 197-203.
- [2] Gunawan, H. dan Mashadi. On n-normed Spaces, *Int. J. Math. Sci.* 2000 (to appear)
- [3] Gunawan, H. The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-norm, *Bull.Austral.Math.Soc.* 2001, Vol.64, 137-147.
- [4] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Application*, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1978.
- [5] Partington, J.R. Orthogonality in Normed Spaces, *Bull.Austral.Math.Soc.*1986. Vol. 33, 449-455.

ANALISIS MORFOLOGI SUNGAI PADA POLA DISTRIBUSI SEDIMENTASI

Kamiran dan Danang Bagiono
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
ddbagioo@gmail.com

ABSTRACT. Sedimentation model was developed mathematically using finite volume method approach. Sedimentation model that was built consisted of two parts, the hydrodynamic flow of rivers and river morphology. In the hydrodynamic flow of the river depicted on the variables involved in river flow equation, whereas in river morphology is described on the sedimentation process based channel as a result of flow behavior. In the implementation results of the output of the hydrodynamic flow of the flow velocity and depth river be input on the river morphology.

In this study discusses the distribution pattern of sediments on the river morphology are very curved semicircular. With the initial depth variation $h = 0.1$ to $h = 0.5$ for the same initial velocity $v = 0.1$, height of sediment an average increase of about 0.00013. Likewise, when given initial velocity $v = 0.1$ to 0.5, with the same depth $h = 0.3$ h, the height of sediment has decreased by about 0.01657. From the simulation result, the pattern of sediment distribution along the flow is influenced by the depth of the river, the river velocity and river morphology.

Key word : Sedimentation, Hydrodynamic, Morphology.

1. PENDAHULUAN

Sungai merupakan salah satu unsur penting dalam kehidupan manusia. Salah satu manfaat sungai yang cukup penting adalah untuk menampung air pada saat musim penghujan. Pendangkalan sungai akibat adanya pengendapan sedimen menyebabkan air tidak dapat tertampung atau tidak teralirkan secara maksimal sehingga dapat menyebabkan banjir. Proses terjadinya sedimentasi ini dapat dimodelkan dan disimulasikan secara matematis sehingga proses perubahan morfologi sungai akibat adanya sedimentasi. Pemodelan tersebut dapat dijadikan sebagai bahan pertimbangan dalam pengambilan suatu kebijakan, sehingga dampak yang akan ditimbulkan akibat adanya sedimentasi tersebut dapat dicegah sedini mungkin atau dikurangi. Model sedimentasi ini dibangun dengan menggunakan pendekatan metode volume hingga dan diselesaikan dengan metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG). Salah satu keunggulan dari metode ini adalah dalam proses diskritisasi daerah penyelesaian.

Pada metode-metode numerik yang telah ada, dalam melakukan interpolasi atau penghitungan integral, dibutuhkan pias pada domain yang akan diselesaikan. Sehingga untuk domain yang diskontinu atau mempunyai batas yang bergerak merupakan

permasalahan yang sulit diselesaikan. Tujuan utama dari metode ini adalah untuk menghilangkan pias, mengurangi kesulitan dalam membuat pias dengan menggunakan titik sebagai pengatinya (Atlury dan Lin, 2001).

2. MATERI DAN METODE

2.1. Sedimentasi

Sedimentasi terjadi karena adanya partikel-partikel padat yang ikut terbawa oleh aliran air. Mekanisme pengangkutan sedimen ini dikategorikan menjadi dua, yaitu *bed load* dan *suspended load*. Proses pergerakan sedimen jenis *bed load* bergerak pada dasar sungai dengan cara menggelinding, meluncur dan melompat-lompat. Sedangkan pada *suspended load* terdiri dari butiran-butiran halus yang melayang-layang di dalam air. Ottevanger (2005) mengemukakan bahwa proses terjadinya terdiri dari dua bagian, yaitu hidrodinamika dan morfologi. Hidrodinamika menjelaskan tentang aliran sungai, sedangkan morfologi menjelaskan tentang proses pengangkutan sedimen. Hubungan antara kedua bagian ini adalah arah dan besarnya kecepatan aliran pada hidrodinamika menjadi input pada proses pembentukan sedimen pada morfologi.

Zou Liu (2001) mengusulkan tiga macam transportasi sedimen, yaitu *wash load*, *bed-load*, dan *suspended load*. *Wash load* adalah partikel atau sedimen yang terbawa oleh air, akan tetapi partikel ini tidak mengendap pada dasar aliran, sehingga perilaku atau komposisi dari jenis angkutan ini tidak dapat diprediksi. Salah satu rumus yang populer untuk menghitung banyaknya sedimen pada transportasi sedimen adalah rumus *Mayer-Puter dan Muller* (Yang, 1996).

Rumus *Mayer-Puter & Muller* (Liu, 2001):

$$q_b = C_m [(s - 1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta - \theta_c)^{1.5}$$

$$q_b = \text{Banyaknya sedimen } \textit{bed load}$$

$$s = \frac{\rho_s}{\rho} \quad \theta_c = 0.47, \quad C_m = 8.0, \quad \mu = 1.0$$

$$\rho_s = \text{massa jenis sedimen}$$

$$\rho = \text{massa jenis air}$$

$$g = \text{kecepatan gravitasi}$$

$$d_{50} = \text{rata-rata diameter sedimen}$$

$$\theta = \frac{\tau_b}{(\rho_b - \rho)g d_{50}}, \quad \tau_b = \frac{\rho}{2} \left(\frac{0.06}{\left(\log \left(\frac{12h}{2.5d_{50}} \right) \right)^2} \right) v^2$$

$$v = \text{kecepatan aliran sungai}, \quad h = \text{kedalaman}$$

Perubahan morfologi sungai diasumsikan hanya terjadi pada dasar sungai yang diakibatkan adanya proses gerusan dan pengendapan. Perubahan dasar ini dapat dihitung dengan menggunakan persamaan kekekalan massa untuk transportasi sedimen yaitu :

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0$$

Dengan

z_b = ketinggian dasar sungai, p = porositas,

q_b = banyaknya sedimen *bed load*

2.2. Metode Volume Hingga

Banyak permasalahan di bidang mekanika fluida yang harus dianalisis dengan mengamati suatu daerah berhingga dari suatu domain yang besar. Dasar dasar yang digunakan oleh metode ini untuk dapat diterapkan adalah hukum-hukum dasar fisika, yaitu hukum kekekalan massa, momentum dan hukum pertama dan kedua termodinamika (Munson, 2003). Hukum kekekalan massa untuk suatu volume kendali:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \forall) + \sum_{face} \rho u A = 0$$

Dengan $\rho \forall =$ massa,

$\rho =$ massa jenis dan, $\forall =$ volume,

$\rho u A =$ massa lux yang keluar

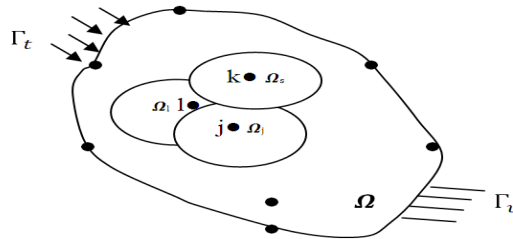
$A =$ luas permukaan $u =$ kecepatan

Sedangkan untuk hukum kekekalan momentum dapat dinyatakan dengan:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \forall u) + \sum_{face} \rho u A u = F$$

2.3. Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG)

Tujuan utama dari metode *meshless* ini adalah menghindari penggunaan pias, metode ini sangat bermanfaat pada masalah dengan batas domain yang tidak koninuu atau bergerak. Penelitian tentang metode MLPG dan penerapannya telah banyak dilakukan dan masih terus dikembangkan. Atluri dan Lin (2000) menerapkan metode MLPG untuk menyelesaikan masalah konveksi-divusi. Dari hasil penelitian yang dilakukan bahwa MLPG memberikan hasil yang sangat akurat pada kasus tersebut. Penjelasan dari subdomain tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. lokal subdomain Ω_s dari doamin Ω

MLS merupakan salah satu metode interpolasi yang mempunyai tingkat keakuratan yang tinggi (Atlury dan Lin, 2000). Misalkan sebuah fungsi taksiran $u^h(x)$ pada domain Ω dengan titik sebaran $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3 \dots n$. Penaksir MLS $u^h(x)$ dari $u(x)$, $\forall x \in \Omega$ dapat didefinisikan sebagai :

$$u^h(x) = P^T(x)a(x), \forall x \in \Omega \text{ dengan } P^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$$

adalah basis monomial lengkap order m . sebagai contoh $P^T(x)$ untuk 2 dimensi, bentuk linier:

$$P^T(x) = [1, x, y], m = 3$$

$a(x)$ adalah vector yang memuat koefisien-koefisien fungsi $a_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$ merupakan fungsi fungsi dari variabel x . Matrik P dan W didefinisikan sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} P^T(x_1) \\ \dots \\ P^T(x_n) \end{bmatrix}_{n \times m}, \text{ dan } W = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n(x) \end{bmatrix}$$

Dan $\hat{u}^T = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]$, \hat{u}_i nilai fiktif dan bukan nilai yang sebenarnya dari fungsi $u^h(x)$ secara umum. Dengan A dan B adalah matrik yang didefinisikan sebagai berikut :

$$A(x) = P^T W P = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i)$$

$$B(x) = P^T W = [w_1(x) p(x_1), w_2(x) p(x_2), \dots, w_n(x) p(x_n)]$$

Dengan menyelesaikan Persamaan terhadap $a(x)$, maka diperoleh :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \hat{u}_i, \text{ dengan } \phi_i(x) = P^T(x) A^{-1}(x) B(x)$$

Pemilihan fungsi bobot w yang akan digunakan adalah bebas selama fungsi tersebut positif dan kontinu (Basuki W, 2009). Fungsi bobot yang sering digunakan adalah fungsi bobot *spline*. Fungsi bobot *spline* adalah:

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8 \left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3 \left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4 & , 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & , d_i \geq r_i \end{cases}$$

Salah satu fungsi tes yang dikemukakan oleh Atlury da Shen (2002) adalah fungsi *heavyside*. Fungsi tes ini merupakan fungsi tes yang paling sederhana, karena menggunakan fungsi konstan. Untuk mendiskretisasi bentuk *local weak* seperti telah dibahas sebelumnya, persamaan aproksimasi MLS disubstitusikan ke persamaan bentuk *local weak* tersebut. Hasil substitusi tersebut kemudian dibentuk menjadi sistem persamaan linear berikut :

$$K\hat{u}' + C\hat{u} = f$$

3. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Simulasi dilakukan dengan memberikan beberapa masukan sebagai kondisi awal yang berupa kedalaman, kecepatan, dan ketinggian sedimen. Hal ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh kecepatan, kedalaman serta bentuk morfologi sungai tersebut terhadap distribusi sedimen pada dasar sungai. *Governing equation* untuk aliran menikung diperoleh dengan mentranspormasi Persamaan aliran lurus ke dalam bentuk koordinat polar adalah sebagai berikut:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \theta = \arctan \frac{y}{x}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

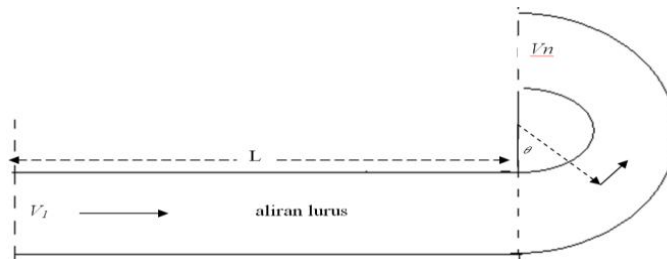
Kekkekalan massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 2 \sin \theta \frac{\partial hv}{\partial r} + \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial hv}{\partial \theta} = 0$$

Kekkekalan momentum:

$$h \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial t} + 2hv \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2hvcos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v^2 \sin \theta \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v^2 \cos \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} = - \left(gh \left(\sin \theta + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{gh(\cos \theta - \sin \theta)}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + gh^2(S_x + S_y) \right)$$

Sedangkan untuk kondisi batas (Γ) diasumsikan sebagai berikut:



Rumus yang digunakan untuk menghitung perubahan dasar sungai akibat adanya transportasi sedimen dan untuk menghitung banyaknya transportasi sedimen adalah sebagai berikut:

Kekkekalan massa sedimen:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \left((\sin \theta + \cos \theta) \frac{\partial q_b}{\partial r} + \frac{(\cos \theta - \sin \theta)}{r} \frac{\partial q_b}{\partial \theta} \right) = 0$$

3.1. Penerapan Metode MLPG

Governing equation disusun dalam bentuk matriks diperoleh sistem persamaan:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ 2hv \\ z_b \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} 3hv^2 \sin \theta + gh^2(\sin \theta + \cos \theta) \\ \frac{2hv \sin \theta}{r} \\ \frac{q_b(\sin \theta + \cos \theta)}{(1-p)} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \frac{2hv \cos \theta}{r} \\ \frac{gh^2(\cos \theta - \sin \theta) - hv^2 \cos \theta}{r} \\ \frac{q_b(\cos \theta - \sin \theta)}{(1-p)r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_x + S_y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimisalkan:

$$V = \begin{bmatrix} h \\ 2hv \\ z_b \end{bmatrix}, F(V) = \begin{bmatrix} 3hv^2 \sin \theta + gh^2(\sin \theta + \cos \theta) \\ \frac{2hv \sin \theta}{r} \\ \frac{q_b(\sin \theta + \cos \theta)}{(1-p)} \end{bmatrix}, G(V) = \begin{bmatrix} \frac{2hv \cos \theta}{r} \\ \frac{gh^2(\cos \theta - \sin \theta) - hv^2 \cos \theta}{r} \\ \frac{q_b(\cos \theta - \sin \theta)}{(1-p)r} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_x + S_y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem Persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial F(V)}{\partial x} + \frac{\partial G(V)}{\partial y} = H$$

Untuk menyelesaikan model sedimentasi di atas didekati dengan pendekatan MLS sebagai berikut:

$$V^h(r, \theta, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(r, \theta) \hat{V}_j(t)$$

Dengan I_{sl} adalah indeks terkecil dan I_{sr} adalah indeks terbesar dari titik-titik diskrit yang berada dalam sub-domain $[xy_{sl} \ xy_{sr}]$, dengan

$$\phi_j(r, \theta) = \sum_{i=1}^m p_i(r, \theta) (A^{-1}(r, \theta)B(r, \theta))_{ij}$$

Dengan mengimplementasikan MLS pada model sedimentasi yang ada, maka diperoleh:

$$\sum_{j=I_{sl}}^{I_{sl}} \hat{V}'_j(t)K_{ij} + \sum_{j=I_{sr}}^{I_{sr}} \hat{V}_j(t)C_{ij} - f_i = 0, i = 1,2,3, \dots n$$

Dalam bentuk matrik Persamaan dapat ditulis menjadi:

$$K \hat{V}' + C \hat{V} - f = 0$$

3.2. Diskretisasi Persamaan Terhadap Waktu.

Persamaan di diskritisasi dengan menggunakan Deret Taylor, diperoleh:

$$\hat{V}^{(t+\Delta t)} = K^{-1} \left((K - \Delta t C) \hat{V}^t + \Delta t f \right)$$

3.3. Stabilitas Numerik

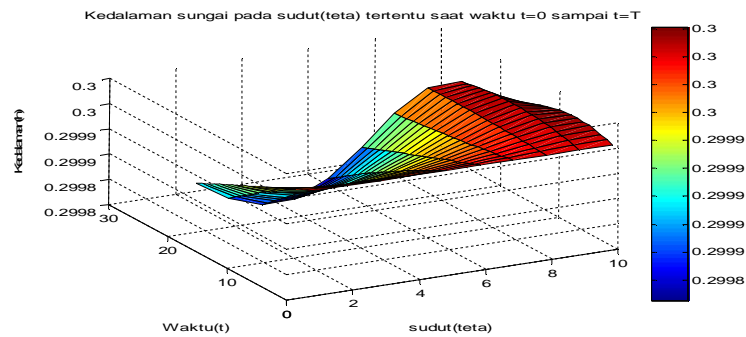
Dikarenakan skema numerik untuk metode MLPG yang digunakan adalah skema eksplisit, maka perhitungan dilakukan dengan setiap waktu tertentu (Δt). Diketahui bahwa $\Delta t^2 \rightarrow 0$, dengan kata lain agar dapat konsisten haruslah $\Delta t < 1$. Perhitungan ini dibuat untuk setiap waktu tertentu dengan menggunakan kriteria dibawah ini:

$$\Delta t \leq \frac{\min [dr(i, j)]}{2 \max [(\sqrt{gh + \sqrt{u^2 + v^2}})_{i, j}]}$$

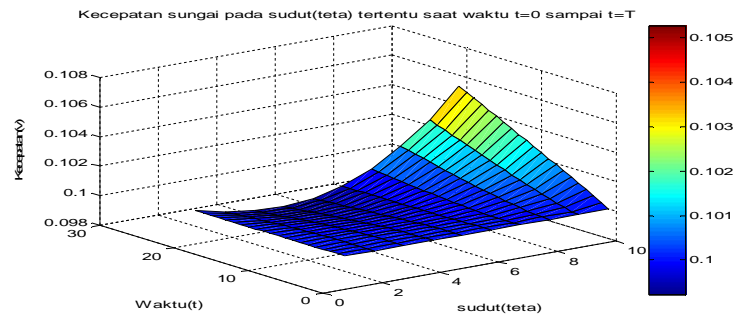
dimana $dr(i,j)$ adalah jarak antara stiap titik tengah dari masing-masing subdomain.

3.4. Simulasi

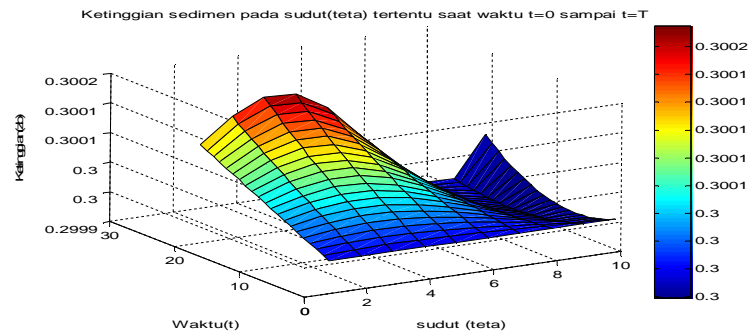
Dengan beberapa inputan sebagai kondisi awal $h = 0.3, v = 0.1, z_b = 0.3, T = 10, \Delta t = 0.5$



Gambar a. Plot kedalaman sungai.



Gambar b. Plot kecepatan sungai.



Gambar c. Plot ketinggian sedimen.

Dari hasil plot Gambar (a - c) terlihat bahwa pada sudut (teta) tertentu terjadi perubahan yang berbeda-beda, baik perubahan kedalaman, kecepatan, maupun ketinggian sedimen setelah selang waktu T. Perubahan yang paling besar terjadi pada daerah atau titik 4-5. Kedalaman sungai mengalami penurunan kurang lebih sekitar 0.0002. Dengan kata lain terjadi kenaikan ketinggian sedimen sebesar penurunan kedalamannya di titik atau daerah tersebut. Sementara kecepatan sungai mengalami kenaikan kurang lebih sekitar 0.0053.

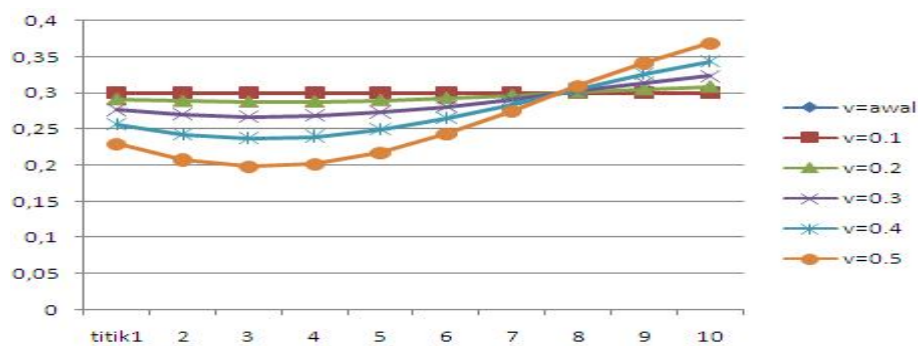
3.5. Pengaruh Kedalaman Terhadap Ketinggian Sedimen, saat $T=10, \Delta t = 0.5, v=0.1$



Grafik ketinggian sedimen setelah waktu T

Grafik di atas merupakan grafik perubahan ketinggian sedimen dari masing-masing posisi titik di dasar sungai setelah selang waktu T . Pada sudut (θ) tertentu terjadi penurunan ketinggian sedimen, sedangkan pada sudut (θ) yang lain mengalami kenaikan. Pada kedalaman h tertentu terjadi kenaikan ketinggian pada titik 3-4, serta penurunan pada titik 9-10. Dan sebaliknya terjadi penurunan ketinggian titik 3-4, kenaikan pada titik 9-10. Dengan variasi kedalaman awal yang diberikan ketinggian sedimen mengalami kenaikan rata-rata sekitar 0,00013.

3.6. Pengaruh Kecepatan Terhadap Ketinggian Sedimen $T=10$, $\Delta t = 0.5$, $h=0.1$



Grafik ketinggian sedimen setelah waktu T

Grafik di atas merupakan grafik perubahan ketinggian sedimen dari masing-masing sudut (θ) di dasar sungai setelah selang waktu T . Dari grafik di atas terlihat bahwa pada titik 3-4 terjadi penurunan ketinggian sedimen, sedangkan pada titik-titik yang lain yaitu titik 9-10 mengalami kenaikan. Dengan variasi kecepatan awal yang diberikan ketinggian sedimen mengalami penurunan rata-rata sekitar 0,01657.

4. KESIMPULAN

Dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan bahwa :

- Model sedimentasi dapat dibangun dalam dua bagian yaitu: hidrodinamika dan morfologi sungai. Agar dapat diselesaikan dengan menggunakan metode MLPG, maka terlebih dahulu model tersebut dirubah dalam bentuk *local weak*.
- Ketika diberikan variasi kedalaman awal yaitu $h=0.1$ sampai $h=0.5$ dengan kecepatan awal aliran v yang sama $v=0.1$, ketinggian sedimen pada masing-masing posisi titik mengalami penurunan rata-rata yang berbeda-beda, ketinggian sedimen mengalami kenaikan rata-rata sekitar 0.00013. Demikian juga ketika diberikan variasi kecepatan

awal $v=0.1$ sampai $v=0.5$ dengan kedalaman awal h yang sama $h=0.3$, ketinggian sedimen mengalami penurunan rata-rata sekitar 0.01657.

- c) Pola distribusi sedimen di sepanjang aliran dipengaruhi oleh kedalaman, kecepatan, serta bentuk morfologinya. Sepanjang aliran sungai terjadi perbedaan perubahan di setiap posisi titik, baik perubahan kedalaman, kecepatan, serta perubahan ketinggian sedimen setelah selang waktu T tertentu, namun perubahannya cukup kecil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Atlury dan Lin. (2000). *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equation*. MnES vol.1.no.2,pp.42-60.
- [2] Atlury dan Lin. (2001). *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Convection-Diffusion Problems*. CMES, vol.1, no.2, pp.45-60, 2000.
- [3] Altury dan Shen. (2001). *The Meshless Lokal Petrov-Galerkin Method for solving incompressible Navier-stoke equation*. CMES vol.2.no.1,pp.117-142.
- [4] Altury dan Shen. (2002). *The Meshless Lokal Petrov-Galerkin Method*. CMES vol.3.no.1,pp.11-51.
- [5] Munson. (2003). *Mekanika Fluida*. Erlangga. Jakarta.
- [6] Liu, Z. (2001). *Sedimen Transport*. Laboratoriet for hydrolic og Havnebygning Institutet.
- [7] Ottevanger, W. (2005). *Diacontinues Finite Elemen Modeling of River Hydroolics and Morphology With Application*. Univercity of Twente.
- [8] Widodo, Basuki.(2009). *The Application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method on The Model of Sedimentation in A Junction of Two River*. Mathematic ITS Surabaya.
- [9] Yang, C.T. (1996). *Sediment transport, Theory and Practice*. Mc Graw Hill.New York.

ANALISIS PENGAMBILAN KEPUTUSAN JENIS TRANSPORTASI DARI TEMPAT TINGGAL MENUJU KAMPUS UNS DENGAN METODE ANP

Raditya Wicaksanang dan Diari Indriati
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Sebelas Maret Surakarta

ABSTRAK. Kebutuhan transportasi dalam suatu wilayah semakin meningkat saat ini. Jenis transportasi yang efektif sangat diperlukan untuk menunjang proses kehidupan manusia. Begitu juga permasalahan transportasi yang terjadi di Universitas Sebelas Maret (UNS). Beragamnya jenis transportasi digunakan oleh civitas akademika UNS dari tempat tinggal menuju kampus UNS mengakibatkan terjadi kepadatan lalu lintas di sekitar UNS pada jam sibuk. Dari beragam jenis transportasi yang digunakan ada 5 jenis transportasi yang dominan, yaitu mobil, motor, jalan kaki, kendaraan umum dilanjutkan ojek, dan kendaraan umum dilanjutkan jalan kaki. Untuk menentukan jenis transportasi optimal yang digunakan oleh civitas akademika dari tempat tinggal dengan jarak kurang dari 2 km menuju kampus UNS dapat digunakan metode *analytic network process (ANP)*. Metode ANP digunakan dalam masalah tentang pengambilan keputusan yang terdiri dari interaksi dan ketergantungan dari elemen yang satu dengan lainnya dengan menyusunnya ke dalam suatu *network* agar semua interaksi dan keterkaitan antar elemen tersebut tampak dengan jelas. Hasil analisis dengan metode ANP menunjukkan jenis transportasi yang optimal adalah jalan kaki.

Kata kunci: ANP, jenis transportasi, pengambilan keputusan

1. PENDAHULUAN

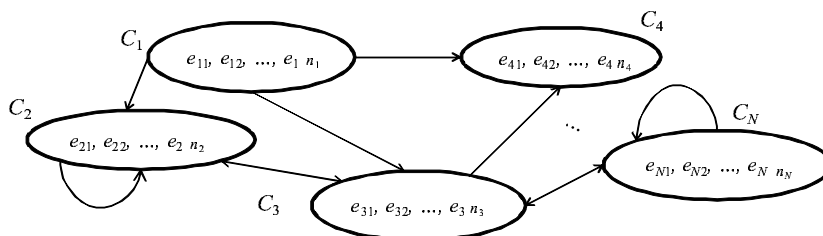
Metode *analytic hierarchy process (AHP)* adalah sebuah kerangka untuk mengambil keputusan yang efektif atas persoalan yang kompleks dengan menyederhanakan dan mempercepat proses pengambilan keputusan. Persoalan tersebut disusun ke dalam suatu susunan hirarki, memberi nilai numerik pada pertimbangan subjektif tentang pentingnya tiap variabel dan mensintesis berbagai pertimbangan ini untuk menetapkan variabel mana yang memiliki prioritas paling tinggi dan bertindak untuk mempengaruhi hasil pada situasi tersebut [2].

Menurut Saaty dan Vargas [6], banyak masalah tentang pengambilan keputusan yang tidak dapat disusun secara hirarki karena diperlukannya interaksi dan ketergantungan dari elemen yang berada di level lebih tinggi dengan elemen yang berada di level yang lebih rendah pada susunan hirarki. Oleh karena itu diperlukan suatu susunan lain yaitu *network* agar semua interaksi dan keterkaitan antar elemen tersebut tampak dengan jelas. Metode *analytic network process (ANP)* merupakan generalisasi dan penyempurnaan dari metode AHP. Hasil yang diperoleh dengan metode ANP akan jauh lebih representatif dibandingkan hasil penelitian menggunakan metode AHP.

Kebutuhan transportasi dalam suatu wilayah semakin meningkat saat ini. Jenis transportasi yang efektif sangat diperlukan untuk menunjang proses kehidupan manusia. Begitu juga permasalahan transportasi yang terjadi di Universitas Sebelas Maret (UNS). Terdapat suatu masalah seperti lahan parkir yang terbatas di beberapa fakultas di UNS. Penambahan lahan parkir menjadi salah satu solusi untuk masalah ini, tetapi jika solusi ini digunakan maka terdapat kesulitan untuk mencari lahan alternatif tempat parkir dan biaya yang digunakan untuk membangunnya. Oleh karena itu dibutuhkan solusi lain yang lebih efektif untuk mengatasinya [7]. Solusi lain seperti pengadaan angkutan kampus dan jalur khusus untuk pejalan kaki menjadi suatu pilihan alternatif sebagai penentu solusi mana yang lebih efektif dengan mempertimbangkan faktor-faktor yang terlibat. Pemilihan faktor-faktor yang mempengaruhi jenis transportasi di UNS dapat ditentukan dengan menggunakan metode ANP.

2. MATERI DAN METODE

2.1. **Komponen ANP.** Menurut Saaty [5], komponen ANP terdiri dari hirarki kontrol, *cluster*, elemen, hubungan antar elemen, dan hubungan antar *cluster*. Ada dua jenis keterkaitan pada metode ANP, yaitu keterkaitan elemen dalam satu *cluster* (*inner dependence*) dan keterkaitan elemen dalam *cluster* yang berbeda (*outer dependence*) [5]. Keterkaitan pada ANP digambarkan dalam suatu *network* yang terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Struktur *network* dalam ANP

Dari Gambar 1, C_1, C_2, \dots, C_N adalah *cluster* dalam *network*. Elemen-elemen dalam *cluster* dinotasikan $e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in_i}$, dengan $i = 1, 2, \dots, N$. *Cluster* C_1 dengan C_2 terjadi hubungan *outer dependence*, elemen dalam *cluster* C_2 memiliki hubungan *inner dependence*, dan *cluster* C_2 dengan C_3 terjadi hubungan timbal-balik, yang berarti C_2 mempengaruhi C_3 dan sebaliknya.

Hirarki kontrol terdiri dari kriteria pada tingkat atas yang mempengaruhi pengambilan keputusan. Kriteria kontrol menyediakan kriteria untuk membandingkan masing-masing tipe interaksi dalam *network*. Dalam ANP terdapat empat kriteria kontrol dasar, yaitu keuntungan (*benefits*), kesempatan (*opportunities*), biaya (*costs*), dan resiko (*risk*). Menurut Saaty [5], keempat kriteria kontrol ini biasa disebut dengan *BOCR*. Seluruh kontrol kriteria tidak harus digunakan jika terdapat kriteria yang tidak relevan.

Agar diperoleh skala yang bermanfaat ketika membuat perbandingan keterkaitan antar elemen, perlu dipahami tujuan yang diambil secara umum. Dalam penyusunan skala kepentingan digunakan nilai mutlak skala fundamental pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai mutlak skala fundamental

| Skala Nilai | Definisi | Keterangan |
|-------------|---|--|
| 1 | Sama pentingnya | Kedua elemen memberikan kontribusi yang sama pada sifat itu |
| 3 | Elemen yang satu sedikit penting | Pengalaman dan pertimbangan sedikit memilih satu elemen atas yang lain |
| 5 | Kuat pentingnya | Pengalaman dan pertimbangan lebih memilih satu elemen atas yang lain |
| 7 | Sangat kuat | Kegiatan satu elemen sangat penting dari lainnya; dalam praktiknya menunjukkan kegiatan tersebut dominan |
| 9 | Mutlak pentingnya | Bukti menunjukkan bahwa satu elemen memiliki tingkat penegasan tertinggi |
| Kebalikan | $(a_{ji} = 1/a_{ij})$ | |
| 2,4,6,8 | Nilai tengah | Jika terdapat keraguan penilaian antara dua tingkat kepentingan yang berdekatan |
| 1.1-1.9 | Jika kedua kegiatan sangat dekat pentingnya | Kedua kegiatan sangat sulit dibandingkan tetapi masih dapat mengindikasikan kepentingan kedua kegiatan |

Sumber: Saaty [4] dan Teknomo dkk [7]

Jika diasumsikan terdapat n elemen yang akan dinilai kepentingannya secara berpasangan dan e_1, e_2, \dots, e_n adalah himpunan dari elemen-elemen, maka penilaian secara berpasangan antara e_i dengan e_j , direpresentasikan dalam matriks A dengan ukuran $n \times n$.

$$A = (a_{ij}) \text{ dengan } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Pemasukan nilai a_{ij} mengikuti aturan berikut.

- (1) Jika $a_{ij} = \alpha$, maka $a_{ji} = 1/\alpha$ ($\alpha \neq 1$).
- (2) Jika e_i mempunyai tingkat kepentingan relatif yang sama dengan e_j , maka $a_{ij} = a_{ji} = 1$.
- (3) Hal yang khusus adalah $a_{ii} = 1$ untuk semua i .

Dengan demikian, bentuk matriks A menjadi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jika telah didapat matriks perbandingan berpasangan, maka selanjutnya ditentukan bobot tiap elemen untuk memperoleh vektor prioritas. Setelah seluruh matriks perbandingan berpasangan dibobot dan diperoleh vektor prioritas, matriks-matriks tersebut dilakukan perhitungan konsistensi.

2.2. Konsistensi Logis. Konsistensi memiliki dua makna, pertama adalah objek-objek yang serupa dapat dikelompokkan sesuai dengan keseragaman dan relevansi. Arti kedua adalah menyangkut tingkat hubungan antara objek-objek yang didasarkan pada kriteria tertentu.

Pada kenyataannya, terjadi beberapa penyimpangan hubungan sehingga matriks tidak konsisten lagi. Hal ini terjadi karena ketidakkonsistenan pengambil keputusan. Hasil penerimaan yang diterima adalah matriks yang mempunyai perbandingan konsistensi kurang dari 10%. Jika lebih besar dari 10% maka penilaian yang telah dilakukan random dan perlu diperbaiki lagi [3]. Jika matriks berorde 3, nilai konsistensi kurang dari 5% dan matriks berorde 4, nilai konsistensi kurang dari 8% [4].

Untuk menghitung tingkat konsistensi digunakan

$$\lambda_{maks} = \Sigma(\Sigma \text{ kolom} \times \Sigma \text{ baris bobot yang dinormalisasi}), \quad (2.1)$$

$$CI \text{ (indeks konsistensi)} = \frac{\lambda_{maks} - n}{n - 1}, \text{ dan } CR \text{ (rasio konsistensi)} = \frac{CI}{RI}.$$

Dimana n adalah orde matriks dan nilai indeks random (RI) diperoleh dari Tabel 2.

Tabel 2. Nilai indeks random

| Orde Matriks | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| RI | 0.00 | 0.00 | 0.58 | 0.89 | 1.11 | 1.25 | 1.35 | 1.40 | 1.45 | 1.49 |

Sumber: Saaty [4]

2.3. Supermatriks. Supermatriks digunakan dalam *ANP* karena adanya hubungan keterkaitan antar elemen pada tiap *cluster*. Menurut Saaty [5], terdapat 3 jenis supermatriks dalam *ANP*.

- (1) Supermatriks awal yang terbentuk dari semua vektor prioritas yang diperoleh dari matriks perbandingan berpasangan antar elemen.
- (2) Supermatriks terbobot yang terbentuk dari tiap blok vektor prioritas dibobot berdasarkan matriks perbandingan berpasangan antar *cluster*.

- (3) Supermatriks limit yang diperoleh dengan membangkitkan supermatriks terbobot ke power yang besar, yaitu dengan cara memangkatkan supermatriks terbobot dengan pangkat k dimana $k = 1, 2, \dots$ dan diperoleh hasil yang menuju suatu nilai tertentu yang mengakibatkan semua kolom pada supermatriks limit bernilai sama.

Secara umum, supermatriks direpresentasikan dengan matriks W , yaitu

$$W = \begin{array}{c|ccc} & C_1 & \dots & C_N \\ \hline & e_{11}e_{12} \dots e_{1n_1} & \dots & e_{N1}e_{N2} \dots e_{Nn_1} \\ \hline C_1 & \begin{array}{c} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1n_1} \end{array} & \begin{array}{c} W_{11} \\ \dots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} W_{1N} \\ \dots \\ \vdots \end{array} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_N & \begin{array}{c} e_{N1} \\ e_{N2} \\ \vdots \\ e_{Nn_N} \end{array} & \begin{array}{c} W_{N1} \\ \dots \\ \vdots \end{array} & \begin{array}{c} W_{NN} \\ \dots \\ \vdots \end{array} \end{array} \quad (2.2)$$

Sementara itu, blok i, j dari supermatriks W adalah

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} W_{i1}^{(j_1)} & W_{i1}^{(j_2)} & \dots & W_{i1}^{(j_{n_j})} \\ W_{i2}^{(j_1)} & W_{i2}^{(j_2)} & \dots & W_{i2}^{(j_{n_j})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{in_i}^{(j_1)} & W_{in_i}^{(j_2)} & \dots & W_{in_i}^{(j_{n_j})} \end{pmatrix}$$

Dengan $W_{in_i}^{(j_{n_j})}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ adalah vektor prioritas yang diperoleh dari matriks perbandingan berpasangan.

2.4. **Proses ANP.** Menurut Cheng dan Li [1], proses ANP terdiri dari 4 langkah utama, yaitu.

- (1) Konstruksi model dan struktur masalah. Masalah harus ditetapkan dengan jelas dan dipecah ke dalam sistem yang rasional seperti *network* yang akan menjadi model ANP.
- (2) Matriks perbandingan berpasangan dan vektor prioritas.
- (3) Menyusun supermatriks.
- (4) Menyeleksi alternatif terbaik. Jika supermatriks pada langkah (3) sudah mencakup seluruh *network*, bobot prioritas dari alternatif dapat ditentukan dari kolom alternatif.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

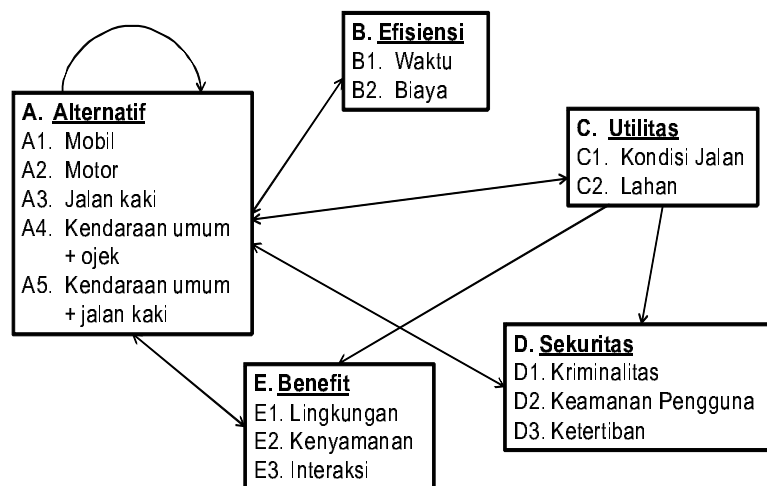
3.1. **Penyusunan Network.** Beragamnya jenis transportasi digunakan oleh civitas akademika UNS dari tempat tinggal menuju kampus UNS mengakibatkan terjadi kepadatan lalu lintas di

sekitar UNS pada jam sibuk. Dari beragam jenis transportasi yang digunakan ada 5 jenis transportasi yang dominan, yaitu mobil, motor, jalan kaki, kendaraan umum dilanjutkan ojek, dan kendaraan umum dilanjutkan jalan kaki.

Network yang terdiri dari beberapa *cluster* disusun berdasarkan 4 hirarki kontrol *BOCR* dan faktor-faktor yang terlibat.

- (1) *Cluster* alternatif yang terdiri dari 5 jenis transportasi yang dominan digunakan di UNS, yaitu mobil, motor, jalan kaki, kendaraan umum dilanjutkan ojek, dan kendaraan umum dilanjutkan jalan kaki.
- (2) Kriteria kontrol biaya yaitu *cluster* efisiensi yang terdiri dari 2 elemen, yaitu waktu dan biaya.
- (3) Kriteria kontrol kesempatan yaitu utilitas yang terdiri dari 2 elemen yaitu kondisi jalan dan lahan.
- (4) Kriteria kontrol risiko yaitu *cluster* sekuritas yang terdiri dari 3 elemen, yaitu kriminalitas, keamanan pengguna, dan ketertiban.
- (5) Kriteria kontrol keuntungan yaitu *cluster benefit* yang terdiri dari 3 elemen yaitu lingkungan, kenyamanan, dan interaksi sosial.

Dari 5 *cluster* disusun menjadi suatu *network* yang terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. *Network* alternatif pemilihan jenis transportasi dari tempat tinggal menuju kampus

Gambar 2 menunjukkan keterkaitan antar elemen dalam suatu *cluster*, keterkaitan antar elemen antar *cluster*, dan keterkaitan timbal-balik. Keterkaitan antar elemen dalam suatu *cluster* terjadi pada *cluster* alternatif. Keterkaitan antar elemen antar *cluster* terjadi pada *cluster* utilitas dengan *cluster* sekuritas dan *cluster benefit*. Sedangkan keterkaitan timbal-balik terjadi pada *cluster* alternatif dengan *cluster* efisiensi, utilitas, sekuritas, dan *benefit*.

3.2. Pengambilan Keputusan dalam Grup. Dalam pengambilan keputusan pada penelitian ini, pertimbangan diberikan oleh 2 orang pengambil keputusan. Untuk memperoleh rata-rata dari pertimbangan keduanya, digunakan metode rata-rata geometrik berikut [3].

$$a_{ij} = (Z_1 Z_2)^{1/2}.$$

Sehingga diperoleh rata-rata geometrik untuk pertimbangan alternatif terhadap efisiensi waktu pada Tabel 3. Perhitungan rata-rata geometrik juga dilakukan untuk pertimbangan lainnya.

Tabel 3. Perbandingan tingkat kepentingan alternatif terhadap efisiensi waktu

| Alternatif | Z_1 | Z_2 | Rata-rata geometrik |
|------------|-------|-------|---------------------|
| A1 - A2 | 1/5 | 1/3 | 1/3.873 |
| A1 - A3 | 2 | 5 | 3.1623 |
| A1 - A4 | 1/3 | 1/2 | 1/2.4495 |
| A1 - A5 | 2 | 2 | 2 |
| A2 - A3 | 7 | 7 | 7 |
| A2 - A4 | 2 | 3 | 2.4495 |
| A2 - A5 | 6 | 6 | 6 |
| A3 - A4 | 1/5 | 1/3 | 1/3.873 |
| A3 - A5 | 1/2 | 1/3 | 1/2.4495 |
| A4 - A5 | 3 | 2 | 2.4495 |

3.3. Matriks Perbandingan Berpasangan. Berdasarkan hasil rata-rata geometrik, disusun matriks perbandingan berpasangan alternatif terhadap efisiensi waktu yang terlihat pada Tabel 4 kolom (1) – (5). Kemudian dilakukan perhitungan vektor prioritas pada Tabel 4 kolom (6)

Tabel 4. Matriks perbandingan berpasangan dan vektor prioritas alternatif terhadap efisiensi waktu

| | A1 (1) | A2 (2) | A3 (3) | A4 (4) | A5 (5) | vektor prioritas (6) |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|
| A1 | 1 | 1/3.873 | 3.1623 | 1/2.4495 | 2 | 0.1387 |
| A2 | 3.873 | 1 | 7 | 2.4495 | 6 | 0.4859 |
| A3 | 1/3.1623 | 1/7 | 1 | 1/3.873 | 1/2.4495 | 0.052 |
| A4 | 2.4495 | 1/2.4495 | 3.873 | 1 | 2.4495 | 0.2313 |
| A5 | 1/2 | 1/6 | 2.4495 | 1/2.4495 | 1 | 0.0921 |
| Jumlah | 8.1387 | 1.976 | 17.4848 | 4.5242 | 11.8577 | 1 |

dengan cara menormalisasikan matriks perbandingan berpasangan. Dengan cara yang sama diperoleh matriks perbandingan berpasangan untuk pertimbangan lainnya.

3.4. Tingkat Konsistensi. Untuk menguji apakah pertimbangan yang diberikan oleh pengambil keputusan konsisten, dilakukan perhitungan rasio konsistensi menggunakan persamaan 2.1 dan diperoleh hasil

$$\lambda_{maks} = 5.1360, CI = 0.0340, \text{ dan } CR = 0.0306.$$

Karena $CR < 10\%$ sehingga pertimbangan yang dilakukan oleh kedua pengambil keputusan untuk alternatif terhadap efisiensi waktu sudah konsisten.

Dengan cara yang sama dilakukan untuk matriks perbandingan berpasangan yang lain dan hasil untuk pertimbangan lainnya sudah konsisten. Untuk matriks berorde kurang dari atau sama dengan 2, tidak perlu dihitung tingkat konsistensi CR -nya karena membandingkan 1 atau 2 elemen pertimbangan dari pengambil keputusan sudah pasti konsisten.

3.5. Matriks Cluster. Suatu *cluster* secara otomatis saling terhubung dikarenakan keterkaitan antar elemennya. Dalam kehidupan nyata, antar *cluster* yang saling terhubung dapat mempunyai tingkat kepentingan yang berbeda-beda. Sehingga *cluster* yang saling terhubung dapat disusun berdasarkan keterkaitan yang ada di dalam *network* dan disusun ke dalam matriks perbandingan berpasangan untuk *cluster*.

Dari Gambar 2 diperoleh 2 matriks perbandingan berpasangan *cluster*. Penentuan banyaknya matriks ini berdasarkan *cluster* yang memiliki pengaruh terhadap *cluster* lainnya. Dua *cluster* yang mempengaruhi *cluster* lainnya adalah *cluster* alternatif dan utilitas. Sehingga diperoleh matriks *cluster* pada Tabel 5.

Tabel 5. Matriks *cluster*

| | A | B | C | D | E |
|---|--------|---|--------|---|---|
| A | 0.4350 | 1 | 0.3092 | 1 | 1 |
| B | 0.2003 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0.0747 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0.0747 | 0 | 0.1095 | 0 | 0 |
| E | 0.2153 | 0 | 0.5813 | 0 | 0 |

3.6. Supermatriks. Tiga supermatriks dalam *ANP* digunakan, yaitu supermatriks awal, supermatriks terbobot, dan supermatriks limit.

- (1) Supermatriks awal. Setelah perhitungan vektor prioritas dari semua matriks perbandingan berpasangan, langkah selanjutnya adalah menyusun vektor tersebut ke dalam supermatriks awal pada Tabel 6.
- (2) Supermatriks terbobot. Supermatriks awal yang telah dibuat kemudian dinormalisasikan dengan matriks *cluster* agar menjadi stokastik sehingga diperoleh supermatriks

Tabel 6. Supermatriks awal

| | A | | | | | B | | | C | | | D | | | E | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--------|--------|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | | C1 | C2 | | D1 | D2 | D3 | E1 | E2 | E3 |
| A1 | 0 | 0.0643 | 0.5332 | 0.1928 | 0.4883 | 0.1387 | 0.0432 | | 0.1605 | 0.1313 | | 0.1123 | 0.1816 | 0.1591 | 0.0369 | 0.5134 | 0.0491 |
| A2 | 0.0751 | 0 | 0.3057 | 0.1209 | 0.2509 | 0.4859 | 0.0995 | | 0.4195 | 0.1873 | | 0.0916 | 0.0722 | 0.0482 | 0.0654 | 0.2205 | 0.0429 |
| A3 | 0.4773 | 0.5174 | 0 | 0.4168 | 0.1001 | 0.0520 | 0.4971 | | 0.0630 | 0.2417 | | 0.4300 | 0.4294 | 0.4482 | 0.4994 | 0.0497 | 0.1931 |
| A4 | 0.1368 | 0.1149 | 0.1019 | 0 | 0.1607 | 0.2313 | 0.0882 | | 0.2526 | 0.2440 | | 0.1404 | 0.0944 | 0.0960 | 0.0878 | 0.1509 | 0.3952 |
| A5 | 0.3109 | 0.3034 | 0.0592 | 0.2695 | 0 | 0.0921 | 0.2719 | | 0.1043 | 0.1957 | | 0.2258 | 0.2224 | 0.2485 | 0.3106 | 0.0655 | 0.3197 |
| B | 0.8333 | 0.8750 | 0.1000 | 0.2052 | 0.1446 | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B2 | 0.1667 | 0.1250 | 0.9000 | 0.7948 | 0.8554 | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0.2052 | 0.1667 | 0.5420 | 0.7948 | 0.8554 | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C2 | 0.7948 | 0.8333 | 0.4580 | 0.2052 | 0.1446 | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0.6356 | 0.5325 | 0.2195 | 0.1616 | 0.2476 | 0 | 0 | | 0.1300 | 0.2920 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D2 | 0.1712 | 0.1522 | 0.4055 | 0.5648 | 0.4101 | 0 | 0 | | 0.4190 | 0.1971 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D3 | 0.1732 | 0.3153 | 0.3750 | 0.2736 | 0.3423 | 0 | 0 | | 0.4510 | 0.5109 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0.0917 | 0.1184 | 0.7161 | 0.1222 | 0.5880 | 0 | 0 | | 0.2027 | 0.2431 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E2 | 0.7057 | 0.6772 | 0.0812 | 0.2299 | 0.1324 | 0 | 0 | | 0.7057 | 0.6687 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E3 | 0.2027 | 0.2044 | 0.2027 | 0.6479 | 0.2796 | 0 | 0 | | 0.0917 | 0.0882 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabel 7. Supermatriks terbobot

| | A | | | | | B | | C | | | D | | | E | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | C1 | C2 | D1 | D2 | D3 | E1 | E2 | E3 | |
| A1 | 0 | 0.0280 | 0.2320 | 0.0839 | 0.2124 | 0.1387 | 0.0432 | 0.0496 | 0.0406 | 0.1123 | 0.1816 | 0.1591 | 0.0369 | 0.5134 | 0.0491 | |
| A2 | 0.0327 | 0 | 0.1330 | 0.0526 | 0.1091 | 0.4859 | 0.0995 | 0.1297 | 0.0579 | 0.0916 | 0.0722 | 0.0482 | 0.0654 | 0.2205 | 0.0429 | |
| A3 | 0.2076 | 0.2250 | 0 | 0.1813 | 0.0435 | 0.0520 | 0.4971 | 0.0195 | 0.0747 | 0.4300 | 0.4294 | 0.4482 | 0.4994 | 0.0497 | 0.1931 | |
| A4 | 0.0595 | 0.0500 | 0.0443 | 0 | 0.0699 | 0.2313 | 0.0882 | 0.0781 | 0.0754 | 0.1404 | 0.0944 | 0.0960 | 0.0878 | 0.1509 | 0.3952 | |
| A5 | 0.1352 | 0.1320 | 0.0257 | 0.1172 | 0 | 0.0921 | 0.2719 | 0.0322 | 0.0605 | 0.2258 | 0.2224 | 0.2485 | 0.3106 | 0.0655 | 0.3197 | |
| B | B1 | 0.1669 | 0.1753 | 0.0200 | 0.0411 | 0.0290 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| B2 | 0.0334 | 0.0250 | 0.1803 | 0.1592 | 0.1713 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| C | C1 | 0.0153 | 0.0125 | 0.0405 | 0.0594 | 0.0639 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| C2 | 0.0594 | 0.0623 | 0.0342 | 0.0153 | 0.0108 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| D | D1 | 0.0490 | 0.0398 | 0.0164 | 0.0121 | 0.0185 | 0 | 0.0142 | 0.0320 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| D2 | 0.0128 | 0.0114 | 0.0303 | 0.0422 | 0.0306 | 0 | 0 | 0.0459 | 0.0216 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| D3 | 0.0129 | 0.0236 | 0.0280 | 0.0204 | 0.0256 | 0 | 0 | 0.0494 | 0.0560 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| E | E1 | 0.0197 | 0.0255 | 0.1541 | 0.0263 | 0.1266 | 0 | 0.1178 | 0.1413 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| E2 | 0.1519 | 0.1458 | 0.0175 | 0.0495 | 0.0285 | 0 | 0 | 0.4102 | 0.3887 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| E3 | 0.0436 | 0.0440 | 0.0436 | 0.1395 | 0.0602 | 0 | 0 | 0.0533 | 0.0513 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Tabel 8. Supermatriks limit

| | A | | | | | B | | | | | C | | | | | D | | | | | E | | | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|--|--|--|--|---|--|--|--|--|
| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | C1 | C2 | D1 | D2 | D3 | E1 | E2 | E3 | | | | | | | | | | |
| A1 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | 0.1333 | | | | | | | | | | |
| A2 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | 0.1048 | | | | | | | | | | |
| A3 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | 0.1742 | | | | | | | | | | |
| A4 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | 0.0870 | | | | | | | | | | |
| A5 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | 0.1193 | | | | | | | | | | |
| B1 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | 0.0511 | | | | | | | | | | |
| B2 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | 0.0728 | | | | | | | | | | |
| C1 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | 0.0232 | | | | | | | | | | |
| C2 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | 0.0230 | | | | | | | | | | |
| D1 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | 0.0179 | | | | | | | | | | |
| D2 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | 0.0171 | | | | | | | | | | |
| D3 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | 0.0163 | | | | | | | | | | |
| E1 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | 0.0555 | | | | | | | | | | |
| E2 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | 0.0647 | | | | | | | | | | |
| E3 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | 0.0398 | | | | | | | | | | |

terbobot. Jumlah tiap kolom dalam supermatriks terbobot adalah 1. Hasil perhitungan normalisasi supermatriks awal menjadi supermatriks terbobot terlihat pada Tabel 7.

- (3) Supermatriks limit. Supermatriks limit diperoleh dengan cara memangkatkan supermatriks terbobot dengan pangkat $k \rightarrow \infty$. Dengan bantuan *software Mathematica* 5.2 diperoleh hasil perhitungan yang terlihat pada Tabel 8. Dalam supermatriks limit setiap kolom berisikan nilai yang sama.

3.7. Hasil Keputusan. Dari supermatriks limit, diperoleh nilai untuk semua elemen pada *network*. Karena akan ditentukan pemilihan alat transportasi dari tempat tinggal menuju kampus, dari Tabel 8 digunakan nilai pada *cluster* alternatif.

Dengan membobot nilai limit elemen-elemen pada *cluster* alternatif, diperoleh hasil keputusan pada Tabel 9. Perhitungan nilai bobot diperoleh dengan cara membagi nilai limit dengan

Tabel 9. Nilai limit alternatif

| Alternatif | Nilai limit | Nilai bobot (%) |
|------------|-------------|-----------------|
| A1 | 0.1333 | 21.55 |
| A2 | 0.1048 | 16.94 |
| A3 | 0.1742 | 28.16 |
| A4 | 0.0870 | 14.06 |
| A5 | 0.1193 | 19.29 |
| Jumlah | 0.6186 | 100 |

jumlah nilai limit alternatif dan mengalikannya dengan 100%. Jadi diperoleh urutan prioritas jenis transportasi dari tempat tinggal menuju kampus UNS, yaitu

- (1) jalan kaki sebesar 28.16 %,
- (2) mobil sebesar 21.55 %,
- (3) kendaraan umum dilanjutkan jalan kaki sebesar 19.29 %,
- (4) motor sebesar 16.94 %, dan
- (5) kendaraan umum dilanjutkan ojek sebesar 14.06 %.

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan diperoleh bahwa dengan menggunakan metode *ANP* diperoleh bahwa jenis transportasi optimal yang dapat digunakan oleh civitas akademika dari tempat tinggal dengan jarak kurang dari 2 *km* menuju kampus UNS adalah jalan kaki. Optimal yang dimaksud adalah sesuai dengan faktor efisiensi (waktu dan biaya), utilitas (kondisi jalan dan lahan), sekuritas (kriminalitas, keamanan pengguna, dan ketertiban), dan *benefit* (lingkungan, kenyamanan, dan interaksi sosial). Sehingga dapat disarankan perlu diadakan pembenahan yang baik untuk tempat berjalan kaki di sekitar kampus.

DAFTAR PUSTAKA

1. Cheng, E. W. I. and H. Li, *Contractor Selection Using The Analytic Network Process*, Construction Management and Economics, Hong Kong **22** (2004), 1021–1032.
2. IT Telkom, *Metode Analytical Hierarchy Process*, <http://www.ittelkom.ac.id/library/index.php>, 2009, diakses pada 8 Oktober 2009 pukul 12.12.
3. Kartaman, A. T., Y. Yogaswara, dan Zulfikar, *Analisa Keputusan Pemindahan Mesin Zehntel di PT Inti (Persero) dengan Menggunakan Metoda Analytical Hierarchy Process*, Prosiding Seminar Nasional Manajemen Teknologi II (2005), 171–179.
4. Saaty, T. L., *Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process*, RWS Publications, Pittsburgh, USA, 2001.
5. ———, *Slide of The Essentials of The Analytic Network Process with Seven Examples: Decision Making with Dependence and Feedback*, USA, 2006.
6. Saaty, T. L. and L. G. Vargas, *Decision Making with The Analytic Network Process: Economic, Political, Social, and Technological Application With Benefits, Opportunities, Costs, and Risks*, Springer, New York, USA, 2006.
7. Teknomo, K., H. Siswanto, dan S. A. Yudhanto, *Penggunaan Metode Analytic Hierarchy Process dalam Menganalisa Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Pemilihan Moda ke Kampus*, Dimensi Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra **1** (1999), no. 1, 31–39.

HUBUNGAN ANTARA KETERKENDALIAN DAN KENORMALAN PADA SISTEM LINEAR SINGULAR

Kris Suryowati
Jurusan Matematika, Fakultas Sains Terapan
IST AKPRIND Yogyakarta
atik-hasna@plasa.com

ABSTRACT. The controllability character and normalizability of linear singular system are very important at application. The short paper is discussed at properties controllability and normalizability of linear singular system include the following is necessary condition and sufficient, a linear singular system is controllability and normalizability. Furthermore, the relationship between controllability and normalizability are pointed. If system is controllability then system is normalizability and not be conversely. If the system is normalizability then it inoperative that the systems is controllability. Given this system to system normal form then will make light of to see character by systems normal newly forming.

Kata kunci: *system singular linear, controllability and normalizability*

1. PENDAHULUAN

Sistem linear singular yang dimaksud disini adalah sistem linear singular time invariant, yang berbentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ dan $y(t) \in \mathbb{R}^r$ berturut-turut merupakan vektor keadaan, vektor masukan dan vektor keluaran. Sedangkan $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dan $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ merupakan matriks–matriks konstan dengan elemen-elemen atas lapangan \mathbb{R} , dengan $\text{rank } E = q < n$. Untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi, diasumsikan matriks pencil $(sE - A)$ regular untuk suatu skalar s . Pada Dai, 1988 dan Cobb, 1984 membahas sifat-sifat dan karakterisasi sistem linear singular diantaranya meliputi stabilitas (*stability*), keterkendalian (*controllability*), juga kenormalan (*normalizability*). Pengertian regular suatu matriks pencil pada Gantmacher, 1960 dan sifat matriks pencil regular pada Dai, 1988.

Suryowati, dkk (2002) bentuk dekomposisi standar sistem linear singular yang terdiri dari dua subsistem adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t); \\ y_1(t) &= C_1 x_1(t)\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}N\dot{x}_2(t) &= I_{n_2} x_2(t) + B_2 u(t); \\ y_2(t) &= C_2 x_2(t)\end{aligned}\quad (3)$$

dengan $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $y_1(t), y_2(t) \in \mathbb{R}^r$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ dan N nilpoten berindeks h .

Persamaan (2) dan (3) masing-masing disebut subsistem pertama dan subsistem kedua.

Sifat keterkendalian dan sifat kenormalan sistem pada sistem linear singular merupakan sifat yang sangat penting dalam sistem. Dengan membawa suatu sistem ke bentuk sistem normal maka akan memudahkan dalam penyelesaian sistem, juga memudahkan dalam melihat karakterisasinya, mengingat pada sistem linear singular menentukan solusi dan karakterisasinya sangat rumit. Padahal pada sistem tidak semua sistem mempunyai sifat keterkendalian dan sifat kenormalan. Hubungan kedua sifat tersebut, apakah kenormalan sistem dipengaruhi sifat keterkendalian sistem atau sebaliknya keterkendalian akan mempengaruhi sifat kenormalan sistem.

Diberikan keadaan masukan kendali *feedback* berbentuk :

$$u(t) = K_1 x(t) - K_2 \dot{x}(t) + v(t) \quad (4)$$

dengan $v(t) \in \mathbb{R}^m$ merupakan vektor masukan baru dan matriks-matriks konstan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Persamaan (4) disebut persamaan *proportional* dan *derivative* (P-D) keadaan *feedback*, sehingga dengan mensubstitusi ke persamaan (1) diperoleh

$$\begin{aligned}(E+BK_2)\dot{x}(t) &= (A+BK_1)x(t) + Bv(t) \\ Y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (5)$$

Persamaan (5) merupakan bentuk loop tertutup sistem linear singular.

Jika pada persamaan (5) berlaku $\det(E+BK_2) \neq 0$ maka sistemnya disebut sistem normal.

Suatu sistem linear singular disebut *normalizability* atau dapat ternormalkan jika sistemnya dapat dibawa ke bentuk persamaan (5) dengan memberikan masukan keadaan *feedback* pada persamaan (4) yang sesuai, sedemikian sehingga memenuhi $\det(E+BK_2) \neq 0$. Atau dikatakan bahwa dengan memberikan masukan keadaan yang sesuai maka sistem loop tertutup menjadi sistem normal. Sifat-sifat karakterisasi sistem normal dibahas pada Olsder, 1994.

Pengertian keterkendalian dan kenormalan sistem linear singular sudah diberikan, dengan demikian perlu dibahas karakterisasi keterkendalian dan kenormalan sistem linear singular, dalam hal ini syarat perlu dan syarat cukup suatu sistem terkendali dan sistem

ternormalkan juga diperiksa hubungan antara keterkendalian dan kenormalan sistem tersebut, selanjutnya menentukan matriks K_2 supaya sistem menjadi sistem normal.

2. LANDASAN TEORI

Berikut ini diberikan beberapa konsep matriks dari Gantmacher, 1960

Diberikan matriks $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matriks pencil $sE - A$ disebut regular jika terdapat skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ yang memenuhi $|\alpha E - A| \neq 0$

Definisi 1

Dua matriks A dan B yang berukuran sama (sebut $n \times m$) dikatakan ekuivalen jika terdapat matriks nonsingular P berukuran $m \times m$ dan Q berukuran $n \times n$ yang memenuhi $B = QAP$

Teorema 2

Setiap matriks A berukuran $n \times n$ ekuivalen dengan suatu matriks $\text{diag}[I_r, 0]$ yaitu terdapat matriks nonsingular P dan Q sehingga $QAP = \text{diag}[I_r, 0]$, $r = \text{rank} A$.

Pada persamaan (1) khususnya jika matriks $E = I$ yaitu matriks identitas maka sistem pada persamaan (1) menjadi sistem linear normal. Selanjutnya diberikan definisi dan sifat-sifat sistem linear normal sebagai berikut yang diambil dari Olsder (1994). Kecuali jika disebutkan secara khusus.

Bentuk umum sistem normalnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{6}$$

Definisi 3

Sistem linear normal dikatakan terkendali jika untuk setiap $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ terdapat $t_1 > 0$ dan masukan kendali $u \in \mathbb{R}^m$ yang memenuhi $x(t_1, x_0, u) = x_1$

Selanjutnya pada sistem normal didefinisikan matriks \mathcal{R} sebagai matriks keterkendalian dengan

$$\mathcal{R} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \text{ berukuran } n \times mn \text{ atas } \mathbb{R}.$$

Teorema 4

Sistem pada persamaan (6) terkendali jika dan hanya jika $\text{rank} \mathcal{R} = n$.

Teorema 5

Sistem pada persamaan (6) terkendali jika dan hanya jika $\text{rank}[sI - A, B] = n$, untuk setiap $s \in \mathbb{C}$.

Lemma 6

Matriks pencil $sE-A$ regular jika dan hanya jika terdapat matriks nonsingular P dan Q berukuran $n \times n$ atas lapangan R , yang memenuhi $QEP = \text{diag}(I_{n_1}, N)$ dan $QAP = \text{diag}(A_1, I_{n_2})$ dengan $n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in R^{n_1 \times n_1}$, $N \in R^{n_2 \times n_2}$ nilpoten berindeks h

Dengan asumsi sistem Linear singular regular yaitu jika matriks pencil $(sE-A)$ regular sehingga dengan Lemma 6 dan transformasi $x(t) = P \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, sistem dapat dibawa ke

bentuk standar dekomposisi berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u(t) ; \\ y_1(t) &= C_1 x_1(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N \dot{x}_2(t) &= I_{n_2} x_2(t) + B_2 u(t) ; \\ y_2(t) &= C_2 x_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

dengan $x_1(t) \in R^{n_1}$, $x_2(t) \in R^{n_2}$, $y_1(t), y_2(t) \in R^r$, $B_1 \in R^{n_1 \times m}$, $B_2 \in R^{n_2 \times m}$, $C_1 \in R^{r \times n_1}$, $C_2 \in R^{r \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ dan N nilpoten berindeks h .

Persamaan (7) dan (8) masing-masing disebut subsistem pertama dan subsistem kedua.

Definisi 7

Sistem linear singular disebut terkendali jika untuk setiap $t_1 > 0$, $x_1(0)$, $w \in R^n$ terdapat masukan kendali $u(t) \in R^m$ yang memenuhi $x(t_1) = w$.

Diberikan $\mathfrak{R}_s = [B_1, A_1 B_1, A_1^2 B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1]$, didefinisikan sebagai matriks keterkendalian pada subsistem pertama dan $\mathfrak{R}_f = [B_2, N B_2, N^2 B_2, \dots, N^{h-1} B_2]$ yang didefinisikan sebagai matriks keterkendalian pada subsistem kedua.

3. PEMBAHASAN UTAMA

3.1. Keterkendalian Sistem Linear Singular

Sifat keterkendalian adalah penting dalam sistem sistem linear singular. Berikut karakterisasi sifat keterkendalian pada sistem linear singular

Teorema 8

1. Subsistem pertama terkendali jika dan hanya jika $\text{rank}[sE-A, B] = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$, s hingga.
2. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:
 - a. Subsistem kedua terkendali
 - b. $\text{Rank}[B_2, N B_2, N^2 B_2, \dots, N^{h-1} B_2] = n_2$

$$c. \text{Rank}[N, B_2] = n_2$$

$$d. \text{Rank}[E, B] = n$$

3. Sistem linear singular terkendali jika dan hanya jika subsistem pertama terkendali dan subsistem kedua terkendali.

Bukti :

1. (\Leftrightarrow) Untuk membuktikan bahwa subsistem pertama terkendali, cukup dibuktikan $\text{rank}[sI - A_1, B_1] = n_1, \forall s \in \mathbb{C}$, s hingga yang ekuivalen dengan subsistem pertama terkendali, dari sifat pada teori sistem normal.

$$\text{Rank}[sE - A, B] = \text{rank}[sQEP - QAP, QB] = \text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sN - I_{n_2} & B_2 \end{bmatrix} =$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sN - I_{n_2} & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}[sN - I_{n_2}] + \text{rank}[sI - A_1, B_1] =$$

$$n_2 + \text{rank}[sI - A_1, B_1]$$

Dari diketahui $\text{rank}[sE - A, B] = n$, Sehingga $n = n_2 + \text{rank}[sI - A_1, B_1]$, karena $n = n_1 + n_2$.

Ekuivalen dengan $\text{rank}[sI - A_1, B_1] = n_1, \forall s \in \mathbb{C}$, s hingga. Jadi terbukti subsistem pertama terkendali jika dan hanya jika $\text{rank}[sE - A, B] = n, \forall s \in \mathbb{C}$, s hingga

2. (**a** \Leftrightarrow **b**)

Dari definisi, diperoleh subsistem kedua terkendali jika untuk setiap $x_2(0), x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ terdapat $t > 0$ dan $u \in \mathbb{R}^m$ yang memenuhi $x_2 = x_2(t, x_2(0), u)$.

Ambil sebarang $x_2(0) = 0$, sehingga untuk $t > 0$ diperoleh

$$x_2(t, 0, u) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) = - [B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{h-1}B_2] \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(h-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Jadi $x_2(t, 0, u) \in \text{Im}\mathfrak{R}_f$. Dengan demikian $\mathbb{R}^{n_2} \subseteq \text{Im}\mathfrak{R}_f$.

Jelas bahwa $\text{Im}\mathfrak{R}_f \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$. Jadi $\text{Im}\mathfrak{R}_f = \mathbb{R}^{n_2}$ atau $\text{Im}[B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{h-1}B_2] = \mathbb{R}^{n_2}$

Atau $\text{rank}[B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{h-1}B_2] = n_2$.

- (**b** \Leftrightarrow **c**)

$$\text{Rank}[B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{h-1}B_2] = n_2$$

ekuivalen dengan subsistem kedua terkendali, sehingga $\text{rank}[sI - N, B_2] = n_2, \forall s \in \mathbb{C}$, s hingga. Nilai eigen dari matriks N yaitu $|sI - N| = 0$ implies $s = 0$, sehingga $\text{rank}[-N, B_2] = n_2$ atau terbukti bahwa $\text{rank}[N, B_2] = n_2$.

(c \Leftrightarrow d)

$$\text{Rank}[E, B] = \text{rank}[QEP, QB] = \text{rank} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & B_1 \\ 0 & N & B_2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & N & B_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $\text{rank}[E, B] = \text{rank} I_{n_1} + \text{rank}[N, B_2] = n_1 + \text{rank}[N, B_2] = n_1 + n_2 = n$.

Jadi $\text{rank}[E, B] = n$ jika dan hanya jika $\text{rank}[N, B_2] = n_2$.

3. (\Leftrightarrow)

Sistem linear singular terkendali, menurut definisi untuk setiap $x(0) = x_0, w \in \mathbb{R}^n$, untuk setiap

$t_1 > 0$, terdapat $u \in \mathbb{R}^m$ yang memenuhi $x(t_1, x_0, u) = w$.

Ambil $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = 0$ atau $x(t_1, 0, u) = \begin{bmatrix} x_1(t_1, 0, u) \\ x_2(t_1, 0, u) \end{bmatrix}$, dengan $x_1(t_1, 0, u) \in \text{Im} \mathcal{R}_s$ dan

$x_2(t_1, 0, u) \in \text{Im} \mathcal{R}_f$. Padahal $\text{Im} \mathcal{R}_s = \mathbb{R}^{n_1}$ dan $\text{Im} \mathcal{R}_f = \mathbb{R}^{n_2}$ atau

$\text{Im}[B_1, AB_1, A^2B_1, \dots, A^{n_1-1}B_1] = \mathbb{R}^{n_1}$ dan $\text{Im}[B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{n_2-1}B_2] = \mathbb{R}^{n_2}$.

Jadi diperoleh $\text{rank}[B_1, AB_1, A^2B_1, \dots, A^{n_1-1}B_1] = n_1$ dan $\text{rank}[B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{n_2-1}B_2] = n_2$.

Oleh karena itu subsistem pertama terkendali dan subsistem kedua terkendali terkendali.

Dengan demikian sistem linear singular terkendali jika dan hanya jika subsistem pertama terkendali dan subsistem kedua terkendali terkendali. \square

Syarat cukup dan syarat perlu suatu sistem terkendali adalah sistem pertama dan sistem kedua terkendali. Jika salah satu atau kedua subsistem tersebut tidak terkendali maka sistem tidak terkendali.

3.2. Normalizability Sistem Linear Singular

Pada sistem linear singular *time invariant* dengan asumsi matriks pencil ($sE - A$) regular sehingga sistem dapat dibawa ke bentuk dekomposisi standar. Normalizability sistem atau sistemnya dapat dinormalkan dengan memberikan suatu keadaan *feedback* yang sesuai sehingga memenuhi syarat yang ditentukan.

Definisi 9

Sistem linear singular time invariant pada persamaan (1) dikatakan *normalizability* jika dapat dipilih suatu kendali *feedback* (4) sehingga sistem loop tertutup (5) normal yaitu $|E+BK_2| \neq 0$

Dengan asumsi bahwa system linear singular bersifat *normalizability* sehingga dapat dipilih keadaan kendali *feedback* (4), sehingga sistem loop tertutupnya yaitu pada persamaan (5) merupakan system normal. Jika kondisi $|E+BK_2| \neq 0$ terpenuhi, maka sistem loop tertutup (5) akan menjadi

$$\dot{x}(t) = (E+BK_2)^{-1} (A+BK_1)x(t) + (E+BK_2)^{-1}Bv(t) \quad (9)$$

Persamaan di atas merupakan sistem normal.

Pada sistem linear klasik atau sistem linear yang sering dijumpai biasanya merupakan sistem linear normal sehingga sistem linear klasik ternormalkan.

Teorema 10

Pernyataan–pernyataan berikut ekuivalen:

1. Sistem linear singular *normalizability*
2. $\text{Rank} [E , B] = n$
3. Subsistem kedua terkendali
4. $\text{Rank} [N , B_2] = n_2$
5. Untuk sebarang matriks nonsingular Q_1 dan P_1 berukuran $n \times n$, memenuhi $Q_1EP_1 =$

$$\text{diag}(I_q , 0) , Q_1B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \text{ dengan } \bar{B}_2 \text{ matriks rank baris penuh dan rank } \bar{B}_2 = n -$$

$\text{rank}E$, dengan $q = \text{rank} E$

Bukti:

(1 \Rightarrow 2)

Sistem linear singular *normalizability*, sehingga dengan menerapkan Definisi 9 maka terdapat matriks $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sedemikian sehingga memenuhi $\det (E+BK_2) \neq 0$, karena $(E+BK_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berarti $\text{rank}[E+BK_2] = n$.

$$[E+BK_2] = [E , B] \begin{bmatrix} I_n \\ K_2 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \text{rank}[E+BK_2] = \text{rank} [E , B] \begin{bmatrix} I_n \\ K_2 \end{bmatrix}, \text{ berarti } \text{rank}[E , B]$$

$\geq n$.

Pada sisi lain matriks $[E , B]$ mempunyai n baris dan $(n+m)$ kolom. Jadi $\text{rank}[E , B] = n$.

(2 \Rightarrow 3)

Diketahui $\text{Rank}[E, B] = n$

Dari Lemma 6, diperoleh $\text{rank}[E, B] = \text{rank}[QEP, QB]$

$$\text{rank}[E, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & B_1 \\ 0 & N & B_2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & N & B_2 \end{bmatrix} = n_1 + \text{rank}[N, B_2] = n$$

sehingga diperoleh $n = n_1 + \text{rank}[N, B_2]$ berarti $\text{rank}[N, B_2] = n - n_1 = n_2$.

Jadi pernyataan 4 terbukti. Atau dari diketahui pernyataan 2 dan telah dibuktikan pernyataan 4 berlaku, dituliskan $2 \Rightarrow 4$.

Dengan Teorema 8, $\text{rank}[N, B_2] = n_2$ ekuivalen dengan $\text{rank}[B_2, NB_2, \dots, N^{h-1}B_2] = n_2$ artinya sub sistem kedua terkendali. Atau pernyataan 4 berlaku ekuivalen dengan pernyataan 3. ($4 \Leftrightarrow 3$).

Jadi terbukti bahwa subsistem kedua terkendali.

(4 \Rightarrow 5)

Diketahui pada subsistem kedua terkendali, ekuivalen dengan $\text{rank}[N, B_2] = n_2$.

$\text{rank}[N, B_2] = n_2$ ekuivalen dengan $\text{rank}[E, B] = n$.

$\text{rank}[E, B] = \text{rank}[Q_1EP_1, Q_1B]$

karena $Q_1EP_1 = \text{diag}(I_q, 0)$ dan $Q_1B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$, sehingga

$$\text{rank}[E, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} I_q & 0 & \bar{B}_1 \\ 0 & 0 & \bar{B}_2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B}_2 \end{bmatrix} = q + \text{rank} \bar{B}_2 = n \text{ dan } q =$$

$\text{rank}E$,

diperoleh $\text{rank} \bar{B}_2 = n - \text{rank}E$. Karena matriks \bar{B}_2 berukuran $(n - \text{rank}E) \times m$.

Jadi matriks \bar{B}_2 rank baris penuh.

(5 \Rightarrow 1)

Diketahui untuk sebarang matriks nonsingular Q_1 dan P_1 berukuran $n \times n$ yang memenuhi

$Q_1EP_1 = \text{diag}(I_q, 0)$, $Q_1B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$, dengan \bar{B}_2 matriks rank baris penuh dan

$\text{rank} \bar{B}_2 = n - \text{rank}E$ sehingga $\text{rank}(\bar{B}_2 \bar{B}_2^T) = n - \text{rank}E$ dan $|\bar{B}_2 \bar{B}_2^T| \neq 0$.

Ambil $K_2 = [0, \bar{B}_2^T]P_1^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Untuk membuktikan sistem linear singular ternormalkan, maka cukup dibuktikan $\det(E+BK_2) \neq 0$ atau $|E+BK_2| \neq 0$.

$$\begin{aligned}(E+BK_2) &= Q_1^{-1}(Q_1EP_1+Q_1BK_2P_1)(P_1^{-1}) \\ |E+BK_2| &= |Q_1^{-1}(Q_1EP_1+Q_1BK_2P_1)P_1^{-1}| = |Q_1^{-1}| |Q_1EP_1+Q_1BK_2P_1| |P_1^{-1}| \\ &= |Q_1^{-1}| \left| \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{B}_2^T \end{bmatrix} P_1^{-1} P_1 \right| |P_1^{-1}| \\ &= |Q_1^{-1}| \left| \begin{bmatrix} I_r & \bar{B}_1 \bar{B}_2^T \\ 0 & \bar{B}_2 \bar{B}_2^T \end{bmatrix} \right| |P_1^{-1}| = |Q_1^{-1}| |\bar{B}_2 \bar{B}_2^T| |P_1^{-1}| \neq 0\end{aligned}$$

Karena matriks Q_1 dan P_1 nonsingular berukuran $n \times n$ dan matriks Q_1^{-1} dan P_1^{-1} masing-masing inversnya sehingga matriks Q_1^{-1} dan P_1^{-1} nonsingular. Dan $|\bar{B}_2 \bar{B}_2^T| \neq 0$

Jadi terbukti dengan mengambil $K_2 = [0, \bar{B}_2^T] P_1^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan diperoleh $|E+BK_2| \neq 0$, sehingga sistem ternormalkan. \square

3.3. Hubungan antara Keterkendalian dan Kenormalan Sistem

Sistem linear singular terkendali jika dan hanya jika pada bentuk dekomposisi standar sistem maka sub sistem pertama dan sub sistem kedua terkendali, ekuivalen dengan $\text{rank}[sE-A, B] = n, \forall s \in \mathbb{C}$, s hingga. Subsystem kedua terkendali jika dan hanya jika $\text{Rank}[B_2, NB_2, N^2B_2, \dots, N^{h-1}B_2] = n_2$ jika dan hanya jika $\text{Rank}[N, B_2] = n_2$ jika dan hanya $\text{Rank}[E, B] = n$

Sistem linear singular normalizability jika dan hanya $\text{Rank}[E, B] = n$ yang ekuivalen dengan subsystem kedua terkendali jika dan hanya jika $\text{Rank}[N, B_2] = n_2$

Syarat cukup dan syarat perlu yang mempengaruhi sifat kenormalan sistem, dalam hal ini adalah sifat keterkendalian pada sub sistem kedua. Sistem ternormalkan maka belum tentu sistem tersebut terkendali.

Contoh 1. Pada sistem linear singular diberikan matriks-matriks sebagai berikut:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Periksa sifat-sifat keterkendalian sistemnya dan kenormalan sistem.

Penyelesaian:

Menentukan rank $[sE-A, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} s-3 & 2 & 0 & 0 \\ s+1 & -s-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, untuk $s = -1$ maka

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3, \text{ berdasarkan Teorema 8, berarti subsistem pertama tidak}$$

terkendali, sehingga sistem tidak terkendali.

Kemudian diperiksa $\text{rank}[E, B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n$, berdasarkan teorema 10 berarti

sistem tersebut ternormalkan., sehingga disimpulkan sistem ternormalkan belum tentu sistemnya terkendali.

Contoh 2. Pada sistem linear singular diberikan matriks $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A =$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } C = [0 \ 1 \ 1]$$

- Periksa sifat-sifat keterkendalian system tersebut.
- Apakah system normalizability, jika system normalizability, tentukan matriks K_2

Penyelesaian

- Memeriksa sifat keterkendalian system dengan menerapkan sifat-sifat pada Teorema 8

$$\text{rank } [sE-A, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} s-3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -s-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Karena} \begin{bmatrix} s-3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -s-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (k_2-2k_3; k_4+k_3) \begin{bmatrix} s-3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (k_1 - (s-3)k_4; k_2 - 2k_4) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (s+1)k_1 + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $\text{rank } [sE-A, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 3$ untuk setiap $s \in \mathbb{C}$, sehingga.

Jadi subsistem pertama terkendali. Kemudian dengan sifat pada teorema 8 subsistem kedua

terkendali jika dan hanya jika $\text{rank}[E, B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = n$. Jadi sistem

tersebut terkendali.

- b. Sistem terkendali maka sistem linear singular tersebut normalizability yaitu terdapat matriks K_2 pada P-D sedemikian sehingga sistem loop tertutupnya membentuk system linear normal. Selanjutnya menentukan matriks K_2 dengan $K_2 = [0, \bar{B}_2^T]P_1^{-1}$

Diketahui untuk sebarang matriks nonsingular Q_1 dan P_1 berukuran $n \times n$ yang memenuhi

$$Q_1 E P_1 = \text{diag}(I_q, 0), \quad Q_1 B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \bar{B}_2 \text{ matriks rank baris penuh.}$$

Matriks $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan operasi baris elementer maka dibentuk matriks ekuivalen

E yaitu

$$\text{diag}(I_q, 0) \text{ sehingga } Q_1 E P_1 = \text{diag}(I_q, 0), \text{ dengan } Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_1 = I_3 \text{ dan}$$

$$Q_1 B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

sehingga $\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_2 = [1]$ diperoleh $K_2 = [0 \ 0 \ 1] P_1^{-1} = [0 \ 0 \ 1]$.

Akan memeriksa $\det(E+BK_2) \neq 0$

$$E + BK_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $\det(E + BK_2) = -1 \neq 0$, maka sistem menjadi sistem normal.

Matriks $K_2 = [0 \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ dan mengambil matriks $K_1 = 0$ maka bentuk persamaan *proportional* dan *derivative* (P-D) keadaan *feedback* sebagai berikut $u(t) = -K_2 \dot{x}(t) + v(t)$, kemudian dengan mensubstitusi ke sistem pada contoh diperoleh bentuk sistem normal berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = [0 \ 1 \ 1] x(t)$$

$$\text{atau } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = [0 \ 1 \ 1] x(t)$$

4. KESIMPULAN

Sifat-sifat keterkendalian dan sifat-sifat kenormalan sistem menunjukkan bahwa hubungan kedua sifat tersebut adalah kenormalan suatu sistem ekuivalen dengan keterkendalian subsistem kedua. Jika sistem terkendali maka sistem ternormalkan dan sebaliknya jika sistem ternormalkan maka belum tentu sistem tersebut terkendali. Syarat perlu dan syarat cukup suatu sistem ternormalkan yaitu jika sub sistem kedua terkendali.

Sistem Linear singular dikatakan normalizability yaitu dapat dipilih *proportional* dan *derivative* (P-D) keadaan kendali feedback dengan mengambil matriks $K_2 = [0, \bar{B}_2] P_1^{-1}$ sedemikian sehingga sistem loop tertutupnya normal.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gantmacher, F.R., 1960, *The Theory of Matrices*, volume 1, Chelsea Publishing Company, New York.

- [2] Gantmacher, F.R., 1960, *The Theory of Matrices*, volume 2, Chelsea Publishing Company New York.
- [3] Cobb, J.D., 1984, Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, *IEEE Trans Aut. Control*, Vol.AC-29, No.12, pp. 1076-1082.
- [4] Dai, L., 1988, Lecture Notes in Control and Information Sciences, *Singular Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [5] Skelton, R.E., 1988, *Dynamic Systems Control*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6] Olsder, G.J.,1994, *Mathematical Systems Theory*, Delftse Uitgevers Maatschapij, Delft, Netherlands.
- [7] Suryowati, dkk., 2002, Jurnal Matematika, p. 64 – 76, *Bentuk Dekomposisi Standar Sistem (E,A,B,C)*, UNM, Malang

KONSTRUKSI RUMUS KECEPATAN UNTUK MENGKHATAMKAN AL QUR'AN

Muhammad Wakhid Musthofa
Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
e-mail : mwakhid_m@yahoo.com

ABSTRACT. *This paper will discuss the construction on the formulae to compute the velocity of Koran recitation. Through the constructed formulae, one can find the ideal duration and velocity to recite Koran hence he/she can finish (khatam) his/her recitation according to the practices as advised by the prophet (Muhammad saw)*

Keyword : *velocity, Koran recitation.*

1. PENDAHULUAN

Matematika sebagai alat dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan kehidupan. Tak hanya permasalahan di bidang teknik, ekonomi dan kedokteran yang memerlukan keterlibatan matematika dalam penyelesaiannya, permasalahan keagamaan pun juga memerlukan keterlibatan ilmu matematika. Keterlibatan ilmu matematika dalam menyelesaikan permasalahan keagamaan semakin jelas dan terdukung dengan berkembangnya kajian tentang integrasi-interkoneksi antara sains dan agama. Dalam makalah ini kecepatan yang merupakan salah satu konsep matematika akan digunakan untuk menentukan waktu ideal dan kecepatan baca ideal seseorang dalam membaca Al Qur'an.

Kecepatan adalah sebuah konsep dalam matematika yang menghitung perbandingan perubahan suatu kuantitas yang dinyatakan dengan sebuah fungsi dibandingkan dengan selisih variabel yang bersesuaian dalam fungsi tersebut. Dalam hal membaca Al Qur'an, yang dimaksud dengan kecepatan adalah perbandingan jumlah ayat atau banyaknya halaman yang dibaca dengan lama waktu dalam membacanya.

Makalah ini akan membahas pengkonstruksian model matematika yang menyatakan kecepatan seseorang dalam membaca Al Qur'an. Melalui konstruksi model tersebut dapat dicari keadaan ideal berapa lama waktu yang dibutuhkan oleh seseorang dalam membaca Al Qur'an dan berapa kecepatan baca yang ideal sehingga seseorang dapat mengkhatamkan kitab Al Qur'an sesuai dengan standar yang telah dianjurkan oleh Rasulullah saw.

2. STRUKTUR AL-QUR'AN DAN KEWAJIBAN MENKHKATAMKANNYA

Ditinjau dari segi bahasa (etimologi), Al-Qur'an berasal dari bahasa Arab yang berarti "bacaan" atau "sesuatu yang dibaca berulang-ulang". Kata Al-Qur'an adalah bentuk kata benda (*masdar*) dari kata kerja *qara'a* yang artinya membaca. Pemakaian kata ini dapat dijumpai pada salah satu surat Al-Qur'an yakni pada Surat Al Qiyamah ayat 17 dan 18, yaitu :

"Sesungguhnya mengumpulkan Al-Qur'an (di dalam dadamu) dan (menetapkan) bacaannya (pada lidahmu) itu adalah tanggungan Kami. (Karena itu), jika Kami telah membacakannya, hendaklah kamu ikuti bacaannya".

Sedangkan arti Al-Qur'an secara istilah adalah Kalam Allah yang menganung mukjizat, yang diturunkan kepada Nabi Muhammad saw yang tertulis dalam mushaf yang diriwayatkan dengan mutawatir, dan membacanya bernilai ibadah [4].

Al-Qur'an yang terdiri atas 114 surat dapat dibagi menjadi beberapa bagian. Struktur pembagian Al-Qur'an yang terbesar adalah *manzil*. Secara bahasa *manzil* berarti bangunan atau rumah. Al-Qur'an dibagi menjadi 7 *manzil*, pembagian ini mempunyai tujuan agar pembacaan Al-Qur'an selesai dalam 7 hari (satu minggu). Struktur pembagian Al-Qur'an yang kedua adalah *juz*. Al-Qur'an dibagi menjadi 30 *juz* dengan panjang yang sama. Pembagian ini untuk memudahkan mereka yang ingin mengkhatamkan bacaan Al-Qur'an dalam 30 hari (satu bulan). Kedua jenis pembagian ini tidak memiliki hubungan dengan pembagian subyek bahasan tertentu yang dimuat dalam Al-Qur'an [6].

Pembagian Al Qur'an yang ketiga adalah berdasarkan surat. Al-Qur'an terdiri atas 114 surat. Setiap surat terdiri atas beberapa ayat yang tidak sama jumlahnya. Surat terpanjang berisi 286 ayat yaitu surat Al-Baqarah dan surat terpendek hanya memiliki 3 ayat yaitu surat Al 'Ashr, Al-Kautsar, dan An Nashr. Para ulama berbeda pendapat dalam menyatakan jumlah total ayat dalam Al-Qur'an. Sebagian besar menyatakan jumlah total ayat dalam Al-Qur'an adalah 6236 ayat. Perbedaan pendapat tersebut bukan disebabkan perbedaan isi Al-Qur'an, melainkan karena perbedaan cara menghitung jumlah ayat dalam Al-Qur'an. Surat-surat yang panjang terbagi lagi atas beberapa sub-bagian yang disebut *ruku'*, total *ruku'* dalam Al-Qur'an berjumlah 558. Setiap *ruku'* membahas tema atau topik tertentu [6].

Rasulullah saw mewajibkan seluruh umat Islam untuk membaca Al-Qur'an dan menjadikannya sebagai ibadah harian. Rasulullah saw bersabda [1]

“Bacalah Al-Qur'an, karena sesungguhnya ia akan datang pada hari kiamat sebagai syafaat bagi orang-orang yang menjadi sahabatnya.

(HR Bukhari)

Membaca kitab Al-Qur'an tidaklah sama dengan membaca bacaan yang lainnya. Hal ini dikarenakan Allah swt berjanji memberikan pahala dan keutamaan bagi para pembaca Al-Qur'an meskipun belum lancar dalam membacanya. Rasulullah bersabda [1]

“Orang yang membaca Al-Qur'an dan ia mahir membacanya, maka kelak ia akan bersama para malaikat yang mulia lagi taat kepada Allah, dan orang yang membaca Al-Qur'an, sedang ia masih terbata-bata lagi berat dalam membacanya, maka ia akan mendapatkan dua pahala.”

(HR. Bukhari Muslim)

Mengenai perintah mengkhatamkannya, Rasulullah memberikan petunjuk dalam beberapa hadits berikut [2]

Dari Abdullah bin Amru bin Ash, dari Rasulullah saw., beliau berkata, “Tamatkanlah Al-Qur'an dalam waktu satu bulan”. Saya berkata, “Wahai Rasulullah, saya mampu melakukan lebih dari itu”. Rasulullah bersabda, “Tamatkanlah dalam waktu sepuluh hari”. Saya menjawab, “Wahai Nabiullah, saya mampu melakukan lebih dari itu”, Rasulullah menjawab, “Tamatkanlah dalam seminggu dan jangan kurang dari itu”. (HR. Bukhari Muslim).

“Tidak akan faham orang yang menamatkan bacaan Al-Qur'an kurang dari tiga hari”. (HR Abu Daud, Tirmidzi dan Ibnu Majah)

Dari dua hadits di atas dapat disimpulkan bahwa berdasarkan petunjuk Rasulullah saw waktu ideal membaca kitab Al-Qur'an hingga khatam adalah tiga hari sampai satu bulan. Hal ini ditegaskan oleh Hasan Al Banna dalam nasehatnya “Hendaklah engkau memiliki wirid harian dari kitabullah tidak kurang dari satu juz. Usahakan untuk mengkhatamkan Al-Qur'an dalam waktu tidak lebih dari sebulan dan tidak kurang dari tiga hari” [2]. Selain tiga hari dan satu bulan Al-Qur'an juga bisa dikhatamkan dalam waktu sepuluh hari dan satu minggu.

3. KONSEP KECEPATAN

Kecepatan adalah sebuah konsep dalam matematika yang menghitung perbandingan perubahan suatu kuantitas yang dinyatakan dengan sebuah fungsi dibandingkan dengan selisih variabel yang bersesuaian dalam fungsi tersebut. Dalam hal membaca Al Qur'an, yang dimaksud dengan kecepatan adalah perbandingan jumlah ayat atau banyaknya halaman yang dibaca dengan lama waktu dalam membacanya. Pada makalah ini waktu baca diwakili oleh unsur jumlah hari yang dialokasikan untuk membaca dan jumlah menit yang dialokasikan pada hari saat membaca. Kecepatan membaca diasumsikan konstan sehingga kecepatan baca yang dikonstruksikan dalam makalah ini mirip dengan kecepatan rata-rata [5].

4. KONSTRUKSI RUMUS KECEPATAN UNTUK MENGKHATAMKAN AL QUR'AN

Permasalahan yang ingin diselesaikan dalam makalah ini adalah mencari waktu dan kecepatan baca yang ideal dalam sehari untuk membaca Al-Qur'an sehingga Al-Qur'an dapat dikhatamkan dalam waktu satu bulan. Permasalahan tersebut akan diselesaikan dengan mengkonstruksikan model matematika yang menggambarkan kecepatan seseorang dalam membaca Al-Qur'an. Untuk membatasi konstruksi model yang akan dibentuk, berikut ini adalah asumsi yang digunakan dalam mengkonstruksikan model :

- a. Faktor yang mempengaruhi seseorang dalam mengkhatamkan Al-Qur'an dibatasi pada [3]:
 - i. Jumlah hari yang dialokasikan untuk membaca
 - ii. Jumlah waktu yang dialokasikan pada hari saat membaca
 - iii. Kecepatan membaca
- b. Jumlah hari yang dialokasikan untuk membaca maksimal 30 hari. Variabel jumlah hari menjalani nilai-nilai diskret dari 0 sampai 30.
- c. Jumlah waktu yang dialokasikan pada hari saat membaca maksimal 24 jam atau 1.440 menit. Variabel jumlah waktu yang dialokasikan menjalani nilai-nilai yang kontinu pada interval $[0,1440]$.

- d. Jumlah waktu yang dialokasikan pada hari saat membaca dihitung dengan satuan menit/hari.
- e. Kecepatan membaca dihitung dengan satuan juz/menit.
- f. Kecepatan membaca diasumsikan tetap/konstan, relatif terhadap pemilihan jumlah hari dan waktu yang dialokasikan.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka dapat dibuat model matematika yang menggambarkan kecepatan seseorang dalam mengkhatamkan Al-Qur'an sebagai berikut.

$$k = \frac{30}{h \cdot a}$$

(1)

Keterangan notasi :

| | | | |
|-----|---|---|------------|
| k | = | kecepatan membaca Al-Qur'an | juz/menit |
| 30 | = | jumlah juz dalam Al-Qur'an | juz |
| h | = | jumlah hari yang dialokasikan untuk membaca | hari |
| a | = | jumlah waktu yang dialokasikan pada hari saat membaca | menit/hari |

5. VALIDASI RUMUS

Besaran k dalam persamaan (1) di atas dapat dipandang sebagai suatu fungsi yang tergantung pada variabel h dan a . Sehingga untuk memvalidasi persamaan (1) di atas, dapat diambil sampel nilai h dan a yang cukup ekstrem dan dilihat nilai fungsinya.

Untuk nilai $h = 0$ yang berarti tidak ada hari yang dialokasikan untuk membaca, maka jumlah waktu yang dialokasikan untuk membaca juga tidak ada yaitu $a = 0$. Sehingga diperoleh

$$k = \frac{30}{0 \cdot 0} = \text{tak terdefinisi} . \quad (2)$$

Hal ini memberikan arti bahwa kecepatan membaca Al-Qur'an seseorang tidak dapat dihitung jika orang tersebut tidak pernah membaca Al-Qur'an.

Di lain pihak, meskipun seseorang lancar dalam membaca Al-Qur'an, sehingga $k \neq 0$, akan tetapi ia tidak pernah mengalokasikan waktu untuk membaca Al-Qur'an ($a = 0$) maka kondisi di atas dapat digambarkan dalam persamaan

$$h = \frac{30}{k \cdot 0} = \text{tak terdefinisi.} \quad (3)$$

Persamaan di atas mengatakan bahwa Al-Qur'an tidak pernah dikhatamkan oleh seseorang yang tidak pernah mengalokasikan waktu untuk membaca Al-Qur'an.

Jika $k \rightarrow 0$ yang berarti orang tersebut sangat tidak lancar membaca Al-Qur'an, meskipun orang tersebut mengalokasikan waktu selama 24 jam dalam sehari untuk membaca Al-Qur'an yaitu $a = 24$ akan diperoleh

$$\begin{aligned} h &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{30}{k \cdot a}, \\ &= \infty \end{aligned} \quad (4)$$

yang berarti untuk mengkhatamkan Al-Qur'an ia membutuhkan waktu yang sangat lama. Pengambilan beberapa nilai h dan a di atas selalu memberikan interpretasi model yang logis. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan model matematika (1) adalah model matematika yang valid.

6. WAKTU DAN KECEPATAN BACA IDEAL

Berdasarkan asumsi pemodelan yang dibangun, kecepatan seseorang dalam mengkhatamkan Al-Qur'an dipengaruhi oleh jumlah hari yang dialokasikan untuk membaca, jumlah waktu yang dialokasikan pada hari saat membaca, dan kecepatan membaca. Sehingga dalam tahap awal jika seseorang ingin mengkhatamkan Al-Qur'an sesuai dengan tuntunan Rasulullah maka variabel yang sangat berperan adalah alokasi waktu baca. Hal ini dikarenakan lebih mudah bagi seseorang untuk meningkatkan dan mengelola jumlah waktu yang dialokasikan untuk membaca Al-Qur'an daripada meningkatkan kecepatan membaca Al-Qur'an. Dengan demikian menentukan waktu ideal dalam mengkhatamkan Al-Qur'an adalah langkah pertama yang bisa diusahakan oleh seseorang.

Waktu ideal yang paling longgar dalam mengkhatamkan Al-Qur'an berdasarkan hadits Rasulullah adalah satu bulan (30 hari). Dengan mengasumsikan setiap hari seseorang mengalokasikan waktu untuk membaca Al-Qur'an ($h = 30$), dan kecepatan baca Al-Qur'an adalah $k = \frac{1}{60}$ juz/menit (satu juz diselesaikan dalam waktu satu jam),

dapat dicari waktu yang harus dialokasikan tiap hari sehingga seseorang dapat mengkhatamkan Al-Qur'an dalam waktu satu bulan. Menggunakan persamaan (1) diperoleh

$$\begin{aligned} a &= \frac{30 \text{ juz}}{h \cdot k} \\ &= \frac{30 \text{ juz}}{30 \text{ hari} \cdot \frac{1}{60} \text{ juz/menit}} \\ &= 60 \text{ menit/hari.} \end{aligned} \quad (5)$$

Sehingga waktu yang harus dialokasikan agar Al-Qur'an khatam dalam waktu satu bulan adalah 60 menit tiap hari.

Setelah seseorang terbiasa untuk membaca Al-Qur'an ia bisa mengusahakan meningkatkan kecepatan bacanya sehingga waktu yang harus dialokasikan menjadi semakin sedikit ataupun Al-Qur'an lebih cepat dikhatamkan. Misalkan seseorang yang ingin mengkhatamkan Al-Qur'an dalam waktu satu bulan dan waktu yang dialokasikan untuk membaca adalah 40 menit tiap hari ($h = 30$ dan $a = 40$ menit/hari), maka kecepatan baca yang harus dimiliki adalah

$$\begin{aligned} k &= \frac{30 \text{ juz}}{h \cdot a} \\ &= \frac{30 \text{ juz}}{30 \text{ hari} \cdot 40 \text{ menit/hari}} \\ &= \frac{1}{40} \text{ juz/menit.} \end{aligned} \quad (6)$$

7. KESIMPULAN

Makalah ini telah mengkaji pengkontruksian model matematika yang menyatakan kecepatan seseorang dalam membaca Al-Qur'an. Melalui model tersebut didapat jika seseorang ingin mengkhatamkan Al-Qur'an dalam waktu satu bulan dan waktu yang dialokasikan untuk membaca adalah 40 menit tiap hari maka kecepatan baca yang harus dimiliki adalah $\frac{1}{40}$ juz/menit. Meskipun demikian model ini masih sangat sederhana, sehingga pengembangan model matematika yang lebih akurat masih dapat dilakukan. Diantaranya adalah dengan mengasumsikan kecepatan baca Al-Qur'an bukan lagi fungsi yang konstan akan tetapi fungsi yang berubah-ubah menurut waktu sehingga lebih menggambarkan obyek yang dimodelkan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdur Rauf, A.A., 2006, *Tarbiyah Syakhshiyah Qur'aniyah*, Markaz Al-Qur'an, 1 – 18.
- [2] Hawwa, S., 2002, *Membina Angkatan Mujahid*, Era Intermedia, 182 – 186.
- [3] <http://www.beritaiptek.com/zberita-beritaiptek-2007-09-08>, diakses tanggal 4 Januari 2010.
- [4] Munawir, F., 2005, *Al-Qur'an*, Pokja Akademik UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, 3 – 6.
- [5] Purcell, E.J., 2003, *Kalkulus*, Erlangga, 105 – 108.
- [6] Ul-Haq, Z., 2009, *Struktur Matematika Al-Qur'an*, Rahma Media Pustaka, 1 – 168.

KONTUR SEDIMENTASI PADA PERSIMPANGAN DUA SUNGAI UTAMA

Basuki Widodo¹ dan Puguh Sasono²
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
b_widodo@matematika.its.ac.id
pugh_cha@yahoo.com

Abstrak : Sungai mempunyai banyak jenis model aliran, seperti aliran lurus dan bercabang yang berupa persimpangan dua sungai. Pada penelitian ini akan dibahas tentang sedimentasi pada persimpangan dua sungai. Dalam aliran pada persimpangan dua sungai terdapat dua sungai utama yang mengalir pada hilir yang sama. Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) merupakan metode yang dalam penerapannya tidak menggunakan pias (grid/mesh), sehingga metode ini sangat bermanfaat pada masalah dengan *boundary* domain yang tidak kontinu atau yang bergerak. Dari hasil simulasi yang dilakukan, dengan kecepatan sungai pertama $v_1 = 0.05$, yaitu 50% dari kecepatan pada persimpangan dua sungai dan kecepatan sungai kedua $v_2 = 0.09$, yaitu 90% dari kecepatan pada persimpangan dua sungai, diperoleh bahwa setelah waktu $T = 5$, kecepatan turun sebesar 0.195987 dan ketinggian sedimen naik 2.9196×10^{-3} , dengan melakukan perubahan sudut aliran pada sungai pertama dari 60° ke 30° dan perubahan sudut aliran pada sungai kedua dari 36° ke 72° . Diperoleh bahwa setelah waktu $T = 5$, ketinggian sedimen naik sebesar 2.906×10^{-3} dan kecepatan turun sebesar 0.196018. Jadi perubahan sudut maupun perubahan kecepatan pada sungai pertama dan kedua, tidak memberi pengaruh yang signifikan pada kedalaman sungai, ketinggian sedimentasi dan kecepatan aliran pada persimpangan dua sungai

Kata kunci : *Persimpangan dua sungai, Sedimentasi, Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)*

1. PENDAHULUAN

Sungai mempunyai banyak manfaat bagi kehidupan manusia. Manfaat yang penting bagi manusia adalah sebagai tempat penampungan air ketika musim hujan. Sungai mempunyai banyak jenis aliran air. Seperti, aliran air pada sungai lurus, aliran air pada sungai bercabang dan aliran air pada persimpangan dua sungai. Pendangkalan sungai dapat mengakibatkan bencana banjir pada musim hujan. Salah satu sebab terjadinya pendangkalan sungai adalah adanya pengendapan sedimen pada sungai.

Sedimen adalah hasil proses erosi, baik berupa erosi permukaan, erosi parit, atau jenis erosi tanah lainnya. Proses terjadinya sedimentasi dapat dimodelkan secara matematis sehingga proses perubahan morfologi sungai akibat adanya sedimentasi tersebut dapat diketahui. Model sedimentasi ini dibangun dengan menggunakan

pendekatan metode volume hingga dan diselesaikan dengan metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG). Metode ini relatif baru dan masih terus dikembangkan pada permasalahan dinamika fluida. Salah satu keunggulan dari metode ini adalah dalam proses diskritisasi daerah penyelesaian (domain).

Metode meshless bertujuan untuk menghilangkan *grid* atau untuk mengurangi kesulitan dalam membuat *grid* dengan menggunakan titik sebagai penggantinya. Metode ini sangat fleksibel, akurat dan tidak menggunakan *grid* sama sekali dalam penerapannya, baik untuk tujuan interpolasi ataupun untuk tujuan perhitungan integral. Bahkan karena kecepatan, keakuratan, dan keandalannya, metode ini diprediksi dapat menggantikan metode FEM dimasa mendatang. Pada penelitian ini akan dibahas kontur sedimentasi pada persimpangan dua sungai utama dengan menggunakan metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG).

2. MATERI DAN METODE

2.1 Sedimentasi

Sedimentasi terjadi karena adanya partikel-partikel padat (sedimen) yang ikut terbawa oleh aliran air. Mekanisme pengangkutan sedimen ini dikategorikan menjadi dua, yaitu bed load dan suspended load. Proses sedimentasi pada aliran sungai merupakan suatu proses yang alami. Namun karena berbagai faktor, sedimentasi menimbulkan berbagai masalah dan dapat menimbulkan dampak yang berbahaya bagi lingkungan sekitarnya. Proses terjadinya sedimentasi terdiri dari dua bagian, yaitu hidrodinamika dan morfologi.

Bed load adalah butiran sedimen yang bergerak atau berpindah dengan cara menggelinding, meluncur atau melompat. Salah satu rumus yang populer untuk menghitung banyaknya sedimen pada transportasi sedimen adalah rumus Meyer-Peter dan Muller (Yang, 1996). Rumus ini antara lain diterapkan oleh Liu (2001).

Rumus Meyer-Peter & Muller (Liu, 2001)

$$q_b = C_m [(s-1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta - \theta_c)^{1.5}$$

$$\tau_b = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{0.06}{\left(\log \left(\frac{12h}{2.5d_{50}} \right) \right)^2} \right) U^2$$

dengan :

q_b = banyaknya sedimen *bed load*

$s = \rho_s / \rho$, ρ_s = massa jenis sedimen

ρ = massa jenis air

g = kecepatan gravitasi,

d_{50} = rata-rata diameter sedimen

$\theta_c = 0.047$, $C_m = 8.0$, $\mu = 1.0$,

U = kecepatan aliran sungai,

h = kedalaman

Suspended load adalah transportasi sedimen dengan cara melayang di dalam air. Transportasi sedimen jenis ini biasanya terjadi pada aliran yang turbulen (Yang, 1996). Perubahan morfologi sungai diasumsikan hanya terjadi pada dasar sungai dan diakibatkan oleh adanya proses gerusan dan pengendapan. Perubahan dasar sungai ini dapat dihitung dengan menggunakan persamaan kekekalan massa untuk transportasi sedimen. Yang (1996) menyebutnya persamaan ini persamaan kekekalan massa gelombang pasir, yaitu:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0$$

dengan :

Y = ketinggian dasar sungai,

P = porositas, dan q_b = *bed load*

2.2 Persimpangan Dua Aliran Sungai

Persimpangan dua aliran sungai merupakan suatu fenomena alam yang menarik dan sangat kompleks. Dalam aliran pada persimpangan dua sungai terdapat dua sungai utama yang mengalir pada hilir yang sama.

Salah satu model aliran sungai yang cukup baik telah dikembangkan oleh shazy shabayek, dkk(2002).model ini di bagi menjadi dua bagian yaitu sungai utama (main stream) dan anak sungai (lateral stream).

Markup (2001) secara matematis telah menurunkan persamaan kekekalan massa dan momentum. Persamaan tersebut adalah :

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \text{ dan } \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{BQ^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{gQ|Q|}{AC^2R} = vq \cos \phi$$

dengan : A = luas penampang B = lebar permukaan air
 Q = debit aliran Z = ketinggian aliran air
 V = kecepatan aliran lateral ϕ = sudut antara aliran utama dan aliran lateral
 Q = debit aliran lateral C^* = koefisien Chezy
 g = gravitasi

2.3 Metode Volume Hingga

Banyak permasalahan di bidang mekanika fluida yang harus dianalisis dengan mengamati suatu daerah berhingga (volume hingga) dari suatu domain yang besar. Dasar-dasar yang digunakan oleh mode ini untuk dapat diterapkan adalah hukum-hukum pertama dan kedua termodinamika.

Hukum kekekalan massa untuk suatu volume kendali dapat dinyatakan dengan persamaan adalah :

$$\frac{d}{dt}(\rho \nabla) + \sum_{forces} \rho u A = 0$$

Hukum kekekalan momentum dapat dinyatakan dengan :

$$\frac{d}{dt}(\rho \nabla u) + \sum_{forces} \rho u A u = F$$

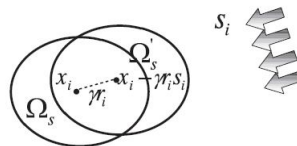
dengan : massa = $\rho \nabla$, ρ = massa jenis dan ∇ = volume

u = kecepatan, dan A = luas permukaan

Force atau gaya aliran fluida terdiri dari 2 tipe yaitu *surface forces* dan *body force*.

2.4 Metode Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

Metode meshless ini dikenal sangat efektif dimplementasikan dalam bidang komputasi sains dan teknik, namun dalam hal kecepatan dan keandalan masih perlu terus dikembangkan. Tujuan utama dari metode meshless ini adalah menghindari penggunaan pias (mesh/grid). penjelasan dari subdomain tersebut dapat dilihat pada gambar 5.1. berikut :



Gambar 5.1. Local subdomain Ω_s

dengan :

Y = ketinggian dasar sungai,

P = porositas, dan $q_b = \text{bed load}$

Perbedaan lain local weak ini dengan bentuk global weak pada umumnya adalah pada *space domain* yang digunakan. Pada global weak, *space* dari fungsi *trial* dan *test* adalah sama, sedangkan pada local weak, *space* dari fungsi *trial* dan fungsi *test* dapat berbeda.

Misalnya sebuah fungsi taksiran $u(x)$ pada domain Ω dengan titik-titik sebaran $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, penaksiran *moving last square* (MLS) $u^h(x)$ dari $u(x)$, $Ax \in \Omega$ dapat didenisikan sebagai :

$$u^h(x) = p^T(x)a(x) \forall x \in \Omega$$

dengan, $p^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ adalah basis monomial lengkap order m .

Sebagai contoh $p^T(x)$ untuk dua dimensi, bentuk linier : $p^T(x) = [1, x, y]$, $m = 3$

$\mathbf{A}(x)$ adalah vektor yang memuat koefisien fungsi $a_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$. merupakan fungsi-fungsi dari variabel x yang diperoleh dengan meminimumkan norm diskrit berbobot L2

dan didefinisikan sebagai berikut:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [p^T(x_i)\mathbf{a}(x) - \hat{u}_i]^2$$

Dengan $w_i(x)$ adalah fungsi bobot dari titik i , dengan $w_i(x) > 0$ untuk semua x yang berada didalam support dari $w_i(x)$, n adalah banyaknya titik yang berada di dalam domain Ω dimana $w_i(x) > 0$.

Matrik \mathbf{P} dan \mathbf{W} didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p^T(x_1) \\ p^T(x_2) \\ \dots \\ p^T(x_n) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w_n(x) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

dan $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, u_1 adalah nilai fiktif dan bukan nilai sebenarnya dari fungsi $u^h(x)$ secara umum. Dengan meminimumkan J pada persamaan akan diperoleh nilai dari $\mathbf{a}(x)$, dengan hubungan antara $\mathbf{a}(x)$ dan \mathbf{u} sebagai berikut :

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{a}(x) = \mathbf{B}(x)\hat{\mathbf{u}}$$

dengan menyelesaikan persamaan terhadap $\mathbf{a}(x)$, maka diperoleh :

$$u^h(x) \equiv \mathbf{P}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \hat{u} = \Phi^T(x) \hat{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \hat{u}_i$$

dengan, $\Phi^T(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x)$ adalah fungsi nodal dari x

Fungsi bobot w yang digunakan pada penelitian ini adalah fungsi bobot *spline* :

Fungsi bobot *spline* adalah :

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_i}{r_i}\right) + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases}$$

dengan $d_i = |x - x_i|$ yang merupakan jarak antara x dan x_i adalah konstanta, dan r_i adalah ukuran dari support untuk fungsi bobot w_i .

Persamaan aproksimasi MLS disubstitusikan ke persamaan bentuk *weak* tersebut. Hasil substitusi tersebut kemudian dibentuk menjadi sistem persamaan linear berikut :

$$\mathbf{K} \cdot \hat{u} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{K} \hat{u} + \mathbf{C} \cdot \hat{u} = \mathbf{f}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

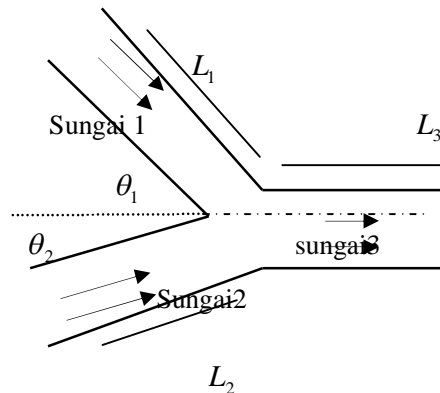
Pada bab ini akan dilakukan simulasi dari hasil analisa yang telah dilakukan. *governing equation* aliran pada persimpangan dua sungai adalah sebagai berikut :

$$\text{Kekekalan massa : } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = Q_1 \cos \theta_1 + Q_2 \cos \theta_2$$

$$\text{Kekekalan momentum : } \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + gh(S_{x1} + S_{x2}) +$$

$$L\left(\frac{u}{C^*}\right)^2 (b(\xi_1 + \xi_2) + 2h) + v_1 Q_1 \cos \theta_1 + v_2 Q_2 \cos \theta_2$$

Sedangkan untuk *boundary condition* (Γ) pada aliran sungai seperti pada Gambar 4.1. berikut:



Gambar 6.1. boundary condition aliran sungai

Persamaan yang digunakan untuk menghitung sedimen adalah :

$$\text{Kekkekalan massa sedimen : } \frac{\partial z_h}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \left(\frac{\partial q_b}{\partial x} + \frac{\partial q_b}{\partial y} \right) = 0$$

Transportasi sedimen :

$$q_b = C_m [(s-1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta - \theta_c)^{1.5}$$

1 Penerapan Metode MLPG

Dari hasil analisa, *governing equation* pada persimpangan pada dua sungai adalah:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hu \\ z_b \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ q_b/(1-p) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \\ q_b/(1-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \cos \theta_1 + Q_2 \cos \theta_2 \\ gh(S_{x1} + S_{x2}) + L \left(\frac{U}{C^*} \right)^2 [b(\xi_1 + \xi_2) + 2h] + \\ v_1 Q_1 \cos \theta_1 + v_2 Q_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{dimisalkan; } E = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ z_b \end{bmatrix}, \quad F(E) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ q_b/(1-p) \end{bmatrix}, \quad H(E) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \\ q_b/(1-p) \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } G_e = \begin{bmatrix} Q_1 \cos \theta_1 + Q_2 \cos \theta_2 \\ gh(S_{x1} + S_{x2}) + L \left(\frac{U}{C^*} \right)^2 [b(\xi_1 + \xi_2) + 2h] + \\ v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka *governing equation* untuk persimpangan pada dua sungai menjadi :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F(E)}{\partial x} + \frac{\partial H(E)}{\partial y} = G_e$$

$$\text{atau dapat ditulis, } \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F(E)}{\partial x} + \frac{\partial H(E)}{\partial y} - G_e = 0$$

Nilai E didekati dengan menggunakan pendekatan MLS sehingga menjadi

$$E^h(x, y, t) = \sum_{j=l_{sl}}^{l_{sr}} \phi_j(x, y) \hat{E}_j(t)$$

dengan l_{sl} adalah indeks terkecil dan l_{sr} adalah indeks terbesar dari titik-titik diskrit yang berada dalam subdomain $\Omega_{sx} = [x_{sl}, x_{sr}]$ dan $\Omega_{sy} = [y_{sl}, y_{sr}]$, maka

$$\phi_j(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x, y) (A^{-1}(x, y) B(x, y))_{ij}$$

turunan terhadap waktu pada fungsi MLS adalah:

$$E_t^h(x, y, t) = \sum_{j=l_{sl}}^{l_{sr}} \phi_j(x, y) \hat{E}_j'(t)$$

dengan mengimplementasikan MLS pada model sedimentasi, maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\sum_{j=l_{sl}}^{l_{sr}} \hat{E}_j(t) K_j + \sum_{j=l_{sl}}^{l_{sr}} \hat{E}_j(t) C_j - f = 0$$

dalam bentuk matriks dapat ditulis menjadi

$$K \hat{E}' + C \hat{E} - f = 0$$

2 Diskritisasi Terhadap Waktu

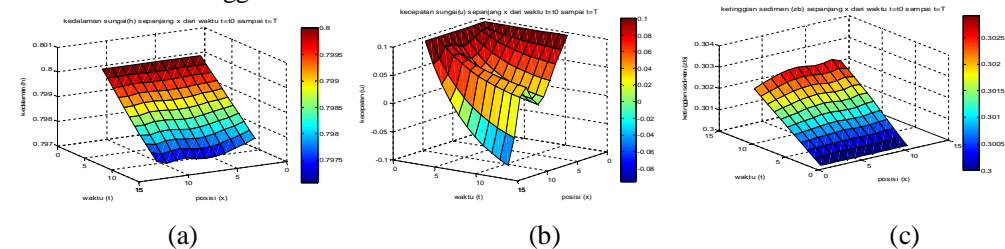
Hasil dari penerapan metode MLPG pada model sedimentasi didiskritisasi terhadap waktu dengan menggunakan deret Taylor. Sehingga diperoleh :

$$\hat{E}^{(t+\Delta t)} = K^{-1}((K - \Delta t C) \hat{E}^{(t)} + \Delta t f)$$

3 Simulasi

Simulasi 1

| | | | |
|----------|--------------------|-----------------|---------------------------|
| T = 5 | waktu | teta1 = 6/18*pi | sudut pada aliran sungai1 |
| Δt = 0.5 | delta t | teta2 = 4/20*pi | sudut pada aliran sungai2 |
| h = 0.8 | kedalaman | v1 = 0.05 | kecepatan sungai 1 |
| u = 0.1 | kecepatan | v2 = 0.09 | kecepatan sungai 2 |
| zb = 0.3 | ketinggian sedimen | | |

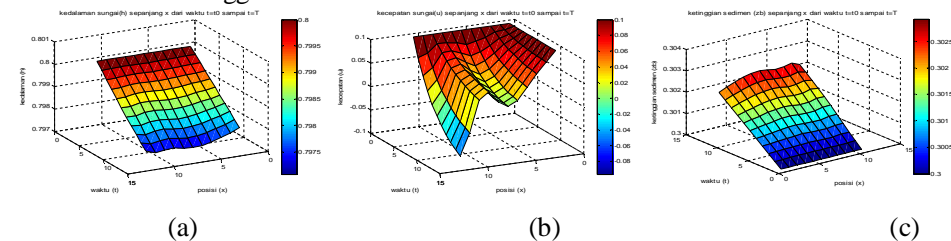


Gambar 10.1. (a) plot kedalaman sungai, (b) plot kecepatan dan (c) plot ketinggian sedimentasi

Pada Simulasi 1, diberikan inputan untuk kecepatan awal aliran $v_1 = 0.05$ dan $v_2 = 0.09$ atau 50% dan 90% dari kecepatan pada persimpangan sungai $u = 0.1$. dan sudut pada aliran sungai 1 = 60° dan sudut sungai 2 = 36° . Pada Gambar 10.1. (a) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kedalaman $h = 0.8$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahannya itu kedalamannya turun sekitar 0.0029196. Pada Gambar (b) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kecepatan $u = 0.1$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu kecepatannya turun sekitar 0.195987. dan pada Gambar (c) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal ketinggian sedimen $z_b = 0.3$, pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu ketinggian sedimen naik sekitar 0.0029196.

Simulasi 2

| | | | | | |
|----------------|------|--------------------|-------|--------------------|---------------------------|
| T | =5 | waktu | teta1 | = $3/18 \cdot \pi$ | sudut pada aliran sungai1 |
| Δt | =0.5 | delta t | teta2 | = $8/20 \cdot \pi$ | sudut pada aliran sungai2 |
| h | =0.8 | kedalaman | v1 | = 0.05 | kecepatan sungai 1 |
| u | =0.1 | kecepatan | v2 | = 0.09 | kecepatan sungai 2 |
| z _b | =0.3 | ketinggian sedimen | | | |



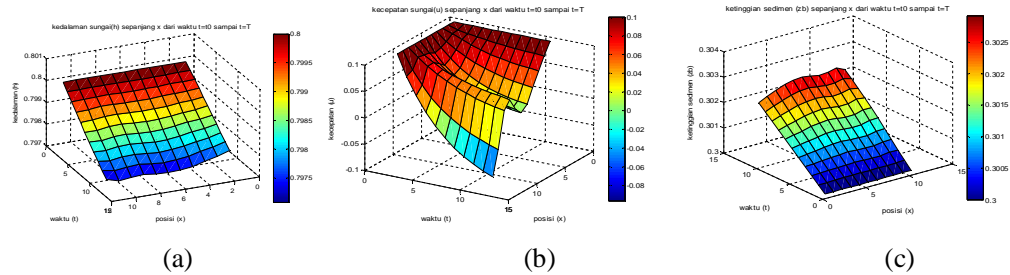
Gambar 10.2. (a) plot kedalaman, (b) plot kecepatan dan (c) plot ketinggian sedimentasi. Pada Simulasi 2, diberikan inputan untuk kecepatan awal aliran $v_1 = 0.05$, $v_2 = 0.09$ dan kecepatan pada persimpangan sungai $u = 0.1$. dan sudut pada aliran sungai 1 berubah dari 60° menjadi 30° dan sudut sungai 2 dari 36° menjadi 72° . Pada Gambar 10.2.(a) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kedalaman $h = 0.8$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu kedalamannya turun sekitar 0.002906. Pada Gambar (b) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kecepatan $u = 0.1$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu kecepatannya turun sekitar 0.196018. Pada Gambar(c) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal ketinggian sedimen $z_b = 0.3$, pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu ketinggian sedimen naik sekitar 0.002906.

Simulasi 3

| | | | | | |
|------------|------|---------|-------|--------------------|---------------------------|
| T | =5 | waktu | teta1 | = $6/18 \cdot \pi$ | sudut pada aliran sungai1 |
| Δt | =0.5 | delta t | teta2 | = $4/20 \cdot \pi$ | sudut pada aliran sungai2 |

| | | | | | |
|----|------|--------------------|----|--------|--------------------|
| h | =0.8 | kedalaman | v1 | = 0.05 | kecepatan sungai 1 |
| u | =0.1 | kecepatan | v2 | = 0.05 | kecepatan sungai 2 |
| zb | =0.3 | ketinggian sedimen | | | |

Pada Simulasi 3, diberikan inputan untuk kecepatan awal aliran $v1 = 0.05$ dan $v2=0.05$ atau 50% dan 50% dari kecepatan pada persimpangan sungai $u = 0.1$. dan sudut pada aliran sungai 1 = 60^0 dan sudut sungai 2 = 36^0



Gambar 10.3. (a) plot kedalaman, (b) plot kecepatan dan (c) plot ketinggian sedimentasi
 Pada Gambar 10.3. (a) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kedalaman $h= 0.8$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu kedalamannya turun sekitar 0.0029197 . Pada Gambar 4.4.(b) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kecepatan $u= 0.1$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu kecepatannya turun sekitar 0.196033 . dan Pada Gambar 4.4.(c) terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal ketinggian sedimen $zb= 0.3$, pada semua posisi (x) dan setelah waktu T terjadi perubahan yaitu ketinggian sedimen naik sekitar 0.0029197 .

4 KESIMPULAN

Dari hasil analisa dan pembahasan yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Perubahan sudut dengan memperbesar sudut maupun sebaliknya pada sungai pertama dan sungai kedua seperti pada simulasi 1 dan 2 memberi pengaruh yang sangat kecil pada kecepatan sungai dan ketinggian sedimentasi. Pada kecepatan sungai terjadi penurunan dengan selisih sekitar 3.1×10^{-5} dan pada ketinggian sedimentasi terjadi kenaikan dengan selisih sebesar 1.36×10^{-5} .
2. Perubahan kecepatan dengan memperbesar kecepatan aliran pada sungai pertama dan sungai kedua pada simulasi 1 dan 3 tidak memberi pengaruh yang signifikan pada kecepatan sungai dan ketinggian sedimentasi. Pada kecepatan sungai terjadi

penurunan dengan selisih sebesar 4.6×10^{-5} dan ketinggian sedimentasi naik dengan selisih sekitar 10^{-5} .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Atlury dan Lin. 2000. "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection-diffusion problems". CMES, vol 1, No. 2, pp. 42-60.
- [2] Atlury dan Shen. 2002. "The Meshless Lokal Petrov-Galerkin Method". CMES vol.3.no.1, pp.11-51.
- [3] Liu, Z. 2001. *Sediment Transport*. Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning Institutet for Vand Manual. Jordog Miljoteknik Aalborg Universitet.
- [4] Markup, L. 2001. *Dasar – Dasar Analisis Aliran di Sungai dan Muara*. UII. Jogjakarta.
- [5] Munson. 2003. *Mekanika Fluida*. Jakarta: Erlangga
- [6] Ottevanger, W. 2005. "Discontinuous Finite Element Modeling of River Hydraulics and Morphology with Application to the Parana river". Master Tesis. Departement of Applied Mathematics. University of Twente.
- [7] Yang, C. T. 1996. *Sediment Transport*. Theory and Practice. Me Graw Hill. New York.

¹Dosen Seniorjurusan Matematika – FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

²Mahasiswa S1 jurusan Matematika – FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya,

MAGNETOHYDRODYNAMO SOLAR ACTIVITY SIMULATION TOWARD THE NEXT MAUNDER MINIMUM: INTERPLANETARY GLOBAL COOLING

Bambang Setiahad
Indonesian National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN)
Watakosek, Gempol P.O. Box 04, Pasuruan 67155, East Java
Fax: 0343-851-887. Tel: 0343-851-569
bambangsetiahad@rocketmail.com

ABSTRACT. We present preliminary results of global semi-empiric magnetohydrodynamo energy transfer in solar convective layer. Initial energy input is provided from inner solar radiative layer as lower physical boundary values. High frequencies dynamo waves will go to lower frequencies as result of penetrating gradual increasing opacity in solar photospheric layers. In time-scale of 300 years is assumed energy input for energy deposit from upper-most radiative layer in a depth of 20,000 km. Results show that energy transfer enters upper physical boundary in oscillatory 11.3 years in almost 300 years. It needs 200 years to revive next oscillatory phase. The 200 years of silent is interpreted as the next Maunder Minimum and this may introduce global cooling mechanism on the planets as detected by historical Maunder Minimum solar activity in years 1500 to 1700.

1. INTRODUCTION

The solar energy is the master and the only energy source that stimulate solar surface activities in many faces. The energy that emits from the solar surface has been known to generate dynamics in interplanetary space. Short time scales and long time scales dynamics in interplanetary space are both the results of non-linear interactions among basic physical parameters from the solar surface energy releases. The planetary climate dynamics is controlled as well by the solar activities in relatively long time scale. The global long time planetary cooling, as well as planetary global warming might relate to the solar activities.

The solar maunder minimum is the long centuries when the solar sunspots do not appear on the solar photosphere. It was happened several centuries before 1690 to 1700. Scientific data compiling on those days was not securely recorded due to the achievements of scientific demands was not addressed to study a long term solar terrestrial effect from the solar activities. It was far before 1690 the historical notice that many centuries without the appearance of the solar sunspot was coincidently with global

cooling on earth, whilst in the last 3 centuries from 1700 until the present days we notice the global warming that is the average temperature of our planet rises 0.5°C per year.

The solar activity was begun when the thermo-nuclear reaction of hydrogen fusion was started. The energy resulted from the reaction flow-out to reach solar outer layers within approximately 2×10^6 years for 7×10^6 km distance. After the long time the energy flow will slow down as the opaqueness of the outer solar layer resist high frequency energy flow to become lower frequency energy flow. But with the same energy density it will tend to change other energy flow that is the convective flow.

The convective flow slowing down radial energy flow significantly, so even though the distance to reach the solar surface is less than 20,000 km it needs 300 to 500 years to reach solar surface. This value is derived only from the solar sunspot phenomena on the solar surface. This layer is the first time photon may free from any high density plasma environment. The solar sunspot phenomena may be considered as one of solar transient energy releases from sunspot area through magnetohydrodynamics instability. For long time scale this transient energy release will eventually effects the interplanetary space and planetary global climate as well. This is the main objective of this paper.

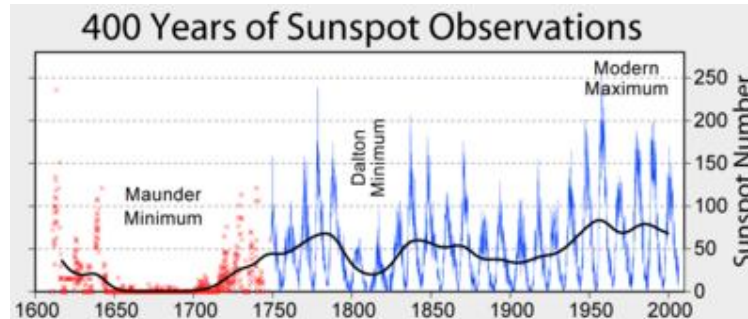


Figure 1: The Maunder Minimum, known as the prolonged sunspot minimum as well, is the name used for the period roughly spanning 1645 to 1715, when sunspots became exceedingly rare, as noted by solar observers of the time. From the sunspot observation and the planetary studies the Maunder Minimum coincided with a period of lower-than-average global planetary temperatures [4][13].

2. MATERIAL AND METHOD OF OBSERVATION

The solar sunspots are the easiest phenomena to observe on the solar surface and sunspots have been observed from the beginning of 1600 until the present days. As many solar observatories operated around the world, an international coordinator was then funded. The data resulted from observation has been calibrated by the coordinator by giving international adjustment procedures in a way that data from any observatory widespread in the world may be plotted together as international solar data. The long-term solar sunspot data in Figure 1 is the results plotted data from early 1600 up to 2000.

The International Watukosek Solar Observatory in East Java has been operated by LAPAN since 1987 up to now resulted pretty good data that continuously provided everyday in bright days. The data resulted from observation has been certificated by the international coordinator SIDAC (Solar Influence Data Analysis Center) in Belgium, Europe. The international adjusted procedures may be expressed in short as $R=k(10g + s)$. The R is a combination of g as number of sunspot group and s as number of black dots on the solar surface appear in that day of observation. The digit 10 notice that one sunspot group 'physically' has a weight equal to 10 black dots. The k is international constant for Watukosek determined by SIDAC, for Watukosek $k=0.24$.

In determining sunspot position it is important to notice the Earth that circling the Sun once a year makes relative positional changes to sunspot position on the solar surface. The sunspot positions are needed to be unique as seen from the Earth. There are three tilt angles that make the position of sunspot to be unique. The first is the polar angle P that is an angle that the solar pole projected to our line-of-sight. The second is the polar tilt angle B that is the reflection of the solar angle relative to the ecliptical plane. And the third is the solar equatorial angle position L that rotates along the solar rotation on its own axis. The sunspot position is then became unique as long as the following transformation is held,

$$X^\alpha = P_\beta^\alpha B_\gamma^\beta L_\delta^\gamma \bar{X}^\delta \quad (1)$$

Where X^a is the sunspot position after considering the tilt angles P , B , and L as seen from the Earth, and \bar{X}^{δ} is the sunspot position on the solar surface. Since the solar globe is actually a three dimensional celestial object, while it is usually projected into two dimensional image, we have to be careful to assign the three polar coordinate tensorial system. The only true angle seen to an observer on the Earth is P , while the rest B and L are subjected to projection geometrical effect then $B \rightarrow \cos B$ and $L \rightarrow \cos L$ consecutively. The resulting graphic may be inspected in Figure 5. The East and West direction may be reverse concurrently.

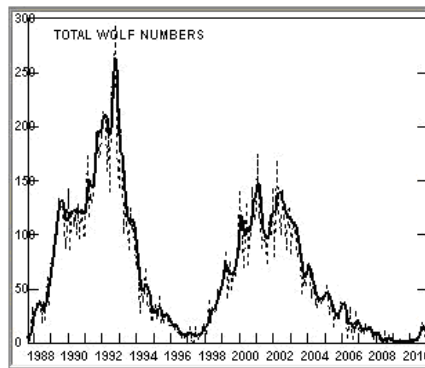


Figure 2: The international sunspot number as observed at Watukosek Solar Observatory belongs to LAPAN from 1987 up to present days. There are two distinctive solar sunspot cycles and the beginning of a new cycle at 2010. The relatively long-term daily observation is enough to provide as initial dynamical check for magnetohydrodynamo simulation (see also Figure 3, 4 and 5).

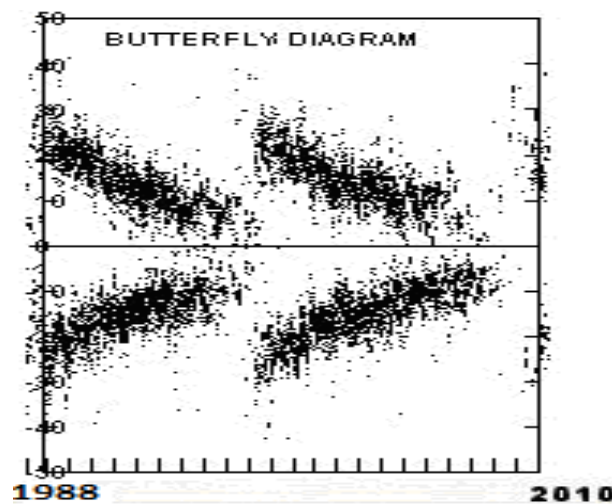


Figure 3: The butterfly diagram from two cycles provide a check for magnetohydrodynamo simulation. The sunspot appearance latitude versus time may follow the general theory of solar differential rotation. The pattern is interpreted as energy releases from below as function of solar latitude.

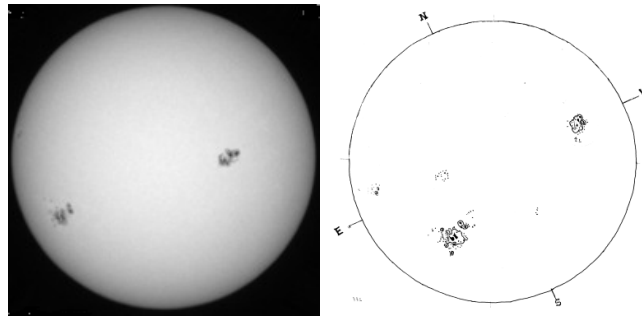


Figure 4: The solar sunspot as the only observable solar surface phenomena relates the mystery of solar energy generations from unseen inner core where the fusion reaction takes place. The sunspot number exhibits cyclic number with a period 11.3 years. During several hours sunspots may change rapidly in number of black dots and general appearance of umbrae and penumbrae. The right side is analyzed by LAPAN solar observer-scientist and has about 12 hours ahead of the left side of the same day 27 October 2003.

| 27 OCTOBER 2003 | | | |
|-----------------|---------------|-----|-------|
| TIME : | 00:13 (UT) | | |
| WEATHER : | FINE | | |
| SEEING : | 3/5 | | |
| SCINTIL : | 3/5 | | |
| IMAGE : | 3/5 | | |
| P : | +25.30 | | |
| B : | +4.91 | | |
| Lo : | 314.12 | | |
| dL : | -0.11 | | |
| L : | 314. | | |
| JD : | 245 2939.51 | | |
| SPOT | G | F | R |
| NORTH | 3 | 73 | 64.27 |
| SOUTH | 2 | 77 | 60.53 |
| TOTAL | 5 | 150 | 124.8 |
| NOTE:: | No photograph | | |

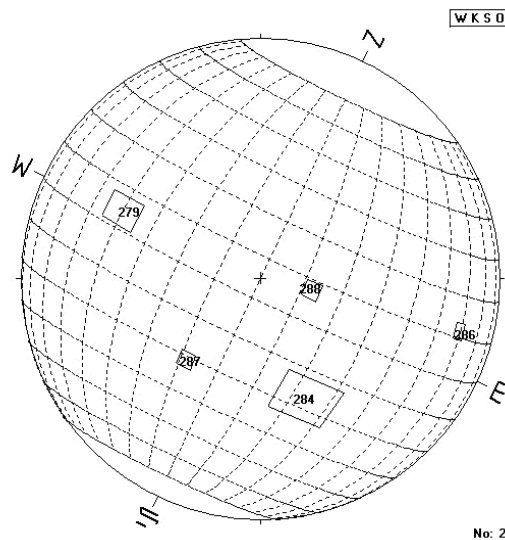


Figure 5: The everyday ASCII data base makes every time after daily sunspot observation by using the concept of tensorial algebra applied in Solar-Earth celestial

mechanics. Note that it uses three important angles P , B , and L to determine uniquely the sunspot heliographic position [6].

3. MAGNETOHYDRODYNAMO SIMULATION

In generating a model of the Magnetohydrodynamo, the sunspot is the only observable phenomenon to check whether the model gives general agreement with the systematic sunspot appearance. The Magnetohydrodynamo is a slow but energetic energy generation, since from the long term sunspot observation we observed a long and fundamental sunspot 11.3 years periodicity [12]. At roughly 2.0 years before and after the maximum phase activity of the sun, there are a lot of energy liberates from the solar surface in a relatively shorter time scales.

The theory of Magnetohydrodynamo transportive energy generation is based traditionally on the Babcock-Leighton theory as utilized by Dikpati and Gilman [3]. Similar like other stars, the sun as a big plasma-ball of hydrogen and electron rotates faster along equator and slower near poles. As a result there is a general motion in all depth of the convective layers in a way that the poloidal magnetic fields component B_θ gradually transfers to toroidal magnetic fields component B_ϕ . This process is called the Ω -effect due to the general solar differential rotation. Confirmation of the process can only be inferred on the solar surface from the sunspot systematic equator ward motion.

The quantity Ω in equation (9) is directly connected with the process usually interpreted as the Coriolis force in similar way as in planetary atmospheric and oceanic modeling and it may be a function of the depth r and the heliographic latitude θ , so that one may write as

$$\Omega \equiv \Omega(r, \theta). \quad (2)$$

The expression (2) has the only observational validation from sunspot observation on the solar surface where $r = R = \text{constant}$,

$$\Omega \equiv \Omega(r = R, \theta) = \Omega(\theta), \quad (3)$$

and we assumed that it has general form on the solar surface as derived from sunspot systematic motion as

$$\Omega(\theta) = a - b \cos^2 \theta - c \cos^4 \theta \text{ [deg/day]}. \quad (4)$$

The constants a , b , and c can be determined from daily sunspot sketch drawings with tight international procedure as have been being done at the Watukosek Solar

Observatory (LAPAN) in East Java [10]. Observationally $a \approx 14.4$, $b \approx 1.7$, and $c \approx 2.4$, and hence the solar equatorial region rotates faster (25.1 days) than the polar region (35.2 days) [8]. The radial dependence due to differential rotation in depth is expressed as general radial function $f(r)$ and explicitly may be written as

$$\Omega(r, \theta) = f(r) \Omega(\theta) \quad (5)$$

In 20,000 km below the solar surface $f(r)$ gives slower rotation at about 12.0° in heliographic degrees relative to the plasma rotation just on the solar surface.

The quantity ε in equations (8) anticipates the recombination process in convective layer's dense plasma among H^+ , H^- , and e^- or the protons, hydrogen ions, and electrons. In high corona and in interplanetary space the constant ε may effectively zero, since the process is essentially collision-less. But in planet proximity space the constant ε may be more decisive since the molecular and ionic recombination is possible in relatively much cooler planetary atmosphere.

When the quantity α is non-zero then combination effect is called the $\alpha\Omega$ -effect, the dynamo becomes $\alpha\Omega$ -magnetohydrodynamic. The non-zero α transfers the toroidal magnetic field back to poloidal magnetic fields. This reciprocal process is maintained by solar differential rotation. The constant α usually called the magnetic helicity. It is caused by a coupling between rotation and convective transport, and driven by the Coriolis force, through a much smaller scale velocity distribution known as turbulence velocity distribution \mathbf{V} . The general expression of the constant is connected with the turbulence vortex flow $\nabla \times \mathbf{V}$ as follow

$$\alpha = -(\frac{1}{3}) \langle \mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \rangle \quad (6)$$

The physical meaning of the constant α in equation (6) may also be interpreted as pushing the toroidal magnetic field back to its original poloidal magnetic field topology by turbulence and is partitioned and averaged in three space directions. As the velocity is related with the turbulence velocity in smaller space scale, the magnetic fields calculation on α is related with average magnetic fields from smaller space scale $\langle \mathbf{B} \rangle$. The magnetic diffusion from smaller space scale relates with the average magnetic field in Laplacian's $\nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle$ as follow

$$\beta = (\frac{1}{3}) \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \rangle \quad (7)$$

The quantity is also averaged and partitioned into three space directions. One may construct in similar way with the global magnetic diffusion quantity η in larger scale to

work with the Magnetohydrodynamic process. The set of equations we use to describe the magnetohydrodynamic of the solar convective layer may look like the equations below [9],

$$[(\partial/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{V}] \rho = \varepsilon \nabla^2 \rho + 0, \quad (8)$$

$$[(\partial/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{V}] \rho \mathbf{V} = \nu \nabla^2 \rho \langle \mathbf{V} \rangle - \nabla P + (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle + \delta (\rho \boldsymbol{\Omega} \times \langle \mathbf{V} \rangle) + \rho \mathbf{G}, \quad (9)$$

$$[(\partial/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{V}] \mathbf{B} = (\beta + \eta) \nabla^2 \langle \mathbf{B} \rangle + \alpha (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) + (\langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{V} \rangle (\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle), \quad (10)$$

$$[(\partial/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{V}] P = \kappa \nabla^2 P - (\gamma - 1) P (\nabla \cdot \langle \mathbf{V} \rangle). \quad (11)$$

Those equations (8) to (11) are the General-Lagrangian-Navier-Stokes time dependent partial differential equation or briefly the GLNS equation. Since the equations are highly non-linear [1] we resumed numerical solution as pointed out by Sod [11].

The computational domain is limited to a sectoral solar region, because of computational shortcomings facility, which is considered to be representative. The physical depth of the computational domain is adopted as the third dimension which lies 20,000 km below solar surface, and equal to 200 computational grids number. The first and second dimensions are parallels to dimensionality of solar surface. Energy input is flown into computational domain from free assignment boundary condition. The upper most computational domain is the solar surface where the energy diffuses away to interplanetary space to warm the planets.

4. RESULTS

The solar activity was begin when a giant cloud of interstellar hydrogen atoms contract to push each other to be more close by gravitational attraction force. This universal gravitational force may overcome the Brownian stochastic motion because the total hydrogen atoms mass exceeded the Brownian force, that is when the total mass exceed the Chandrasekhar's mass limit ($M_{CH} \geq 1/\sqrt{\rho_H}$) [2]. The gravitational contraction was continued until the very center developed high pressure and temperature such that the thermo-nuclear reaction of hydrogen fusion was started. It is four hydrogen atoms converted to one helium atoms with much excess of energy, the reaction is shortly may be describe as $4H \rightarrow He + Energy + neutrinos + other elementary particles$. The excess of energy emits outward with high frequencies that it is difficult to completely simulate the physical processes. We just average it by assuming a continuous energy flow from below solar layers.

The mass excess, energy excess, neutrinos, and other elementary particles flow through a distance about 6×10^5 km in radiative mode and in radiative environment of solar inner layers, this layer is termed as radiative layers. This layer surrounds the core layer where the thermo-nuclear reaction takes place. The energy flows radially outward with relatively the same energy density. The situation change much when these energy flows encounter more opaque to high frequency energy flow near a depth of 20,000 km below solar photospheric surface. With the same energy density, the high frequency flow will eventually change to much lower frequency as a result entering much opaque outer solar layers. Other mode change is the energy flow has more turbulence convective component of motion [5] (in excess of opaqueness and lower frequencies) rather than purely radial outward. The flows move in cyclonic motion [8] while migrate outward.

Due to the cyclonic motions [8] and general solar differential rotation [7] in plasma material, the magnetic field generated by the relative motion of charges particle will developed magnetic flux tube in convective layer. Continuation of the convective motions will strengthen magnetic flux tube through coalescence of smaller flux tube to unite with bigger flux tube. The next result is the buoyancy forces will pop-up the flux tube into lower density environment; that is toward solar photospheric surface. Positions where the flux tube penetrated the photospheric surface is observed as the solar sunspots [7]. The sunspots number appearance on the solar photosphere is known to fluctuate within an extremely low frequency of 11.3 year [5][12].

When one or several magnetic flux tubes move to near solar photospheric surface with less than 2,000 km in depth we assumed that the flux tubes are already appear as sunspots and the energy emerge along the flux tubes will eventually dissipates to interplanetary space. The process is equally well with energy release as flares or other energetic. In this simulation we accommodate by introducing free and dissipative boundary condition on upper most computational domain. While the lowest computational-domain is assumed as free boundary, where the energy-excess flow from below enter the computational convective zone as sketched in Figure 6.

With energy input and deposit for 300~500 years within lower layers and convective energy environment from a depth of 20,000 km, the emitted energy as sunspots appearance will also emitted more or less the same duration of 300~500 years of sunspot appearance with much lower frequencies. The strongest resultant frequency is

around 11.3 years. Thus the next will be sunspot deficiencies on solar surface since the same time span is needed to accumulate the next sunspots appearance. The next sunspot deficiencies in centuries ahead are interpreted as the next global planetary cooling or the next Maunder minimum.

This work may be develop further for complete computation for all solar surface, not only sectoral solar surface, but it needs extensive computational facility. The global solar convective processes can be covered, but with limited computational facility it needs unrealistic prolonged computational time. Results extracted from this work is not yet covered the contribution of both solar semi-hemispherical magnetohydrodynamic processes that may include the processes of the solar coronal hole open magnetic fields migration in periods of 11.3×2 years time scale. This magnetic migration may change the global magnetic flux tube generation of sunspot and may change computational results.

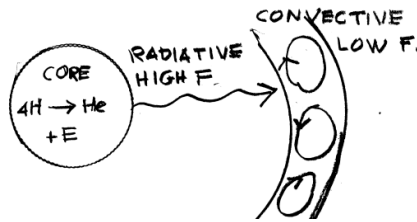


Figure 6: The consequences of similar energy density but different environment. The energy flow from the solar core changes its frequency to much lower frequency and starts to move in cyclonic motions in solar convective layer.

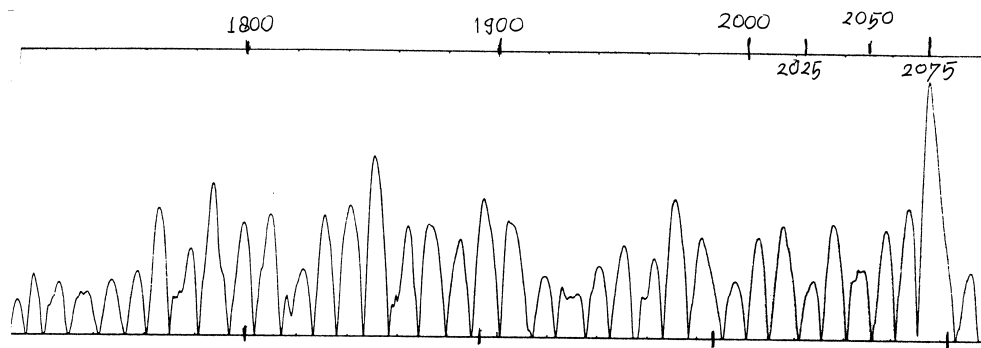


Figure 7: The solar magnetohydrodynamic computer simulation of energy release on the solar surface as the sunspot cyclic and periodic phenomena run from year 1700 to year 3000. The result from 1700 to 2025 is closely produced to observational data from 1700 to 1990.

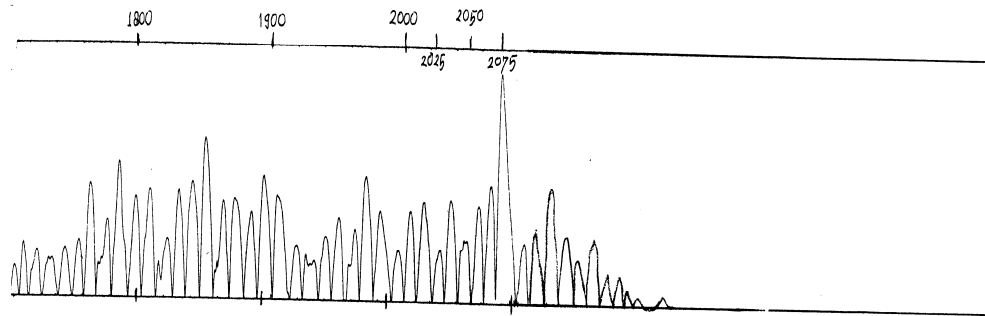


Figure 8: The prolonged magnetohydrodynamo simulation to a time span of 6000 years (1700 to 7700) shows possibilities the next deficiency in sunspot number for many centuries ahead and there will be planetary global cooling

5. CONCLUSIONS

As notice historically in years before 1645 or later, the sun has a very long term behavior. One of them is the energy generation and energy deposit in solar convective region. After the sun emits the sunspot for 300 to 500 years it seems to need roughly equal time scale to deposit energy in convective layer for the next sunspot long term appearances. The time scale for energy deposit introduces deficiency in sunspot appearance for centuries. Consequence for the century's deficiency to interplanetary space and planetary biospheric system is the global cooling. Mean while for the last three centuries from 1690 up to present days (2010) we notice the global planetary warming.

From this research it might be several thousands years ago the Earth probably has experienced several global cooling and warming due to the solar magnetohydrodynamo long term energy deposits and releases. The global cooling may return down some heavy pollutants such as the carbon-dioxides (CO_2) and nitrogen (N_2) from higher to lower atmosphere and then freezing them to ice in the South or North Pole. Primitive ice in a depth in South Pole has relative higher freezing carbon-dioxides and nitrogen rather than ice on the surface.

REFERENCES

- [1]. Biskamp, D. (1991), *Non-Linear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2]. Chandrasekhar, S. (1967), *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publ. Inc., New York.
- [3]. Dikpati, M., Gilman, P.A. (2006), *Simulating and Predicting Solar Cycle Using A Flux-Transport Dynamo*, The Astrophysical Journal, **649**, p. 498.
- [4]. Luterbach, J. (2001). *The Late Maunder Minimum (1675–1715) – A Key Period for Studying Decadal Scale Climatic Change in Europe*, *Climatic Change* **49** (4): 441–462.
- [5]. Ossendrijver, A.J.H. (1996), *Fluctuation and Energy Balance in Solar and Stellar Dynamos* (Thesis), Netherlands Foundation for Research in Astronomy (ASTRON), Utrecht.
- [6]. Setiahadi, B. (2007), *Daily Observational Sunspot ASCII Data for Long-Term Solar Magnetohydrodynamo Studies at LAPAN Watukosek*, National Conference on Computer Science and Information Technology, University of Indonesia, (ISSN 0126-2866), p. 137.
- [7]. Setiahadi, B. (2007), *Solar Differential Rotation Derived from Sunspot Observations at LAPAN Watukosek*, Seminar Nasional Stastistika UNISBA, (ISBN 978-979-16312-0-4), p. 109.
- [8]. Setiahadi, B. (2007), *The Solar Granular Cell Stream Function Model Derived from Continuity Differential Equation*, Prosiding Seminar Nasional Matematika UNPAR. (ISSN 1907-3909), p. 157.
- [9]. Setiahadi, B. (2008), *Existence of Solar Dynamo Waves by Mean-Fields Magneto-hydro-dynamics*, Prosiding Seminar Nasional Matematika, UNPAR, (ISSN 1907-3909), p. 221.
- [10]. Setiahadi, B. (2008), *Research on Sunspot Migration Due to Global Solar Meridional Plasma Flow*, Prosiding SNASTI 2008, (ISBN 978-979-89683-31-0), p.132.
- [11]. Sod, G.A. (1985), *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and Initial Boundary-Value Problems*, Cambridge University Press, Cambridge.

- [12]. Van Geffen, J.H.G.M. (1993), *Magnetic Energy Balance and Period Stability of the Solar Dynamo* (Thesis), Space Research Organization of the Netherlands (SRON), Utrecht.
- [13]. Willie, W.S., Yaskell, S.H. (2003). *The Maunder Minimum and the Variable Sun-Earth Connection*. River Edge, NJ: World Scientific. pp. 278.

MODEL *CONTINUOUS TIME MARKOV CHAIN (CTMC) SIS*

Widya Pratesa Aryawati, Respatiwan, Sri Kuntari

Jurusan Matematika, FMIPA UNS

ABSTRAK. Model matematika dapat digunakan untuk mempelajari pola penyebaran penyakit. Pada beberapa penyakit, kekebalan tubuh individu yang sembuh dari infeksi tidak langsung pulih. Dalam kondisi tersebut, sistem kekebalan tubuhnya sangat lemah, sehingga individu yang sembuh dari infeksi rentan terinfeksi kembali. Penyebaran penyakit yang mempunyai karakter tersebut dapat digambarkan oleh model *Continuous Time Markov Chain (CTMC) SIS*. Parameter yang sangat berperan dalam model tersebut adalah parameter laju penularan dan laju kesembuhan. Dalam artikel ini, kedua parameter tersebut diestimasi melalui metode maksimum *likelihood*. Selanjutnya, untuk mengilustrasikan model tersebut diambil suatu penerapan kasus dari Allen [2]. Hasil estimasi parameter laju penularan dan laju kesembuhan pada penerapan kasus, masing-masing sebesar $\hat{\beta} = 0.45$ dan $\hat{\gamma} = 0.44$. Model yang diperoleh kemudian disimulasikan dengan nilai $I(0)$ yang berbeda. Dari grafik hasil simulasi menunjukkan bahwa pemberian nilai $I(0)$ yang berbeda mempengaruhi pola penyebaran penyakit.

Kata Kunci: *model matematika, penyebaran penyakit, sistem kekebalan tubuh lemah, model Continuous Time Markov Chain CTMC SIS, maksimum likelihood*

1. PENDAHULUAN

SARS, influenza, dan malaria adalah beberapa contoh penyakit menular dan berbahaya. Infeksi oleh penyakit tersebut dapat mengakibatkan kematian. Meskipun dapat mengakibatkan kematian, infeksi oleh penyakit tersebut masih dapat disembuhkan. Namun, sistem kekebalan tubuh individu yang sembuh dari infeksi tidak langsung pulih, sehingga ia berada dalam kondisi dengan sistem kekebalan tubuh lemah. Hal ini menyebabkan individu tersebut rentan terinfeksi kembali.

Infeksi oleh penyakit dengan karakter tersebut tidak hanya meningkatkan tingginya angka kematian, namun juga sangat merugikan, sehingga perlu dilakukan pengendalian. Salah satu langkah yang dapat dilakukan sebagai upaya pengendalian adalah mempelajari pola penyebarannya. Menurut Ianelli [5], penyebaran penyakit dengan karakter tersebut dapat dipelajari melalui model *SIS*. Model *SIS* dapat dikaji secara deterministik maupun probabilistik. Dalam artikel ini, model *SIS* dikaji secara probabilistik melalui model *CTMC SIS*.

Penyebaran penyakit merupakan suatu gejala random yang muncul secara terus menerus menjadi suatu proses dengan perilaku tertentu. Proses tersebut disebut sebagai proses stokastik. Proses stokastik digunakan untuk membangun model stokastik. Oleh karena itu, penyebaran penyakit dapat dipelajari melalui model stokastik [6].

Model *CTMC SIS* merupakan suatu model stokastik yang dibangun dari rantai Markov (*Markov Chain*) dengan waktu kontinu. Rantai Markov merupakan suatu kejadian khusus dari proses Markov, yaitu proses Markov dengan ruang *state* diskrit. Suatu proses stokastik disebut sebagai proses Markov, apabila kejadian pada suatu periode hanya dipengaruhi oleh kejadian pada periode sebelumnya, tidak dipengaruhi oleh kejadian pada periode lampau.

2. MODEL *Continuous Time Markov Chain*(CTMC) SIS

Dalam artikel ini, penurunan model *CTMC SIS* mengacu pada Allen [1] dan Burgin [3]. Pada model ini diasumsikan bahwa penyakit menyebar pada suatu populasi tertutup. Jumlah total populasi konstan dan dinotasikan N . Menurut Allen [1, 2], model *CTMC SIS* merupakan model yang digunakan untuk mempelajari proses stokastik dengan waktu kontinu dan variabel random jumlah individu terinfeksi diskrit. Variabel random diskrit $I(t)$, $t \in [0, \infty)$ mempunyai fungsi probabilitas

$$p_i(t) = Pr\{I(t) = i\}.$$

Jumlah individu terinfeksi dapat berubah setiap waktu dalam interval waktu $t = [0, \infty)$. Probabilitas berubahnya jumlah individu terinfeksi dari sejumlah i menjadi j pada selang waktu tertentu, disebut sebagai probabilitas transisi

$$p_{ij}(\Delta t) = Pr\{I(t + \Delta t) = j | I(t) = i\}.$$

Pada model ini, populasi diklasifikasikan dalam kelompok *susceptible* dan *infected*. Kelompok *susceptible* terdiri dari individu yang sehat namun berpotensi terinfeksi penyakit. Kelompok *infected* terdiri dari individu yang terinfeksi dan dapat menularkannya kepada individu sehat. Penularan terjadi melalui kontak antara individu dalam kelompok *susceptible* dengan individu dalam kelompok *infected*. Jumlah individu dalam kelompok *susceptible* dan *infected* pada waktu t masing-masing dinyatakan sebagai $S(t)$ dan $I(t)$.

Besarnya laju kelahiran dan laju kematian diasumsikan sama dan dinotasikan b . Setiap individu yang lahir masuk ke dalam kelompok *susceptible*. Banyaknya individu

yang lahir dalam populasi sebesar $bS + bI$. Sedangkan, banyaknya individu yang mati pada kelompok *susceptible* dan *infected*, masing-masing sebesar bS dan bI .

Dimungkinkan hanya terjadi satu individu yang bertransisi dalam selang waktu yang sangat kecil, sehingga hanya ada tiga transisi yang terjadi, yaitu dari *state* i ke $j = i + 1$, i ke $j = i - 1$, dan i ke $j = i$. Pada saat terjadi transisi dari *state* i ke $i + 1$, berarti terjadi penambahan satu individu dalam kelompok *infected*. Individu tersebut berasal dari kelompok *susceptible* yang kemudian terinfeksi dan pindah ke kelompok *infected*. Probabilitas transisinya dinyatakan sebagai

$$\beta i \frac{(N - i)}{N} \Delta t + o(\Delta t), \tag{2.1}$$

dengan β adalah laju penularan.

Pada saat terjadi transisi dari *state* i ke $i - 1$, berarti terjadi pengurangan jumlah individu terinfeksi dalam kelompok *infected*. Hal ini dapat terjadi akibat dua hal, yaitu terjadinya kesembuhan, dengan laju kesembuhan γ atau terjadi kematian dalam kelompok tersebut. Probabilitas transisinya dinyatakan sebagai

$$(b + \gamma)i \Delta t + o(\Delta t), \tag{2.2}$$

dengan γ adalah laju kesembuhan.

Pada saat terjadi transisi dari *state* i ke i , berarti tidak terjadi perubahan jumlah individu terinfeksi. Probabilitas transisinya dinyatakan sebagai

$$1 - \left(\beta \frac{(N - i)}{N} i + (b + \gamma)i \right) \Delta t + o(\Delta t) \tag{2.3}$$

Persamaan (2.1), (2.2) dan (2.3) dapat dituliskan ulang sebagai sistem persamaan

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} b(i) \Delta t + o(\Delta t), & j = i + 1 \\ d(i) \Delta t + o(\Delta t), & j = i - 1 \\ 1 - [b(i) + d(i)] \Delta t + o(\Delta t), & j = i \\ o(\Delta t), & j \text{ yang lain,} \end{cases} \tag{2.4}$$

dengan $b(i) = \beta \frac{(N - i)}{N} i$ dan $d(i) = (b + \gamma)i$. Menurut Taylor dan Karlin [8], $o(\Delta t)$ merupakan suatu faktor sisaan tak tentu dari orde yang lebih kecil dari Δt [$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} =$

0]. Berdasarkan sistem persamaan probabilitas transisi (2.4) diperoleh matriks probabilitas transisi

$$P(\Delta t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d(1)\Delta t & 1 - [b(1) + d(1)]\Delta t & b(1)\Delta t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d(2)\Delta t & 1 - [b(2) + d(2)]\Delta t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d(N)\Delta t & 1 - d(N)\Delta t \end{pmatrix}.$$

Matriks probabilitas transisi tersebut dimulai dari *state* 0.

3. ESTIMASI MAKSIMUM Likelihood

Pada penerapannya dalam rantai Markov, fungsi *likelihood* merupakan hasil kali semua probabilitas transisi yang mungkin [7].

$$L(\beta, \gamma) = \prod_i p_{i+1} p_{i-1} p_{ii} \tag{3.1}$$

Besarnya probabilitas transisi tergantung pada banyaknya individu terinfeksi pada saat t , $I(t)$. Oleh karena itu, apabila penyebaran penyakit terjadi selama periode $[0, T]$ dan jumlah individu terinfeksi berubah-ubah dalam interval waktu kontinu, maka total probabilitas transisi dari *state* i ke $i + 1$ adalah $\int_0^T \frac{(N-I(t))}{N} \beta I(t) dt$. Sedangkan, total probabilitas transisi dari *state* i ke $i - 1$ dan *state* i ke i masing-masing adalah $\int_0^T (b + \gamma) I(t) dt$ dan $\int_0^T 1 - \beta I(t) \frac{(N-I(t))}{N} - (b + \gamma) I(t) dt$. Sebagaimana yang ditulis oleh Clancy dan O'Neill [4], bahwa fungsi *likelihood* tersebut dipengaruhi oleh periode infeksi yang berdistribusi eksponensial, $\exp\left(-\int_0^T \frac{(N-I(t))}{N} \beta I(t) + (b + \gamma) I(t) + \left(1 - \beta I(t) \frac{(N-I(t))}{N} - (b + \gamma) I(t)\right) dt\right)$. Oleh karena itu persamaan (3.1) dapat dituliskan ulang

$$L(\beta, \gamma) = \int_0^T \frac{(N - I(t))}{N} \beta I(t) dt \int_0^T (b + \gamma) I(t) dt \int_0^T 1 - \frac{(N - I(t))}{N} \beta I(t) - (b + \gamma) I(t) dt \exp\left(-\int_0^T \frac{(N - I(t))}{N} \beta I(t) + (b + \gamma) I(t) + \left(1 - \beta I(t) \frac{(N - I(t))}{N} - (b + \gamma) I(t)\right) dt\right).$$

Fungsi log-likelihoodnya dinyatakan sebagai

$$\ln L(\beta, \gamma) = \int_0^T \ln\left(\frac{(N - I(t))}{N} \beta I(t)\right) - \left(\frac{(N - I(t))}{N} \beta I(t)\right) dt + \int_0^T \ln\left((b + \gamma) I(t)\right) - (b + \gamma) I(t) dt + \int_0^T \ln\left(1 - \beta I(t) \frac{(N - I(t))}{N} - (b + \gamma) I(t)\right) - \left(1 - \beta I(t) \frac{(N - I(t))}{N} - (b + \gamma) I(t)\right) dt.$$

Selanjutnya, estimasi parameter diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *log-likelihood* tersebut. Hasil estimasi tersebut adalah sebagai berikut. Estimasi parameter laju penularan sebesar

$$\hat{\beta} = \frac{T}{\frac{1}{N} \int_0^T I(t)(N - I(t))dt}$$

dan laju kesembuhan sebesar

$$\hat{\gamma} = \frac{T}{\int_0^T I(t)dt}.$$

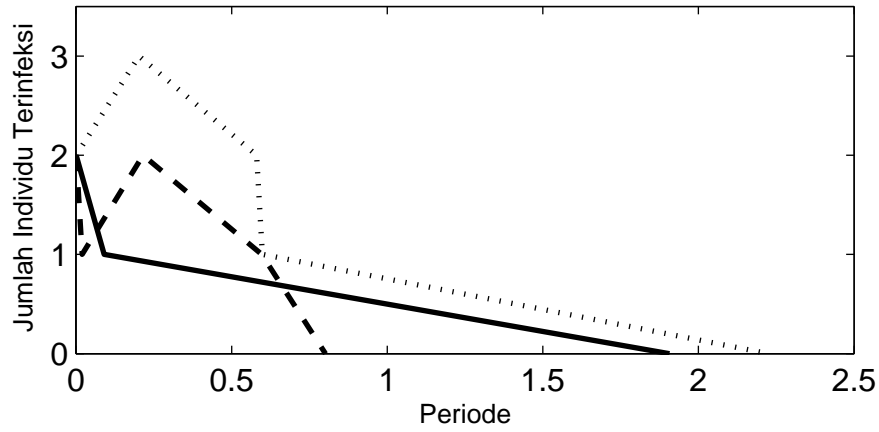
4. PENERAPAN KASUS

Penerapan kasus yang dipelajari dalam artikel ini mengacu pada Allen [2]. Dalam penerapan kasus ini, data yang digunakan adalah data *smallpox* dengan $N = 119$ dan periode infeksi $T = 83$. Diberikan nilai laju kematian yang sama dengan laju kelahiran, yaitu sebesar $b = 0.25$. Laju penularan dan laju kesembuhan diestimasi menggunakan metode maksimum *likelihood*, hasil estimasi tersebut masing-masing sebesar $\hat{\beta} = 0.45$ dan $\hat{\gamma} = 0.44$. Hasil estimasi tersebut menunjukkan nilai yang hampir sama antara laju penularan dan laju kesembuhan. Berdasarkan sistem persamaan (2.4) model penyebaran *smallpox* dinyatakan sebagai

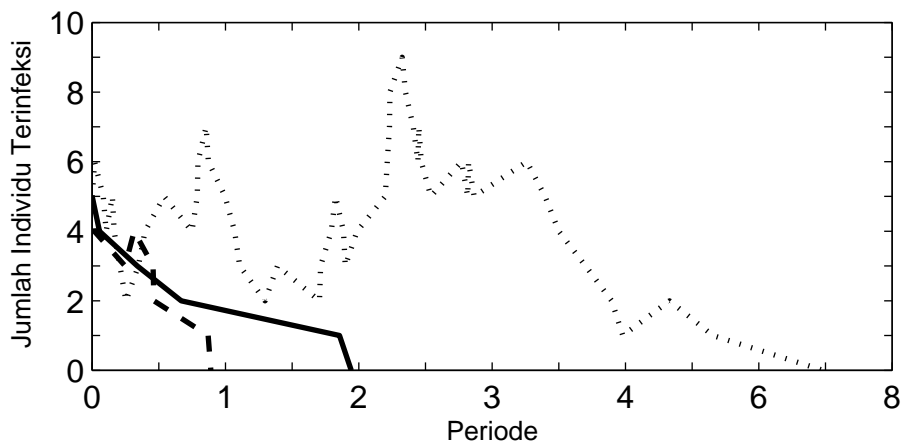
$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 0.45 \frac{(119-i)}{119} i \Delta t + o(\Delta t), & j = i + 1 \\ (0.25 + 0.44) i \Delta t + o(\Delta t), & j = i - 1 \\ 1 - (0.45 \frac{(119-i)}{119} i + (0.25 + 0.44) i) \Delta t + o(\Delta t), & j = i \\ o(\Delta t), & j \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Gambar 1, 2, dan 3 merupakan grafik pola penyebaran *smallpox*, hasil simulasi model menggunakan *software* Matlab 7.8.0 dengan beberapa nilai awal yang merujuk dari Allen [2].

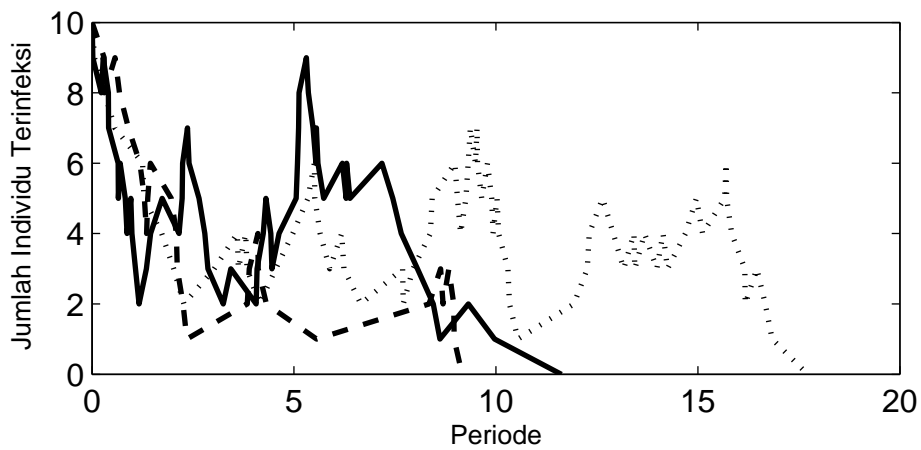
Apabila diberikan $I(0) = 2$, maka pola penyebaran jumlah individu terinfeksi ditunjukkan oleh Gambar 1. Dari Gambar 1 terlihat bahwa ada tiga pola penyebaran yang ditunjukkan oleh garis tebal putus-putus, garis tebal, dan garis tipis putus-putus. Garis tebal putus-putus menggambarkan pola penyebaran dengan periode yang paling singkat. Jumlah individu terinfeksi mencapai nilai maksimum setelah sebelumnya mengalami penurunan. Kemudian, dari titik maksimum jumlah individu terinfeksi kembali turun dan mencapai nol sebelum periode pertama. Garis tebal menggambarkan pola penyebaran dengan periode yang lebih lama dibandingkan garis tebal putus-putus. Pada pola penyebaran tersebut jumlah individu terinfeksi terus menurun hingga mencapai



Gambar 1. Pola penyebaran jumlah individu terinfeksi dengan $I(0) = 2$



Gambar 2. Pola penyebaran jumlah individu terinfeksi dengan $I(0) = 5$



Gambar 3. Pola penyebaran jumlah individu terinfeksi dengan $I(0) = 10$

titik nol sebelum periode kedua. Garis tipis putus-putus menggambarkan pola penyebaran dengan periode yang paling lama. Jumlah individu terinfeksi meningkat hingga mencapai titik maksimum dalam periode yang singkat dan kemudian menurun hingga mencapai titik nol setelah periode kedua.

Gambar 2 dan 3 menunjukkan pola penyebaran dengan pemberian nilai awal yang berbeda. Dari gambar 2 dan 3 terlihat bahwa dengan nilai awal yang berbeda maka pola penyebarannya-pun juga berbeda. Perbedaan tersebut terdapat pada periode penyebaran, penyebaran jumlah individu terinfeksi, waktu berhentinya penyebaran dan terjadinya jumlah infeksi maksimum.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

(1) Model *CTMC SIS* dinyatakan sebagai

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} b(i)\Delta t + o(\Delta t), & j = i + 1 \\ d(i)\Delta t + o(\Delta t), & j = i - 1 \\ 1 - [b(i) + d(i)]\Delta t + o(\Delta t), & j = i \\ o(\Delta t), & j \text{ yang lain.} \end{cases}$$

(2) Hasil estimasi parameter laju penularan sebesar

$$\hat{\beta} = \frac{T}{\frac{1}{N} \int_0^T I(t)(N - I(t))dt},$$

sedangkan laju kesembuhan sebesar

$$\hat{\gamma} = \frac{T}{\int_0^T I(t)dt}.$$

(3) Berdasarkan pengamatan grafik pola penyebaran pada penerapan kasus, lamanya periode infeksi dan jumlah maksimum infeksi dipengaruhi oleh nilai awal jumlah individu terinfeksi.

DAFTAR PUSTAKA

1. Allen L. J. S., *An Introduction to Stochastic Epidemic Model Part 1*, Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, Texas, 2008.
2. Allen L. J. S., *An Introduction to Stochastic Epidemic Model Part 2*, Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, Texas, 2008.

3. Burgin A. M. B., *Deterministic and Stochastic Discret Time Epidemics Model with Spatial Consideration*, Texas Tech University, Texas, 1998.
4. Clancy D. and P. D. O'Neill, *Bayesian Estimation of The Basic Reproduction Number in Stochastic Epidemic Models*, Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, United Kingdom, 2008.
5. Ianelli M., *The Mathematical Modelling of Epidemics*, Mathematics Departement, University of Trento, Italy, 2005.
6. Parzen E., *Stochastic Processes*, Holden-Day, Inc, United State of America, 1962.
7. Spring, *Maximum Likelihood Estimation for Markov Chain*, Spring, January 2009.
8. Taylor H. M. and S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modelling*, revised ed., Academic Press, United State of America, 1994.

MODEL LOGISTIK DENGAN DAYA DUKUNG LINGKUNGAN SEBAGAI FUNGSI NUTRISI UNTUK BAKTERI *Lactobacillus delbrueckii*

Niken Larasati
Program Studi Matematika, Jurusan MIPA
Fakultas Sains dan Teknik, Unsoed

ABSTRAK. Pertumbuhan populasi bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch* terdiri dari 4 fase yaitu fase adaptasi, fase logaritmik, fase stasioner, dan fase kematian. Dalam kultur *batch*, nutrisi hanya diberikan saat awal saja sehingga daya dukung lingkungan akan menurun seiring berkurangnya nutrisi. Daya dukung lingkungan pada model logistik dapat dimodifikasi menjadi fungsi nutrisi. Oleh karena itu, model pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi dapat digunakan untuk memprediksi pertumbuhan populasi bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch*.

Terdapat dua kasus untuk penyelesaian model tersebut, yaitu Kasus 1: laju pertumbuhan intrinsik tidak sama dengan perkalian antara *nutritional efficiency* dan konsumsi rata-rata individu dan Kasus 2: dengan laju pertumbuhan intrinsik sama dengan perkalian antara *nutritional efficiency* dan konsumsi rata-rata individu. Kedua kasus ini disimulasikan untuk mendapatkan model yang sesuai dengan rata-rata kesalahan absolut terkecil. Berdasarkan hasil simulasi dan perhitungan rata-rata kesalahan absolut, model yang paling sesuai adalah model dengan penyelesaian Kasus 1.

Kata kunci : model logistik , daya dukung lingkungan, *Lactobacillus delbrueckii*

1. PENDAHULUAN

Bakteri yang paling sering digunakan dalam mikrobiologi industri adalah bakteri asam laktat (Sudarmadji,1989). Hal ini dikarenakan bakteri asam laktat menguntungkan, yaitu mampu memfermentasikan berbagai jenis monosakarida dan disakarida serta mampu menghasilkan produk baru yang aman dikonsumsi. Salah satunya adalah bakteri *Lactobacillus delbrueckii*. Pertumbuhan bakteri dalam kultur *batch* dibagi menjadi 4 fase yaitu fase adaptasi, logaritmik, stasioner, dan kematian. Populasi bakteri akan terus bertambah sampai fase stasioner dan setelah fase stasioner populasi bakteri akan berkurang.

Model pertumbuhan bakteri dalam kultur *batch* dengan memodifikasi daya dukung lingkungan menjadi fungsi menurun tanpa memperhatikan faktor yang menyebabkan penurunan tersebut dikaji oleh Hartanti (2006) yaitu model logistik yang dimodifikasi. Daya dukung lingkungan pada model logistik dapat dimodifikasi menjadi fungsi nutrisi (Huzimura dan Matsuyama, 1998). Dalam kultur *batch*, nutrisi hanya

diberikan saat awal saja sehingga daya dukung lingkungan akan menurun seiring berkurangnya nutrisi. Oleh karena itu, model pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi dapat digunakan untuk memprediksi pertumbuhan populasi bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch*.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Model Pertumbuhan Logistik dengan Daya Dukung Lingkungan sebagai Fungsi dari Nutrisi

Model pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan bersifat konstan diberikan dengan persamaan

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (1)$$

Daya dukung lingkungan pada pertumbuhan bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch* dipengaruhi oleh faktor nutrisi, maka daya dukung lingkungan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari jumlah nutrisi (X), ditulis $K = f(X(t))$. Jika fungsi dari jumlah nutrisi disubstitusikan ke dalam persamaan (1) maka diperoleh

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{f(X(t))} \right). \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan model pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi.

Diasumsikan, semakin sedikit jumlah nutrisi yang tersedia akan semakin kecil nilai $f(X)$. Oleh karena itu, diambil fungsi linier dalam bentuk yang sederhana untuk $f(X)$ yaitu

$$f(X) = bX \quad (3)$$

dengan $b > 0$, dinamakan sebagai *nutritional efficiency* (Huzimura dan Matsuyama, 1998). Nutrisi awal yang diberikan pada kultur *batch* akan mulai menipis pada fase stasioner dan lama kelamaan akan habis. Oleh karena itu, nutrisi pada saat t dinyatakan sebagai fungsi menurun yaitu

$$X(t) = X_0 - a N t$$

dengan a adalah konsumsi rata-rata individu per unit waktu, $a > 0$, dan X_0 adalah jumlah nutrisi awal yang diberikan. Laju perubahan nutrisi terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dX}{dt} = -aN. \quad (4)$$

Model pertumbuhan logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi diselesaikan dengan menggunakan metode peubah terpisah.

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{N} dN = \int r dt - \int \frac{rN}{f(X)} dt. \tag{5}$$

Menurut persamaan (4), $\frac{dX}{dt} = -aX$, sehingga diperoleh

$$dt = \frac{dX}{-aX}. \tag{6}$$

Jika persamaan (6) disubstitusikan ke persamaan (5) maka diperoleh

$$\ln|N| = r t + \frac{r}{a} \int \frac{1}{f(X)} dX + C \tag{7}$$

dengan C adalah konstanta. Jika jumlah populasi saat $t = t_0$ adalah $N(t_0)=N_0$ dan nutrisi awal yang diberikan adalah X_0 maka persamaan (7) menjadi

$$\begin{aligned} \ln|N_0| &= r t_0 + \frac{r}{a} \int \frac{1}{f(X_0)} dX + C. \\ \Leftrightarrow C &= \ln|N_0| - r t_0 - \frac{r}{a} \int \frac{1}{f(X_0)} dX. \end{aligned} \tag{8}$$

Jika persamaan (8) disubstitusikan ke persamaan (7), maka diperoleh

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{N}{N_0} \right| = r(t - t_0) + \frac{r}{a} \int_{X_0}^X \frac{dX}{f(X)}. \tag{9}$$

Apabila persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (9) maka diperoleh

$$N = N_0 \cdot \exp(r(t - t_0)) \left(\frac{X}{X_0} \right)^{\frac{r}{ab}}.$$

Jika $t_0 = 0$, maka

$$N(t) = N_0 \left(\frac{X}{X_0} \right)^{\frac{r}{ab}} e^{rt}. \tag{10}$$

Penyelesaian dari laju perubahan nutrisi diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (10) ke persamaan (6) dengan syarat awal $X(0) = X_0$,

$$X = X_0 \left(1 + \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{b} \right) \frac{N_0}{X_0} (1 - e^{rt}) \right)^{\frac{ab}{ab-r}}. \tag{11}$$

Penyelesaian laju perubahan populasi didapatkan dengan mensubstitusikan persamaan (11) ke persamaan (10),

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{b} \right) \frac{N_0}{X_0} (1 - \exp(rt)) \right)^{\frac{r}{ab-r}} \exp(rt). \tag{12}$$

Persamaan (14) adalah penyelesaian dari model logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi untuk $r \neq ab$. Jadi, perlu ditentukan penyelesaian model untuk $r = ab$.

Jika $r = ab$ atau $a = r/b$ maka persamaan (10) menjadi

$$N(t) = N_0 \left(\frac{X(t)}{X_0} \right) e^{rt}. \tag{13}$$

Penyelesaian dari laju perubahan nutrisi (X) untuk $r \neq ab$ didapatkan dengan mensubstitusikan persamaan (13) ke persamaan (6), diperoleh

$$X = X_0 \exp\left(\frac{a}{r}(1 - e^{rt})\right). \tag{14}$$

Penyelesaian laju perubahan populasi (N) untuk $r = ab$ didapatkan dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke persamaan (13),

$$\Leftrightarrow N(t) = N_0 \exp\left(rt + \frac{a}{r}(1 - e^{rt})\right). \tag{15}$$

Persamaan (15) adalah penyelesaian dari model logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi untuk $r = ab$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Simulasi

Simulasi penyelesaian model logistik dengan daya dukung lingkungan sebagai fungsi dari nutrisi untuk bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dibagi menjadi 2 kasus, yaitu Kasus 1 ($r \neq ab$) dan Kasus 2 ($r = ab$). Pada setiap kasus nilai X_0 , N_0 , dan r tetap. Data pertumbuhan bakteri *Lactobacillus delbrueckii* hasil observasi tercantum pada Tabel 1, dengan $X_0 = 0,05$, $N_0 = 3,2 \times 10^6$ dan $r = 0,95$

Tabel 1. Data populasi bakteri *Lactobacillus delbrueckii*

| Waktu (t) | Populasi bakteri (N) |
|------------------|-----------------------------|
| 0 | $3,2 \times 10^6$ |

| Lanjutan | |
|----------|-------------------|
| 1 | $3,2 \times 10^6$ |
| 2 | $8,0 \times 10^6$ |
| 3 | $3,2 \times 10^7$ |
| 4 | $6,4 \times 10^7$ |
| 5 | $7,2 \times 10^7$ |
| 6 | $5,6 \times 10^7$ |
| 7 | $4,8 \times 10^7$ |
| 8 | $4,0 \times 10^7$ |
| 9 | $3,2 \times 10^7$ |

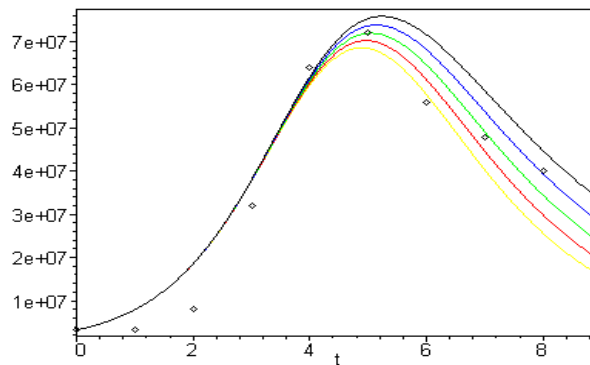
Sumber : Mardyarini (2006)

Kasus 1 : $r \neq ab$

Penyelesaian model untuk Kasus 1 diberikan pada persamaan (12).

Parameter a Berubah dan Parameter b Tetap

Simulasi dilakukan dengan menentukan nilai dari parameter b . Misal, nilai $b=2,4 \times 10^9$.



Keterangan :

— : $a=1 \times 10^{-10}$

— : $a=1,1 \times 10^{-10}$

— : $a=1,2 \times 10^{-10}$

— : $a=1,3 \times 10^{-10}$

— : $a=1,4 \times 10^{-10}$

◇ ◇ ◇ ◇ : data observasi

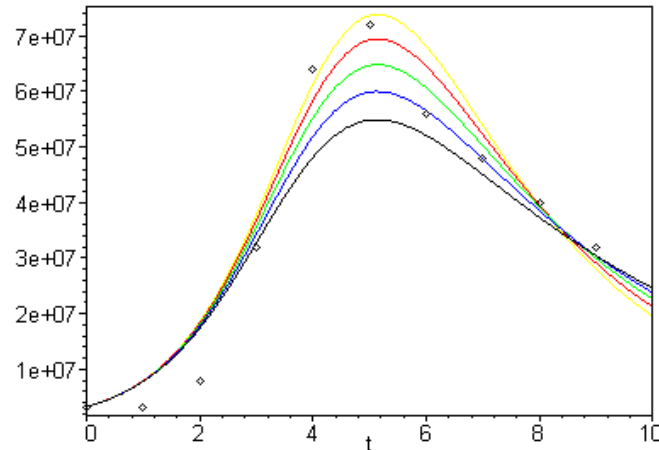
Gambar 1. Grafik hasil simulasi penyelesaian model pada Kasus 1 dengan parameter a berubah dan b tetap.

Berdasarkan Gambar 1, populasi bakteri dengan persentase kesalahan absolut terkecil terjadi pada nilai $a = 1,1 \times 10^{-10}$ yaitu 35,22 %. Dengan demikian, model yang paling mendekati data observasi adalah

$$N(t) = 3,2 \times 10^6 \left(\frac{e^{0,95t}}{\left((0,9807438596 + 0,1925614035 e^{0,95t})^{1,38483950} \right)} \right). \tag{16}$$

Parameter b Berubah dan Parameter a Tetap

Simulasi dilakukan dengan menentukan nilai dari parameter a . Misal, nilai $a=1,1 \times 10^{-10}$.



Keterangan:

- : $b=1,6 \times 10^9$
- : $b=1,8 \times 10^9$
- : $b=2 \times 10^9$
- : $b=2,2 \times 10^9$
- : $b=2,4 \times 10^9$
- ◇◇◇◇◇ : data observasi

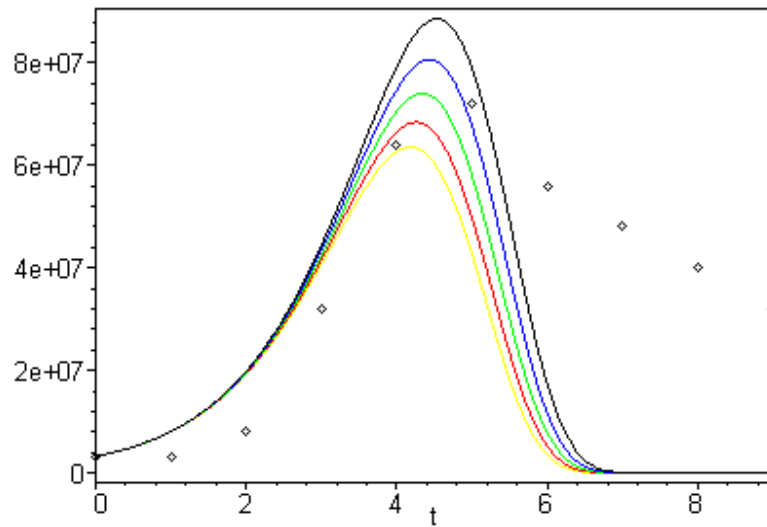
Gambar 2. Grafik hasil simulasi penyelesaian model pada Kasus 1 dengan parameter b berubah dan a tetap

Berdasarkan Gambar 2, nilai rata-rata persentase kesalahan absolut terkecil terjadi pada nilai $b = 1,8 \times 10^9$ yaitu 31,89%. Dengan demikian, model yang paling mendekati data observasi adalah

$$N(t) = 3,2 \times 10^6 \left(\frac{e^{0,95t}}{\left(0,9674105263 + 0,03258947368 e^{0,95t}\right)^{1,22739018}} \right). \quad (17)$$

Kasus 2 : $r = ab$

Penyelesaian model logistik dengan daya dukung lingkungan merupakan fungsi dari ketersediaan nutrisi untuk Kasus 2 diberikan pada persamaan (15). Simulasi dilakukan dengan mengubah-ubah nilai parameter a .



Keterangan:

— : $a=2 \times 10^{-10}$

— : $a=2,2 \times 10^{-10}$

— : $a=2,4 \times 10^{-10}$

— : $a=2,6 \times 10^{-10}$

— : $a=2,8 \times 10^{-10}$

◇◇◇◇◇ : data observasi

Gambar 3. Grafik hasil simulasi penyelesaian model pada Kasus 2 dengan parameter a berubah

Berdasarkan Gambar 3, nilai rata-rata persentase kesalahan absolut terkecil terjadi pada nilai $a = 2,4 \times 10^{-10}$ yaitu 69,66 %. Dengan demikian, model yang paling mendekati data observasi adalah

$$N(t) = 3,2 \times 10^6 \exp(0,95t + 0,01616842105 - 0,01616842105e^{0,95t}). \quad (18)$$

3.2. Analisa Model

Berdasarkan hasil simulasi, grafik populasi bakteri hasil prediksi model pada Kasus 1 (Gambar 1 dan 2) lebih mendekati data hasil observasi. Sedangkan grafik populasi bakteri hasil prediksi model pada Kasus 2 (Gambar 3) tidak sesuai dengan populasi bakteri hasil observasi. Hal ini dikarenakan, populasi bakteri pada Kasus 2 diprediksi akan punah setelah jam ke 6. Menurut data hasil observasi bakteri belum punah sampai jam ke 9.

Pada kasus 1, perubahan nilai a dan b berpengaruh pada populasi prediksi model. Semakin tinggi nilai a atau semakin besar konsumsi rata-rata individu maka populasi bakteri diprediksi akan lebih cepat punah. Hal ini, dapat dilihat pada Gambar 1. Pada gambar tersebut juga bisa dilihat bahwa puncak populasi semakin rendah jika konsumsi rata-rata individu semakin besar. Sedangkan perubahan nilai b berakibat semakin besar nilai b maka puncak populasi semakin tinggi namun bakteri lebih cepat punah. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 2. Berdasarkan rata-rata kesalahan absolut pada Kasus 1, penyelesaian model yang paling sesuai untuk bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch* diberikan pada persamaan (17) dengan rata-rata kesalahan absolut 31,89%.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi, penyelesaian model untuk $r = ab$ tidak sesuai untuk memprediksi populasi bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch*. Penyelesaian model yang paling sesuai untuk memprediksi populasi bakteri *Lactobacillus delbrueckii* dalam kultur *batch* adalah

$$N(t) = 3,2 \times 10^6 \left(\frac{e^{0,95t}}{\left(0,9674105263 + 0,03258947368 e^{0,95t}\right)^{1,22739018}} \right).$$

Rata-rata kesalahan absolut model tersebut adalah 31,89%.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Hartanti, D. 2006. *Model Logistik yang Dimodifikasi untuk bakteri Asam Laktat Lactobacillus debrueckii dalam Kultur Batch*. Skripsi. Jurusan Matematika Program Sarjana MIPA, Universitas Jendral Soedirman
- [2] Huzimura, R. and Matsuyama, T. (1998): A Mathematical Model with a Modified Logistic Approach for Singly Peaked Population Processes.
- [3] <http://arxiv.org/pdf/adap-org/9901005>, download pada 4 Oktober 2009
- [4] Madyarini, R. 2006. *Model Logistik Sepotong-sepotong untuk bakteri Asam Laktat Lactobacillus debrueckii dalam Kultur Batch*. Skripsi. Jurusan Matematika Program Sarjana MIPA, Universitas Jendral Soedirman
- [5] Sudarmadji, S.B.R dan Kasmijo.1989. *Mikrobiologi Pangan*. PAU Pangan dan Gizi UGM. Yogyakarta.

NOISE REMOVAL OF LASCO IMAGES USING MEDIAN FILTER

Bachtiar Anwar

Division of Applied Geomagnetism and Space Electromagnetism

National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN)

Jl. DR. Djundjunan 133, Bandung 40173

bachtiana@yahoo.com

ABSTRACT. The LASCO (Large Angle and Spectrometric Coronagraph) aboard SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) senses coronal mass ejection (CME) events that are very crucial for space weather program as it may cause severely disturbance at interplanetary space and the Earth's space environment. There are two instruments currently operating: LASCO-C2 with a field of view (FOV) from 1.5 to 6 solar radii and LASCO-C3 with FOV of 3.5 to 30 solar radii. The LASCO coronagraph was designed to detect a weak of mass flow in outer corona by blocking the Sun light up to one solar radius or more. High sensitivity of the sensor in detecting a weak coronal mass flow means that the instrument also captures astronomical objects other than solar corona material, such as stars, planets, comets as well as energetic particles or cosmic rays. In order to characterize the properties CME accurately such as determination of start and end time of CME, shape and speed, the noise should be removed or reduced prior to data processing and analysis. In this work, a median filter technique is applied to obtain 'clean' images of LASCO instrument. An example of the results in denoising of LASCO-C3 image taken on October 26, 2003, at 18:18 UT will be given. It is concluded that median filter technique with a mask size of 3x3 pixels is able to remove or reduce the noise in LASCO-C3 images of size 512x512 pixels significantly.

Keywords:*coronagraph, noise removal, median filter, coronal mass ejection (CME)*

1. INTRODUCTION

Solar and Heliospheric Observatory (SOHO) observes the Sun from Lagrange-1 (L1) point of about 1.5 millions km from the Earth using several instruments. One of the instruments is LASCO (Large Angle and Spectrometric Coronagraph) that performs observation of the outer corona from 1.5 to 30 solar radii. It is able to detect a mass flow in corona, namely coronal mass ejection (CME). CME is the most powerful disturbance from the Sun as it contains billions of tons of plasma enveloped by strong magnetic fields. When it is directed to Earth it may cause severely damages to the advanced technologies in space and the Earth as well as may disturb human life [2,4,6,7,8,11]. Monitoring solar activity, especially CME events, is therefore very crucial for space weather program [5,10].

Observations of the Sun from L1 point have some advantages over observations from the ground. It avoids the noise caused by the motion of atmosphere as well as it is possible to observe the Sun autonomously and continuously with a limited interruption. Even though, LASCO images are not free from the noise completely as the detector also senses other astronomical objects such as stars, planets, comets as well as energetic particles or cosmic rays. These objects definitively cause inaccuracy in data processing in order to characterize the properties of CME.

Anwar has developed a method to detect CME automatically from LASCO-C3 images to determine start/end time and a final speed of CME [1,3]. The method utilized running difference images technique to enhance CME's plasma flows in LASCO-C3 images without noise removal prior to data processing. Applying denoise technique to LASCO-C3 images would provide a better results.

This work aims to develop a method to remove or reduce the noise in LASCO images. Section 2 describes the observation data used in this work, while the methods and software development are presented in section 3. The results are presented in section 4, and finally section 5 provides summary of the work.

2. OBSERVATIONS

The outer solar corona at several solar radii has a plasma density very low compared to plasma in active region. To observe a plasma flow from CME events at white-light wavelength, a coronagraph – a device that is designed to block the light from the solar disk – should be used. The Large Angle and Spectrometric Coronagraph (LASCO) instrument onboard SOHO spacecraft provides images of the outer corona up to 30 solar radii. This makes possible to trace coronal mass ejection (CME) motion as well as its shape ('Halo' or 'Partial') and other properties. 'Halo' type CME shows plasma flows in all direction around the occulting disk of LASCO-C3 and usually cause a severely disturbance in interplanetary space as well as the Earth's space environment. Figure 1 shows an example of CME 'Halo' observed by SOHO/LASCO-C3 on October 28, 2003, at 11:42 UT. A circular wave-front blasted from the Sun was evident. Unfortunately, LASCO-C3 images contain some noise cause by astronomical objects such as stars, planets, comets and energetic particles or cosmic rays. In this work, an example denoising technique using LASCO-C3 image taken on October 26, 2003 at 18:18 UT will be utilized.

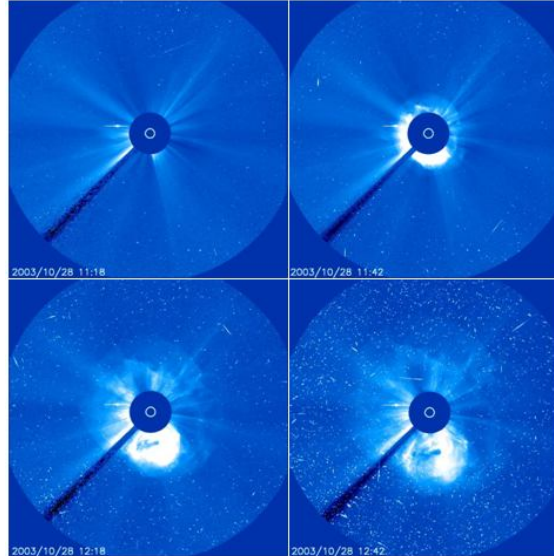


Figure 1. A sequence of SOHO/LASCO-C3 images showing a 'Halo' type of CME that occurred on October 28, 2003. A circle at the center represents the solar limb. North is up and West to the right. The dark circle corresponds to the coronagraph occulting disk that blocks the light from the Sun up to 3.5 solar radii from the solar limb.

3. METHODS AND DATA PROCESSING

There are several methods to remove the noise from an image. Selection of the method usually depends upon the properties of noise, accuracy of the method and computation time. In this work, a median filter technique is applied as it is a simple method to be implemented in image processing to handle a spiky noise in SOHO/LASCO images. The steps for cleaning efforts using median filter are as follows:

1. Read the image file based on image type and store to a two-dimensional array variable.
2. Apply median filter of size 3x3 pixels to the image and store to other two-dimensional array variable.
3. Calculate the residual or difference between the original and filtered images.
4. Specify an intensity threshold for residual image.
5. Find positions in the residual image where the pixel value greater than the intensity threshold value.

6. Calculate the number of noisy pixels in the residual image.
7. Specify a threshold value of number of noisy pixels allowable in the residual image.
8. Calculate the difference of number of noisy pixels in two consecutive iterations.
9. If the difference value in step 8 less than the threshold value, then stop iteration and return the final clean image. Otherwise, go to the next step.
10. Substitute the pixel value of the original image (noisy part) at positions found in step 5 with the filtered image values of the same positions.
11. Repeat steps 2 – 10, until step 9 is fulfill.

We have constructed scripts in Interactive Data Language (IDL) to implement the methods described in section 3. The data used were taken from LASCO instrument aboard SOHO with size of 512x512 pixels. This half-resolution image was derived from the observation mode of full-resolution with size of 1024x1024 pixels. We selected a half-resolution image to reduce the time in data processing, while the main purpose to characterize a CME event can also be achieved in later processing. In fact, the noise size in half-resolution image is smaller compared to the noise in full-resolution image and therefore a small median filter mask can be used to clean the image. We have experimented with filter mask of several sizes and found that the filter mask of size 3x3 pixels is able to remove noise significantly in LASCO-C3 images.

As describe in section 3, it was required a number of iterations in getting a final 'clean' image as shown in Figure 2. It is obvious that the number of pixels with a spiky noise in the residual image decreases with number of iterations during denoising process of LASCO-C3 image. The iteration process is set to stop if the difference of noisy pixels in two consecutive iterations reaches a threshold number. The default of threshold number was set to 5. The number of iteration of course depends upon how noisy the image is. Furthermore, it also depends on the intensity threshold to tolerate noise in intensity level as well as the threshold number of allowable noisy pixels less than the intensity threshold.

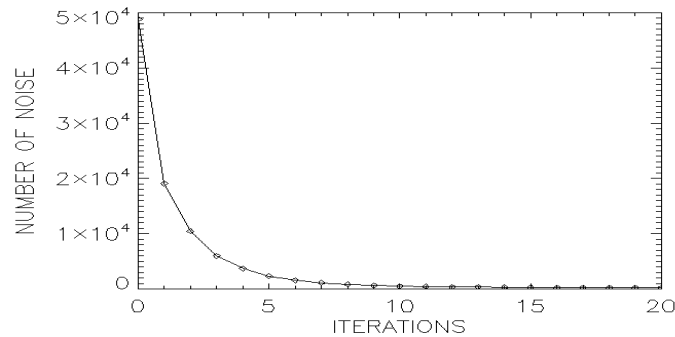


Figure 2. The number of pixels with a spiky noise is plotted against the number of iterations during denoising process of LASCO-C3 image taken on October 26, 2003 at 18:18 UT.

4. RESULTS AND DISCUSSIONS

We provide some examples of the denoising results and discussions. Figure 3 shows a shaded-surface of noisy and ‘clean’ image at 0th iteration using median filter with a mask size of 3x3 pixels. It is obvious that the noise intensity can be reduced significantly in this iteration while the main feature (CME event) was preserved. The corresponding images are given in Figure 4. Some isolated spiky pixels were reduced in intensity as low as the median value of the mask filter at corresponding positions, while extended noisy pixels remains exist with a reduced in intensity. The intensity of noisy pixels will be reduced further in the following iterations.

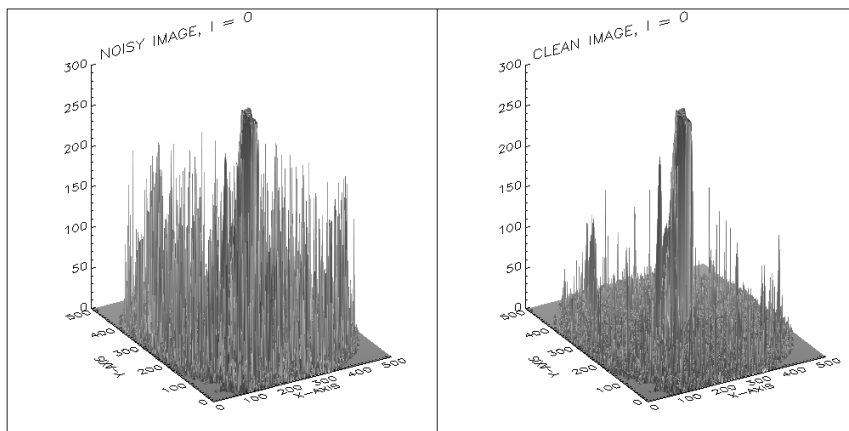


Figure 3. Comparison of shaded-surface of noisy (left) and noisy-reduced (right) images at 0 iteration for denoising process of LASCO-C3 image taken on October 26, 2003, at 18:18 UT.

Figure 5 shows a sequence of shaded-surface of noisy-reduced images during denoising process for 2nd, 4th, 10th, and 16th iterations. One can see the decrease of noise intensity as well as the number of noisy pixels in these noisy-reduced images. It is obvious that the main feature (CME event) was not changed so much, indicating that the median filter with mask size of 3x3 pixels works on a spiky noise in LASCO-C3 image.

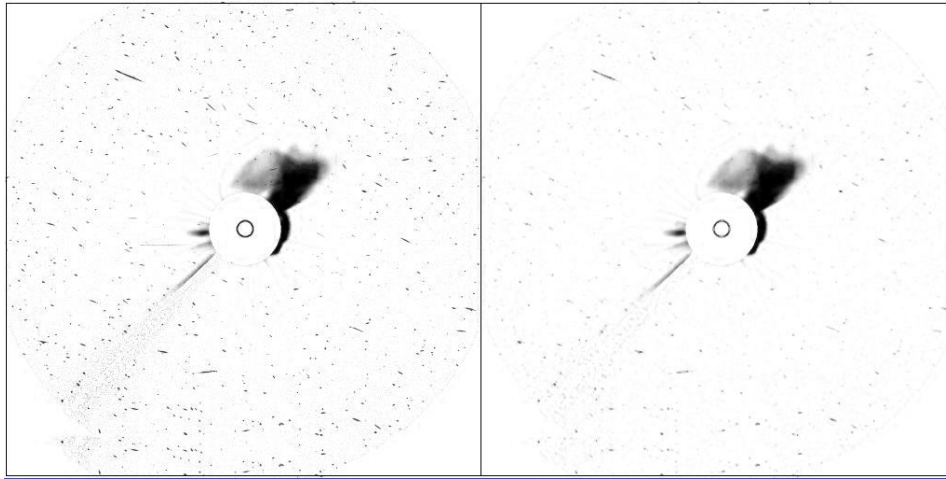


Figure 4. Comparison of noisy (left) and noisy-reduced image at the 0th iteration for denoising process of LASCO-C3 image taken on October 26, 2003 at 18:18 UT.

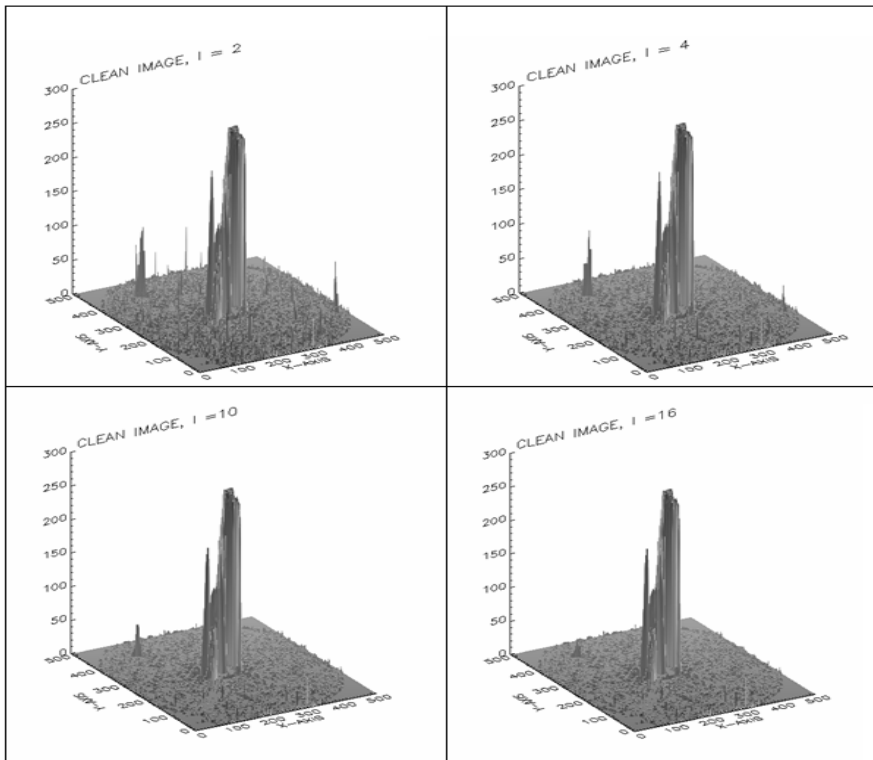
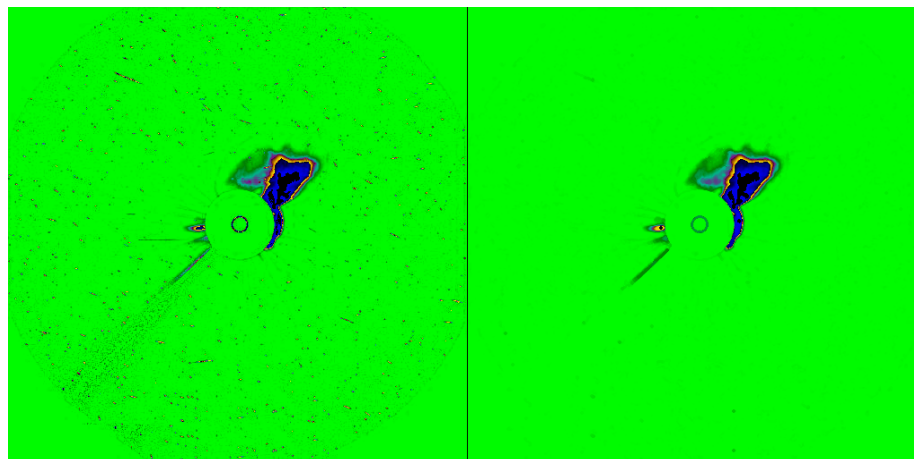


Figure 5. Shaded-surface of noisy-reduced images of LASCO-C3 taken on October 26, 2003, at 18:18 UT during denoising process for 2nd, 4th, 10th and 16th iterations.



Gambar 6. A noisy image of LASCO-C3 taken on October 26, 2003 at 18:18 UT showing a coronal mass ejection at the North-West (left) and the resulted clean image (right).

The final result is given in Figure 6 for comparison of noisy and cleaned images, Figure 7 for corresponding shaded-surfaces and Figure 8 for extracted noise. Figure 6 was enhanced by using a false-color to reveal noise in both images. Some extended noises were remained in the cleaned image. Most of the spiky noise can be removed or reduced as shown in Figure 8 and the properties of noise is given as a histogram in Figure 9. The maximum intensity of noise was measured to be 199 and the number of pixels having intensity above 50 was amount to 2413, while the number of pixels with intensity value less than 50 occupy the most part as shown in Figure 9.

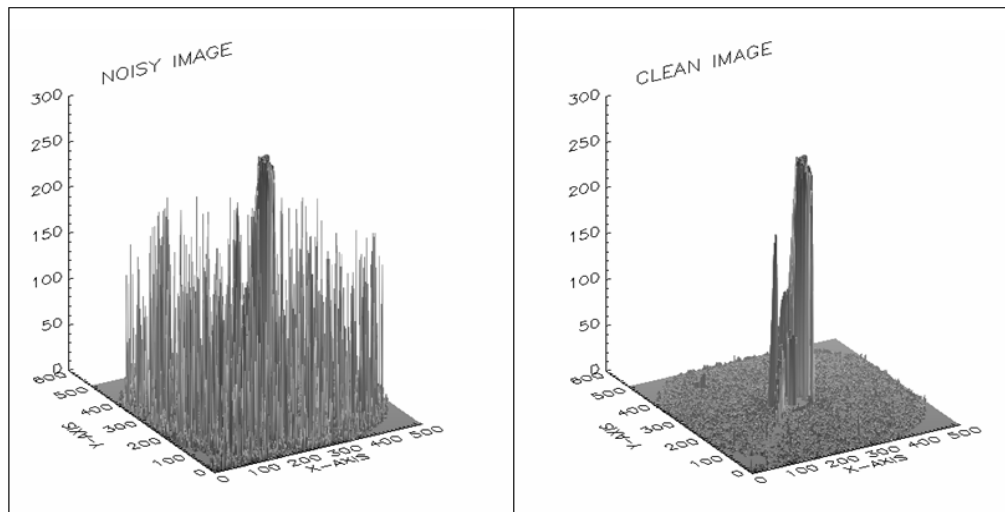


Figure 7. Comparison of shaded-surface of noisy (left) and clean (right) images after 20th iteration for LASCO-C3 data taken on October 26, 2003 at 18:18 UT.

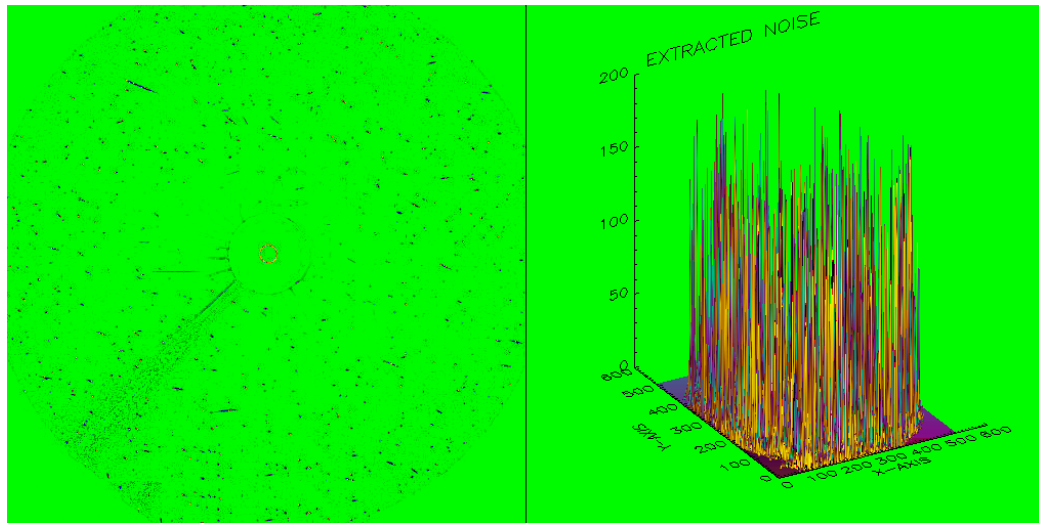


Figure 8. The extracted noise computed by subtracting noisy and clean image (left) and its shaded-surface (right)

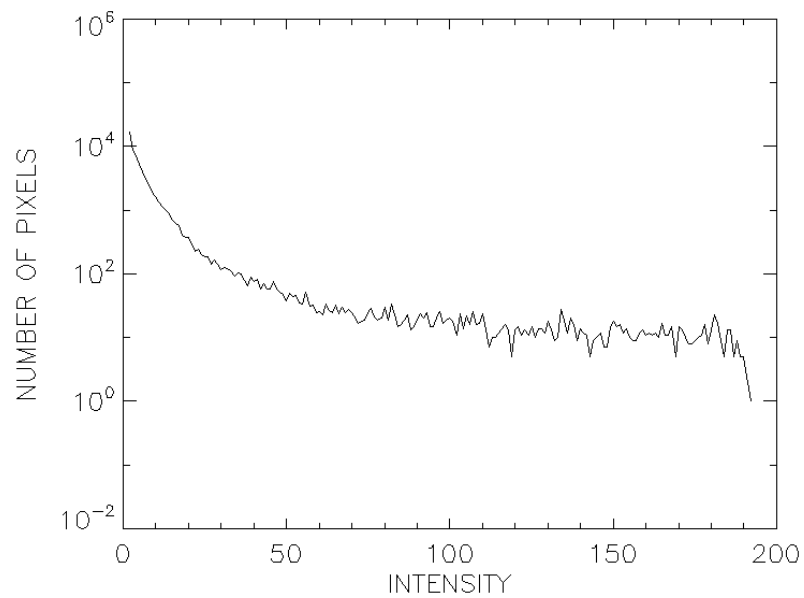


Figure 9. The histogram of extracted noise of LASCO-C3 image taken on October 26, 2003 at 18:18 UT.

5. CONCLUDING REMARKS

We have described a method of removing noise in LASCO images using median filter technique with masking size of 3x3 pixels. It can remove or reduce the noise in LASCO images significantly, as long as the size of noise less than the masking size used in filtering process. Some astronomical objects such as planets or comets in which their appearance are usually greater than the masking size cannot be removed completely. Furthermore, if the CME event is large enough such as 'Halo' type of CME where its source region is located close to solar disk center or at the west part from the solar disk center, the event tends to cause heavy noise in the subsequence images several hours after the CME appeared in LASCO image. In this case, the noise cannot be removed completely. This challenging problem will be studied further in the future to find a better method. This research is part of LAPAN's program to establish space weather service to public.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The use of data of SOHO/LASCO-C3 is acknowledged. SOHO is an international project between ESA and NASA. This work is series of researches dedicated to establish space weather service at LAPAN.

REFERENCES

- [1] Anwar, B. *Determination of Final Speed of Coronal Mass Ejection*, Proc. National Seminar in Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Surabaya National University (UNESA), June 20, 2009, Surabaya.
- [2] Anwar, B. *Identifying the Source Region of Coronal Mass Ejection*, Proc. National Seminar in Mathematics and Natural Sciences, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Satyawacana Christian University (UKSW), June 13, 2009, Salatiga.
- [3] Anwar, B. *Automatic Detection of Coronal Mass Ejection*, Proc. National Seminar in Mathematics and Natural Sciences, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, 16 May 2009, Yogyakarta State University, Yogyakarta.
- [4] Anwar, B. *Development of Database System for Space Early Warning*, Proc. National Seminar in Science and Technology II, 17-18 November 2008, Lampung University, p.18.

- [5] Anwar, B. *Monitoring the Sun for Space Weather*, Proc. National Seminar in Education Mathematics (LSM XVII), 4 April 2009, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Yogyakarta State University.
- [6] Bothmer, V. and Daglis, I.A. "Space Weather, Physics and Effects", Springer-Praxis Publishing, 2007.
- [7] Kamide, Y. *Space Weather: Japanese Perspective* in "Space Weather", Song, P., Singer, H.J. and Siscoe, G.L. (Eds), Geophysical monograph, **125**, 2001, p.59.
- [8] Lanzerotti, L.J. *Space Weather Effects on Technologies*, in "Space Weather", Song, P., Singer, H.J. and Siscoe, G.L. (Eds), Geophysical monograph, **125**, 2001, p.11.
- [9] Setiahadi, B. *Problems of Equilibria and Instabilities on Solar Coronal Magnetic Fields and Its Evolution Towards Energetic Energy Liberation: Effect to Interplanetary Space*, Prosiding Seminar Nasional Matematika, FMIPA UNDIP, 2005, E1., p.1.
- [10] Setiahadi, B., Sakurai, T., Miyazaki, H., and Hiei, E. *Research on Magnetohydrodynamic Transport Phenomena in Solar-Terrestrial Space at LAPAN Watukosek 2006*, Prosiding Seminar Antariksa Nasional III, 2006, p. 17.
- [11] Singer, H.J., Heckman, G.R. and Hirman, J.W. *Space Weather Forecasting: A Grand Challenge* in "Space Weather", Song, P., Singer, H.J. and Siscoe, G.L. (Eds), Geophysical monograph, **125**, 2001, p.11.

PATH ANALYSIS FOR KNOWING CAUSAL CORRELATION AMONG AGE, FACULTY, TIME DURATION USING FACEBOOK, AND TIME DURATION STUDYING TO ACADEMIC ACHIEVEMENT OF SEBELAS MARET UNIVERSITY STUDENTS

Heru Triswianti, Yuliana Susanti, Tri Atmojo K
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University
anthy_math@yahoo.com

ABSTRACT. Nowadays Facebook is one of a very popular network in student's life. Duration in using Facebook is presumable indirectly effects student's academic achievement through decreasing time duration for studying. In other hand, time duration in using Facebook is also effected by age and faculty.

The objectives of the research are to know direct and indirect effect of age, faculty, time duration in using Facebook, and time duration in studying of UNS student's academic achievement. In analyzing the data, the researcher used path analysis to explain direct and indirect relationship among variables.

The result of the research showed that age had negative direct effect to time duration in using Facebook and positive direct effect to time duration in studying, it also had positive indirect effect to time duration in studying and academic achievement. Faculty had positive direct effect to time duration in using Facebook and negative indirect effect to time duration in studying and academic achievement. Time duration in using Facebook had negative direct effect to time duration in studying and negative indirect effect to academic achievement. Time duration in studying had positive direct effect to academic achievement. It means that the students must decrease the time in using Facebook and increase time duration in studying to increase the academic achievement, especially to the young students under 22 years and to students in high passing grade's faculty like Faculty of Medicines, Faculty of Engineering, Faculty of Economics, Faculty of Social and Politic Scinces, and Faculty of Mathematics and Natural Sciences which most of them are exact sciences faculty.

Key words: *Facebook, path analysis*

1. INTRODUCTION

Facebook or usually called FB is a social networking website where the users can join in community like city, job, school or town. It is also to connect someone with the other people [7].

Since FB is made until now, the users in over the world increase very fast, also in Indonesia. In early 2010, Indonesia is the second of the most rapid increasing country in

using FB after USA. Based on The Inside Facebook Survey by e-marketer, numbers of FB users in Indonesia increased 1,431,160 users in latest a month. On December 1st 2009, e-marketer wrote 13,870,120 FB users in Indonesia, whereas on January 1st 2010 was 15,301,280 users. Indonesia has one level rank after USA that the FB users increased 4,576,220 from 98,105,020 to 102,681,240 users [6].

The growth of Facebook makes academicians and researchers to be afraid because most of the users are students. It is supported that they want to know and try the new things. According to Premuzic and Furnham [5], high open mind will effect students` academic achievement. In the latest research by Karpinski, a researcher from Ohio state university, presented on April 13th 2009 in American Education Research Annually Meeting showed that FB user students had lower academic achievement than non-FB user students [4].

In that research, from 219 students as sample, 148 FB user students had lower academic achievement than non FB user students. According to Karpinski, there is no direct correlation that using FB will decrease academic achievement, but FB had decreased students` time to study because they prefer browsing in this popular social network to studying. The FB users recognized that they had wasted time to use FB. They study just 1 to 5 hours in a week but non FB user students usually study 10 to 15 hours in a week. Beside that, the research showed that 85% FB users were students and the remain were scholar. It showed that age effects time in using FB.

Interesting matter in that research, FB users generally are from exact science, like information and technology, engineering, mathematics, and exact science rather than students from social and humanism science. It was caused because exact science students had more time with internet than others.

One of statistics analysis that usually to find out the correlation some independent variables that effects directly to dependent variable is multiple linear regressions. But it can not explain the indirect causal correlation, so it is used path analysis to explain direct and indirect correlations among variables.

Based on the discussion above, the writer is interested to analyze the correlations among variables that effect directly and indirectly include age, faculty, time duration in using FB, and time duration in studying to UNS student`s academic achievement by using path analysis.

2. MATERIAL AND METHOD

2.1. PATH ANALYSIS

According to Dillon and Goldstein [2], path analysis is the elaboration regression model that used to assess cause and effect or causal relationship and compatibility from that model. By using path analysis we can estimate coefficients in some linear structural equation which have cause and effect relationship. There are two kinds variables used in path analysis, there are exogenous variable or independent variable in regression model and endogenous variable or dependent variable in regression model. Like regression analysis, path analysis used to know and determine what variables are hypothesized which has different unit so it must be standardized to make all unit and scale every variable will be same.

In using path analysis, it is needed some assumption must be observed like path analysis model assume that exogenous and endogenous variables must be measured in interval scale, correlation between variables must be linear, all errors are assumed have no correlation with its endogenous variable, just recursive model is permitted, exogenous variable is measured without error.

The correlation exogenous variables to endogenous variable in path analysis can be analyzed into direct and indirect effect, and can be found total effect. Direct effect is the influence from X variable to Y variable without intervening variable. In diagram, direct effect X_i to X_u , showed by arrow from X_i to X_u . In the other hand, indirect effect happens when exogenous variable influences endogenous variable through third variable. In diagram, indirect effect showed by arrow from X_i to X_u , and then continuing from X_i to X_u . In this case, variable X_i as third variable. Total effect is influences from all effect that can be obtained by summing up direct and indirect effect [1].

2.2. DESCRIPTION OF THE DATA

The data used in this research is primary data obtained from questionnaire to Sebelas Maret University students. This research use non probability random sample system to get samples. The data consists of age, faculty, and time duration in using Facebook, time duration in studying and academic achievement. This research used 177 samples from 9 faculties in Sebelas Maret University, they are Medicine Faculty, Engineering Faculty, Economy Faculty, Social and Politic Sciences Faculty, Mathematics and Natural Sciences Faculty, Agriculture Faculty, Law Faculty, Teacher Training and Education Faculty, and Letters and Fine Arts Faculty that were taken in May 2010. After

data was obtained, then it must be ensured that all of variables at list have interval scale. If the data have ordinal scale such as faculty which is scaled by faculty's passing grade in 2009, it must be changed into interval scale used *Successive Interval Method* (SIM) with Microsoft excel. The result of faculty's SIM can be seen on Table 1.

Table 1. The comparison of ordinal scale and interval Scale of faculty

| Jenis Fakultas | Ordinal Scale Value | Intervale Scale Value |
|----------------|---------------------|-----------------------|
| Kedokteran | 9 | 4,41 |
| Teknik | 8 | 3,66 |
| Ekonomi | 7 | 3,39 |
| ISIP | 6 | 3,26 |
| MIPA | 5 | 2,93 |
| Pertanian | 4 | 2,51 |
| Hukum | 3 | 2,20 |
| KIP | 2 | 1,83 |
| SSR | 1 | 1,00 |

The next step is examining path analysis assumptions like linearity and homoskedastiity used SPSS 11 for Windows, and from this result can be obtained that the data had linierity model and homoskedasticity of the data was satisfied.

4. THE RESULT AND DISCUSSION

There are some steps of path analysis according to Hair *et al.*[3]. The steps are developing model based on theory, developing path diagram, conversion path diagram to equation, choosing matrix input, examining the model assumptions, evaluating goodness of fit criterion and estimating parameter, and model interpretation.

4.1. Developing Model Based on Theory

Theoretical model is made of literature studying and model development can be obtained that the time duration in using Facebook was effected by age and faculty, whereas time duration in studying was effected by age and time duration in using Facebook. Time duration in tudying effected academic achievement.

4.2. Developing Path Diagram

After developing model based on theory, the model will be presented in a path diagram to be estimated as follows.

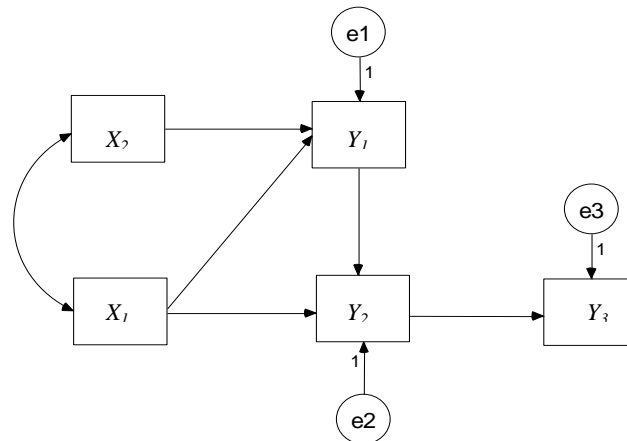


Figure 1. Path diagram of theoretical model

The model shows that there are exogenous and endogenous variables, they are the first exogenous variable that denoted by X_1 which is age variable postulated by negative correlation to time duration in using Facebook. Second exogenous variable denoted by X_2 which is faculty postulated by positive correlation to time duration in using Facebook and negative correlation to academic achievement. First endogenous variable denoted by Y_1 is time duration in using Facebook that is affected by age and faculty postulated by correlation to time duration in studying. While, second endogenous variable denoted by Y_2 is time duration in studying variable is affected by time duration in using Facebook and faculty. Time duration in studying is postulated having correlation to academic achievement. Third endogenous variable is academic achievement variable denoted by Y_3 is affected by time duration in using Facebook and studying.

4.3. Conversion Path Diagram to Equation

Based on the theory developed and explained in the path diagram above, we can convert that specific model into structural equation. Let be λ_i is path coefficient into- i path, the obtained equations are

$$Y_1 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + e_1$$

$$Y_2 = \lambda_3 X_1 + \lambda_4 Y_1 + e_2$$

$$Y_3 = \lambda_5 Y_2 + e_3.$$

4.4. Choosing Matrix Input

After the model specified completely, it was chosen matrix input. This research examined causal correlation so the input is covariant matrix. The result of covariant matrix with maximum likelihood estimates can in the Table 2.

Table 2. Simple covariances-estimates

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | X_1 | X_2 | Y_1 | Y_2 | Y_3 |
| X_1 | 2.75 | | | | |
| X_2 | 0.24 | 0.89 | | | |
| X_3 | -1.41 | 0.73 | 10.04 | | |
| X_4 | 1.31 | -0.23 | -2.57 | 9.57 | |
| X_5 | 0.00 | 0.01 | -0.02 | 0.29 | 0.06 |

4.5. Examining the Model Assumptions

The required assumptions in examining path analysis model are

1. Sample size

Based on Hair *et al.* [3] approach, sample size needed to multivariate data is 100-200 samples. In this research, it used 177 samples, so the sample size is satisfied.

2. Normality of the data

The assessment of normality can be seen as follows.

Table 3. Assessment of normality

| Variable | X_1 | X_2 | Y_1 | Y_2 | Y_3 | Multivariate |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| C.R | 0.30 | -1.90 | -1.25 | -1.29 | 0.88 | -1.58 |

By using critical ratio (C.R) $\pm 2,58$ from standard normal distribution with significant level 0.01, then there was no critical ratio which is out of $\pm 2,58$. So it can be concluded that the data has normal distribution.

3. Outlier

Multivariate outlier can be detected by looking at the Mahalanobis distance, by comparing Mahalanobis d-square value with $\chi^2_{(5,0.01)} = 20.51$. There is no data having Mahalanobis d-squared value more than 20.51. So it can be concluded that there is no outlier.

4. Multicoleniarity independent exogenous variables

In this research was obtained the determinant of covariant matrix sample 8.58. This value is far from zero, so it can be concluded that there was no multicoleniarity.

4.6. Evaluating Goodness of Fit Criterion and Estimating Parameter

The data satisfied the assumptions, so the model can be analysed, and then it can be found the estimating parameter with maximum likelihood estimate. Figure 2 is standardized path diagram.

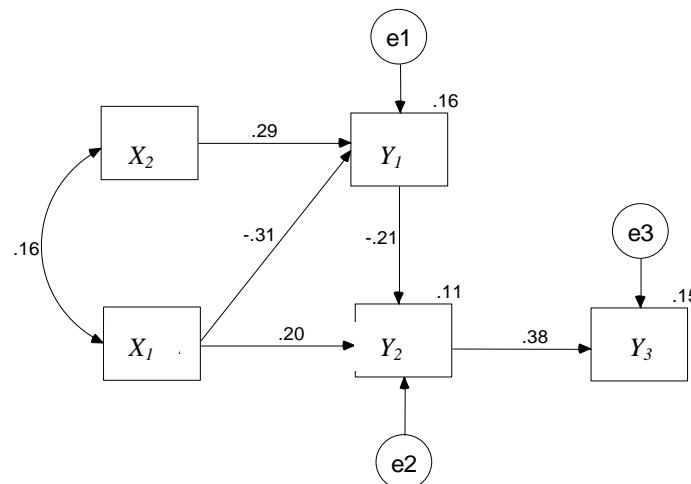


Figure 2. Standaridized path diagram

By considering output of the standaridized path diagram on Figure 2, it is obtained the equations below

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 0.29 X_2 - 0.31 X_1 \\
 Y_2 &= 0.20 X_1 - 0.21 Y_1 \\
 Y_3 &= 0.38 Y_2
 \end{aligned}$$

It can also be found the determinant coefficients of all endogenous variables to calculate the total determinant coefficient. The total determination coefficient on this reseach is 36 %. It means that the model can explain information on the data as 36%, the others can be explained by others variables out of this research.

Next, we evaluate goodness of fit used to test the model appropriateness. The null hypotheses is there is no differences between sample covariant matrix and population covariant matrix. Table 4 is the result of appropriateness test.

Table 4. The result of Goodness of Fit test

| Goodness of Fit Test | Value |
|----------------------|-------------------------------------|
| χ^2 | 5.488 ($\leq \chi^2$ Tabel = 9.49) |
| RMSEA | 0.046 (≤ 0.08) |
| GFI | 0.988 (≥ 0.90) |
| AGFI | 0.955 (≥ 0.90) |
| CMIN/DF | 1.372 (≤ 2.00) |
| TLI | 0.952 (≥ 0.95) |
| CFI | 0.981 (≥ 0.95) |

Based on the values obtained, it can be concluded that null hypothesis is acceptable. So there are no differences among sample covariant matrix and population covariant matrix estimated.

After goodness of fit test, it was continued with path coefficient test. The null hypothesis of this test that the path coefficient among variables is zero. The result of path coefficient test can be seen from p value in Table 5.

Table 5. Estimation of regression parameter

| Correlation among Variables | Estimate | p |
|-----------------------------|----------|-------|
| $Y_1 <--- X_2$ | 0.982 | *** |
| $Y_1 --- X_1$ | -0.601 | *** |
| $Y_2 <--- Y_1$ | -0.203 | 0.005 |
| $Y_2 <--- X_1$ | 0.373 | 0.007 |
| $Y_3 <--- Y_2$ | 0.030 | *** |

From Table 5, there is no p value ≥ 0.05 . It shows that there is happened cause and effect correlation among variables with estimate value of regression parameter based on Table 4 are significant, so it does not need to do trimming.

Path analysis test also shows the quantity from direct effects, indirect effects, and total effects from a variable to the others. The direct effect (DE), indirect effect (IE), and total effect (TE) of this research can be seen in Tabel 6.

Table 6. Direct effect, indirect effect, and total effect.

| V. Ek/En V.En | X_1 | | | X_2 | | | Y_1 | | | Y_2 | | |
|------------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|------|-------------|
| | DE | IE | TE | DE | IE | TE | DE | IE | TE | DE | IE | TE |
| Y_1 | -0.31 | 0.00 | -0.31 | 0.29 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Y_2 | 0.20 | 0.07 | 0.27 | 0.00 | -0.06 | -0.06 | -0.21 | 0.00 | -0.21 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Y_3 | 0.00 | 0.10 | 0.10 | 0.00 | -0.02 | -0.02 | 0.00 | -0.08 | -0.08 | 0.38 | 0.00 | 0.38 |

4.7. Model Interpretation

Based on the total determinant coefficient, it is obtained that model can explain the information on data as 36 %. This value is good enough to make a decision about model interpretation. The interpretation of the model based on Table 6 are the age had direct effect as -0.31 to time duration in using Facebook and as 0.20 to time duration in studying. It means that the increasing of age will cause decreasing of time duration in using Facebook and increase time duration in studying. It is supported that the young students prefer to know and try new things than the old students. It also had indirect effect as 0.07 to time duration in studying and as 0.10 to academic achievement. It means

the increasing of age will cause the increasing of time duration in studying through the decreasing of time duration in using Facebook and cause the increasing academic achievement indirectly through the decreasing of time duration in using Facebook and the increasing of time duration in studying. Faculty had direct effect as 0.29 to time duration in using Facebook, indirect effect as -0.06 to time duration in studying, and indirect effect as -0.02 to academic achievement. It means that the increasing of faculty's passing grade will increase the time duration in using Facebook and decrease time duration in studying. The high passing grade student which the most of them are exact sciences students need more time duration used internet to finish their study's assignment so they often using Facebook. It also indirectly will decrease academic achievement through the decreasing of time duration in using Facebook. Time duration in using Facebook had direct effect as -0.21 to time duration in studying and indirect effect as -0.08 to academic achievement. It means that time duration in using Facebook will decrease the time duration in studying and the effect are the decreasing of academic achievement indirectly. Time duration in studying had direct effect as 0.38 to academic achievement. It means the increasing of time duration in studying will increase academic achievement. The highest total effect to academic achievement is given by time duration in studying so all variables that significant effect to time duration in studying must be considered.

5. CONCLUSION

From the discussion, it can be concluded that age had negative direct effect to time duration in using Facebook and positive direct effect to time duration in studying, it also had positive indirect effect to time duration in studying and academic achievement. Faculty had positive direct effect to time duration in using Facebook and negative indirect effect to time duration in studying and academic achievement. Time duration in using Facebook had negative direct effect to time duration in studying and negative indirect effect to academic achievement. Time duration in studying had positive direct effect to academic achievement. It means that the students must decrease the time in using Facebook and increase time duration in studying to increase the academic achievement, especially to the young students under 22 years and to students in high passing grade's faculty like Faculty of Medicines, Faculty of Engineering, Faculty of Economics, Faculty of Social and Politic Scinces, and Faculty of Mathematics and Natural Sciences which most of them are exact sciences faculty.

REFERENCES

- [1] Alwin D.F. and Robert M. Hauser (1975). The Decomposition of Effects in Path Analysis, *American Sociological Review*, Vol. 40, pp : 37-47.
- [2] Dillon, W.R. and M. Goldstein (1984). *Multivariate Analysis : Methods and Applications*. John Wiley & Sons Inc, New York .
- [3] Hair, *et al.* (1998). *Multivariate Data Analysis*. Prentice Hall International Inc, New Jersey.
- [4] Karpinsky, A. C. and A. Duberstein (2009). A Description of Facebook Use and Academic Performance among Undergraduate and Graduate Students. *American Education Research Association*. The Ohio State University, America.
- [5] Premuzic, T.C and A. Furnham (2003). Personality Traits and Academic Examination Performance, *European Journal of Personality*, Vol.17, pp: 237–250.
- [6] www.emarketer.com, 2 Maret 2010.
- [7] www.mediaindonesia.com, 4 Februari 2009.

Pemodelan Tinggi Muka Air Jurug Menggunakan *Radial Basis Function Network*

Winita Sulandari dan Titin Sri Martini
Jurusan Matematika FMIPA UNS
winita_uns@yahoo.com

Abstrak. *Radial Basis Function Network (RBFN)* dapat digunakan sebagai model untuk data runtun waktu. Kelebihan dari model ini adalah tidak membutuhkan asumsi khusus terkait dengan pola data, dan mampu menyelesaikan kasus nonlinear. Tinggi muka air Jurug merupakan contoh data runtun waktu yang bersifat nonlinear. Dalam penelitian ini dicari model *Radial Basis Function Network* berdasarkan pelatihan beberapa pasangan *input-target* data pelatihan. Model yang dipilih adalah model dengan *MSE* terkecil dan selanjutnya digunakan untuk meramalkan data tma Jurug tahun 2010. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketepatan penentuan banyaknya data pelatihan mempengaruhi besarnya *MSE* model yang dihasilkan.

Kata kunci: Tinggi muka air, *Radial Basis Function Network*

1. PENDAHULUAN

Fenomena genangan air dan banjir mungkin sudah menjadi hal yang biasa pada saat musim hujan. Dari tahun ke tahun, semakin banyak wilayah sekitar Surakarta, khususnya di sekitar daerah aliran sungai (DAS) stasiun Jurug yang mudah tergenang. Efek yang paling dirasakan dengan kejadian ini adalah terganggunya kenyamanan dan keamanan dalam beraktifitas di jalan raya. Apabila genangan air ini sudah pada level yang lebih besar maka kerugian yang diterimapun akan lebih besar lagi. Kejadian banjir besar pertama terjadi pada tahun 1966, hampir setengah Kota Solo terendam air. Kejadian ini terulang kembali pada akhir tahun 2007 dan awal tahun 2009, meski tidak sebesar sebelumnya akan tetapi cukup memberikan banyak kerugian.

Salah satu upaya untuk menekan kerugian akibat banjir adalah mengetahui kapan terjadinya banjir. Dengan adanya informasi mengenai kapan kemungkinan terjadinya banjir, masyarakat bisa lebih siaga, menyelamatkan nyawa dan harta bendanya. Banjir terjadi karena debit air yang tinggi, melebihi ambang batas (kemampuan) DAS dan tingginya curah hujan. Karena keterbatasan data debit air dan curah hujan, maka data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data tma harian. Data ini dianggap dapat mewakili data debit air dan curah hujan sebagai indikator terjadinya banjir. Data tma harian yang digunakan adalah data tma stasiun Jurug periode 1 Januari 2000 hingga 31 Desember 2009.

Pemodelan data tma yang dibahas dalam penelitian ini adalah pemodelan tma Jurug menggunakan *Radial Basis Function Network (RBFN)*. *RBFN* adalah suatu *neural network* yang cara kerjanya meniru kerja *neuron* manusia. Cara kerja dari jaringan ini adalah dengan sistem memori pengalaman masa lalu untuk merespon kejadian masa datang.

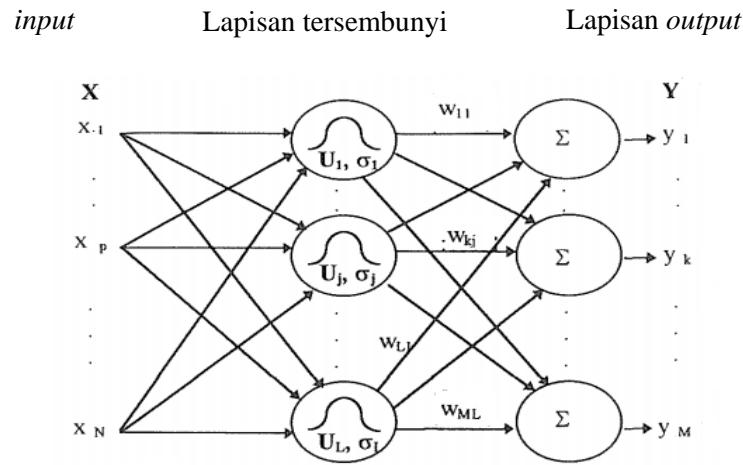
Beberapa penelitian mengenai peramalan banjir menggunakan *RBFN* telah dilakukan sebelumnya oleh Jayawardena *et al* (1997), Jayawardana and Fernando (1998), Harun *et al* (2001), dan Lin *et al* (2009). Jayawardena *et al* (1997) dan Jayawardana and Fernando (1998), telah menggunakan *RBFN* dalam meramalkan banjir di Pearl River Delta Hongkong. Dalam penelitian tersebut, *RBFN* dibandingkan dengan *Multilayer Perceptron (MLP)*, tipe *neural network* yang lain. Hasil yang diperoleh adalah *RBFN* memberikan hasil peramalan yang lebih baik dibanding model *MLP*. Atas dasar inilah, dalam penelitian ini *neural network* yang digunakan adalah *RBFN*

Kunci dari pemodelan *RBFN* adalah pada penentuan variabel *input*, penentuan banyaknya unit pada lapisan tersembunyi dan penentuan parameter. Parameter yang dimaksud meliputi pemilihan *center*, *spread* dan bobot yang menghubungkan unit tersembunyi dengan unit *output*. Kombinasi yang tepat antara *center*, *spread* dan bobot akan menghasilkan model yang optimum, yaitu model dengan *error* terkecil. Pada penelitian ini ditunjukkan apakah banyaknya data pelatihan dengan kombinasi *center*, *spread* dan bobot yang optimum mempengaruhi tampilan model *RBFN*. Kriteria informasi yang digunakan sebagai dasar penentuan model adalah *Mean Square Error (MSE)*.

2. MATERI DAN METODE

2.1 Arsitektur *RBFN*

Dalam Jayawardana *et al* (1997) dijelaskan bahwa *RBFN* merupakan jaringan yang terdiri dari dua lapisan, yaitu lapisan tersembunyi dan lapisan *output*. Sementara itu dalam Lin and Chen (2005) dikatakan bahwa *RBFN* terdiri dari tiga lapisan. Perbedaan ini dikarenakan ada dua pendapat mengenai *input*, dalam Jayawardana *et al* (1997), *input* tidak dianggap sebagai suatu lapisan dengan alasan tidak ada operasi hitung disana (Fausett,1994), sedangkan Lin and Chen (2005) menganggap *input* sebagai satu lapisan. Untuk selanjutnya, tim peneliti lebih condong pada pendapat pertama. Arsitektur *RBFN* secara umum disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Arsitektur *RBFN* dengan N variabel *input*, L unit pada lapisan tersembunyi dan M variabel *output*. (sumber: Jayawerdana *et al*, 1997)

Pada lapisan tersembunyi, *input* ditransformasikan menggunakan fungsi basis. Fungsi basis merupakan fungsi non linear. Ada beberapa fungsi basis yang bisa digunakan yaitu fungsi Gaussian, linear, pendekatan kubik, *thin plate spline*, multikuadratik dan multikuadratik invers. Dalam Chen *et al* (1991) dijelaskan bahwa pemilihan fungsi basis tidak begitu mempengaruhi jaringan. Namun demikian, fungsi yang paling umum digunakan adalah fungsi Gaussian (Jayawerdana *et al* (1997), Maillard *and* Gueriot (1997)). Fungsi Gaussian didefinisikan sebagai

$$h(x) = \exp\left(-\frac{\|X^i - U_j\|}{2\sigma_j^2}\right)$$

dengan X^i adalah vektor *input* data ke- i , U_j adalah *center* dari unit ke- j pada lapisan tersembunyi, dan σ_j adalah *spread* dari unit ke- j lapisan tersembunyi. Notasi $\|\cdot\|$ menyatakan fungsi jarak (norm).

Output RBFN dipengaruhi oleh penentuan *center*, *spread* dan bobot yang menghubungkan unit-unit pada lapisan tersembunyi dengan unit-unit pada lapisan *output*.

2.2 Metode Pembelajaran Dalam *RBFN*

Metode pembelajaran yang digunakan dalam *RBFN* adalah metode pembelajaran *supervised* (terawasi) dan metode *unsupervised* (tidak terawasi). Perbedaan antara kedua metode pembelajaran ini adalah pada ketergantungannya terhadap target dalam

penentuan parameter. Sebagaimana telah disebutkan dalam Chen et al (1991), Jayawardena et al (1997), dan Jayawardena and Fernando (1998), parameter dalam *RBFN* adalah *center*, *spread* dan bobot yang menghubungkan lapisan tersembunyi dan *output*. Penentuan *center* dan *spread* tidak tergantung pada target, dengan demikian pembelajaran pada tahap ini menggunakan metode *unsupervised*, penentuan parameter hanya tergantung pada *input*. Ada beberapa cara dalam menentukan *center* dan *spread*. Referensi mengenai ini dapat kita jumpai pada Moody and Darken (1989), Haykin (1994), dan Lin and Chen (2005).

Metode pembelajaran *supervised* digunakan untuk menentukan bobot yang menghubungkan lapisan tersembunyi dengan *output*. Banyak penelitian menggunakan metode *orthogonal least square* yang mengacu pada Chen et al (1991). Sejauh pengetahuan tim peneliti berdasarkan referensi yang ada, hingga saat ini metode *orthogonal least square* dianggap metode yang paling tepat untuk estimasi parameter bobot dalam *RBFN*

2.3 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian literatur mengenai pemodelan *RBFN* dan kemudian diterapkan pada kasus riil yaitu pada data sekunder tma Jurug. Data diambil dari Balai Besar Wilayah Sungai Bengawan Solo (BBWSBS) di Surakarta. Adapun langkah-langkah yang diambil untuk mencapai tujuan adalah sebagai berikut.

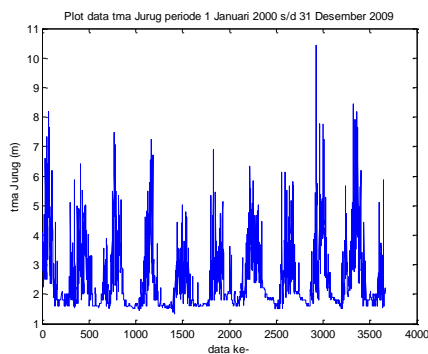
- a. Merancang pemodelan *RBFN* untuk data harian tma Jurug berdasarkan plot data dan analisis hubungan data antar waktu (autocorrelogram), untuk selanjutnya digunakan sebagai pertimbangan dalam penentuan variabel *input* dan *output*.
- b. Menentukan data pelatihan dan data uji. Data yang digunakan adalah data harian tma periode 1 Januari 2000 hingga 31 Desember 2009. Data pada tahun 2009 digunakan sebagai data uji dan data sebelumnya sebagai data pelatihan.
- c. Membentuk model *RBFN*, yang meliputi
 - i. Menentukan pasangan *input*-target. Dalam hal ini ada beberapa alternatif pasangan *input*-target, tergantung pada banyaknya data pelatihan yang digunakan.
 - ii. Menentukan parameter, yaitu *center*, *spread* dan bobot.

- a) Menentukan *center* terkait dengan penentuan banyaknya unit pada lapisan tersembunyi. Dalam penelitian ini, banyak unit pada lapisan tersembunyi dimulai dengan satu unit kemudian ditambah satu lagi dan seterusnya hingga menghasilkan error yang sekecil mungkin. Adapun jumlah maksimal unit pada lapisan tersembunyi adalah sama dengan banyaknya data pelatihan.
 - b) Menentukan *spread*. Dalam penelitian ini nilai *spread* adalah sama untuk setiap unit pada lapisan tersembunyi dan ditentukan melalui metode "trial and error"
 - c) Menentukan bobot. Metode yang digunakan dalam menentukan bobot adalah metode *orthogonal least square* dengan algoritma Gram-Schmidt yang mengacu pada Chen et al (1991). Metode ini sekaligus untuk menentukan banyaknya unit dan *center* pada lapisan tersembunyi.
- iii. Setiap model RBF yang dihasilkan diuji menggunakan data uji dan menentukan *MSE* yang dihasilkan.
- iv. Model terbaik adalah model dengan *MSE* terkecil.

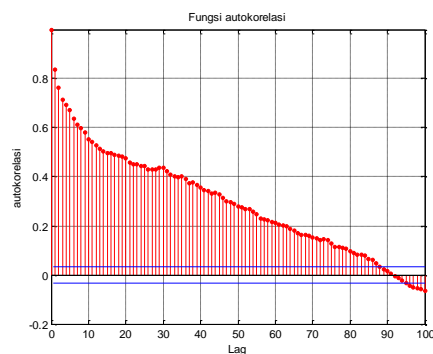
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Analisis pola data dan *autocorrelogram*

Pola data dan hubungan antara data tma pada masa sekarang dengan masa sebelumnya dapat digunakan sebagai dasar pertimbangan dalam menentukan variabel *input*. Berdasarkan Gambar 2(a) dan 2(b) dapat disimpulkan adanya kecenderungan pola data sama dari tahun ke tahun dan adanya hubungan jangka panjang antara data tma sekarang dengan data tma sebelumnya.



(a) Plot data tma Jurug 1 Jan 2000-31 Des 2009



(b) Autocorrelogram data tma Jurug

Gambar 2. Plot Pola Data dan *Autocorrelogram* tma Jurug

Berdasarkan analisa pola data pada Gambar 2, tim peneliti menetapkan data harian dalam satu tahun sebagai variabel *input*. Dengan demikian variabel *input* terdiri dari 365 hingga 366 variabel, hal ini terkait dengan jumlah hari pada bulan Februari yang berbeda setiap 4 tahunnya. Untuk memudahkan perhitungan, banyaknya hari dalam bulan Februari dianggap 29. Apabila jumlah hari pada bulan Februari adalah 28 hari, maka data ke 29 pada bulan Februari diisi dengan rata-rata tma tanggal 28 Februari dengan 1 Maret pada tahun bersangkutan.

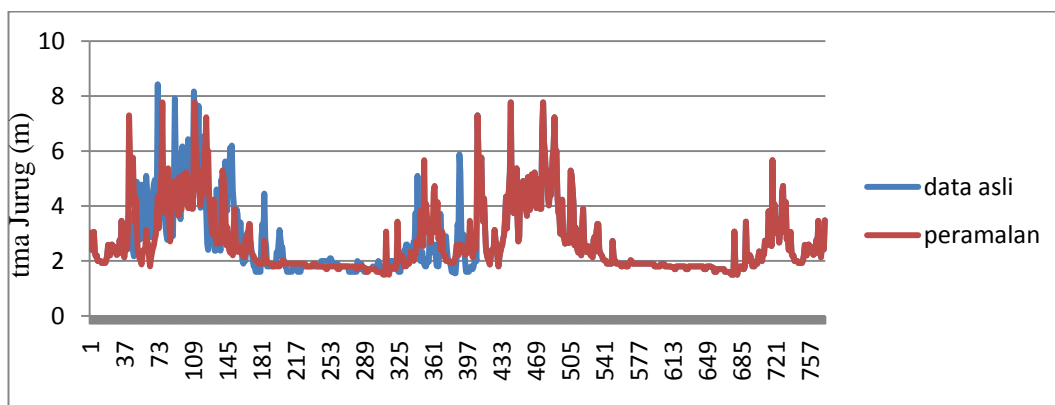
3.2 Model *RBFN* untuk data tma Jurug

Data pelatihan yang digunakan adalah data tma Jurug tahun 2000 hingga 2008. Data tma tahun 2009 dijadikan sebagai data uji. Berdasarkan hasil kesimpulan pada subbagian 3.1 maka diambil data harian pada satu tahun sebelumnya sebagai data *input* untuk meramalkan data tahun berikutnya. Dengan demikian banyaknya unit *input* sama dengan banyaknya unit pada lapisan *output*. Dalam penelitian akan ditunjukkan apakah banyaknya data pelatihan mempengaruhi model. Hasil penelitian yang disajikan pada Tabel 1 adalah sebagian dari hasil percobaan yang telah dilakukan. Dari setiap data pelatihan yang digunakan ditampilkan model dengan *MSE* data uji terkecil.

Tabel 1. Hasil *MSE* pada data uji.

| No | Banyak data pelatihan | Banyak <i>center</i> | <i>Spread</i> | <i>MSE</i> data uji |
|----|-----------------------|----------------------|---------------|---------------------|
| 1 | 8 | 8 | 0.1 | 1.6227 |
| 2 | 7 | 7 | 0.1 | 1.5580 |
| 3 | 6 | 6 | 0.1 | 1.5444 |
| 4 | 5 | 1 | 0.1 | 1.9179 |
| 5 | 4 | 1 | 0.1 | 1.6227 |
| 6 | 3 | 3 | 0.1 | 1.3379 |
| 7 | 2 | 1 | 0.1 | 1.2591 |
| 8 | 1 | 1 | 0.1 | 9.3646 |

Berdasarkan beberapa kali percobaan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa nilai *spread* tidak begitu berpengaruh dalam pembentukan model. Model yang paling baik dari hasil percobaan setelah diujikan pada data uji adalah model yang diperoleh melalui pelatihan dengan dua data pelatihan. Plot data peramalan pada data uji dan peramalan tma Jurug tahun 2010 disajikan pada Gambar 3.



Data ke- (mulai 1 Januari 2009 s/d 31 Desember 2010)

Gambar 3. Peramalan untuk data uji dan tma tahun 2010

4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diperoleh dalam penelitian ini adalah banyaknya data pelatihan mempengaruhi tampilan model *RBFN*. Meski prinsip kerja *RBFN* berdasarkan sistem memori pengalaman masa lalu, dan adanya fakta bahwa ada hubungan jangka panjang dalam data tma bukan berarti bahwa semakin banyak data pelatihan akan menghasilkan model yang semakin baik. Hal ini ditunjukkan dengan nilai *MSE* terkecil pada model dengan dua data pelatihan, yang diujikan pada data tma tahun 2009. Hasil peramalan pada tanggal 11 Februari, 17 Maret, 20 April dan 20 Mei 2010 menunjukkan tma yang cukup tinggi, yaitu lebih dari 7 meter. Tingkat tma ini merupakan peringatan bagi warga sekitar Jurug untuk lebih waspada terhadap datangnya banjir.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini merupakan bagian dari penelitian DIPA BLU FMIPA UNS 2010. Tim peneliti mengucapkan terimakasih kepada Dekan dan KPF FMIPA yang telah memberikan kesempatan melakukan penelitian ini melalui bantuan dana DIPA BLU FMIPA UNS 2010.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chen, S., Cowan, C.F.N., and Grant, P.M., Orthogonal Least Squares Learning Algorithm for Radial Basis Function Networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol 2, No 2, 1991: 302 – 309.
- [2] Fausett, L. *Fundamental of Neural Networks: Architectures, Algorithms and Applications*, 1994, New Jersey: Prentice Hall

-
- [3] Haykin, S., *Neural Networks: A Comparative Foundation*, Upper Saddle River, 1994, New Jersey: Prentice Hall.
 - [4] Jayawardana A.W., Fernando, D.A.K, and Zhou, M.C., Comparisons of Multilyer Perceptron and Radial Basis Function Networks as Tools for Flood Forecasting, in *Proceedings of Conference on Destructive water*, California, IAHS Publ. No. 239., 1997:173-181
 - [5] Jayawardana, A.W and Fernando, D.A.K. Use of Radial Basis Function Type Artificial Neural Networks for Runoff Simulation. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. Vol. 13, 1998: 91-99
 - [6] Lin, G.F., and Chen, LH., Time Series Forecasting by Combining The Radial Basis Function Network and The Self- Organizing Map, *Hydrological Processes*, Vol.19, 2005:1925-1937
 - [7] Maillard, E.P and Gueriot, D., RBF Neural Network, Basis Function and Genetic Algorithm, in *Proceeding of the IEEE International Conference of Neural Networks (ICNN'97)*, 1997:2187-2192.
 - [8] Moody, J. and Darken, C., Fast Learning in Networks of Locally-tunes Processing Units. *Neural Computation*, Vol 1, 1989:281-294

PENYELESAIAN PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA LINEAR DALAM BENTUK FREDHOLM DENGAN METODE FUNGSI WALSH

Purnami Widyaningsih

Jurusan Matematika FMIPA UNS

ABSTRAK. Metode fungsi Walsh untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra maupun Fredholm linear telah dikembangkan. Persamaan integral Volterra linear dapat disajikan dalam bentuk persamaan integral Fredholm dengan modifikasi pada kernelnya. Ini berarti persamaan integral Volterra dapat diselesaikan dalam bentuk Fredholm.

Dalam metode Fungsi Walsh, fungsi-fungsi yang ada dalam persamaan integral Fredholm diekspansikan sebagai deret berhingga (m suku) fungsi Walsh. Kernelnya juga diekspansikan sebagai deret fungsi Walsh rangkap berhingga. Langkah ini menghasilkan sistem persamaan linear. Selanjutnya sistem ini diselesaikan dengan eliminasi Gauss.

Dengan memperhatikan $m = 2^n$, $n = 2, 3, \dots, 10$, eksperimen numerik menunjukkan bahwa eror koefisien-koefisien fungsi Walshnya mempunyai order 2.

Kata kunci: fungsi Walsh, persamaan integral Volterra dan Fredholm

1. PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA LINEAR

Persamaan integral banyak muncul dalam bidang mekanika, fisika matematika, dan bidang lainnya. Dalam tulisan ini hanya diperhatikan persamaan integral Volterra linear tipe kedua yang mempunyai bentuk umum

$$y(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t) y(t) dt \quad (1.1)$$

dengan fungsi $g(x)$ dan kernel $K(x, t)$ diketahui sedang $y(x)$ adalah fungsi yang akan ditentukan. Untuk kernel $K(x, t)$ dan fungsi $g(x)$ kontinu, persamaan integral (1.1) selalu mempunyai penyelesaian yang tunggal (Kress [10]: 33).

Menurut Golberg [7], persamaan integral Volterra (1.1) dapat disajikan sebagai persamaan integral Fredholm

$$y(x) = g(x) + \int_0^1 \tilde{K}(x, t) y(t) dt \quad (1.2)$$

dengan

$$\tilde{K}(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

Ini berarti bahwa menyelesaikan persamaan integral Fredholm linear (1.2) ekuivalen dengan menyelesaikan persamaan integral Volterra (1.1) atau sebaliknya.

2. METODE FUNGSI WALSH

Fungsi Walsh dikenalkan tahun 1923 [17]. Menurut Walsh, fungsi tersebut mempunyai sifat yang mirip dengan fungsi trigonometri. Namun demikian, fungsi tersebut lebih sederhana karena hanya mempunyai nilai 1 atau -1. Menurut Burrus *et al.* [6], fungsi Walsh dapat disajikan sebagai kombinasi linear dari fungsi Haar. Fungsi Walsh beserta sifat-sifatnya secara lengkap dapat dipelajari dalam tulisan Golubov *et al.* [8].

Blyth dan Uljanov [5] serta Uljanov dan Blyth [16] telah mengembangkan algoritma baru, kemudian dikenal dengan metode fungsi Walsh, untuk menyelesaikan persamaan integral Fredholm. Sama seperti Blyth dan Sloss [4], Sloss [11, 12], serta Sloss dan Blyth [14, 15] pada persamaan integral Volterra, untuk persamaan integral Fredholm (1.2), Blyth dan Uljanov [5, 16] menerapkan kembali metode fungsi Walsh dengan mengambil tepat m suku, $m = 2^n$, $n \in N$, yaitu

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i W_i(x), \quad g(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} g_i W_i(x) \quad (2.1)$$

dengan

$$c_i = \int_0^1 y(x) W_i(x) dx, \quad g_i = \int_0^1 g(x) W_i(x) dx.$$

Sedang kernelnya didekati dengan deret fungsi Walsh rangkap berhingga, yaitu

$$\tilde{K}(x, t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} W_i(x) W_j(t), \quad (2.2)$$

dengan

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{K}(x, t) W_i(x) W_j(t) dt dx. \quad (2.3)$$

Dengan (2.1) dan (2.2), Uljanov dan Blyth menunjukkan persamaan (1.2) dapat disajikan sebagai sistem persamaan linear

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{g}_m + A_m \mathbf{c}_m \quad \text{dengan} \quad A_m = (a_{ij}). \quad (2.4)$$

Ini berarti bahwa menyelesaikan persamaan integral (1.2) menggunakan metode fungsi Walsh adalah ekuivalen dengan menyelesaikan sistem persamaan linear (2.4).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Di sini diterapkan 2 kasus persamaan integral Volterra yang diketahui penyelesaian eksaknya. Sehingga eror penyelesaian yang diperoleh karena penggunaan metode fungsi Walsh dapat ditentukan. Lebih lanjut, dalam penerapan ini digunakan $m = 2^n$ dengan $n = 2, 3, \dots, 10$. Kasus tersebut diambil dari Jerri [9] dan Baker [1].

Kasus 3.1. Kasus pertama adalah persamaan integral Volterra linear tipe kedua

$$y(x) = \sin x + \int_0^x 2 \cos(x-t) y(t) dt$$

yang disajikan sebagai persamaan integral Fredholm linear

$$y(x) = \sin x + \int_0^1 \tilde{K}(x, t) y(t) dt \quad \text{dengan} \quad \tilde{K}(x, t) = \begin{cases} 2 \cos(x-t), & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x \leq t < 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Persamaan integral tersebut mempunyai penyelesaian eksak

$$y(x) = xe^x. \quad (3.2)$$

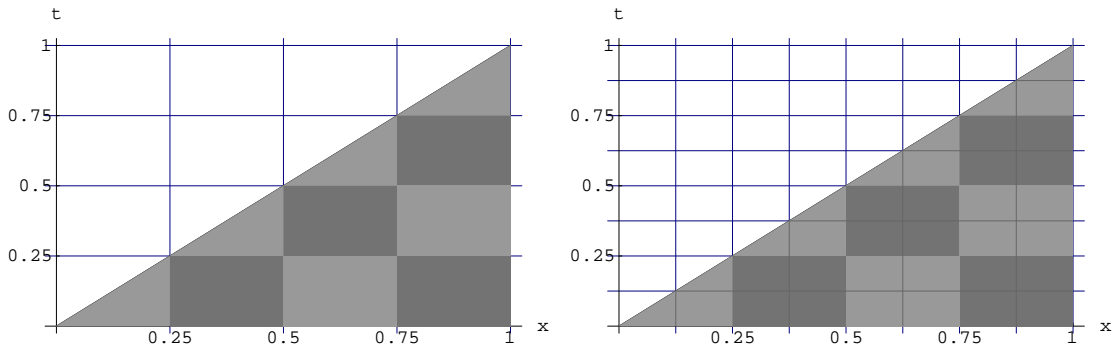
Berikut dituliskan 3 langkah pokok penyelesaian (3.1) dengan metode fungsi Walsh.

- (1) Menentukan koefisien g_i dengan (2.1). Untuk itu digunakan transformasi Walsh dari integrasi simbolik

$$h_i = k_1 \cos \frac{i}{m} + k_2 \sin \frac{i}{m} \quad \text{dengan} \quad k_1 = \sin \frac{1}{m} \quad \text{dan} \quad k_2 = \cos \frac{1}{m} - 1.$$

- (2) Menentukan koefisien a_{ij} dengan persamaan (2.3). Tidak seperti dalam Blyth *et al.* [3], koefisien a_{ij} di sini ditentukan secara efisien dengan mengacu artikel Widyaningsih [19]. Untuk itu, langkah awal yang dilakukan adalah menentukan nilai $b_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{K}(x, t) dx dt$. Misal m adalah banyaknya subinterval pada unit interval. Besarnya nilai b_{ij} adalah $\frac{1}{m}$ kali nilai rata-rata $\tilde{K}(x, t)$, yaitu $\frac{1}{m}$ kali nilai integral rangkap dalam subinterval- x ke- i dan subinterval- t ke- j . Untuk $m = 4$ dan $m = 8$, subinterval- x dan t ditunjukkan dalam Gambar 1. Dari (3.1) dan Gambar 1, hanya perlu untuk menentukan integral rangkap para segi empat dan segitiga di bawah garis $t = x$. Nilai integral rangkap di atas garis tersebut jelas nol. Nilai integral baik untuk segi empat maupun segi tiga mudah ditentukan. Untuk kasus ini digunakan integrasi simbolik (penggunaan integrasi numerik memerlukan waktu yang lebih lama, lihat Widyaningsih [18]), yaitu

$$b_{ij} = k_3 \cos\left(\frac{i-j}{m}\right) \quad \text{dengan} \quad k_3 = 8 \sin^2 \frac{1}{2m} \quad \text{dan} \quad b_{ii} = 2 - 2 \cos \frac{1}{m}. \quad (3.3)$$



Gambar 1. Subinterval- x dan t untuk grid $m = 4$ (kiri) dan untuk grid $m = 8$ (kanan)

Dari Gambar 1 tampak bahwa matriks $B_4 = (b_{ij})$ dapat ditentukan dari B_8 . Sebagai contoh

$$\begin{aligned}
 b_{11}^{[m=4]} &= b_{11}^{[m=8]} + b_{22}^{[m=4]} + b_{21}^{[m=4]} \quad \text{dan} \\
 b_{43}^{[m=4]} &= b_{75}^{[m=8]} + b_{85}^{[m=8]} + b_{76}^{[m=8]} + b_{86}^{[m=8]}.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Dengan demikian, perhitungan matriks B_m pada grid *finest* ($m = 2^{10} = 1024$) ditentukan dengan integrasi simbolik (3.3). Selanjutnya, dengan ide (3.4), diperoleh matriks B_{512} . Dari matriks ini, dapat ditentukan matriks B_{256} . Demikian seterusnya, sehingga diperoleh matriks B_4 .

Langkah berikutnya adalah menentukan A_m dari B_m . Nilai ini dapat diperoleh dengan transformasi *fast* Walsh (Beauchamp [2]) atau dengan transformasi Walsh rangkap (perkalian, *pre* dan *post*, matriks B dengan matriks Walsh). Karena dalam beberapa kasus transformasi Walsh rangkap lebih cepat, Widyaningsih [18], di sini digunakan transformasi tersebut.

- (3) Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear (2.4) dengan g_i dan a_{ij} yang telah diperoleh. Sistem (2.4) dapat disajikan sebagai $(I_m - A_m)c_m = g_m$. Di sini digunakan metode langsung atau eliminasi Gauss.

Untuk $m = 4$, penyelesaian pendekatan yang diperoleh adalah

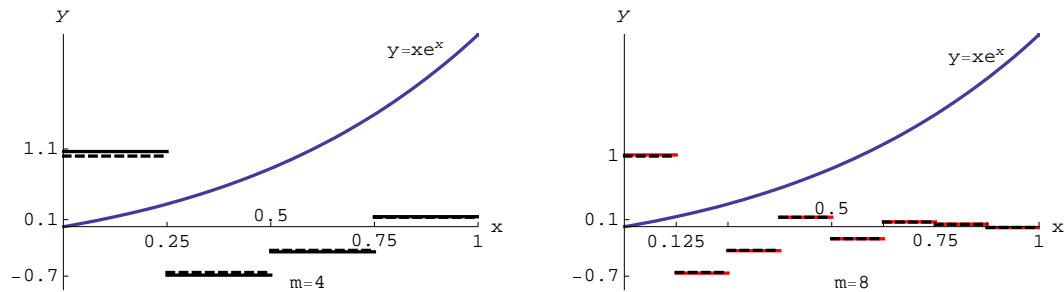
$$y(x) = 1.06449 W_0(x) - 0.685519 W_1(x) - 0.35526 W_2(x) + 0.141805 W_3(x), \tag{3.5}$$

sedang deret fungsi Walsh penyelesaian eksak (3.2) adalah

$$W_0(x) - 0.648721 W_1(x) - 0.335817 W_2(x) + 0.132462 W_3(x). \tag{3.6}$$

Baik penyelesaian eksak, deret fungsi Walsh darinya, dan penyelesaian pendekatannya mudah digambar. Untuk $m = 4$ dan $m = 8$, gambar yang dimaksud tampak dalam

Gambar 2. Karena dalam kasus ini penyelesaian eksaknya diketahui, eror penyelesaian



Gambar 2. Penyelesaian eksak $y = xe^x$, deret fungsi Walshnya (garis putus-putus), dan deret fungsi Walsh penyelesaian pendekatannya untuk $m = 4$ dan $m = 8$

pendekatan yang diperoleh dapat ditentukan. Dengan hanya memperhatikan koefisien deret fungsi Walsh (3.6) dan (3.5), eror untuk $m = 4$ (dinotasikan e_4) adalah

$$e_4 = (-0.0644874, 0.0367979, 0.0194427, -0.00934321)$$

dan norm euclediannya adalah $\|e_4\| = 0.0773177$.

Norm eucledian eror penyelesaian pendekatan untuk $m = 2^n$, $n = 2, 3, \dots, 10$ secara lengkap tampak dalam Tabel 1 kolom 3. Sedang rasio norm erornya tampak dalam kolom 4. Tampak jelas rasio norm konvergen ke 0.25. Perilaku semacam ini, sebagaimana dituliskan dalam Sloss dan Blyth [13], menunjukkan bahwa untuk kasus ini eror dalam koefisien-koefisien deret Walshnya adalah order 2.

Tabel 1. Norm eucledian eror penyelesaian (3.1) dan rasio erornya untuk masing-masing m

| n | $m = 2^n$ | $\ e_m\ $ (Norm eror) | $\frac{\ e_m\ _{\text{untuk } n}}{\ e_m\ _{\text{untuk } n-1}}$ (Rasio norm eror) |
|-----|-----------|--------------------------|--|
| 2 | 4 | 0.0773177 | - |
| 3 | 8 | 0.0187913 | 0.243041 |
| 4 | 16 | 0.00466585 | 0.248298 |
| 5 | 32 | 0.00116449 | 0.249577 |
| 6 | 64 | 0.000290999 | 0.249894 |
| 7 | 128 | 0.0000727422 | 0.249974 |
| 8 | 256 | 0.0000181851 | 0.249993 |
| 9 | 512 | 4.54623×10^{-6} | 0.249998 |
| 10 | 1024 | 1.13656×10^{-6} | 0.25 |

Kasus 3.2. Diperhatikan persamaan integral Volterra linear tipe kedua

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt$$

yang mempunyai penyelesaian eksak $y(x) = x + \frac{x^3}{6}$.

Bentuk Fredholm persamaan integral Volterra tersebut adalah

$$y(x) = x + \int_0^1 \tilde{K}(x,t) y(t) dt \text{ dengan } \tilde{K}(x,t) = \begin{cases} \sin(x-t), & 0 \leq t \leq x \\ 0, & x \leq t < 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

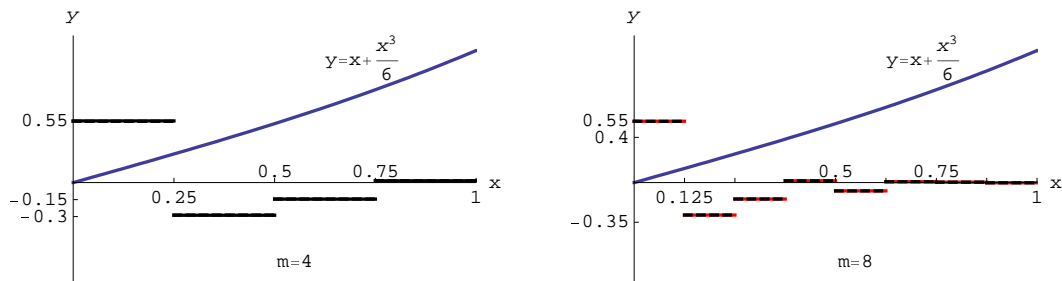
Koefisien g_i dalam kasus ini ditentukan dengan transformasi Walsh dari integrasi simbolik

$$h_i = k_4 + \frac{i}{m^2} \text{ dengan } k_4 = -\frac{1}{2m^2} \sin \frac{1}{m}.$$

Sedang koefisien a_{ij} ditentukan dengan transformasi Walsh rangkap dari

$$b_{ij} = k_5 \sin\left(\frac{i-j}{m}\right) \text{ dengan } k_5 = 2\left(1 - \cos \frac{1}{m}\right) \text{ dan } b_{ii} = \frac{1}{m} - \sin \frac{1}{m}.$$

Gambar penyelesaian eksak, deret fungsi Walsh darinya, dan penyelesaian pendekatan (3.7) untuk $m = 4$ dan $m = 8$, tampak dalam Gambar 3. Error koefisien penyelesaian untuk kasus ini cukup kecil dibandingkan error untuk Kasus 3.1. Sehingga gambar deret fungsi Walsh penyelesaian eksaknya (garis putus-putus) dan penyelesaian pendekatan yang diperoleh, baik untuk $m = 4$ dan $m = 8$, tampak berimpit.



Gambar 3. Penyelesaian eksak $y = x + \frac{x^3}{6}$, deret fungsi Walshnya (garis putus-putus), dan deret fungsi Walsh penyelesaian pendekatannya untuk $m = 4$ dan $m = 8$

rasio normnya untuk kasus ini tampak dalam Tabel 2. Dari kolom 4 Tabel 2, sama seperti pada Kasus 3.1, error dalam koefisien-koefisien deret Walshnya adalah order 2.

Tabel 2. Norm eucledian error penyelesaian (3.7) dan rasionya masing-masing m

| n | $m = 2^n$ | $\ e_m\ $ (Norm error) | $\frac{\ e_m\ _{\text{untuk } n}}{\ e_m\ _{\text{untuk } n-1}}$ (Rasio norm error) |
|-----|-----------|---------------------------|---|
| 2 | 4 | 0.00331079 | - |
| 3 | 8 | 0.000827618 | 0.249976 |
| 4 | 16 | 0.000206898 | 0.249993 |
| 5 | 32 | 0.0000517242 | 0.249998 |
| 6 | 64 | 0.000012931 | 0.25 |
| 7 | 128 | 3.23276×10^{-6} | 0.25 |
| 8 | 256 | 8.08193×10^{-7} | 0.25 |
| 9 | 512 | 2.02052×10^{-7} | 0.25 |
| 10 | 1024 | 5.05165×10^{-8} | 0.25 |

4. KESIMPULAN

Metode fungsi Walsh dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra dalam bentuk Fredholm. Dalam metode Fungsi Walsh, fungsi-fungsi yang ada dalam persamaan integral Fredholm diekspansikan sebagai deret berhingga (m suku) fungsi Walsh. Kernelnya juga diekspansikan sebagai deret fungsi Walsh rangkap berhingga. Langkah ini menghasilkan sistem $c_m = g_m + A_m c_m$. Selanjutnya sistem ini diselesaikan dengan eliminasi Gauss.

Dengan memperhatikan $m = 2^n$, $n = 2, 3, \dots, 10$, eksperimen numerik menunjukkan bahwa error koefisien-koefisien Walshnya mempunyai order 2.

DAFTAR PUSTAKA

1. Baker, Christopher T. H., *The numerical treatment of integral equations*, Oxford University Press, Oxford, 1977.
2. Beauchamp, K. G., *Walsh functions and their applications*, Academic Press, London, 1975.
3. Blyth, W. F., R. L. May, and P. Widyarningsih, *Volterra integral equations solved in Fredholm form using walsh functions*, ANZIAM J. E (2004), no. 45, C269–C282.
4. Blyth, W. F. and B. G. Sloss, *Walsh functions and applications to differential and integral equations*, The Role of Mathematics in Modern Engineering, 1st Biennial Engineering Mathematics Conference: AEMC94 (Alan K. Easton and Joseph M. Steiner, eds.), The Engineering Mathematics Group (EMG), Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM), Australian Mathematics Society and Student literature, 1996, pp. 535–542.

5. Blyth, W. F. and V. Uljanov, *Numerical solution of weakly singular Fredholm integral equations using Walsh functions*, Computational Techniques and Applications: CTAC-95 (R. L. May and A. K. Easton, eds.), World Scientific Publishing Co., 1996, pp. 137–143.
6. Burrus, C. Sidney, Ramesh A. Gopinath, and Haitao Guo, *Introduction to wavelets and wavelet transforms: A primer*, Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1998.
7. Golberg, M. A., *A survey of numerical methods for integral equations*, Solution Methods for Integral Equations: Theory and Applications (New York) (M. A. Golberg, ed.), Plenum Publishing Co., 1979, pp. 1–58.
8. Golubov, B., A. Efimov, and V. Skvortsov, *Walsh series and transforms: Theory and applications*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 64, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991.
9. Jerri, A. J., *Introduction to integral equations with applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.
10. Kress, Rainer, *Linear integral equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 82, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1989.
11. Sloss, B. G., *Numerical solution of differential equations using Walsh functions*, Master's thesis, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne, Australia, 1988.
12. Sloss, B. G., *Walsh functions and applications to numerical analysis*, Ph.D. thesis, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne, Australia, 1994.
13. Sloss, B. G. and W. F. Blyth, *A-priori error estimates for Corrington's Walsh function method*, J. Franklin Institute **331B** (1984), no. 3, 273–283.
14. Sloss, B. G. and W. F. Blyth, *Corrington's Walsh function method applied to a nonlinear integral equation*, Journal of Integral Equations **6** (1994), no. 2, 239–255.
15. Sloss, B. G. and W. F. Blyth, *A Walsh function method for the nonlinear Volterra integral equation*, Research Report 5, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne, Australia, Dec. 1995.
16. Uljanov, V. and W. F. Blyth, *Numerical solution of Urysohn integral equations using Walsh functions*, The Role of Mathematics in Modern Engineering: 1st Biennial Engineering Mathematics Conference: AEMC94 (Alan K. Easton and Joseph M. Steiner, eds.), The Engineering Mathematics Group (EMG), Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics (ANZIAM), Australian Mathematics Society and Student literature, 1996, pp. 621–628.
17. Walsh, J. L., *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math (1923), no. 45, 5–24.
18. Widyaningsih, P., *The solution of integral equations using Walsh functions and a multigrid approach*, Master's thesis, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne, Australia, 1999.
19. Widyaningsih, P., *Perbandingan penyelesaian persamaan integral Volterra dengan metode fungsi walsh secara langsung dan dalam bentuk Fredholm*, MathInfo (2005), no. Edisi Khusus, 31–38.

JURUSAN MATEMATIKA, FMIPA, UNIVERSITAS SEBELAS MARET, JL. IR. SUTAMI 36A, KENTINGAN, 57126, SURAKARTA.

E-mail : poer@uns.ac.id

PERILAKU KUALITATIF MODEL EPIDEMIK SVIR TANPA IMIGRAN TERINFEKSI DAN KEMATIAN KARENA PENYAKIT

Marsudi

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

marsudi61@brawijaya.ac.id

ABSTRAK. Model *SVIR* merupakan model deterministik yang diperoleh dari model epidemik *SIR* dengan vaksinasi dan imigran terinfeksi. Model ini diperoleh dengan menerjemahkan mekanisme penyebaran penyakit yang dirumuskan dengan membagi populasi menjadi empat kelas, yaitu: *Susceptibles (S)*, *Vaccinated (V)*, *Infectives (I)* and *Recovered (R)* yang disajikan dalam bentuk persamaan diferensial nonlinear. Makalah ini mengkaji perilaku kualitatif model *SVIR* tanpa adanya imigran terinfeksi di mana pemberian vaksin efektif atau tidak efektif memberantas penyakit serta tanpa kematian karena penyakit. Pada model *SVIR* tanpa imigran terinfeksi dan vaksin tidak efektif, titik kesetimbangan endemik akan stabil asimptotik lokal untuk angka reproduksi dasar $R_0 > 1$. Pada model *SVIR* tanpa imigran terinfeksi dan vaksin efektif, titik kesetimbangan bebas-penyakit adalah stabil asimptotik untuk angka reproduksi vaksin $R_\phi < 1$ dan titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimptotik lokal jika $R_\phi > 1$. Pada model *SVIR* tanpa kematian karena penyakit dan terdapat imigran terinfeksi ke dalam host mempunyai satu titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan endemik adalah stabil (global) untuk berbagai nilai laju vaksinasi.

Kata Kunci: Model *SVIR*, angka reproduksi vaksin, kestabilan titik kesetimbangan

1. PENDAHULUAN

Model epidemik adalah contoh pemodelan matematika dalam bidang biologi dan kedokteran. Pada kajian mengenai penyebaran penyakit infeksius pada umumnya terdapat dua macam model dasar yang dipergunakan, yaitu model diskrit dan model kontinu. Pada model diskrit digunakan model probabilistik, sedangkan pada model kontinu digunakan model deterministik.

Model epidemik penyakit yang diperhatikan dalam makalah ini adalah tipe *SIR* karena ada pengaruh vaksinasi dan imigran terinfeksi (model *SVIR*) khususnya tanpa imigran terinfeksi dan tidak ada kematian karena penyakit. Model deterministik yang diformulasikan dalam model *SVIR* merupakan model epidemik penyakit dengan empat kompartemen, yaitu: *Susceptibles (S)*, *Vaccinated (V)*, *Infectives (I)* dan *Recovered (R)*.

Susceptibles adalah kelompok individu yang sehat tetapi mempunyai kemungkinan untuk terinfeksi. *Vaccinated* adalah kelompok individu yang telah diberi vaksin. *Infectives* adalah kelompok individu yang telah tertular penyakit dan dapat menularkan penyakitnya kepada individu lain. *Recovered* adalah kelompok individu yang sembuh dan kebal. Model epidemik SVIS diperoleh dengan menerjemahkan mekanisme penyebaran penyakit yang akan disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear.

Dalam epidemiologi R_0 adalah parameter ambang yang menentukan apakah penyakit akan menyerang populasi *host* atau tidak. Perilaku tersebut dapat dinyatakan dalam istilah epidemiologi sebagai berikut: jika rata-rata jumlah infeksi kedua yang disebabkan oleh individu terinfeksi kurang dari satu, maka penyakit hilang, tetapi jika lebih dari satu terjadi epidemik [1]. Angka reproduksi dasar (R_0) kurang dari satu memberikan syarat perlu untuk memberantas sebuah epidemik [2]. Banyak fenomena dalam epidemiologi memuat bifurkasi transkritik, yang menerangkan sebuah perubahan kestabilan antara kestabilan bebas penyakit dan kesetimbangan endemik.

Menurut [3] dan [4], titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $R_\phi < 1$ pada model SVIS dengan (tanpa) kematian karena penyakit dan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik jika $R_\phi > 1$ di mana

$R_\phi = \frac{\beta(\mu + \theta + \sigma\phi)(A + \Lambda)}{\mu(\mu + \theta + \phi)(\mu + \gamma + \alpha)}$ adalah angka reproduksi vaksin [5]. Keadaan ini juga

berlaku jika tidak ada imigran terinfeksi yang masuk dalam model ini dan terdapat bifurkasi transkritik. Pada model SVIS tanpa kematian karena penyakit dan pemberian vaksinasi efektif, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $R_\phi < 1$ dan pada titik kesetimbangan endemik terdapat parameter treshold (angka reproduksi dasar) R_0 jika imigran yang terinfeksi mendekati nol. Pada model SVIS tanpa kematian karena penyakit dan pemberian vaksinasi tidak efektif, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $R_\phi < 1$ dan ada kestabilan pada kesetimbangan endemik.

Dalam makalah ini, akan dikaji apakah perilaku kualitatif juga berlaku pada model epidemik penyakit tipe SIR dengan pengaruh program vaksinasi dan kedatangan imigran (model SVIR). Menggunakan analisis sistem dinamik, titik kesetimbangan model dan jenis kestabilan dari titik kesetimbangan model dapat ditentukan. Sebagai alat bantu dalam melakukan simulasi numerik, digunakan program Matlab dan Maple.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model SVIR merupakan model deterministik yang dirumuskan dengan membagi populasi menjadi empat kelas, yaitu: *Susceptibles* (S), *Vaccinated* (V), *Infectives* (I), dan *Recovered* (R). Model dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear berikut [5]

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda + (1-p)A - \beta SI - (\mu + \phi)S + \theta V \\ \frac{dV}{dt} &= \phi S - \sigma \beta VI - (\theta + \mu)V \\ \frac{dI}{dt} &= pA + \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{1}$$

dengan $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$. A adalah jumlah imigran dan p adalah porsi *infectives* dari imigran ($0 \leq p \leq 1$); σ adalah faktor di mana vaksin mereduksi infeksi ($\sigma = 0$ berarti vaksin efektif dalam mencegah infeksi dan $\sigma = 1$ berarti vaksin tidak efektif dalam mencegah infeksi); ϕ adalah laju vaksinasi dan θ adalah laju pemakaian vaksin habis; α adalah laju kematian yang berhubungan dengan penyakit; μ adalah laju kematian alami tidak berhubungan dengan penyakit ($\mu > 0$); γ adalah laju *recovery* dalam satuan waktu ($\gamma \geq 0$); βN adalah laju kontak infeksi per orang per unit waktu; Λ adalah laju kelahiran alami (konstan) di mana semua kelahiran baru masuk ke dalam *Susceptible*.

Pada pembahasan selanjutnya akan diperhatikan kasus khusus dari sistem (1), yaitu jika diasumsikan tidak ada imigran terinfeksi atau tidak ada kematian karena penyakit.

2.1 Model SVIR Tanpa Imigran Terinfeksi dan Vaksin Tidak efektif

Model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin tidak efektif diperoleh dari sistem (1) dengan memisalkan $p = 0$ dan $\sigma = 1$, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda + A - \beta SI - (\mu + \phi)S + \theta V \\
\frac{dV}{dt} &= \phi S - \beta VI - (\mu + \theta)V \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI + \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.
\end{aligned} \tag{2}$$

Titik kesetimbangan sistem (2) diperoleh dengan menyamakan ruas kanan dengan nol. Dari $\frac{dI}{dt} = 0$ diperoleh $I_0^* = 0$ atau $S_1^* = \frac{\mu + \alpha + \gamma}{\beta} - V_1^*$. Dari $\frac{dR}{dt} = 0$ dan $I_0^* = 0$, diperoleh $R_0^* = 0$. Dari $\frac{dV}{dt} = 0$ dan $I_0^* = 0$ diperoleh $V_0^* = \frac{\phi S_0^*}{\mu + \theta}$. Selanjutnya, dari $\frac{dR}{dt} = 0$, $I_0^* = 0$ dan $V_0^* = \frac{\phi S_0^*}{\mu + \theta}$ diperoleh $S_0^* = \frac{(\Lambda + A)(\mu + \theta)}{\mu(\mu + \phi + \theta)}$. Jadi, titik kesetimbangan bebas-penyakit sistem (2) adalah

$$E_0^* = (S_0^*, V_0^*, I_0^*, R_0^*) = \left(\frac{(\Lambda + A)(\mu + \theta)}{\mu(\mu + \phi + \theta)}, \frac{\phi(\Lambda + A)}{\mu(\mu + \phi + \theta)}, 0, 0 \right). \tag{3}$$

Selanjutnya, dari $\frac{dV}{dt} = 0$ dan $S_1^* = \frac{\mu + \alpha + \gamma}{\beta} - V_1^*$ diperoleh $V_1^* = \frac{\phi(\mu + \alpha + \gamma)}{\beta(\phi + \mu + \theta + \beta I_1^*)}$.

Jika S_1^* dan V_1^* disubstitusikan ke $\frac{dS}{dt} = 0$, diperoleh $I_1^* = \frac{\Lambda + A}{\mu + \alpha + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}$. Dengan

mensubstitusikan I_1^* ke V_1^* diperoleh $V_1^* = \frac{\phi(\mu + \alpha + \gamma)^2}{\beta[(\mu + \alpha + \gamma)(\phi + \theta) + \beta(\Lambda + A)]}$ sehingga

$S_1^* = \frac{\theta(\mu + \alpha + \gamma)^2 + \beta(\Lambda + A)(\mu + \alpha + \gamma)}{\beta[(\mu + \alpha + \gamma)(\phi + \theta) + \beta(\Lambda + A)]}$. Dengan mensubstitusikan I_1^* ke $\frac{dR}{dt} = 0$

diperoleh $R_1^* = \frac{\gamma(\Lambda + A)}{\mu(\mu + \alpha + \gamma)} - \frac{\gamma}{\beta}$. Dengan demikian, titik kesetimbangan endemik sistem

(2) adalah

$$E_1^* = (S_1^*, V_1^*, I_1^*, R_1^*). \tag{4}$$

Selanjutnya, didefinisikan $R_\phi = \frac{\beta(A + \Lambda)(\mu + \theta + \sigma\phi)}{\mu(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}$ sebagai angka

reproduksi vaksin. Jika dalam model tidak ada vaksin atau $\phi = 0$, maka diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta(A + \Lambda)}{\mu(\alpha + \gamma + \mu)}. \quad (5)$$

Dalam hal ini, R_0 disebut angka reproduksi dasar. Jika $R_0 < 1$ maka setiap individu terinfeksi hanya dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru sehingga penyakit akan hilang dan model mempunyai titik kesetimbangan bebas-penyakit $E_0^* = (S_0^*, V_0^*, 0, 0)$. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka setiap individu terinfeksi dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata lebih dari satu individu terinfeksi baru sehingga akan terjadi epidemik dengan titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (S_1^*, V_1^*, I_1^*, R_1^*)$.

Untuk mengkaji kestabilan dari titik kesetimbangan model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin tidak efektif, model (2) dilinearisasi sehingga diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \phi) & \theta & -\beta S & 0 \\ \phi & -\beta I - (\mu + \theta) & -\beta V & 0 \\ \beta I & \beta I & \beta S + \beta V - (\mu + \gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan bebas-penyakit $E_0^* = (S_0^*, V_0^*, 0, 0)$ adalah

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} -(\mu + \phi) & \theta & \frac{-(\mu + \gamma + \alpha)(\mu + \theta)R_0}{(\mu + \phi + \theta)} & 0 \\ \phi & -(\mu + \theta) & \frac{-\phi(\mu + \gamma + \alpha)R_0}{(\mu + \phi + \theta)} & 0 \\ 0 & 0 & (\mu + \gamma + \alpha)(R_0 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

dengan persamaan karakteristik

$$-(\mu + \lambda)^2(\mu + \phi + \theta + \lambda)[(R_0 - 1)(\mu + \gamma + \alpha) - \lambda] = 0. \quad (8)$$

Nilai-nilai eigen dari persamaan (8) adalah

$$\lambda_{1,2} = -\mu, \lambda_3 = -(\mu + \phi + \theta) \text{ dan } \lambda_4 = (R_0 - 1)(\mu + \gamma + \alpha). \quad (9)$$

Titik kesetimbangan E_0^* bersifat stabil asimtotik jika keempat nilai eigen adalah real negatif. Jelas bahwa $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$. Nilai eigen λ_4 adalah negatif jika $R_0 < 1$. Dengan demikian titik kesetimbangan bebas-penyakit $E_0^* = (S_0^*, V_0^*, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal untuk $R_0 < 1$.

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (S_1^*, V_1^*, I_1^*, R_1^*)$ adalah

$$J(E_1^*) = \begin{bmatrix} -(\mu R_0 + \phi) & \theta & G & 0 \\ \phi & -(\mu R_0 + \theta) & H & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & \mu(R_0 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (10)$$

dengan

$$G = \frac{-\beta\theta(\Lambda + A)(\mu + \alpha + \gamma) - \beta^2(\Lambda + A)^2}{\mu R_0[(\phi + \theta)(\mu + \alpha + \gamma) + \beta(\Lambda + A)]} \text{ dan}$$

$$H = \frac{-\beta\phi(\mu + \alpha + \gamma)(\Lambda + A)}{\mu R_0[(\phi + \theta)(\mu + \alpha + \gamma) + \beta(\Lambda + A)]}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi $J(E_1^*)$ adalah

$$(\mu + \lambda)(\mu R_0 + \theta + \phi + \lambda)[\lambda^2 + \lambda\mu R_0 - \mu(G + H)(R_0 - 1)] = 0 \quad (11)$$

dengan nilai-nilai eigen

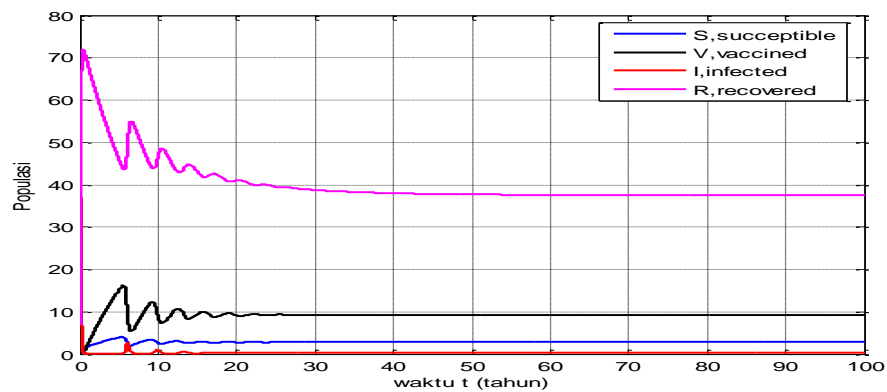
$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -(\mu R_0 + \theta + \phi), \lambda_3 = \frac{-\mu R_0 - \sqrt{(\mu R_0)^2 + 4\mu(G + H)(R_0 - 1)}}{2} \text{ dan}$$

$$\lambda_4 = \frac{-\mu R_0 + \sqrt{(\mu R_0)^2 + 4\mu(G + H)(R_0 - 1)}}{2}. \text{ Nilai eigen } \lambda_1 \text{ dan } \lambda_2 \text{ jelas bernilai real}$$

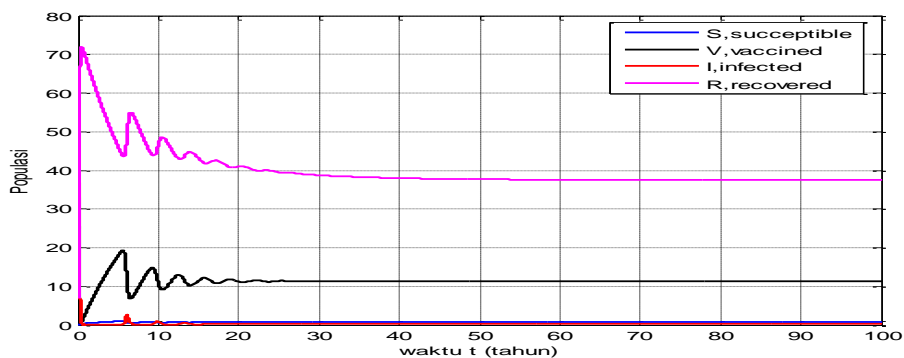
negatif. Nilai eigen λ_3 dan λ_4 bernilai negatif jika $R_0 > 1$. Jadi, titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (S_1^*, V_1^*, I_1^*, R_1^*)$ bersifat stabil asimtotik lokal untuk $R_0 > 1$.

Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dari sistem (2) menggunakan alat bantu program Matlab dan Maple. Nilai-nilai parameter model adalah $A = 2, \Lambda = 3, \sigma = 0.2, \beta = 1, \mu = 0.1, \gamma = 12, \theta = 0.5$ dengan jumlah subpopulasi awal awal $S(0) = 33, V(0) = 25, I(0) = 10$ dan $R(0) = 7$. Pada simulasi ini akan diberikan dua kasus yang berbeda, yaitu untuk laju vaksinasi $\phi = 17$ dan $\phi = 5$. Pada kasus $\phi = 17$, angka reproduksi dasar $R_0 = 4.13$ dan model mempunyai titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (0.62, 11.49, 0.31, 37.55)$. Karena $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan bebas-penyakit E_1^* stabil asimtotik lokal. Gambar 3.1 memperlihatkan bahwa solusi grafik sistem (2) dengan laju vaksinasi $\phi = 17$ terjadi osilasi dari awal sampai dengan waktu 25 tahun di mana subpopulasi S, V dan I mengalami penurunan tetapi subpopulasi R menunjukkan kenaikan hingga akhirnya konvergen menuju ke titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (0.62, 11.49, 0.31, 37.55)$.

Selanjutnya, model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin tidak efektif dengan $\phi = 5$ mempunyai angka reproduksi dasar $R_0 = 4.13$ dan titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (1.87, 10.24, 0.315, 37.55)$. Seperti dalam kasus $\phi = 17$, titik kesetimbangan endemik juga stabil asimtotik lokal untuk kasus $\phi = 5$. Perilaku solusi grafik dari sistem (2) untuk $\phi = 5$ hampir sama dengan kasus $\phi = 17$. Perubahan peningkatan dan penurunan pada masing-masing subpopulasi diperlihatkan dalam Gambar 3.2. perubahan berlangsung terus-menerus dan menuju ke titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (1.87, 10.24, 0.315, 37.55)$.



Gambar 3.1 Solusi model SVIR dengan $p = 0$, $\sigma = 1$ dan $\phi = 17$



Gambar 3.2 Solusi model SVIR dengan $p = 0$, $\sigma = 1$ dan $\phi = 5$

2.2 Model SVIR Tanpa Imigran Terinfeksi dan Vaksin efektif

Model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin efektif diperoleh dari model (1) dengan memisalkan $p = 0$ dan $\sigma = 0$, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda + A - \beta SI - (\mu + \phi)S + \theta V \\
\frac{dV}{dt} &= \phi S - (\mu + \theta)V \\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\mu + \alpha + \gamma)I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.
\end{aligned} \tag{12}$$

Titik kesetimbangan model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin efektif (sistem (12)) diperoleh secara analog seperti dalam kasus model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin tidak efektif. *Titik kesetimbangan bebas-penyakit* sistem (12) adalah sama dengan titik kesetimbangan bebas-penyakit sistem (2), yaitu

$$E_0^* = (S_0^*, V_0^*, 0, 0) = \left(\frac{(\Lambda + A)(\mu + \theta)}{\mu(\mu + \phi + \theta)}, \frac{\phi(\Lambda + A)}{\mu(\mu + \phi + \theta)}, 0, 0 \right). \tag{13}$$

atau

$$E_0^* = (S_0^*, V_0^*, 0, 0) = \left(\frac{(\mu + \gamma + \alpha)R_\phi}{\beta}, \frac{\phi R_\phi (\mu + \gamma + \alpha)}{\beta(\mu + \theta)}, 0, 0 \right) \tag{14}$$

di mana $R_\phi = \frac{\beta(A + \Lambda)(\mu + \theta)}{\mu(\mu + \theta + \phi)(\mu + \gamma + \alpha)}$ adalah *angka reproduksi vaksin*.

Titik kesetimbangan endemik untuk sistem (12) adalah

$$E_1^* = (S_1^*, V_1^*, I_1^*, R_1^*) \tag{15}$$

dengan $S_1^* = \frac{(A + \Lambda)(\mu + \theta)}{\mu(\mu + \theta + \phi)R_\phi}$, $V_1^* = \frac{\phi(A + \Lambda)}{\mu(\mu + \theta + \phi)R_\phi}$, $I_1^* = \frac{\mu(\mu + \phi + \theta)}{\beta(\mu + \theta)}(R_\phi - 1)$ dan

$$R_1^* = \frac{\gamma(\mu + \phi + \theta)}{\beta(\mu + \theta)}(R_\phi - 1).$$

Dengan melinearisasi model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin efektif (sistem (12)) diperoleh matriks Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \phi) & \theta & -\beta S & 0 \\ \phi & -(\mu + \theta) & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & \beta S - (\mu + \gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan bebas-penyakit $E_0^* = (S_0^*, V_0^*, 0, 0)$ adalah

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} -(\mu + \phi) & \theta & -(\mu + \gamma + \alpha)R_\phi & 0 \\ \phi & -(\mu + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu + \gamma + \alpha)(R_\phi - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} \quad (17)$$

yang mempunyai persamaan karakteristik

$$-(\mu + \lambda)^2(\mu + \phi + \theta + \lambda)[(\mu + \gamma + \alpha)(R_\phi - 1) - \lambda] = 0 \quad (18)$$

Dari persamaan (18) diperoleh nilai-nilai eigen

$$\lambda_{1,2} = -\mu, \lambda_3 = -(\mu + \phi + \theta) \text{ dan } \lambda_4 = (\mu + \gamma + \alpha)(R_\phi - 1). \quad (19)$$

Dari (19), jelas bahwa $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Karena $(\mu + \gamma + \alpha) > 0$ maka $\lambda_4 = (\mu + \gamma + \alpha)(R_\phi - 1)$ bernilai negatif jika $R_\phi < 1$. Dengan demikian titik kesetimbangan bebas-penyakit E_0^* bersifat stabil asimtotik lokal untuk $R_\phi < 1$.

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (S_1^*, V_1^*, I_1^*, R_1^*)$ untuk sistem (12) adalah

$$J(E_2^*) = \begin{bmatrix} -\beta I_2^* - (\mu + \phi) & \theta & -\beta S_2^* & 0 \\ \phi & -(\mu + \theta) & 0 & 0 \\ \beta I_2^* & 0 & \beta S_2^* - (\mu + \gamma + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (20)$$

dengan persamaan karakteristik

$$-(\mu + \lambda)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0 \quad (21)$$

di mana

$$a_1 = \frac{\mu(\mu + \phi + \theta)(R_\phi - 1)}{\mu + \theta} + 2\mu + \phi + \theta,$$

$$a_2 = \beta(A + \Lambda) - \frac{\beta(A + \Lambda)}{R_\phi} + \mu R_\phi(\mu + \phi + \theta),$$

$$a_3 = \beta(A + \Lambda)(\mu + \theta) - \frac{\beta(A + \Lambda)(\mu + \theta)}{R_\phi}.$$

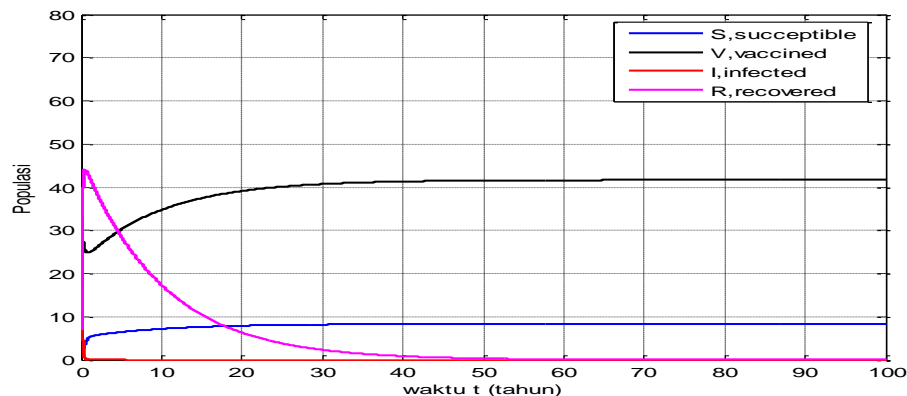
Dari persamaan karakteristik (21), titik kesetimbangan endemik E_2^* bersifat stabil jika semua nilai eigen mempunyai bagian real negatif. Nilai eigen λ_1 jelas negatif, sedangkan nilai-nilai eigen yang lain merupakan akar-akar dari persamaan $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ dapat diselidiki menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Akar-akar

persamaan kubik ini bernilai negatif jika memenuhi syarat $a_1 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Syarat ini dapat terpenuhi jika $R_\phi - 1 > 0$ atau $R_\phi > 1$. Jadi, titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik untuk $R_\phi > 1$.

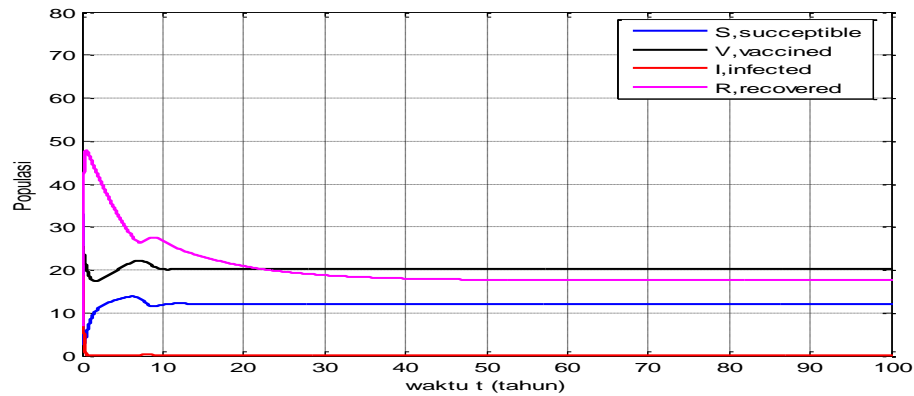
Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dari sistem (12) menggunakan nilai-nilai parameter model dan nilai awal yang sama dengan kasus sebelumnya. Pada simulasi ini akan diberikan dua kasus yang berbeda, yaitu untuk laju vaksin $\phi = 3$ dan $\phi = 1$. Pada kasus $\phi = 3$, angka reproduksi vaksin $R_\phi = 0.69$ dan model mempunyai titik kesetimbangan bebas-penyakit $E_0^* = (S_0^*, V_0^*, I_0^*, R_0^*) = (8.33, 41.67, 0, 0)$. Karena $R_\phi = 0.69 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas-penyakit E_0^* adalah stabil asimtotik lokal.

Gambar 3.3 memperlihatkan solusi grafik sistem (12) dengan laju vaksinasi $\phi = 3$. Seiring berjalannya waktu, subpopulasi S dan V mengalami penurunan dan peningkatan sehingga setelah sekitar 50 tahun menuju ke titik kesetimbangan bebas-penyakit E_0^* dengan jumlah individu yang divaksin adalah 41 individu.

Selanjutnya, jika $\phi = 1$, angka reproduksi vaksin adalah $R_\phi = 1.55$ dan model mempunyai titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (12.11, 20.18, 0.15, 17.55)$. Karena $R_\phi > 1$, maka titik kesetimbangan endemik E_1^* bersifat stabil asimtotik. Perilaku solusi grafik dari sistem (12) untuk $\phi = 1$ ditunjukkan dalam Gambar 3.4. Gambar 3.4 menunjukkan bahwa konvergensi S dan V menuju ke titik kesetimbangan endemik E_1^* lebih cepat (kira-kira setelah 10 tahun) dengan jumlah individu yang divaksin hampir separuh dari kasus $\phi = 3$ (20 individu).



Gambar 3.3 Solusi model SVIR dengan $p = 0, \sigma = 0$ dan $\phi = 3$

Gambar 3.4 Solusi model SVIR dengan $p=0$, $\sigma=0$ dan $\phi=1$

2.3 Model SVIR Tanpa Kematian Karena Penyakit

Model SVIR tanpa kematian karena penyakit diperoleh dari model (1) dengan memisalkan $\alpha=0$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda + (1-p)A - \beta SI - (\mu + \phi)S + \theta V \\ \frac{dV}{dt} &= \phi S - \sigma \beta VI - (\theta + \mu)V \\ \frac{dI}{dt} &= pA + \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R\end{aligned}\tag{22}$$

dengan total populasi $N = S + V + I + R$ sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \Lambda + A - \mu N.\tag{23}$$

Menurut teori sistem otonomus, persamaan (23) dapat dinyatakan dengan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N \equiv K = \frac{A + \Lambda}{\mu}.\tag{24}$$

Dengan demikian, total populasi dapat diasumsikan konstan. Selanjutnya, S dapat diganti dengan $K - V - I - R$, sehingga sistem (22) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= pA + \beta I(K - I - V - R) + \sigma \beta VI - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dV}{dt} &= \phi(K - I - V - R) - \sigma \beta VI - (\theta + \mu)V \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{25}$$

Titik kesetimbangan model dapat diperoleh dengan menyamakan nol untuk semua persamaan (ruas kanan) sistem (25). Apabila ada individu yang terinfeksi ($I \neq 0$),

maka dari kondisi kesetimbangan $\frac{dV}{dt} = 0$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$ diperoleh

$$R^* = \frac{\lambda I^*}{\mu} \text{ dan } V^* = \frac{\phi(A + \Lambda - \mu I^* - \gamma I^*)}{\mu(\sigma\beta I^* + \mu + \theta + \phi)}. \quad (26)$$

Setelah R^* dan V^* disubstitusikan ke dalam persamaan $\frac{dI}{dt} = 0$ dan dilakukan penyederhanaan diperoleh persamaan kubik dalam I^* ,

$$f(I^*) \equiv EI^{*3} + BI^{*2} + CI^* + D = 0 \quad (27)$$

dengan

$$E = \beta^2\sigma(\mu + \gamma),$$

$$B = \beta[-\beta\sigma(A + \Lambda) + (\mu + \gamma)(\theta + \mu + \sigma\phi + \sigma\mu)],$$

$$C = [-pA\mu\sigma\beta - \beta(A + \Lambda)(\theta + \mu + \sigma\phi) + \mu(\mu + \gamma)(\theta + \mu + \phi)],$$

$$D = -pA\mu(\theta + \mu + \phi).$$

Untuk mengkaji kestabilan dari titik kesetimbangan model SVIR, dilakukan linearisasi model (27) dan diperoleh matriks Jacobi pada titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (I^*, V^*, R^*)$, yaitu

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{pA}{I^*} - \beta I^* & -\beta I^* + \sigma\beta I^* & -\beta I^* \\ -\phi - \sigma\beta V^* & -(\mu + \phi + \theta + \sigma\beta I) & -\phi \\ \gamma & 0 & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L & M \\ N & O & P \\ Q & 0 & R \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (28) adalah

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (29)$$

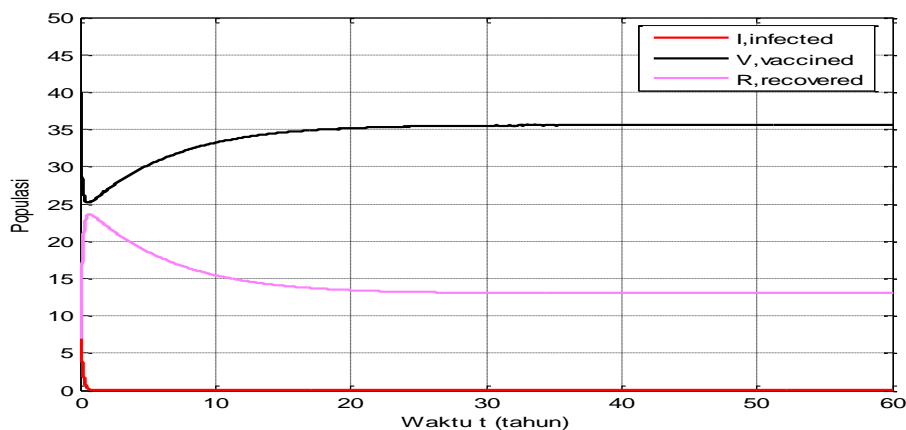
dengan $a_1 = -(K + O + R)$, $a_2 = OR + KO + KR - MQ - LN$ dan $a_3 = LNR + MQO - KOR - LPQ$.

Menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik E^* stabil (global) jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

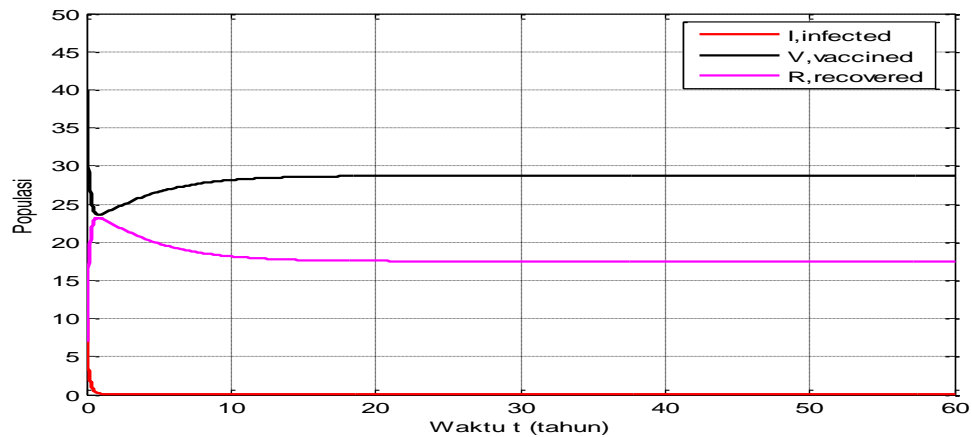
Dengan mensimulasikan nilai-nilai laju vaksinasi $\phi = 17$ dan $\phi = 5$ dan nilai – nilai parameter seperti pada model sebelumnya dan nilai awal $I(0) = 10$, $V(0) = 40$ dan $R(0) = 7$ diperoleh hasil sebagai berikut.

Menggunakan nilai-nilai parameter yang sama seperti kasus sebelumnya dan nilai $\phi = 17$ menghasilkan $R_\phi \approx 0.94$ dan titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (0.11, 35.57, 13.02)$. Pada kasus ini, persamaan karakteristik (29) dari matriks Jacobi pada menghasilkan $a_1 \approx 21.50$, $a_2 \approx 67.93$ dan $a_3 \approx 11.71$. Karena Kriteria Routh-Hurwitz dipenuhi, maka titik kesetimbangan endemik adalah stabil (global). Pada kasus $\phi = 5$ menghasilkan angka reproduksi vaksin $R_\phi \approx 1.18$ dan titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (0.15, 28.72, 17.52)$ dan persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (11) dengan $a_1 \approx 8.615$, $a_2 \approx 17.593$ dan $a_3 \approx 4.353$. Pada kasus ini, kriteria Routh-Hurwitz dipenuhi sehingga titik kesetimbangan endemik juga stabil (global).

Menggunakan nilai-nilai parameter seperti pada kasus sebelumnya dengan nilai awal $I(0) = 10, V(0) = 40$ dan $R(0) = 7$ diperoleh hasil sebagai berikut. Gambar 3.5 dan Gambar 3.6 menunjukkan solusi grafik dari $I(t)$, $V(t)$ dan $N(t)$ untuk kedua kasus ($\phi = 17$ dan $\phi = 5$). Pada awalnya, untuk kasus $\phi = 17$ jumlah subpopulasi sesuai dengan nilai awal yang diberikan, tetapi seiring dengan bertambahnya waktu tampak konvergen menuju ke titik kesetimbangan endemik $E_1^* = (0.11, 35.57, 13.02)$. Demikian juga halnya untuk kasus $\phi = 5$, Gambar 3.6 menunjukkan solusi grafik yang hampir sama dengan kasus $\phi = 17$. Untuk kasus $\phi = 5$, titik kesetimbangan endemiknya adalah $E_1^* = (0.15, 28.72, 17.52)$. Dalam model SVIR tanpa kematian karena penyakit, angka reproduksi vaksin tidak mempengaruhi kestabilan dari titik kesetimbangan endemik.



Gambar 3.5 Solusi grafik SVIR dengan $\alpha = 0$ dan $\phi = 17$



Gambar 3.6 Solusi grafik SVIR dengan $\alpha = 0$ dan $\phi = 5$

Berdasarkan Gambar 3.5 dan Gambar 3.6, pola perilaku solusi grafik subpopulasi individu hampir sama. Semakin tinggi nilai laju vaksinasi, jumlah subpopulasi *invested* dan *recovered* semakin kecil tetapi subpopulasi *vaccined* semakin besar. Hal ini disebabkan oleh adanya kesembuhan individu yang terinfeksi, di lain pihak jumlah subpopulasi yang terinfeksi menurun akibat kematian alami dan adanya individu terinfeksi yang sembuh. Seiring dengan berjalannya waktu, perubahan peningkatan dan penurunan jumlah masing-masing subpopulasi akan terus berlanjut hingga akhirnya konvergen menuju titik kesetimbangan endemik.

3. KESIMPULAN

Pengambilan nilai laju vaksinasi ϕ yang berbeda pada model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin tidak efektif berpengaruh pada nilai titik kesetimbangannya, tetapi titik kesetimbangan endemik akan stabil asimptotik lokal untuk angka reproduksi dasar $R_0 > 1$. Pada model SVIR tanpa imigran terinfeksi dan vaksin efektif, titik kesetimbangan bebas-penyakit adalah stabil asimptotik untuk angka reproduksi vaksin $R_\phi < 1$ dan titik kesetimbangan endemik E_1^* bersifat stabil asimptotik lokal jika $R_\phi > 1$.

Pada model SVIR tanpa kematian karena penyakit dan terdapat imigran terinfeksi ke dalam host mempunyai satu titik kesetimbangan endemik. Seiring dengan berjalannya waktu, perubahan peningkatan dan penurunan jumlah masing-masing subpopulasi akan terus berlanjut hingga akhirnya konvergen menuju titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan endemik bersifat stabil (global) untuk berbagai nilai laju vaksinasi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, New York: Springer Verlag. 2001.
- [2] Anderson, R. and R. May. *Infectious Diseases of Human: Dynamics and Control*, UK: Oxford University Press. 1991.
- [3] Marsudi dan Trisilowati. Kajian Matematis Pengaruh Imigran Terinfeksi dan Vaksinasi dalam Model Epidemik SIS, Laporan Penelitian Fundamental, Jakarta: P2M Dikti. 2009.
- [4] Marsudi. *Stability Analysis for SVIS Epidemic Model*, Seminar Nasional Matematika dan Metode Pembelajaran, FKIP UMM Malang. 2009.
- [5] Shim, E. *An Epidemic Model with Immigration of Infectives and Vaccination*, Retrieved April 10, 2008 from [http:// www.iam.ubc.ca](http://www.iam.ubc.ca)

PREDIKSI BILANGAN BINTIK MATAHARI MAKSIMUM PADA SIKLUS 24 BERDASARKAN MODIFIKASI MODEL XANTHAKIS

John Maspupu

Pusfatsainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjuna No. 133 Bandung 40173,

Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998

john_mspp@yahoo.com

Abstrak. Salah satu model prediksi bilangan bintik matahari(BBM) yang cukup terkenal di kumpulan makalah-makalah fisika matahari (*solar physics*) adalah model Xanthakis. Model ini dimodifikasi untuk memprediksi bilangan bintik matahari maksimum pada siklus ke 24. Dengan demikian terdapat dua tujuan pokok pembahasan dalam makalah ini, yaitu memperkirakan bilamana terjadinya aktivitas matahari maksimum (terkait dengan bulan dan tahun) selama siklus ke 24 ini dan berapa jumlah bintik matahari pada saat tersebut. Oleh karena itu, diharapkan hasil prediksi ataupun aplikasi model ini dapat memberikan tambahan informasi pada proses fisis matahari, sehubungan dengan terjadi peningkatan aktivitasnya yang berdampak pada lingkungan antariksa dan kehidupan di bumi.

Kata kunci : *Prediksi, Bilangan bintik matahari, siklus 24, Xanthakis.*

1. PENDAHULUAN

Saat ini sudah banyak model prediksi yang diterapkan ataupun dikembangkan oleh para peneliti, untuk memperkirakan waktu terjadinya bilangan bintik matahari (BBM) maksimum, maupun jumlah terbesarnya pada setiap siklus. Zhang Guiqing dan Huaning, misalnya telah memprediksi jumlah maksimum bilangan bintik matahari yang terjadi pada awal tahun 2000 dengan $[R_m] = 160$ selama siklus 23 (lihat [7]). Begitu juga Bhatt N.J, et.al. dan Duhau S., masing-masing menaksirkan hal yang sama untuk siklus 24 yaitu, berturut-turut $[R_m] = 111 \pm 21$ dan $[R_m] = 87,5 \pm 23,5$ (lihat [1] dan [2]).

Selain itu informasi dari NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) tentang hasil prediksinya untuk siklus 24 yaitu, $[R_m] = 70$ diperkirakan terjadi sekitar bulan Juni 2013. Sedangkan NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*) juga melaporkan hasil prediksi sementara tentang terjadinya peristiwa tersebut di atas sekitar bulan Mei 2013 dengan $[R_m] = 90$ pada siklus 24 ini.

Oleh karena itu LAPAN dalam hal ini Pusfatsainsa (Pusat Pemanfaatan Sains Antariksa) yang juga merupakan satu-satunya institusi terkait dengan aktivitas matahari di negeri ini,

sudah seharusnya mencoba untuk mengeluarkan prediksinya. Sehubungan dengan itu muncul pemikiran dari peneliti LAPAN (Pusfatsainsa) untuk membahasnya dalam makalah ini yang berjudul :“*Prediksi Bilangan Bintik Matahari Maksimum pada Siklus 24 dengan Menggunakan Modifikasi Model Xanthakis*”. Model ini sudah cukup lama dikenal dan dibangun dengan memperhatikan selang waktu kenaikan bilangan bintik matahari (BBM), sejak dari minimum s/d maksimum (*time of rise*) T_R dalam suatu siklus tertentu.

Namun kriteria model Xanthakis ini dapat digunakan hanya sampai dengan siklus ke 19, sesuai dengan data observasi pada saat itu (lihat [6]). Penggunaan model ini pada siklus-siklus selanjutnya yaitu 20, 21, 22, 23, 24, harus memerlukan sedikit modifikasi untuk menentukan selang waktu T_R dalam setiap siklus yang terkait. Inilah yang mengakibatkan terjadinya perubahan dalam pengelompokan T_R untuk setiap siklus dengan beberapa pilihan.

Selanjutnya yang menjadi masalah adalah bagaimana proses modifikasi T_R ? Dan bagaimana hasil prediksi jumlah bilangan bintik matahari maksimum pada siklus 24 ini? (terkait juga dengan perkiraan bulan dan tahun terjadinya). Dengan demikian, jelas tujuan pembahasan makalah ini adalah untuk memprediksi kondisi aktivitas matahari maksimum pada siklus 24. Sedangkan manfaatnya adalah untuk mendukung proses fisis terkait di matahari serta sebagai tambahan informasi tentang isu tahun 2012.

2. MATERI DAN METODE

Konsep yang digunakan dalam penelitian ini adalah menyangkut prosedur klaster hirarki dengan ukuran jarak yuklidian. Sedangkan untuk penggabungan klaster dapat digunakan jarak minimum sebagai kriterianya. Prosedur klaster hirarki ini yang diterapkan untuk penggolongan data olahan T_R dan T_R^* dari setiap siklus. Dalam hal ini T_R^* adalah selang waktu penurunan bilangan bintik matahari (BBM) sejak dari maksimum s/d minimum berikutnya dalam suatu siklus tertentu. Rincian prosedur klaster hirarki ini dapat dilihat pada [5]. Selain itu, juga digunakan konsep logika samar (*fuzzy logic*) dengan metode penegasannya (*defuzzification*) untuk penentuan T_R dan T_R^* dalam klaster yang terkait. Konsep-konsep aplikasi logika samar ini dapat dibaca di [3] dan [4].

Sedangkan data T_R dan T_R^* yang digunakan dalam penelitian ini dihitung berdasarkan data-data olahan rata-rata bulanan bilangan bintik matahari selama 23 siklus matahari (mulai

dari siklus 1 s/d siklus 23) yang bersumber dari NOAA. Selanjutnya tahapan kegiatan penelitian yang dilakukan ini dapat dijabarkan dalam beberapa langkah berikut :

- i). Kompilasi data rata-rata bulanan bilangan bintang matahari selama 23 siklus (siklus 1 s/d 23) dari NOAA.
- ii). Seleksi tahun-tahun terjadinya bilangan bintang matahari maksimum dan minimum (T_{Hmaks} & T_{Hmin}), juga besarnya bilangan bintang matahari maksimum dan minimum (R_{maks} & R_{min}) untuk setiap siklus.
- iii). Hitung selang waktu kenaikan bilangan bintang matahari, sejak dari T_{Hmin} s/d T_{Hmaks} dan selang waktu penurunan bilangan bintang matahari, sejak dari T_{Hmaks} s/d T_{Hmin} berikutnya (T_R & T_R^*) untuk setiap siklus.
- iv). Gunakan metode analisis kluster untuk pengelompokan T_R dan T_R^* pada tiap siklus matahari (mulai dari siklus 1 s/d siklus 23).

- Dalam hal ini lakukanlah standarisasi data-data T_R & T_R^* dengan formulasi

$$X_{ij}^0 = \frac{X_{ij} - \overline{X}_j}{S_j}, \text{ dalam hal ini } \overline{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} \text{ dan } S_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \overline{X}_j)^2,$$

$$j = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, N=23.$$

- Hitung rata-rata kluster (*cluster centroid*) dengan formulasi $\overline{X}_i^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 X_{ij}^0$,

- Hitung jarak Yuklidian d_y dan jumlah jarak dari data T_R , T_R^* yang sudah distandarisasi untuk setiap siklus dengan formulasi $d_y = (X_{ij}^0 - \overline{X}_i^0)^2$ dan

$$J_i = \sum_{j=1}^2 (X_{ij}^0 - \overline{X}_i^0)^2.$$

- Hitung selisih jumlah jarak antar masing-masing siklus dengan formulasi

$$\delta_{ij} = |J_i - J_j| \text{ dengan } i \neq j \text{ dan } \delta_{ij} = \delta_{ji}, i = 1, \dots, N; j = 1, 2.$$

- Tentukan kriteria jarak minimum untuk penggabungan antar kluster dan proses selanjutnya lihat [5].

- v). Setelah nilai-nilai variabel terbentuk dalam kluster kemudian gunakan informasi fisis tentang ekivalensi pola kurva bilangan bintang matahari tiap 10 siklus.

vi). Lakukan proses penegasan dengan logika samar untuk penentuan T_{Rx} yang

terkait, berdasarkan formulasi $T_{Rx} = \frac{\sum_i \mu_i T_{Ri}}{\sum_i \mu_i}$, untuk jelasnya lihat [3] dan [4].

vii). Perkirakan T_{Hmaks} untuk setiap siklus N, (dalam hal ini $N = 20, \dots, 24$).

viii). Gunakan model Xanthakis untuk menentukan rata-rata bilangan bintik matahari

maksimum yaitu $R_m = k_R + 2l_R(T_R - l_R)^2 + hY + 4l_R \sin(N - \frac{h}{2}) \frac{2\pi}{8}$

dengan ketentuan sebagai berikut:

a). $k_R = h^2$, untuk $N = 7, \dots, 29$. b). $k_R = h(h - 3)$, untuk $N = 4, 5, 6$.

c). $k_R = h(h + 2)$, untuk $N = 0, 1, 2, 3$.

d). $Y = \frac{n}{10 - n} e^{n-9}$, untuk $n = 0, 1, \dots, 9$, yang berkorespondensi dengan $N = -10, 0, \dots, 80$.

Sedangkan $l_R = 6,3$ adalah konstanta yang diestimasi berdasarkan kuadrat terkecil (*least square estimation*) dari data-data olahan observasi. Untuk kasus a) $k_R = 81$, kasus b) $k_R = 54$ dan kasus c) $k_R = 99$. Untuk lebih yakin dan jelas proses ilmiahnya dapat dibaca pada referensi [6].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan makalah ini menggunakan data rata-rata bulanan bintik matahari selama 23 siklus, mulai dari siklus 1 s/d siklus 23 (tahun 1754 s/d tahun 2009) yang diperoleh dari NOAA. Namun dalam tampilan bahasan ini tidak semua data dicantumkan (karena pertimbangan jumlah halaman), sehingga hanya data-data dari tahun 1754 s/d tahun 1792 dan dari tahun 1966 s/d tahun 2009 saja, yang ditabulasikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Rata-rata Bulanan Bilangan Bintik Matahari.

| TAHUN | Jan | Feb | Mar | Apr | Mei | Jun | Jul | Ag | Sep | Okt | Nov | Des |
|-------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1754 | 0.0 | 3.0 | 1.7 | 13.7 | 20.7 | 26.7 | 18.8 | 12.3 | 8.2 | 24.1 | 13.2 | 4.2 |
| 1755 | 10.2 | 11.2 | 6.8 | 6.5 | 0.0 | 0.0 | 8.6 | 3.2 | 17.8 | 23.7 | 6.8 | 20.0 |
| 1756 | 12.5 | 7.1 | 5.4 | 9.4 | 12.5 | 12.9 | 3.6 | 6.4 | 11.8 | 14.3 | 17.0 | 9.4 |

| | | | | | | | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1757 | 14.1 | 21.2 | 26.2 | 30.0 | 38.1 | 12.8 | 25.0 | 51.3 | 39.7 | 32.5 | 64.7 | 33.5 |
| 1758 | 37.6 | 52.0 | 49.0 | 72.3 | 46.4 | 45.0 | 44.0 | 38.7 | 62.5 | 37.7 | 43.0 | 43.0 |
| 1759 | 48.3 | 44.0 | 46.8 | 47.0 | 49.0 | 50.0 | 51.0 | 71.3 | 77.2 | 59.7 | 46.3 | 57.0 |
| 1760 | 67.3 | 59.5 | 74.7 | 58.3 | 72.0 | 48.3 | 66.0 | 75.6 | 61.3 | 50.6 | 59.7 | 61.0 |
| 1761 | 70.0 | 91.0 | 80.7 | 71.7 | 107.2 | 99.3 | 94.1 | 91.1 | 100.7 | 88.7 | 89.7 | 46.0 |
| 1762 | 43.8 | 72.8 | 45.7 | 60.2 | 39.9 | 77.1 | 33.8 | 67.7 | 68.5 | 69.3 | 77.8 | 77.2 |
| 1763 | 56.5 | 31.9 | 34.2 | 32.9 | 32.7 | 35.8 | 54.2 | 26.5 | 68.1 | 46.3 | 60.9 | 61.4 |
| 1764 | 59.7 | 59.7 | 40.2 | 34.4 | 44.3 | 30.0 | 30.0 | 30.0 | 28.2 | 28.0 | 26.0 | 25.7 |
| 1765 | 24.0 | 26.0 | 25.0 | 22.0 | 20.2 | 20.0 | 27.0 | 29.7 | 16.0 | 14.0 | 14.0 | 13.0 |
| 1766 | 12.0 | 11.0 | 36.6 | 6.0 | 26.8 | 3.0 | 3.3 | 4.0 | 4.3 | 5.0 | 5.7 | 19.2 |
| 1767 | 27.4 | 30.0 | 43.0 | 32.9 | 29.8 | 33.3 | 21.9 | 40.8 | 42.7 | 44.1 | 54.7 | 53.3 |
| 1768 | 53.5 | 66.1 | 46.3 | 42.7 | 77.7 | 77.4 | 52.6 | 66.8 | 74.8 | 77.8 | 90.6 | 111.8 |
| 1769 | 73.9 | 64.2 | 64.3 | 96.7 | 73.6 | 94.4 | 118.6 | 120.3 | 148.8 | 158.2 | 148.1 | 112.0 |
| 1770 | 104.0 | 142.5 | 80.1 | 51.0 | 70.1 | 83.3 | 109.8 | 126.3 | 104.4 | 103.6 | 132.2 | 102.3 |
| 1771 | 36.0 | 46.2 | 46.7 | 64.9 | 152.7 | 119.5 | 67.7 | 58.5 | 101.4 | 90.0 | 99.7 | 95.7 |
| 1772 | 100.9 | 90.8 | 31.1 | 92.2 | 38.0 | 57.0 | 77.3 | 56.2 | 50.5 | 78.6 | 61.3 | 64.0 |
| 1773 | 54.6 | 29.0 | 51.2 | 32.9 | 41.1 | 28.4 | 27.7 | 12.7 | 29.3 | 26.3 | 40.9 | 43.2 |
| 1774 | 46.8 | 65.4 | 55.7 | 43.8 | 51.3 | 28.5 | 17.5 | 6.6 | 7.9 | 14.0 | 17.7 | 12.2 |
| 1775 | 4.4 | 0.0 | 11.6 | 11.2 | 3.9 | 12.3 | 1.0 | 7.9 | 3.2 | 5.6 | 15.1 | 7.9 |
| 1776 | 21.7 | 11.6 | 6.3 | 21.8 | 11.2 | 19.0 | 1.0 | 24.2 | 16.0 | 30.0 | 35.0 | 40.0 |
| 1777 | 45.0 | 36.5 | 39.0 | 95.5 | 80.3 | 80.7 | 95.0 | 112.0 | 116.2 | 106.5 | 146.0 | 157.3 |
| 1778 | 177.3 | 109.3 | 134.0 | 145.0 | 238.9 | 171.6 | 153.0 | 140.0 | 171.7 | 156.3 | 150.3 | 105.0 |
| 1779 | 114.7 | 165.7 | 118.0 | 145.0 | 140.0 | 113.7 | 143.0 | 112.0 | 111.0 | 124.0 | 114.0 | 110.0 |
| 1780 | 70.0 | 98.0 | 98.0 | 95.0 | 107.2 | 88.0 | 86.0 | 86.0 | 93.7 | 77.0 | 60.0 | 58.7 |
| 1781 | 98.7 | 74.7 | 53.0 | 68.3 | 104.7 | 97.7 | 73.5 | 66.0 | 51.0 | 27.3 | 67.0 | 35.2 |
| 1782 | 54.0 | 37.5 | 37.0 | 41.0 | 54.3 | 38.0 | 37.0 | 44.0 | 34.0 | 23.2 | 31.5 | 30.0 |
| 1783 | 28.0 | 38.7 | 26.7 | 28.3 | 23.0 | 25.2 | 32.2 | 20.0 | 18.0 | 8.0 | 15.0 | 10.5 |
| 1784 | 13.0 | 8.0 | 11.0 | 10.0 | 6.0 | 9.0 | 6.0 | 10.0 | 10.0 | 8.0 | 17.0 | 14.0 |
| 1785 | 6.5 | 8.0 | 9.0 | 15.7 | 20.7 | 26.3 | 36.3 | 20.0 | 32.0 | 47.2 | 40.2 | 27.3 |
| 1786 | 37.2 | 47.6 | 47.7 | 85.4 | 92.3 | 59.0 | 83.0 | 89.7 | 111.5 | 112.3 | 116.0 | 112.7 |
| 1787 | 134.7 | 106.0 | 87.4 | 127.2 | 134.8 | 99.2 | 128.0 | 137.2 | 157.3 | 157.0 | 141.5 | 174.0 |
| 1788 | 138.0 | 129.2 | 143.3 | 108.5 | 113.0 | 154.2 | 141.5 | 136.0 | 141.0 | 142.0 | 94.7 | 129.5 |
| 1789 | 114.0 | 125.3 | 120.0 | 123.3 | 123.5 | 120.0 | 117.0 | 103.0 | 112.0 | 89.7 | 134.0 | 135.5 |
| 1790 | 103.0 | 127.5 | 96.3 | 94.0 | 93.0 | 91.0 | 69.3 | 87.0 | 77.3 | 84.3 | 82.0 | 74.0 |
| 1791 | 72.7 | 62.0 | 74.0 | 77.2 | 73.7 | 64.2 | 71.0 | 43.0 | 66.5 | 61.7 | 67.0 | 66.0 |
| 1792 | 58.0 | 64.0 | 63.0 | 75.7 | 62.0 | 61.0 | 45.8 | 60.0 | 59.0 | 59.0 | 57.0 | 56.0 |
| 1966 | 28.2 | 24.4 | 25.3 | 48.7 | 45.3 | 47.7 | 56.7 | 51.2 | 50.2 | 57.2 | 57.2 | 70.4 |
| 1967 | 110.9 | 93.6 | 111.8 | 69.5 | 86.5 | 67.3 | 91.5 | 107.2 | 76.8 | 88.2 | 94.3 | 126.4 |
| 1968 | 121.8 | 111.9 | 92.2 | 81.2 | 127.2 | 110.3 | 96.1 | 109.3 | 117.2 | 107.7 | 86.0 | 109.8 |

| | | | | | | | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1969 | 104.4 | 120.5 | 135.8 | 106.8 | 120.0 | 106.0 | 96.8 | 98.0 | 91.3 | 95.7 | 93.5 | 97.9 |
| 1970 | 111.5 | 127.8 | 102.9 | 109.5 | 127.5 | 106.8 | 112.5 | 93.0 | 99.5 | 86.6 | 95.2 | 83.5 |
| 1971 | 91.3 | 79.0 | 60.7 | 71.8 | 57.5 | 49.8 | 81.0 | 61.4 | 50.2 | 51.7 | 63.2 | 82.2 |
| 1972 | 61.5 | 88.4 | 80.1 | 63.2 | 80.5 | 88.0 | 76.5 | 76.8 | 64.0 | 61.3 | 41.6 | 45.3 |
| 1973 | 43.4 | 42.9 | 46.0 | 57.7 | 42.4 | 37.5 | 23.1 | 25.6 | 59.3 | 30.7 | 23.9 | 23.3 |
| 1974 | 27.6 | 26.0 | 21.3 | 40.3 | 39.5 | 36.0 | 55.8 | 33.6 | 40.2 | 47.1 | 25.0 | 20.5 |
| 1975 | 18.9 | 11.5 | 11.5 | 5.1 | 9.0 | 11.4 | 28.2 | 39.7 | 13.9 | 9.1 | 19.4 | 7.8 |
| 1976 | 8.1 | 4.3 | 21.9 | 18.8 | 12.4 | 12.2 | 1.9 | 16.4 | 13.5 | 20.6 | 5.2 | 15.3 |
| 1977 | 16.4 | 23.1 | 8.7 | 12.9 | 18.6 | 38.5 | 21.4 | 30.1 | 44.0 | 43.8 | 29.1 | 43.2 |
| 1978 | 51.9 | 93.6 | 76.5 | 99.7 | 82.7 | 95.1 | 70.4 | 58.1 | 138.2 | 125.1 | 97.9 | 122.7 |
| 1979 | 166.6 | 137.5 | 138.0 | 101.5 | 134.4 | 149.5 | 159.4 | 142.2 | 188.4 | 186.2 | 183.3 | 176.3 |
| 1980 | 159.6 | 155.0 | 126.2 | 164.1 | 179.9 | 157.3 | 136.3 | 135.4 | 155.0 | 164.7 | 147.9 | 174.4 |
| 1981 | 114.0 | 141.3 | 135.5 | 156.4 | 127.5 | 90.9 | 143.8 | 158.7 | 167.3 | 162.4 | 137.5 | 150.1 |
| 1982 | 111.2 | 163.6 | 153.8 | 122.0 | 82.2 | 110.4 | 106.1 | 107.6 | 118.8 | 94.7 | 98.1 | 127.0 |
| 1983 | 84.3 | 51.0 | 66.5 | 80.7 | 99.2 | 91.1 | 82.2 | 71.8 | 50.3 | 55.8 | 33.3 | 33.4 |
| 1984 | 57.0 | 85.4 | 83.5 | 69.7 | 76.4 | 46.1 | 37.4 | 25.5 | 15.7 | 12.0 | 22.8 | 18.7 |
| 1985 | 16.5 | 15.9 | 17.2 | 16.2 | 27.5 | 24.2 | 30.7 | 11.1 | 3.9 | 18.6 | 16.2 | 17.3 |
| 1986 | 2.5 | 23.2 | 15.1 | 18.5 | 13.7 | 1.1 | 18.1 | 7.4 | 3.8 | 35.4 | 15.2 | 6.8 |
| 1987 | 10.4 | 2.4 | 14.7 | 39.6 | 33.0 | 17.4 | 33.0 | 38.7 | 33.9 | 60.6 | 39.9 | 27.1 |
| 1988 | 59.0 | 40.0 | 76.2 | 88.0 | 60.1 | 101.8 | 113.8 | 111.6 | 120.1 | 125.1 | 125.1 | 179.2 |
| 1989 | 161.3 | 165.1 | 131.4 | 130.6 | 138.5 | 196.2 | 126.9 | 168.9 | 176.7 | 159.4 | 173.0 | 165.5 |
| 1990 | 177.3 | 130.5 | 140.3 | 140.3 | 132.2 | 105.4 | 149.4 | 200.3 | 125.2 | 145.5 | 131.4 | 129.7 |
| 1991 | 136.9 | 167.5 | 141.9 | 140.0 | 121.3 | 169.7 | 173.7 | 176.3 | 125.3 | 144.1 | 108.2 | 144.4 |
| 1992 | 150.0 | 161.1 | 106.7 | 99.8 | 73.8 | 65.2 | 85.7 | 64.5 | 63.9 | 88.7 | 91.8 | 82.6 |
| 1993 | 59.3 | 91.0 | 69.8 | 62.2 | 61.3 | 49.8 | 57.9 | 42.2 | 22.4 | 56.4 | 35.6 | 48.9 |
| 1994 | 57.8 | 35.5 | 31.7 | 16.1 | 17.8 | 28.0 | 35.1 | 22.5 | 25.7 | 44.0 | 18.0 | 26.2 |
| 1995 | 24.2 | 29.9 | 31.1 | 14.0 | 14.5 | 15.6 | 14.5 | 14.3 | 11.8 | 21.1 | 9.0 | 10.0 |
| 1996 | 11.5 | 4.4 | 9.2 | 4.8 | 5.5 | 11.8 | 8.2 | 14.4 | 1.6 | 0.9 | 17.9 | 13.3 |
| 1997 | 5.7 | 7.6 | 8.7 | 15.5 | 18.5 | 12.7 | 10.4 | 24.4 | 51.3 | 23.8 | 39.0 | 41.2 |
| 1998 | 31.9 | 40.3 | 54.8 | 53.4 | 56.3 | 70.7 | 66.6 | 92.2 | 92.9 | 55.5 | 74.0 | 81.9 |
| 1999 | 62.0 | 66.3 | 68.8 | 63.7 | 106.4 | 137.7 | 113.5 | 93.7 | 71.5 | 116.7 | 133.2 | 84.6 |
| 2000 | 90.1 | 112.9 | 138.5 | 125.5 | 121.6 | 124.9 | 170.1 | 130.5 | 109.7 | 99.4 | 106.8 | 104.4 |
| 2001 | 95.6 | 80.6 | 113.5 | 107.7 | 96.6 | 134.0 | 81.8 | 106.4 | 150.7 | 125.5 | 106.5 | 132.2 |
| 2002 | 114.1 | 107.4 | 98.4 | 120.7 | 120.8 | 88.3 | 99.6 | 116.4 | 109.6 | 97.5 | 95.5 | 80.8 |
| 2003 | 79.7 | 46.0 | 61.1 | 60.0 | 54.6 | 77.4 | 83.3 | 72.7 | 48.7 | 65.5 | 67.3 | 46.5 |
| 2004 | 37.3 | 45.8 | 49.1 | 39.3 | 41.5 | 43.2 | 51.1 | 40.9 | 27.7 | 48.0 | 43.5 | 17.9 |
| 2005 | 31.3 | 29.2 | 24.5 | 24.2 | 42.7 | 39.3 | 40.1 | 36.4 | 21.9 | 8.7 | 18.0 | 41.1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2006 | 15.3 | 4.9 | 10.6 | 30.2 | 22.3 | 13.9 | 12.2 | 12.9 | 14.4 | 10.5 | 21.4 | 13.6 |
| 2007 | 16.8 | 10.7 | 4.5 | 3.4 | 11.7 | 12.1 | 9.7 | 6.0 | 2.4 | 0.9 | 1.7 | 10.1 |
| 2008 | 3.3 | 2.1 | 9.3 | 2.9 | 3.2 | 3.4 | 0.8 | 0.5 | 1.1 | 1.9 | 4.1 | 0.8 |
| 2009 | 1.3 | 1.4 | 0.7 | 0.8 | 2.9 | 2.9 | 3.2 | 0.0 | 4.3 | 4.6 | 4.2 | 10.6 |
| 2010 | 13.1 | | | | | | | | | | | |

Sumber: NOAA

Dari data rata-rata bulanan selama 23 siklus matahari ini diseleksi tahun-tahun minimum dan maksimum serta R_{Min} , R_{Maks} untuk setiap siklus. Itu berarti hasil-hasil penerapan langkah-langkah i) dan ii) pada bagian metodologi ini, akhirnya dapat ditabulasikan dalam Tabel.2.

Tabel 2. Hasil observasi dan perhitungan R_{Min} , R_{Maks} pada tahun-tahun minimum dan maksimum kurva BBM untuk setiap siklus.

| Siklus ke- N | Tahun Min. | Tahun Maks. | R_{Min} | R_{Maks} | Siklus ke- N | Tahun Min. | Tahun Maks. | R_{Min} | R_{Maks} |
|--------------|------------|-------------|-----------|------------|--------------|------------|-------------|-----------|------------|
| 1 | 1754-1 | 1761-5 | 0,0 | 107,2 | 13 | 1889-11 | 1893-8 | 0,2 | 129,2 |
| 2 | 1766-6 | 1769-10 | 3,0 | 158,2 | 14 | 1901-4 | 1907-2 | 0,0 | 108,2 |
| 3 | 1775-2 | 1778-5 | 0,0 | 238,9 | 15 | 1913-5 | 1917-8 | 0,0 | 154,5 |
| 4 | 1784-5 | 1787-12 | 6,0 | 174,0 | 16 | 1923-8 | 1928-7 | 0,5 | 98,0 |
| 5 | 1798-5 | 1804-10 | 0,0 | 62,3 | 17 | 1933-8 | 1937-7 | 0,2 | 145,1 |
| 6 | 1810-1 | 1817-3 | 0,0 | 96,2 | 18 | 1944-4 | 1947-5 | 0,3 | 201,3 |
| 7 | 1822-1 | 1830-4 | 0,0 | 106,3 | 19 | 1954-1 | 1957-10 | 0,2 | 253,8 |
| 8 | 1833-6 | 1836-12 | 1,0 | 206,2 | 20 | 1964-7 | 1968-5 | 3,1 | 127,2 |
| 9 | 1843-2 | 1847-10 | 3,5 | 180,4 | 21 | 1976-7 | 1980-5 | 1,9 | 179,9 |
| 10 | 1856-5 | 1860-7 | 0,0 | 116,7 | 22 | 1986-6 | 1990-8 | 1,1 | 200,3 |
| 11 | 1867-1 | 1870-5 | 0,0 | 176,0 | 23 | 1996-10 | 2000-7 | 0,9 | 170,1 |
| 12 | 1878-8 | 1883-11 | 0,0 | 84,5 | 24 | 2009-8 | ??? | 0,0 | ??? |

Dari hasil Tabel 2., kemudian dihitung T_R (selang waktu antara min. s/d maks.) dan T_R^* (selang waktu antara maks. s/d min. berikutnya) untuk setiap siklus. Dengan demikian hasil perhitungan menurut langkah iii) pada bagian metodologi ini, juga dapat ditabulasikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Hasil perhitungan T_R (selang waktu antara min. s/d maks.) dan T_R^* (selang waktu antara maks. s/d min. berikutnya) pada kurva BBM untuk setiap siklus.

| Siklus ke- N | T_R | T_R^* | Siklus ke- N | T_R | T_R^* |
|--------------|-------|---------|--------------|-------|---------|
| 1 | 7,3 | 5,1 | 13 | 3,75 | 7,7 |
| 2 | 3,3 | 5,3 | 14 | 5,8 | 6,25 |
| 3 | 3,25 | 6,0 | 15 | 4,25 | 6,0 |
| 4 | 3,5 | 10,4 | 16 | 4,9 | 5,1 |
| 5 | 6,4 | 5,25 | 17 | 3,9 | 6,75 |
| 6 | 7,3 | 4,8 | 18 | 3,1 | 6,7 |
| 7 | 8,25 | 3,2 | 19 | 3,6 | 6,9 |
| 8 | 3,5 | 6,2 | 20 | 3,8 | 8,2 |
| 9 | 4,7 | 8,6 | 21 | 3,8 | 6,1 |
| 10 | 4,2 | 6,5 | 22 | 4,2 | 6,2 |
| 11 | 3,3 | 8,25 | 23 | 3,75 | 9,1 |
| 12 | 5,25 | 6,0 | 24 | | |

Perlu diketahui bahwa variabel-variabel yang akan dianalisis secara pengklasteran lebih dahulu harus distandarisasi menjadi variabel standar seperti pada langkah iv) di bagian metodologi ($\bar{X}^0 = 0$ dan $S_{x^0} = 1$). Hasil dari standarisasi ini ditabulasikan dalam Tabel 4.

Tabel 4. Data-data T_R dan T_R^* dari tabel 3., yang telah distandarisasi menjadi T_{RS}

| N | T_{RS} | T_{RS}^* | N | T_{RS} | T_{RS}^* |
|----|----------|------------|----|----------|------------|
| 1 | 1,86 | - 0,91 | 13 | - 0,56 | 0,72 |
| 2 | - 0,86 | - 0,79 | 14 | 0,84 | - 0,19 |
| 3 | - 0,90 | - 0,35 | 15 | - 0,22 | - 0,35 |
| 4 | - 0,73 | 2,42 | 16 | 0,22 | - 0,91 |
| 5 | 1,24 | - 0,82 | 17 | - 0,46 | 0,13 |
| 6 | 1,86 | - 1,10 | 18 | - 1,0 | 0,09 |
| 7 | 2,50 | - 2,11 | 19 | - 0,66 | 0,22 |
| 8 | - 0,73 | - 0,22 | 20 | - 0,52 | 1,04 |
| 9 | 0,09 | 1,29 | 21 | - 0,52 | - 0,28 |
| 10 | 0,25 | 0,03 | 22 | 0,25 | - 0,22 |
| 11 | - 0,86 | 1,07 | 23 | - 0,56 | 1,60 |
| 12 | 0,46 | - 0,35 | 24 | | |

dan T_{RS}^* .

Setelah bagian-bagian (*items*) pada langkah iv) ini dilaksanakan, akibatnya dihasilkan 4 (empat) klaster sebagai berikut :

Klaster 1 atau K_1 mencakup $N = 2, 3, 4, 8, 11, 18$, dengan $3 < T_R \leq 3,5$.

Klaster 2 atau K_2 mencakup $N = 9, 10, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23$, dengan $3,5 < T_R \leq 5$.

Klaster 3 atau K_3 mencakup $N = 5, 12, 14$, dengan $5 < T_R \leq 6,5$.

Klaster 4 atau K_4 mencakup $N = 1, 6, 7$, dengan $6,5 < T_R \leq 8,5$.

Sedangkan untuk T_R^* diperoleh 5 (lima) klaster berikut :

Klaster 1 atau K_1^* mencakup $N = 6, 7$, dengan $3 < T_R^* \leq 5$.

Klaster 2 atau K_2^* mencakup $N = 1, 2, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 21, 22$, dengan $5 < T_R^* \leq 6,5$.

Klaster 3 atau K_3^* mencakup $N = 17, 18, 19$, dengan $6,5 < T_R^* \leq 7,5$.

Klaster 4 atau K_4^* mencakup $N = 11, 13, 20$, dengan $7,5 < T_R^* \leq 8,5$.

Klaster 5 atau K_5^* mencakup $N = 4, 9, 23$, dengan $T_R^* > 8,5$.

Selanjutnya dengan menerapkan ekivalensi pola dari langkah v) dan setelah langkah vi) pada bagian metodologi dilaksanakan, ini akan menghasilkan dua kemungkinan (*alternative*) penentuan T_R . Dengan demikian nilai-nilai prediksi T_R dari dua alternatif ini, untuk beberapa siklus tertentu (yaitu $N = 20, 21, 22, 23, 24$) dapat dilihat dalam Tabel 5.

Tabel 5. Hasil prediksi T_R dari dua alternatif proses penegasan untuk $N = 20, \dots, 24$.

| Alternatif I | | | Alternatif II | | |
|--------------|----------------------|-----------------------|---------------|----------------------|-----------------------|
| N | $T_{R \text{ Hit.}}$ | $T_{R \text{ Pred.}}$ | N | $T_{R \text{ Hit.}}$ | $T_{R \text{ Pred.}}$ |
| 20 | 3,8 | 4,08 | 20 | 3,8 | 4,2 |
| 21 | 3,8 | 3,29 | 21 | 3,8 | 5,3 |
| 22 | 4,2 | 5,82 | 22 | 4,2 | 4,275 |
| 23 | 3,75 | 4,08 | 23 | 3,75 | 3,5 |
| 24 | ? | 5,82 | 24 | ? | 4,65 |

Nilai-nilai prediksi T_R atau $T_{R \text{ Pred.}}$ dari Tabel 5 di atas ini, selanjutnya digunakan untuk mem-perkirakan tahun terjadinya bilangan bintik matahari maksimum ($T_{H \text{ maks pred.}}$). Hasil penerapan langkah vii) pada bagian metodologi ini dengan kedua alternatif di atas dapat dilihat pada Tabel 6 dan Tabel 7.

Tabel 6. Hasil observasi T_{Hmin} , T_{Hmaks} dan prediksi T_{Hmaks} selama $N = 20, \dots, 24$ untuk alternatif I.

| N | T_{Hmin} obs. | T_{Hmaks} obs. | T_{Hmaks} pred. | % Galat (E_p) |
|----|-----------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 20 | 1964 - 7 | 1968 - 5 | 1968 - 7 | 7,37 |
| 21 | 1976 - 7 | 1980 - 5 | 1979 - 10 | 13,42 |
| 22 | 1986 - 6 | 1990 - 8 | 1992 - 3 | 38,57 |
| 23 | 1996 - 10 | 2000 - 7 | 2000 - 10 | 8,8 |
| 24 | 2009 - 8 | ? | 2015 - 5 | |

Tabel 7 . Hasil observasi T_{Hmin} , T_{Hmaks} dan prediksi T_{Hmaks} selama $N = 20, \dots, 24$ untuk alternatif II.

| N | T_{Hmin} obs. | T_{Hmaks} obs. | T_{Hmaks} pred. | % Galat (E_p) |
|----|-----------------|------------------|---------------------|-------------------|
| 20 | 1964 - 7 | 1968 - 5 | 1968 - 9 | 10,52 |
| 21 | 1976 - 7 | 1980 - 5 | 1981 - 10 | 39,47 |
| 22 | 1986 - 6 | 1990 - 8 | 1990 - 9 | 1,78 |
| 23 | 1996 - 10 | 2000 - 7 | 2000 - 4 | 6,67 |
| 24 | 2009 - 8 | ? | 2014 - 3 - 4 | |

Kemudian untuk prediksi rata-rata R_{maks} selama $N = 20, \dots, 24$, dapat menggunakan model Xanthakis seperti pada langkah viii) di bagian metodologi. Sedangkan hasil perhitungan prediksi tersebut dengan kedua alternatif di atas telah dicantumkan dalam Tabel 8 dan Tabel 9.

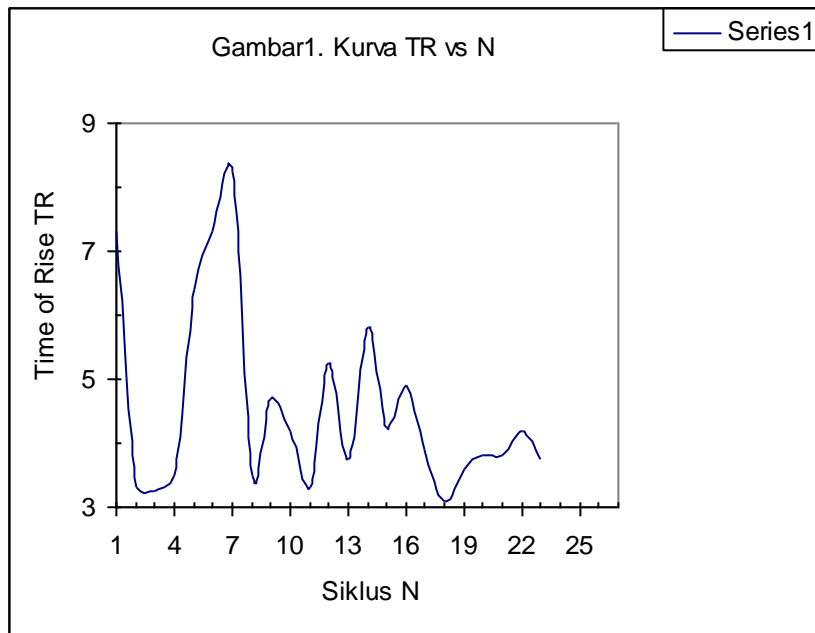
Tabel 8 . Hasil observasi rata-rata R_{maks} dan prediksi rata-rata R_{maks} selama $N = 20, \dots, 24$. untuk alternatif I.

| N | $\overline{R_{maks}}$ obs. | $\overline{R_{maks}}$ pred. | % galat (E_p) |
|----|----------------------------|-----------------------------|-------------------|
| 20 | 127,2 | 144,8 | 13,84 |
| 21 | 179,9 | 197,7 | 9,91 |
| 22 | 200,3 | 86,2 | 56,95 |
| 23 | 170,1 | 145,7 | 14,32 |
| 24 | ? | 86,8 | |

Tabel 9 . Hasil observasi rata-rata R_{maks} dan prediksi rata-rata R_{maks} selama $N = 20, \dots, 24$.
untuk alternatif II.

| N | $\overline{R_{maks}}$ obs. | $\overline{R_{maks}}$ pred. | % galat (E_p) |
|----|----------------------------|-----------------------------|-------------------|
| 20 | 127,2 | 109,7 | 13,74 |
| 21 | 179,9 | 67,1 | 62,72 |
| 22 | 200,3 | 162,4 | 18,95 |
| 23 | 170,1 | 180,9 | 6,33 |
| 24 | ? | 116,4 | |

Dari Tabel 5 terlihat bahwa pada alternatif I untuk siklus 22 selisih antara $T_{R \text{ Pred.}}$ dan $T_{R \text{ Hit.}}$ cukup besar yaitu 1,62 tahun, sehingga galatnya menjadi 38,57 % (lihat Tabel 6). Sedangkan pada alternatif II untuk siklus 21 selisih antara $T_{R \text{ Pred.}}$ dan $T_{R \text{ Hit.}}$ juga cukup besar yaitu 1,5 tahun, sehingga galatnya menjadi 39,47 % (lihat Tabel 7). Dengan demikian ada suatu keanehan (*anomaly*) pada kedua siklus tersebut yaitu siklus 21 dan siklus 22. Oleh karena itu perlu diselidiki mekanisme fisis yang telah terjadi pada siklus-siklus matahari tersebut, dengan melibatkan konsep-konsep teori dinamo. Ini juga suatu masalah yang perlu dipertimbangkan dan menjadi bahan penelitian dikemudian hari. Selanjutnya dari Tabel 6 dan Tabel 8 terlihat bahwa aktivitas bintik matahari terbesar untuk siklus 24, menurut alternatif I diperkirakan terjadi pada bulan *Mei 2015* dengan maksimum rata-rata bilangan bintik matahari sebesar **86,8**. Begitu juga dari Tabel 7 dan Tabel 9 terlihat bahwa aktivitas bintik matahari terbesar untuk siklus 24, menurut alternatif II diperkirakan terjadi pada bulan *Maret s/d April 2014* dengan maksimum rata-rata bilangan bintik matahari sebesar **116,4**. Selain itu juga ditampilkan grafik dari selang waktu kenaikan bilangan bintik matahari T_R terhadap siklus N pada Gambar 1 di bawah ini. Dengan demikian diharapkan dapat memperkirakan kecenderungan pola T_R untuk siklus-siklus selanjutnya.



Dari Gambar 1 di atas, muncul permasalahan (*open problem*) bagaimana memprediksi T_R untuk siklus 25 ? Inilah yang menjadi bahan pemikiran untuk penelitian selanjutnya, sehingga dapat memprediksi T_{Hmaks} dan $\overline{R_{maks}}$ pada siklus berikutnya.

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan makalah ini, terdapat dua alternatif penentuan selang waktu kenaikan bilangan bintik matahari, sejak dari minimum s/d maksimum (*time of rise*) T_R . Oleh karena itu, juga akan mengakibatkan dua alternatif hasil prediksi T_{Hmaks} untuk setiap siklus matahari. Khusus untuk siklus 24 dapat dikatakan bahwa dengan alternatif I, ternyata aktivitas bintik matahari terbesar diperkirakan terjadi pada bulan **Mei 2015**. Sebaliknya dengan alternatif II, ternyata aktivitas bintik matahari terbesar diperkirakan terjadi pada bulan **Maret s/d April 2014**. Untuk kedua alternatif ini masing-masing mempunyai galat (*error*) yang bervariasi untuk setiap siklus (lihat Tabel 6 dan Tabel 7). Sedangkan maksimum rata-rata bilangan bintik matahari selama siklus 24 menurut alternatif I dan alternatif II, berturut-turut diperkirakan sebesar **86,8** dan **116,4** dengan galat (*error*) yang bervariasi untuk setiap siklus (lihat Tabel 8 dan Tabel 9).

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Secara khusus saya ucapkan terima kasih kepada rekan-rekan peneliti di bidang kepakaran Fisika Matahari (*solar physics*) yaitu saudara Bambang Setiahadi, MSc. DSc. dan saudara Bachtiar Anwar, MSc. DSc. yang telah memberikan banyak sumbangan pemikiran didalam diskusi-diskusi tentang pengertian fisis di matahari maupun informasi data-data bilangan bintik matahari.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bhatt N. J., et.al. , Predicting Maximum Sunspot Number in Solar cycle 24, *J. Astrophys. Astr. No.30*, pp.71 – 77. 2009.
- [2] Duhau S., An Early Prediction of Maximum Sunspot Number in Solar cycle 24, *J. Solar Physic 213*, pp. 203 – 212. 2003.
- [3] Klir G.J., and Folger T.A , *Fuzzy sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall of India, New Delhi. 1998.
- [4] Maspupu J., Peran Matematika Samar sebagai Kelengkapan Prediksi Gangguan AktivitasGeomagnet, *Prosiding Seminar Nasional Matematika, FMIPA-UNPAR, Bandung, Vol.4*, hal.MT86 -90. 2009.
- [5] Maspupu J., Aplikasi Analisis Klaster pada Data Simulasi Indeks Geomagnet lokal, *Prosiding Seminar Nasional Statistika ke - 9, FMIPA – ITS, Surabaya*, hal. 0331-03312. 2009.
- [6] Xanthakis J., The Different Indices of Solar Activity and the Time of Rise, *Proceeding of NATO Advanced Study Institute on Solar Physics*, Athens, Greece, pp. 157 -227. 1965.
- [7] Zhang Guiqing and Wang Huaning, Prediction of Maximum Sunspot Number in Solar cycle 23 , *J. Solar Physics 188*, pp. 397 – 400 . 1999.

PROFIL SEDIMENTASI PADA SUNGAI MODEL SHAZY SHABAYEK

¹Basuki Widodo, ²Miftahus Saidin
Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
email: mifta_mathits@yahoo.co.id

ABSTRACT. One model of good enough river model has been developed by Shazy Shabayek, et al (2002). In this model, Shazy Shabayek domain divides the river domain into two parts of the control volume. The main river (main stream) is expressed as a control volume 1, while the tributary (lateral stream) is expressed as a control volume 2. Phenomenon that occurs model in this river model is the inclusion of the flow of the river from lateral stream to main stream. In this final model, sedimentation model on rivers Shabayek Shazy model is built using Finite Volume Method and solved using Meshless Local Petrov-Galerkin. From the simulation, with initial velocity of lateral flow $v_l = 0.02$, After time $T = 5$, the flow velocity was down to around 0.143 and the height of the sediment up until about 2.25×10^{-3} . Furthermore, with the initial velocity of lateral flow $v_l = 0.25$, After a time $T = 5$, the flow velocity increased to around 0.0691 and the height of sediment down to about 0.0026. Tributary angle changes from 30^0 to 60^0 give effect to the height of the sediment, which is about 5×10^{-5} and its influence on the flow velocity, which is about 3.2×10^{-3} . Thus, large or small lateral flow velocity have a major impact on river depth, flow velocity and height of sedimentation in the main river. Tributary angle changes from 30^0 to 60^0 gives a very small effect on the river depth, flow velocity, and height of sedimentation.

Keywords : river model Shazy Shabayek, sedimentation, Meshless Local Petrov-Galerkin, Finite Volume Method

1. PENDAHULUAN

Sungai memiliki peranan penting bagi kehidupan manusia. Kenyataan ini dapat dilihat dari pemanfaatan sungai yang makin lama makin kompleks, mulai dari sarana transportasi, sumber air baku, sumber tenaga listrik dan sebagainya. Air yang mengalir di dalam sungai akan mengakibatkan proses penggerusan tanah didasarnya. Proses terjadinya sedimentasi pada dasar sungai model Shazy Shabayek dapat dimodelkan dan disimulasikan secara matematis sehingga proses perubahan morfologi sungai akibat adanya sedimentasi dan penggerusan tersebut dapat diketahui. Pemodelan tersebut dapat dijadikan sebagai bahan pertimbangan dalam pengambilan suatu kebijakan, sehingga dampak yang akan ditimbulkan akibat adanya sedimentasi dan penggerusan tersebut dapat dicegah sedini mungkin atau dikurangi.

Model sedimentasi ini dibangun dengan menggunakan pendekatan metode volume hingga dan diselesaikan dengan metode *Meshless Local* Petrov-Galerkin (MLPG). Metode MLPG ini relatif baru, dan masih terus dikembangkan pada permasalahan dinamika fluida. Salah satu keunggulan dari metode ini adalah dalam proses diskritisasi daerah penyelesaian (domain). Pada metode-metode numerik yang telah ada, untuk melakukan interpolasi ataupun penghitungan integral, dibutuhkan *mesh* (pias) pada domain yang akan diselesaikan. Sehingga untuk domain yang bentuknya kompleks, diskontinu atau mempunyai *boundary* (batas domain) yang bergerak merupakan permasalahan yang sulit diselesaikan. Tujuan utama dari metode ini adalah untuk menghilangkan *grid* atau untuk mengurangi kesulitan dalam membuat *grid* dengan menggunakan titik sebagai penggantinya (Atlury dan Lin, 2001). Metode ini sangat fleksibel, akurat dan tidak menggunakan *grid* sama sekali dalam penerapannya, baik untuk tujuan interpolasi ataupun untuk tujuan perhitungan integral.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Sedimentasi

Sedimentasi terjadi karena adanya partikel-partikel padat yang ikut terbawa oleh aliran air. Proses sedimentasi pada aliran sungai merupakan proses yang alami. Namun karena berbagai faktor, sedimentasi menimbulkan berbagai masalah dan dapat menimbulkan dampak yang berbahaya bagi lingkungan sekitar.

Zou Liu (2001) mengusulkan tiga macam transportasi sedimen, yaitu *wash load*, *bed load*, dan *suspended load*. *Wash load* adalah partikel atau sedimen yang terbawa oleh air, akan tetapi partikel ini tidak berasal dari ataupun mengendap ke dasar aliran sehingga perilaku atau komposisi dari jenis angkutan ini tidak dapat diprediksi. Oleh karena itu, Ottovanger (2005), Yang (1996) dan beberapa peneliti lain hanya membagi jenis transportasi sedimen ini menjadi dua jenis, yaitu *bed load* dan *suspended load*. *Bed load* adalah butiran sedimen yang bergerak atau berpindah dengan cara menggelinding, meluncur atau melompat. Ada beberapa macam rumus yang dapat digunakan untuk menghitung banyaknya sedimen jenis *bedload* ini. Salah satu rumus yang populer adalah rumus Meyer-Peter & Muller (Yang, 1996). Rumus ini antara lain diterapkan oleh Liu (2001).

$$q_b = C_m [(s - 1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta_b - \theta_c)^{1.5}$$

dengan : s : rasio massa jenis sedimen dengan massa jenis air

$$\theta_b = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho)gd_{50}}$$

q_b : banyaknya sedimen *bed load*
 τ_b : tegangan geser
 $C_m = 8.0$; $\mu = 1.0$; $\theta_c = 0.047$
 d_{50} : rata-rata diameter sedimen
 ρ : massa jenis air
 ρ_s : massa jenis sedimen
 u : kecepatan sungai utama

$$\tau_b = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{0.06}{\left(\log \left(\frac{12h}{2.5d_{50}} \right) \right)^2} \right) u^2$$

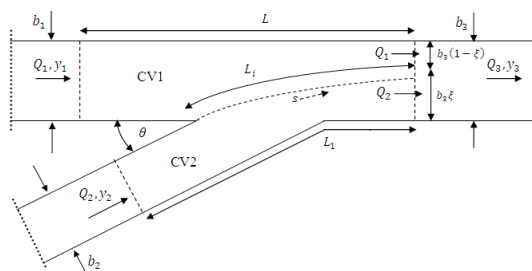
Suspended load adalah transportasi sedimen dengan cara melayang di dalam air. Transportasi sedimen jenis ini biasanya terjadi pada aliran turbulen (Yang, 1996). Perubahan dasar sungai ini dapat dihitung dengan menggunakan persamaan kekekalan massa untuk transportasi sedimen.

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1 - p)} \left(\frac{\partial q_b}{\partial x} + \frac{\partial q_b}{\partial v} \right)$$

dengan : z_b : ketinggian sedimen
 p : porositas

2.2. Model Sungai Shazy Shabayek

Fenomena yang terjadi pada model sungai Shazy Shabayek adalah masuknya aliran dari anak sungai ke sungai utama seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1. Beberapa karakteristik dari sungai utama akan mengalami perubahan dengan masuknya aliran anak sungai. Perubahan tersebut antara lain adalah perubahan massa, kecepatan, kedalaman, arah dan debit aliran, serta perubahan-perubahan lainnya.



Gambar 1. Aliran Sungai Model ShazyShabayek

Gaya hidrostatis dinotasikan (P), komponen hilir berat air (W) dan gaya geser (S) pada pertemuan sungai menurut Shazy Shabayek dapat dihitung dengan menggunakan

$$P = \frac{1}{2}\gamma h^2$$

dengan :
 γ : berat jenis air ; h : kedalaman sungai utama
 $W = \gamma A L_i S_x$ b : lebar sungai ; v : kecepatan aliran pada anak sungai
 $S = C_f \frac{\rho(u^2 - v^2)}{2} h L_i$ C_f : kofisien gesek A : luas volume kendali
 L_i : panjang domain kendali pertemuan sungai
 S_x : kemiringan sungai.

2.3. Metode Volume Hingga

Banyak permasalahan di bidang mekanika fluida yang harus dianalisis dengan mengamati suatu daerah berhingga (volume hingga) dari satu domain yang besar. Dasar-dasar yang digunakan oleh metode ini untuk dapat diterapkan adalah hukum-hukum dasar fisika, yaitu hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum dan hukum pertama dan kedua termodinamika (Munson, 2003). Hukum kekekalan massa untuk suatu volume kendali dapat dinyatakan dengan persamaan :

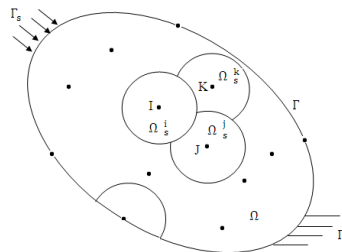
$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_{\text{faces}} \rho u A = 0$$

Sedangkan hukum kekekalan momentum dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$\frac{d}{dt}(\rho V u) + \sum_{\text{faces}} \rho u A u = Force$$

2.4. Metode Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

Tujuan utama dari metode *meshless* ini adalah menghindari pias (*mesh/grid*). Metode ini tidak menggunakan *mesh* baik dalam melakukan interpolasi fungsi *trial* dan *test*, maupun dalam melakukan penghitungan integral. Penjelasan dari subdomain MLPG dapat dilihat pada Gambar 2 berikut ini :



Gambar 2. Local Subdomain Ω_s dari domain Ω

Perlu diketahui bahwa bentuk subdomain pada *local weak* ini tidak harus sama bentuk maupun ukurannya, sehingga bentuk subdomain yang digunakan dapat dipilih yang sederhana dengan catatan bahwa gabungan dari subdomain ini dapat mengcover keseluruhan domain. Misalkan sebuah fungsi taksiran $u(x)$ pada domain Ω dengan titik-titik sebaran $\{x_i\}$, $i=1, 2, 3, \dots, n$, penaksir *Moving Least Square* (MLS) $u^h(x)$ dari $u(x)$, $\forall x \in \Omega$ didefinisikan sebagai berikut :

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}), \forall x \in \Omega$$

dengan $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x)]$ adalah basis monomial lengkap orde m . Sebagai contoh $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ untuk 2 dimensi, bentuk linier :

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y], m=3$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ adalah vektor yang memuat koefisien- koefisien fungsi $a_j(x)$, $j=1,2,3, \dots ,m$ (Sosrodarsono dan Tominaga, 1984).

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}$$

dengan \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah matriks yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{P}^T\mathbf{W}\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i)p^T(x_i) \quad \text{dan} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T\mathbf{W} \\ &= [w_1(x)p(x_1), \dots, w_n(x)p(x_n)] \end{aligned}$$

kemudian $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ disubstitusikan ke dalam $u^h(x)$ sehingga di peroleh :

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} = \Phi^T(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \hat{u}_i$$

$$u^h(x) \equiv u_i = \hat{u}, \quad x \in \Omega$$

dengan $\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})$ adalah fungsi *nodal* dari x .

Fungsi bobot w yang digunakan pada penelitian ini adalah fungsi bobot *spline*, yaitu :

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases}$$

dengan d_i adalah jarak antara x dan x_i dan r_i adalah ukuran dari *support* untuk fungsi bobot w_i .

Kemudian dari aproksimasi MLS dapat dibentuk menjadi sistem persamaan linier berikut :

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}}' + \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan simulasi dengan beberapa inputan yang berbeda.

Governing equation untuk aliran sungai model Shazy Shabayek adalah sebagai berikut :

Kekekalan massa :

$$\text{Sungai Utama} \quad : \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$

$$\text{Pertemuan Sungai} \quad : \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = Q$$

Kekekalan momentum :

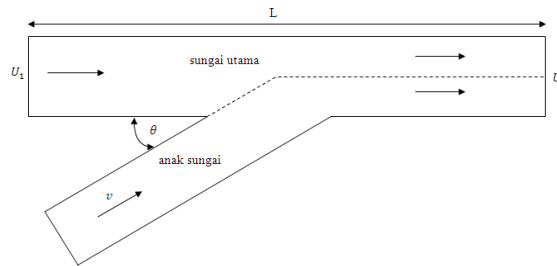
Sungai Utama :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + ghS_x$$

Pertemuan Sungai :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} + gS_x(h + L_i) - hC_f \frac{(u^2 - v^2)}{2A} L_i + \dot{v}Q \cos\theta$$

Sedangkan *boundary condition* (Γ) diasumsikan seperti pada gambar berikut :



Gambar 3. *Boundary condition* sungai model Shazy Shabayek

Kekekalan massa sedimen

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \left(\frac{\partial q_b}{\partial x} + \frac{\partial q_b}{\partial y} \right) = 0$$

Transportasi sedimen

$$q_b = C_m [(s - 1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta - \theta_c)^{1.5}$$

3.1. Penerapan Metode MLPG

Untuk menerapkan MLPG, selanjutnya *governing equation* sungai utama disusun dalam matriks sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ hu \\ z_b \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_b}{(1-p)} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_b}{(1-p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

misalkan : $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ z_b \end{bmatrix}$, $F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_b}{(1-p)} \end{bmatrix}$, $H(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_b}{(1-p)} \end{bmatrix}$, dan $G = \begin{bmatrix} Q \\ ghS_x \\ 0 \end{bmatrix}$

Sehingga sistem Persamaan diatas dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial H(U)}{\partial y} = G$$

Dengan cara yang sama untuk *governing equation* pada pertemuan sungai, dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial H(U)}{\partial y} = G_t$$

$$\text{dengan : } G_l = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_x(h + L_i) - hC_f \frac{(u^2 - v^2)}{2A} L_i + vQ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai U didekati dengan pendekatan *Moving Least Square* (MLS) sebagai berikut :

$$U^h(x, y, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j(t) \quad \text{dan} \quad \phi_j(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x, y) (A^{-1}(x, y) B(x, y))_{i,j}$$

Turunan terhadap waktu dari fungsi MLS ini adalah :

$$U_t^h(x, y, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j'(t)$$

Dengan mengimplementasikan MLS pada model sedimentasi di atas, maka diperoleh persamaan dalam bentuk matriks yaitu :

$$K \dot{U}'_j + C \dot{U}_j - f = 0$$

3.2. Diskritisasi Terhadap Waktu

Persamaan diatas didiskritisasi terhadap waktu dengan Deret Taylor, sehingga diperoleh :

$$\dot{U}^{(t+\Delta t)} = K^{-1} \left((K - 2\Delta t C) \dot{U}^{(t)} + 2\Delta t f \right)$$

3.3. Simulasi

Kondisi awal yang diberikan terhadap keadaan kedalaman, kecepatan maupun ketinggian sedimen adalah sama pada semua posisi, $h(x, y, t) = \bar{h}$, $u(x, y, t) = \bar{u}$, dan $z_b(x, y, t) = \bar{z}$ dengan \bar{h} , \bar{u} , dan \bar{z}_b adalah konstanta. Berikut ini disajikan beberapa hasil output program dengan menggunakan beberapa inputan :

Simulasi 1

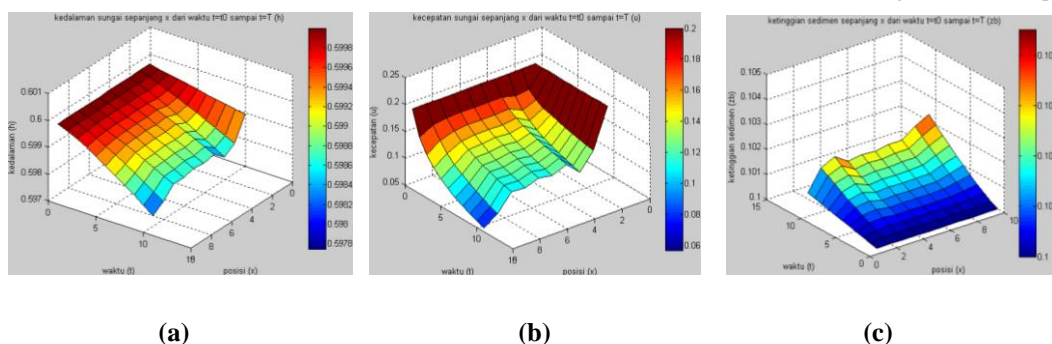
kedalaman sungai (h_i) = 0.6
 kecepatan sungai (u_i) = 0.2
 ketinggian sedimen (z_{bi}) = 0.1
 kecepatan aliran lateral (v_l) = 0.02
 waktu (T) = 5
 delta t (dt) = 0.5
 sudut anak sungai ($teta$) = $\pi/6$

Simulasi 2

kedalaman sungai (h_i) = 0.6
 kecepatan sungai (u_i) = 0.2
 ketinggian sedimen (z_{bi}) = 0.1
 kecepatan aliran lateral (v_l) = 0.25
 waktu (T) = 5
 delta t (dt) = 0.5
 sudut anak sungai ($teta$) = $\pi/6$

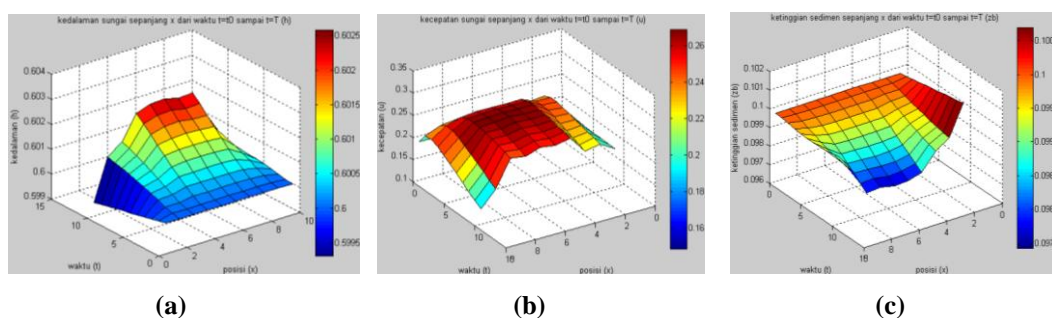
Simulasi 3

kedalaman sungai (h_i) = 0.6
 kecepatan sungai (u_i) = 0.2
 ketinggian sedimen (z_{bi}) = 0.1
 kecepatan aliran lateral (v_l) = 0.02
 waktu (T) = 5
 delta t (dt) = 0.5
 sudut anak sungai ($teta$) = $\pi/3$



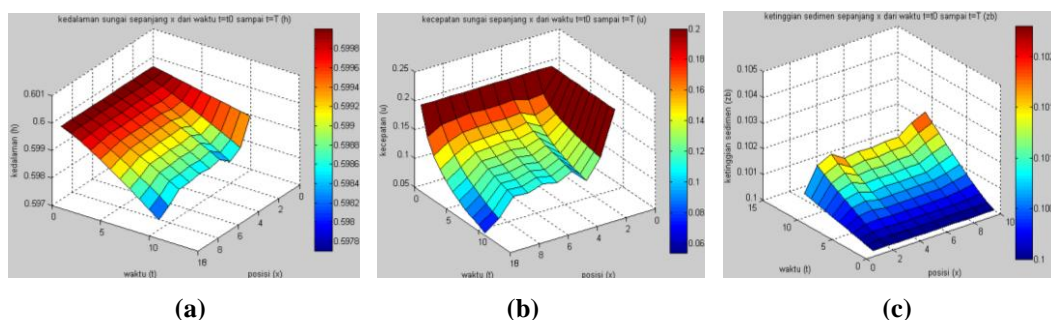
Gambar 4. (a) Plot kedalaman sungai pada simulasi 1
 (b) Plot kecepatan sungai pada simulasi 1
 (c) Plot ketinggian sedimentasi sungai pada simulasi 1

Pada Simulasi 1, diberikan inputan untuk kecepatan awal aliran lateral $v_l = 0.02$, yaitu 10 % dari kecepatan awal sungai utama $u_i = 0.2$. Dari Gambar 4 terlihat bahwa aliran dengan kondisi awal kedalaman $h_i = 0.6$, kecepatan awal $u_i = 0.2$ dan ketinggian awal sedimen $z_{bi} = 0.1$ pada semua posisi (x) dan setelah waktu $T = 5$, kedalaman sungai turun sampai sekitar 2.25×10^{-3} , kecepatan aliran turun sampai sekitar 0.143 dan ketinggian sedimen naik sampai sekitar 0.0019.



Gambar 5. (a) Plot kedalaman sungai pada simulasi 2
 (b) Plot kecepatan sungai pada simulasi 2
 (c) Plot ketinggian sedimentasi sungai pada simulasi 2

Untuk Simulasi 2, kecepatan awal aliran lateral pada Simulasi 1 diubah dari $v_l = 0.02$ menjadi $v_l = 0.25$, sehingga $v_l > u_i$. Sedangkan untuk inputan yang lainnya tetap. Pada Gambar 2 terlihat bahwa setelah waktu $T = 5$, kedalaman sungai meningkat sampai sekitar 0.0026, kecepatan aliran pada awalnya naik sekitar 0.0691, akan tetapi setelah beberapa waktu kecepatan aliran menjadi turun sekitar 0.0514. Sedangkan ketinggian sedimen turun sampai sekitar 0.0026.



Gambar 6. (a) Plot kedalaman sungai pada simulasi 3
 (b) Plot kecepatan sungai pada simulasi 3
 (c) Plot ketinggian sedimentasi sungai pada simulasi 3

Untuk Simulasi 3, inputan sudut anak sungai (θ) pada simulasi 1 diubah dari $\theta = 30^\circ$ menjadi $\theta = 60^\circ$, sedangkan untuk inputan yang lain tetap. Dari Gambar 6 terlihat bahwa setelah waktu $T = 5$, kedalaman sungai turun sampai sekitar 0.0023, kecepatan aliran turun sampai sekitar 0.1462. Sedangkan ketinggian sedimen meningkat sampai sekitar 0.0023.

Dari simulasi 1 dan simulasi 3, terlihat bahwa perubahan sudut anak sungai mempunyai pengaruh yang sangat kecil pada kedalaman dan ketinggian sedimen, yaitu sekitar 5×10^{-5} . Sedangkan pengaruhnya terhadap kecepatan sekitar 3.2×10^{-3} .

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dan simulasi diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Kedalaman sungai, kecepatan aliran sungai dan ketinggian sedimentasi pada sungai model Shazy Shabayek sangat dipengaruhi oleh besar kecilnya kecepatan awal aliran lateral yang masuk ke sungai utama. Dapat dilihat pada simulasi 1 dan 2. Pada simulasi 1 kecepatan awal aliran lateral $v_l = 0.02$, yaitu 10% lebih kecil dari kecepatan awal aliran sungai utama u_i . Setelah waktu $T = 5$, kedalaman sungai turun sampai sekitar 2.25×10^{-3} , kecepatan aliran juga turun sampai sekitar 0.143, dan ketinggian sedimen naik sampai sekitar 2.25×10^{-3} . Sedangkan pada Simulasi 2, kecepatan awal aliran lateral $v_l = 0.25$, lebih besar dari kecepatan awal aliran sungai utama $u_i = 0.2$. Setelah waktu $T = 5$, kedalaman sungai meningkat sampai sekitar 0.0026, kecepatan aliran pada awalnya naik sampai sekitar 0.0691, kemudian turun sampai sekitar 0.0514, dan ketinggian sedimen turun sampai sekitar 0.0026. Jadi, Jika kecepatan awal aliran anak sungai besar, melebihi kecepatan awal aliran sungai utama maka akan banyak sedimen yang terangkut, sehingga ketinggian sedimen akan turun. Sedangkan jika kecepatan awal aliran anak sungai jauh lebih kecil dari kecepatan awal aliran sungai utama maka akan banyak sedimen yang mengendap tetapi sedikit sedimen yang terangkut, sehingga ketinggian sedimen mengalami peningkatan.

2. Perubahan sudut anak sungai terhadap sungai utama dari 30^0 menjadi 60^0 memberikan pengaruh yang sangat kecil pada kedalaman sungai, kecepatan aliran maupun ketinggian sedimen. Hal ini dapat dilihat dapat pada simulasi 1 dan Simulasi 3.

Beberapa saran yang disampaikan penulis untuk penelitian lanjut mengenai sedimentasi sungai adalah sebagai berikut :

1. Adanya penelitian lebih lanjut mengenai sedimentasi sungai untuk model aliran yang tidak seragam.
2. Dikembangkan penelitian untuk jenis sedimen *wash load* dan *suspended load*.
3. Dikembangkan penelitian sedimentasi untuk morfologi sungai yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Atlury dan Lin. *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equation*. 2000. CMES vol.2.no.2, pp.117-142.
- [2] Atlury dan Shen. *The Meshless Lokal Petrov-Galerkin Method*. 2002. CMES vol.3.no.1,pp.11-51.
- [3] Munson. *Mekanika Fluida*, Jakarta : Erlangga. 2003.
- [4] Ottovanger, W. *Discontinuous Finite Element Modeling of River Hydraulics and Morphology with Application to the Parana River*, Master tesis, University of Twente : Departement of Applied Mathematics. 2005.
- [5] Shabayek, S., *dkk. Dynamic Model for Sub Critical Combining Flows in Channel Junction*, *Journal of Hydraulic Engineering*, 2002. ASCE, pp.821-828
- [6] Sosrodarsono dan Tominaga. *Perbaikan dan Pengaturan Sungai*, Jakarta : Pradnya Paramita. 1984.
- [7] Yang, C.T. *Sediment transport, Theory and Practice*, New York : Me Graw Hill. 1996.

SOLUSI EFISIEN DALAM MASALAH OPTIMISASI MULTI-TUJUAN DENGAN METODE KENDALA- ε YANG DIPERLUAS

Solikhatun dan Siti Nurazima Firmanti
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
solikhatun@ugm.ac.id.

ABSTRAK. Metode interaktif dan posteriori (generasi) dalam masalah optimisasi multitujuan akan memberikan informasi yang lebih banyak tentang solusi bagi pembuat keputusan. Metode posteriori memberikan informasi tentang keseluruhan konteks dari solusi alternatif sebelum keputusan akhir. Selanjutnya akan dibahas variasi dari metode kendala- ε yang disebut metode kendala- ε yang diperluas. Keuntungan metode ini adalah hanya akan menghasilkan solusi efisien (bukan solusi efisien lemah) dan mencegah iterasi ganda yangmana ini dapat mengakibatkan keluar lebih awal dari perulangan yang relevan (mengarah pada solusi yang tidak fisibel) dan mempercepat keseluruhan proses. Metode ini akan diaplikasikan pada masalah perencanaan produksi perusahaan.

Kata kunci : optimisasi multitujuan, metode priori, metode kendala- ε yang diperluas, pembuat keputusan, solusi efisien, solusi fisibel.

1. PENDAHULUAN

Dalam pengambilan keputusan sering melibatkan masalah optimisasi untuk memaksimalkan/meminimalkan suatu tujuan dengan kendala tertentu. Dalam aplikasi, masalah optimisasi berkembang dari yang hanya terdiri dari satu tujuan menjadi optimisasi dengan banyak tujuan. Solusi dari masalah optimisasi satu tujuan selalu dapat ditemukan dan merupakan solusi optimal serta semua informasi tentang variabel keputusan relevan (fisibel) dengan masalah real. Pada masalah optimisasi multitujuan tidak ada solusi optimal tunggal yang secara simultan mengoptimalkan semua fungsi tujuan. Dalam kasus ini pembuat keputusan harus mencari solusi yang paling disukai. Dalam masalah optimisasi multitujuan, konsep optimalitas diganti dengan efisiensi atau dikenal dengan konsep optimal Pareto. Solusi efisien yang dimaksud adalah solusi yang tidak terdominasi yaitu solusi yang tidak dapat diperbaiki dalam satu fungsi tujuan tanpa mengabaikan performansinya pada paling sedikit satu bagian.

Menurut Hwang dan Masud, metode untuk menyelesaikan masalah optimisasi multitujuan terbagi menjadi tiga fase berdasarkan pada keterlibatan pembuat keputusan

pada proses pengambilan keputusan yang mengekspresikan preferensinya (kesukaannya). Ketiga metode tersebut adalah metode priori, metode interaktif dan metode generasi (posteriori). Pada metode priori pembuat keputusan menyatakan preferensinya sebelum proses penyelesaian misalnya dengan memberikan perubahan atau pembobot pada fungsi tujuan. Pada fase metode interaktif, terdapat interaksi antara solusi yang dihasilkan dengan pembuat keputusan dan proses ini biasanya konvergen setelah beberapa iterasi ke solusi yang paling disukai. Pada metode posteriori, pembuat keputusan dilibatkan dalam memilih solusi yang paling disukai diantara solusi yang ada setelah solusi efisien diperoleh.

Metode interaktif dan posteriori (generasi) dalam masalah optimisasi multitujuan akan memberikan informasi yang lebih banyak tentang solusi bagi pembuat keputusan. Metode posteriori memberikan informasi tentang keseluruhan konteks dari solusi alternatif sebelum keputusan akhir, namun metode ini kurang populer. Selanjutnya akan dibahas variasi dari metode kendala- ε yang disebut metode kendala- ε yang diperluas yang merupakan metode priori. Keuntungan metode ini adalah hanya akan menghasilkan solusi efisien dan mencegah iterasi ganda yang mana ini dapat mengakibatkan keluar lebih awal dari perulangan yang relevan dan mempercepat keseluruhan proses. Selanjutnya metode ini akan diaplikasikan pada masalah perencanaan produksi perusahaan.

2. PEMBAHASAN

Secara umum masalah optimisasi multitujuan dapat dirumuskan sebagai berikut :

meminimumkan $f(x)$

dengan kendala $x \in S$ (1)

$f_i : R^n \rightarrow R$ fungsi sasaran dan $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^t$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$

variabel keputusan serta $S \neq \Phi$ adalah daerah fisibel. Jika tidak ada konflik diantara fungsi-fungsi sasaran maka solusi optimal lengkap dapat ditemukan tetapi sebagian besar satu sasaran dengan sasaran yang lain saling konflik.

Definisi 1. Masalah (1) dikatakan mempunyai solusi optimal lengkap jika terdapat $x^* \in S$ sehingga

$$f_i(x^*) \leq f_i(x), i = 1, 2, 3, \dots, k \text{ untuk setiap } x^* \in S.$$

Disini x^* disebut solusi optimal lengkap.

Karena diantara fungsi sasaran yang satu dengan yang lain saling konflik dan tidak teratur maka hampir tidak mungkin mencari penyelesaian yang mengoptimalkan

semua sasaran. Hal ini disebabkan tidak adanya urutan yang alami, yang ada urutan sebagian/parsial. Koopmans [1971] mengenalkan konsep optimalitas Pareto sebagai berikut:

Definisi 2. Vektor keputusan $x^* \in S$ disebut optimal Pareto jika tidak ada $x \in S$ yang lain sehingga $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$ dan paling sedikit terdapat satu j yang berlaku $f_j(x) < f_j(x^*)$, $i \neq j$.

Selain konsep optimal Pareto dari konsep urutan parsial juga akan menurunkan konsep solusi yang efisien dan solusi yang dominan.

Definisi 3. Diberikan vektor keputusan $x^*, x \in S$. Vektor x^* dikatakan mendominasi x jika berlaku $x_i \leq x_i^*$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Solusi x^* dikatakan solusi efisien jika x^* bukan solusi yang dominan.

Optimisasi multitujuan biasanya diselesaikan dengan metode berbobot (masalah diubah ke dalam optimisasi satu tujuan). Metode berbobot dikerjakan dengan mengubah beberapa tujuan menjadi satu tujuan dengan memberi bobot pada masing-masing tujuan sehingga tujuan menjadi kombinasi linear dari beberapa tujuan. Sedangkan metode berkendala mengubah beberapa tujuan menjadi satu tujuan dengan menjadikan tujuan utama sebagai tujuan dan menjadikan tujuan-tujuan yang lain menjadi kendala. Dalam metode berbobot, jumlah berbobot dari fungsi sasaran dioptimalkan, sehingga dapat disajikan sebagai berikut:

$$\text{meminimumkan } w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_k f_k(x)$$

$$\text{dengan kendala } x \in S, w_j \in R, \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Sedangkan pada metode berkendala satu tujuan utama dimimimalkan (misal tujuan pertama yang dipilih) sedangkan tujuan yang lain dijadikan kendala, sehingga masalah dapat disajikan sebagai berikut;

$$\text{meminimumkan } f_1(x)$$

$$\text{dengan kendala } f_2(x) \leq \varepsilon_2, f_3(x) \leq \varepsilon_3, \dots, f_k(x) \leq \varepsilon_k, \varepsilon_j \in R, \forall j = 2, 3, \dots, k, (2)$$

$$x \in S.$$

Beberapa keuntungan metode berkendala dibandingkan metode berbobot adalah

- Untuk masalah optimisasi multitujuan linear, metode pembobot diaplikasikan untuk daerah fisibel asli dan menghasilkan solusi ekstrim. Oleh karena itu solusi ekstrim hanya membangun solusi ekstrim yang efisien. Sebaliknya metode berkendala diaplikasikan pada daerah yang bukan fisibel asli dan mudah menghasilkan solusi efisien yang tidak ekstrim. Akibatnya metode berbobot dapat menghabiskan proses dan perulangan yang berarti ada banyak kombinasi bobot yang menghasilkan solusi ekstrim efisien yang sama. Dilain pihak metode ini dapat mengeksploitasi hampir setiap proses yang menghasilkan solusi efisien yang berbeda, maka menghasilkan representasi lebih dari himpunan efisien.
- Metode pembobot tidak dapat menghasilkan solusi efisien yang tidak mendukung pada masalah optimisasi multi-tujuan bulat dan campuran (mix integer).
- Pada metode pembobot, penskalaan fungsi sasaran mempunyai pengaruh kuat pada hasil yang diperoleh.
- Dalam metode berkendala, jumlah dari solusi efisien yang dibangun dapat dikendalikan dengan menyesuaikan jumlah titik di setiap range fungsi sasaran.

Metode berkendala- ε diperluas

Meskipun terdapat beberapa keuntungan dari metode berkendala, namun mempunyai dua hal yang perlu perhatian yaitu range dari fungsi sasaran atas himpunan efisien (khususnya perhitungan nilai nadir) dan jaminan dari efisiensi dari solusi yang diperoleh. Untuk mengaplikasikan metode berkendala- ε diperlukan range dari setiap fungsi sasaran paling sedikit $k-1$ fungsi sasaran yang akan digunakan sebagai kendala. Perhitungan dari range fungsi sasaran atas himpunan efisien tidak trivial. Range ini dapat diperoleh dari nilai maksimum dan nilai minimum individual. Dengan asumsi eksistensi solusi optimum x^{j^o} fungsi sasaran individual, masalah minimasi dengan kendala didefinisikan dengan

$$\min_{x \in S} f_j(x), j = 1, 2, \dots, k.$$

Jadi diperoleh minimum individual

$$z_j^{\min} = z_j(x^{j^o}) = \min_{x \in S} f_j(x).$$

Dengan asumsi eksistensi solusi optimum x^{j^o} fungsi sasaran individual, masalah maksimisasi dengan kendala didefinisikan dengan

$$\max_{x \in S} f_j(x), j = 1, 2, \dots, k.$$

Jadi diperoleh maksimum individual

$$z_j^{\max} = z_j(x^{j_0}) = \max_{x \in S} f_j(x).$$

Hal kedua yang perlu diperhatikan adalah solusi optimal Masalah (2) dijamin dari solusi efisien jika semua kendala dari k-1 fungsi sasaran terbatas. Jika terdapat solusi optimal alternatif maka tidak efisien tetapi ini merupakan solusi efisien lemah. Untuk mengatasi keraguan dikenalkan transformasi dari kendala fungsi sasaran menjadi persamaan-persamaan dengan menambahkan variabel pengetat secara eksplisit. Kemudian jumlahan dari variabel-variabel pengetat ditambahkan dalam fungsi sasaran untuk menekan program agar hanya menghasilkan solusi efisien. Akibatnya masalah menjadi

$$\text{meminimumkan } f_1(x) + \delta(s_2 + s_3 + \dots + s_k) \quad (3)$$

$$\text{dengan kendala } f_2(x) - s_2 = \varepsilon_2, f_3(x) - s_3 = \varepsilon_3, \dots, f_k(x) - s_k = \varepsilon_k, \\ s_j \in \mathbb{R}, j = 2, 3, \dots, k, x \in S, \delta \text{ bilangan kecil dan biasanya antara } 10^{-3} \text{ dan } 10^{-6}.$$

Teorema 4 berikut menjamin bahwa solusi masalah optimisasi (3) dengan metode berkendala- ε mencegah diperoleh generasi dari solusi efisien lemah.

Teorema 4. *Rumusan Masalah (3) dari metode berkendala- ε hanya menghasilkan solusi yang efisien.*

Bukti. Misalkan Masalah (3) mempunyai solusi alternatif dan salah satunya x' mendominasi solusi optimal x yang diperoleh dari Masalah (3). Berarti bahwa vektor $(z_1, \varepsilon_2 + s_2, \varepsilon_3 + s_3, \dots, \varepsilon_k + s_k)$ didominasi oleh $(z_1, \varepsilon_2 + s_2', \varepsilon_3 + s_3', \dots, \varepsilon_k + s_k')$.

Dengan kata lain

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 + s_2 &\leq \varepsilon_2 + s_2' \\ \varepsilon_3 + s_3 &\leq \varepsilon_3 + s_3' \\ &\vdots \\ \varepsilon_k + s_k &\leq \varepsilon_k + s_k'. \end{aligned}$$

Kemudian diambil jumlahannya maka diperoleh

$$\sum_{j=2}^k s_j \leq \sum_{j=2}^k s_j'.$$

Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal bahwa solusi optimal (3) memaksimalkan jumlahan s_j . Oleh karena itu tidak ada solusi x' yang mendominasi solusi yang diperoleh x . Dengan kata lain solusi x yang diperoleh adalah solusi yang efisien. \square

Untuk mencegah sembarang masalah penskalaan direkomendasikan untuk mengganti s_j pada suku kedua fungsi sasaran dengan s_j / r_j dengan r_j adalah range dari fungsi sasaran ke- j . Oleh karena itu masalah optimisasi yang diselesaikan dengan metode berkendala- ε diperluas menjadi

$$\text{meminimumkan } f_1(x) + \mu \left(\frac{s_2}{r_2} + \frac{s_3}{r_3} + \dots + \frac{s_k}{r_k} \right)$$

dengan kendala $f_2(x) - s_2 = \varepsilon_2, f_3(x) - s_3 = \varepsilon_3, \dots, f_k(x) - s_k = \varepsilon_k$,
 $s_j \in \mathbb{R}, j = 2, 3, \dots, k, x \in S$, μ bilangan kecil dan biasanya antara 10^{-3} dan 10^{-6} .

Masalah 5 : Perencanaan Suplai Produksi

Suatu perusahaan mempunyai pabrik yang memproduksi 3 jenis produk yaitu A, B dan C. Untuk memproduksi 1 ton jenis A memerlukan 2 ton material X, 3 ton material Y dan 4 ton material Z. Untuk memproduksi 1 ton jenis B memerlukan 8 ton material X dan 1 ton material Y. Untuk memproduksi 1 ton jenis C memerlukan 4 ton material X, 4 ton material Y dan 2 ton material Z. Perusahaan menjual produk A rata-rata 5 juta/ ton, produk B rata-rata 10 juta / ton dan produk C rata-rata 12 juta/ ton.

Selama proses produksi 1 ton produk A menghasilkan 1 ton polusi, 1 ton produk B menghasilkan 2 ton polusi dan 1 ton produk C menghasilkan 2 ton polusi. Misalkan pabrik hanya mampu menyediakan material X maksimum 100 ton, material Y maksimum 50 dan material Z maksimum 50. Perusahaan ingin memaksimalkan pendapatan total dan meminimumkan polusi yang dihasilkan. Didefinisikan

x_1 = banyaknya produk A yang dihasilkan,

x_2 = banyaknya produk B yang dihasilkan dan

x_3 = banyaknya produk C yang dihasilkan.

Masalah 5 dapat dirumuskan menjadi

memaksimalkan $z_1 = cx$

meminimumkan $z_2 = dx$

dengan kendala $Ax \leq b, x \geq 0$

atau

meminimumkan $z_1 = -cx$

meminimumkan $z_2 = dx$

dengan kendala $Ax \leq b, x \geq 0$

$$\text{dengan } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, c = (5 \ 10 \ 12) \text{ dan } d = (1 \ 2 \ 2).$$

Solusi dari masalah maksimum dan minimum individual dari masing-masing fungsi tujuan z_1 dan z_2 sebagai berikut :

$$z_1^{\min} = -200, z_1^{\max} = 0, z_2^{\min} = 0, z_2^{\max} = 35.71429.$$

Dengan kata lain pendapatan maksimum yang akan diperoleh 200 juta tetapi menghasilkan polusi sebanyak 35.71429. Sedangkan polusi minimum akan menjadi 0 ton tetapi tidak memperoleh pendapatan (tanpa proses produksi). Perusahaan memberikan solusi alternatif terhadap pendapatan dan polusi sebagai berikut :

1. Perusahaan paling tidak memperoleh pendapatan 75% dari pendapatan maksimal 200 juta. Dengan kata lain pendapatan minimum perusahaan sebesar 150 juta ($\varepsilon_1 = -150$), tetapi tentu akan lebih baik jika bisa memperoleh pendapatan semaksimal mungkin (200 juta).
2. Perusahaan tidak ingin menghasilkan polusi lebih dari 30 ton ($\varepsilon_2 = 30$).

Masalah 5 diselesaikan dengan metode berkendala. Misalkan memaksimalkan pendapatan menjadi tujuan utama sedangkan tujuan yang lain dijadikan kendala maka diperoleh

$$z_1^{\min} = -173.33, x_1 = 0, x_2 = 3.3, x_3 = 11.67.$$

Jika Masalah 5 diselesaikan dengan metode berkendala- ε diperluas maka akan diperoleh salah satu solusi untuk

$$v = 2, r_1 = 200$$

akan menghasilkan

$$z_1^{\min} = -188.5714, x_1 = 0, x_2 = 7.1429, x_3 = 10.7143, s_2 = 5.7143.$$

Tabel 1 Nilai Pendapatan terhadap μ

| μ | pendapatan | x_1 | x_2 | x_3 | s_2 | polusi |
|-------|------------|-------|--------|---------|--------|---------|
| 0 | -200 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 0.25 | -198.5714 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 1 | -194.2857 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 2 | -188.5714 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 3 | -182.8571 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 4 | -177.1429 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 4.5 | -174.2857 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 4.6 | -173.7143 | 0 | 7.1429 | 10.7143 | 5.7143 | 35.7144 |
| 4.9 | -173.3333 | 0 | 3.3 | 11.67 | 0 | 29.94 |
| 5 | -173.3333 | 0 | 3.3 | 11.67 | 0 | 29.94 |

Tabel 1 menyatakan hubungan nilai pendapatan terhadap nilai μ yang berbeda-beda. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa pendapatan perusahaan dapat ditingkatkan dengan memperkecil nilai μ . Namun mengakibatkan polusi yang dihasilkan lebih dari 30 ton (tidak diperbolehkan). Jadi antara pendapatan dan polusi saling konflik sehingga diperlukan solusi kompromi yang dapat memenuhi keduanya misalnya dengan memproduksi

$$x_1 = 0, x_2 = 3.3, x_3 = 11.67, s_2 = 0$$

akan menghasilkan pendapatan 173.3333 dan polusi yang dihasilkan 29.94.

Misalkan meminimumkan polusi menjadi tujuan utama sedangkan tujuan yang lain dijadikan kendala maka diperoleh

$$z_2^{\min} = 25, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 12.5.$$

Jika Masalah 5 diselesaikan dengan metode berkendala- ε diperluas diperoleh

$$z_2^{\min} = 25, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 12.5, s_2 = 0.$$

3. KESIMPULAN

Metode metode kendala- ε yang diperluas merupakan metode priori. Keuntungan metode metode kendala- ε yang diperluas ini adalah hanya akan menghasilkan solusi efisien dan mencegah iterasi ganda yangmana ini dapat mengakibatkan keluar lebih awal dari perulangan yang relevan dan mempercepat keseluruhan proses. Metode ini dapat

diaplikasikan pada masalah perencanaan produksi perusahaan. Penelitian ini dapat dikembangkan lagi misal dengan pendekatan konsep fuzzy atau dengan metode interaktif Metode interaktif dan posteriori (generasi) dalam masalah optimisasi multitujuan memberikan informasi yang lebih banyak tentang solusi bagi pembuat keputusan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Collette, Y. dan Siarry, P., 2003, *Multiobjective Optimization*, Springer-Verlag, Berlin Herdelberg, Germany
- [2] Miettinen, K.M., 1998, *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publisers, USA.
- [3] Sakawa, M., 1993, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Hirosima University, Jepang..
- [4] Vasant, P., 2005, *Application of Multiobjective Fuzzy Linear Programming in Supply Production Planning Problem*, Nilai International College, Malaysia.
- [5] Widodo, 2002, *Program Linear Multiobjective Fuzzy Interaktif*, Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

SPEKTRUM NILAI EIGEN MASALAH STURM-LIOUVILLE NONLINEAR

Sutrima
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret, Surakarta
zutrima@yahoo.co.id

Abstrak. Dengan memanfaatkan operator diferensial, masalah Sturm-Liouville nonlinear dapat dilinearisasi ke dalam masalah eigen vektor, $\tilde{A}\tilde{y} = \lambda\tilde{y}$. Pengkajian eksistensi nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville nonlinear ekuivalen dengan masalah eigen dari bentuk hasil linearisasi ini. Pada artikel ini akan dibahas tentang syarat cukup agar bilangan $\alpha = u(0)$ menjadi nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville dengan parameter eigen nonlinear. Lebih lanjut, akan diselidiki dari spektrum nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville nonlinear pada interval $(-\infty, \alpha]$.

Kata kunci: Sturm-Liouville nonlinear, nilai eigen, spektrum, linearisasi

1. PENDAHULUAN

Pada proses penyelesaian masalah gelombang dan konduksi panas dengan teknik pemisahan variabel akan muncul permasalahan syarat batas Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} -(py')' + qy &= \lambda y, & a < x < b \\ y(a) &= y(b) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $y' = dy/dx$, p fungsi positif yang mempunyai turunan kontinu pada $[a, b]$, q fungsi nonnegatif kontinu pada $[a, b]$, dan λ adalah parameter eigen (Haberman, 1987). Persamaan ini juga dapat ditafsirkan sebagai bentuk kestabilan dari pencampuran di dalam proses penemuan kembali minyak dengan menggunakan model Hele-Shaw dari medium seraphomogen (Pasa, 2002). Ide pokok dari masalah (1) adalah menentukan nilai eigen λ yang bersesuaian dengan fungsi eigen y sehingga memenuhi syarat batas tersebut. Beberapa sifat pokok dari nilai eigen dan fungsi eigen dari masalah tersebut telah dibahas oleh Haberman (1987), Folland (1992), dan, Cormani dan Ryham (2002). Penelitian terhadap masalah Sturm-Liouville baik secara analitik maupun numerik berkembang sampai saat ini,

antara lain: Dwyer dan Zettl (1994, 1995), Sutrima (2001), Dewi Retno Sari dan Sutrima (2003), Sutrima (2004), dan Sutrima (2005).

Dalam perkembangannya muncul masalah Sturm-Liouville dengan parameter eigen tipe nonlinear

$$y'' + \left(\lambda + \frac{q}{u - \lambda} \right) y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3)$$

dengan u fungsi yang mempunyai turunan kontinu dan positif pada $[0,1]$. Dalam hal ini parameter eigen λ tidak lagi linear akan tetapi nonlinear. Pada dasarnya tipe masalah ini telah dikenalkan oleh Langer *et al.* (1990), Adamjan *et al.* (1993) dan Adamjan dan Langer (1995).

Masalah mendasar dari masalah Sturm-Liouville (2) sebagaimana masalah (1) adalah menentukan eksistensi dari nilai eigen, yang dalam hal ini bergantung kepada u . Untuk kasus (1) dimana λ bersifat linear tidak terlalu sulit untuk menunjukkan eksistensi nilai eigen dan sifat-sifatnya [Haberman, 1987; Folland, 1992].

Dari asumsi (2) bahwa u adalah fungsi kontinu yang mempunyai turunan positif menyatakan bahwa u adalah fungsi yang naik pada interval $[0,1]$. Akibatnya u mencapai minimum di $x = 0$ dan maksimum di $x = 1$, serta mempunyai invers. Misalkan

$$\alpha := \min_{x \in [0,1]} u(x) = u(0), \quad \beta := \max_{x \in [0,1]} u(x) = u(1)$$

dan

$$x_\lambda := \begin{cases} 0 & \text{untuk } \lambda < \alpha \\ u^{-1}(\lambda) & \text{untuk } \lambda \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{untuk } \lambda > \beta. \end{cases}$$

Dalam Sutrima (2009) telah dikaji eksistensi nilai eigen masalah (2) pada interval $(\alpha, \beta]$.

Dalam artikel ini akan dikaji eksistensi nilai eigen (2) pada interval $(-\infty, \alpha]$.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$ didefinisikan operator

$$L(\lambda)y := y'' + \left(\lambda + \frac{q}{u - \lambda} \right) y$$

pada ruang Hilbert $L^2 = L^2(0,1)$ dengan domain

$$\mathcal{D} := \{y \in L^2 \mid y, y' \text{ kontinu mutlak}, y'' \in L^2, y(0) = y(1) = 0\}.$$

Bilangan $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$ disebut nilai eigen dari L jika terdapat $y_0 \in \mathcal{D}$, $y_0 \neq 0$, sehingga $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Notasi $\sigma_p(L)$ menyatakan himpunan semua nilai eigen dari L , dan

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta] \mid 0 \in \sigma(L(\lambda))\}$$

menyatakan spektrum dari L .

Sebagaimana telah dibahas dalam Sutrima (2009), masalah (2) dan (3) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\tilde{A}\vec{y} = \lambda\vec{y} \quad (4)$$

untuk

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & v \\ v & u \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Ay := -y'', \text{ dan } v(x) := \sqrt{q(x)},$$

dengan domain $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D} \oplus L^2$. Operator \tilde{A} adalah operator linear *self-adjoint* (Sutrima, 2009).

2.1 Nilai Eigen α

Sebagaimana yang telah dibahas dalam Sutrima (2009) bahwa bilangan α berperan penting dalam penyelidikan nilai eigen dari \tilde{A} . Pada bagian ini akan ditentukan syarat fungsi q agar bilangan α menjadi nilai eigen dari operator \tilde{A} .

Teorema 2.1 *Jika $u \in C^1[0,1]$ dan $u'(x) > 0$ pada $[0,1]$, maka terdapat fungsi kontinu positif q sehingga α adalah nilai eigen dari \tilde{A} .*

Bukti: Pertama, ambil $u(x) = x$. Persamaan (2) dengan $\lambda = \alpha = 0$ menjadi

$$y'' + \frac{q}{x}y = 0. \quad (5)$$

Jika q diambil konstan, maka

$$y(x) = \sqrt{x}J_1(2\sqrt{qx}) \quad (6)$$

adalah penyelesaian dari (2), dengan J_1 adalah fungsi Bessel order 1. Syarat batas di $x = 0$ dipenuhi. Agar memenuhi syarat batas $y(1) = 0$, q harus dipilih sehingga $J_1(2\sqrt{q}) = 0$, yang berarti bahwa $q = \frac{c^2}{4}$ dengan c adalah harga nol dari J_1 .

Berikutnya misalkan $u \in C^1[0,1]$ sembarang fungsi dengan $u'(x) > 0$. Terdapat fungsi kontinu $u_1 > 0$ sehingga

$$u(x) - \alpha = xu_1(x).$$

Oleh karena itu,

$$\alpha + \frac{q(x)}{u(x) - \alpha} = \frac{q(x) + \alpha xu_1(x)}{xu_1(x)}.$$

Diambil

$$\frac{q(x) + \alpha xu_1(x)}{u_1(x)} = \frac{c^2}{4}$$

dengan c adalah harga nol dari J_1 . Dengan menyelesaikan untuk q diperoleh

$$q(x) = u_1(x) \left(\frac{c^2}{4} - \alpha x \right), \quad (7)$$

yang mempunyai minimum berubah-ubah tergantung kepada pemilihan c . Dengan pemilihan ini diperoleh persamaan $y'' + \frac{c^2}{4x}y = 0$, dengan (6) adalah penyelesaiannya. Jadi, α adalah nilai eigen dari \tilde{A} .

□

2.2 Nilai Eigen pada Interval $(-\infty, \alpha]$

Pada bagian ini akan didiskusikan spektrum pada interval $(-\infty, \alpha]$. Pertama ditunjukkan bahwa nilai eigen tidak dapat mencapai α dari bawah.

Teorema 2.2 *Operator \tilde{A} mempunyai paling banyak berhingga nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha)$.*

Bukti: Untuk sembarang $x \in (0,1)$, fungsi $\lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda}$ naik terhadap λ pada interval $(-\infty, \alpha]$. Misal $\lambda < \hat{\lambda} < \alpha$ adalah dua nilai eigen dan y, \hat{y} fungsi eigen yang bersesuaian. Seperti pada Teorema 2.1, Teorema Perbandingan menyatakan bahwa \hat{y} mempunyai harga nol pada $[0,1]$ minimal sama dengan harga nol dari y .

Misalkan y_0 adalah penyelesaian dari persamaan diferensial untuk $\lambda = \alpha$ dengan $y_0(0) = 0, y_0'(0) = 1$, mempunyai berhingga banyak harga nol pada $(0,1)$. Teorema Perbandingan menunjukkan bahwa semua fungsi eigen dengan nilai eigen $\lambda < \alpha$ mempunyai harga nol paling banyak sama dengan harga nol dari y_0 . Tetapi hal ini menyatakan bahwa hanya terdapat berhingga banyak nilai eigen yang lebih kecil dari α .

□

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa terdapat nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha)$, apabila q diambil cukup besar.

Teorema 2.3 Untuk u yang diberikan, terdapat bilangan $C \geq 0$, sehingga hubungan $\min_{x \in [0,1]} q(x) > C$ mengakibatkan bahwa \tilde{A} mempunyai paling sedikit satu nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha)$.

Bukti: Dengan $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\tilde{A})$, $\|\vec{y}\| = 1$, berlaku

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}\vec{y}, \vec{y} \rangle &= \langle Ay_1, y_1 \rangle + \langle vy_2, y_1 \rangle + \langle vy_1, y_2 \rangle + \langle uy_2, y_2 \rangle \\ &= \int_0^1 |y_2'|^2 dx + \int_0^1 vy_2 \bar{y}_1 dx + \int_0^1 vy_1 \bar{y}_2 dx + \int_0^1 u|y_2|^2 dx \end{aligned} \quad (8)$$

Jika diambil

$$y_1 := \sin \pi x, \quad y_2 := -\sin \pi x$$

persamaan (8) sama dengan

$$\begin{aligned} \pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx + \int_0^1 (u(x) - 2v(x)) \sin^2 \pi x dx &\leq \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} (u(x) - 2v(x)) \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \min_{x \in [0,1]} v(x). \end{aligned}$$

Jika

$$\min_{x \in [0,1]} v(x) > \frac{\pi^2 + \beta}{2} - \alpha,$$

maka $\langle \tilde{A}\vec{y}, \vec{y} \rangle < \alpha$. Akibatnya $\min \sigma(\tilde{A}) < \alpha$.

□

Teorema berikut memberikan syarat ketiadaan dari nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha]$. Dinotasikan bagian positif dari fungsi f sebagai

$$(f(x))_+ = \begin{cases} f(x) & \text{untuk } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{untuk } f(x) < 0. \end{cases}$$

Teorema 2.4 Jika

$$\int_0^1 \left(\alpha + \frac{q(x)}{u(x) - \alpha} \right)_+ x(1-x) dx < 1 \quad (9)$$

maka \tilde{A} tidak mempunyai nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha]$.

Bukti: (i) Pertama ambil $\lambda < \alpha$. Misalkan A adalah operator seperti pada (4). Operator A^{-1} adalah operator kelas trace positif, yang dapat dituliskan sebagai operator integral dengan kernel

$$K(x, \xi) := \begin{cases} x(1 - \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \\ (1 - x)\xi, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Lebih lanjut, didefinisikan

$$Q(\lambda; x) := \lambda + \frac{q(x)}{u(x) - \lambda},$$

dan misalkan $\hat{Q}(\lambda)$ adalah operator perkalian dengan fungsi $Q(\lambda; \cdot)$ di dalam L^2 . Akibatnya, λ nilai eigen dari \tilde{A} jika dan hanya jika 1 adalah nilai eigen dari operator kelas trace *self-adjoint*

$$T(\lambda) := A^{-\frac{1}{2}} \hat{Q}(\lambda) A^{-\frac{1}{2}}.$$

Dengan cara sama, misal $\hat{Q}_+(\lambda)$ adalah operator perkalian dengan fungsi $Q_+(\lambda; \cdot)$ dan

$$T_+(\lambda) := A^{-\frac{1}{2}} \hat{Q}_+(\lambda) A^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

yang merupakan operator kelas trace positif. Karena $Q(\lambda; x) \leq Q_+(\lambda; x)$, maka

$$T(\lambda) \leq T_+(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \alpha).$$

$$\|T_+(\lambda)\| \leq \text{tr}(T_+(\lambda)) = \text{tr}(A^{-1} \hat{Q}_+(\lambda))$$

$$= \int_0^1 x(1-x) Q_+(\lambda; x) dx$$

$$\leq \int_0^1 x(1-x) Q_+(\lambda; x) dx \stackrel{\text{def}}{=} c < 1.$$

Karena itu, berlaku $\sigma(T_+(\lambda)) \subseteq [0, c]$, dan $\sigma(T(\lambda)) \subseteq (-\infty, c]$. Hal ini menunjukkan bahwa 1 bukan nilai eigen dari $T(\lambda)$ dan pernyataan terbukti untuk $\lambda \in (-\infty, \alpha)$.

(ii) Untuk kasus $\lambda = \alpha$. Didefinisikan operator

$$V(\lambda) := \hat{Q}(\lambda) A^{-1}$$

untuk $\lambda \leq \alpha$. Operator $\hat{Q}(\alpha)$ tidak terbatas dengan domain

$$\mathcal{D}(\hat{Q}(\alpha)) = \{y \in L^2 \mid y(x) \in Q(\alpha; x) \in L^2\}$$

$$= \left\{ y \in L^2 \mid \frac{y(x)}{x} \in L^2 \right\}.$$

Karena $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(\hat{Q}(\alpha))$, dan $V(\alpha) := \hat{Q}(\alpha)A^{-1}$ adalah operator tertutup dan terdefinisi di mana-mana, maka operator ini terbatas. Akan ditunjukkan bahwa $V(\lambda)$ konvergen ke $V(\alpha)$ dalam norma apabila $\lambda \nearrow \alpha$. Diambil $y \in L^2$. Karena $A^{-1}y \in \mathcal{D}(A)$, maka

$$(A^{-1}y)(x) = xy_1(x) \quad \text{dengan } y_1 \in C[0,1].$$

Perhatikan bahwa $\left| \frac{K(x;\xi)}{x} \right| \leq 1$, dengan K kernel dari operator A^{-1} pada (10). Akibatnya, dapat diestimasi bahwa

$$|y_1(x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{K(x,\xi)}{x} y(\xi) \right| d\xi \leq \|y\|.$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \|V(\lambda)y - V(\alpha)y\|^2 &= \|\hat{Q}(\lambda)A^{-1}y - \hat{Q}(\alpha)A^{-1}y\|^2 \\ &= \|\hat{Q}(\lambda)(xy_1(x)) - \hat{Q}(\alpha)(xy_1(x))\|^2 \\ &= \int_0^1 |(Q(\lambda; x) - Q(\alpha; x))xy_1(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 |(Q(\lambda; x)x - Q(\alpha; x)x)y_1(x)|^2 dx \cdot \|y\|^2. \end{aligned}$$

Jika $\lambda \nearrow \alpha$, maka fungsi $Q(\lambda; x)x$ konvergen titik demi titik dan monoton ke $Q(\alpha; x)x$. Dengan teorema kekonvergenan terbatas, maka untuk $\lambda \nearrow \alpha$

$$\int_0^1 |(Q(\lambda; x)x - Q(\alpha; x)x)|^2 dx \rightarrow 0$$

dan sehingga $V(\lambda) \rightarrow V(\alpha)$ di dalam norma. Dengan bagian (i) menunjukkan bahwa

$$\sigma(V(\lambda)) \setminus \{0\} = \sigma(T(\lambda)) \setminus \{0\} \subseteq (-\infty, c],$$

untuk $\lambda < \alpha$. Tetapi kekonvergenan $V(\lambda)$ ke $V(\alpha)$ menyatakan bahwa 1 bukan nilai eigen dari $V(\alpha)$. Dengan demikian α bukan nilai eigen dari \tilde{A} . □

Akibat 2.5 Jika

$$\frac{\max(\alpha, 0)}{3} + \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)} < 2,$$

maka \tilde{A} tidak mempunyai nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha]$.

Bukti: Misalkan $\alpha_+ := \max(\alpha, 0)$. Karena $u \in C^1[0,1]$, maka

$$\frac{q(x)x}{u(x) - \alpha} = \frac{q(x)}{u'(\xi)} \leq \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)}$$

untuk suatu $\xi \in (0, x)$. Akan ditunjukkan bahwa syarat pada Teorema 2.4 dipenuhi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\alpha + \frac{q(x)}{u(x) - \alpha} \right)_+ x(1-x) dx &\leq \int_0^1 \alpha_+ x(1-x) dx + \int_0^1 \frac{q(x)x}{u(x) - \alpha} (1-x) dx \\ &\leq \frac{\alpha_+}{6} + \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)} \int_0^1 (1-x) dx \\ &\leq \frac{\alpha_+}{6} + \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)} < 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6 Jika $\alpha \geq 0$ dan

$$\frac{\alpha}{3} + \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)} < 3,$$

maka \tilde{A} tidak mempunyai nilai eigen pada interval $(-\infty, \alpha]$.

Bukti: Operator $A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)$, $\lambda < \alpha$ adalah operator integral dengan kernel

$$K_1(x, \xi) := \begin{cases} x(1-x)Q(\lambda; \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \\ (1-x)\xi Q(\lambda; \xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Operator ini adalah operator Hilbert-Schmidt. Oleh karena itu berlaku ketaksamaan

$$\|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\| \leq \|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\|_2,$$

dengan $\|\cdot\|_2$ menyatakan norma operator Hilbert-Schmidt. Di pihak lain, diperoleh

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\|_2^2 &= \int_0^1 \int_0^1 |K_1(x, \xi)|^2 dx d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^\xi (1-\xi)^2 x^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi) - \lambda} \right)^2 dx d\xi \\ &\quad + \int_0^1 \int_\xi^1 (1-x)^2 \xi^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi) - \lambda} \right)^2 dx d\xi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \xi^2 (1-\xi)^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi) - \lambda} \right)^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3 \xi^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi) - \lambda} \right)^2 dx d\xi \\
& = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\alpha \xi + \frac{\max_{t \in [0,1]} q(t)}{\min_{t \in [0,1]} u'(t)} \right)^2 [\xi(1-\xi)^2 + (1-\xi)^3] d\xi \\
& = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-\xi)^2 (\lambda \alpha \xi + \gamma)^2 d\xi, \quad \text{dengan } \gamma := \frac{\max_{t \in [0,1]} q(t)}{\min_{t \in [0,1]} u'(t)} \\
& = \frac{1}{9} \left(\frac{\alpha^2}{10} + \frac{\alpha \gamma}{2} + \gamma^2 \right) \\
& = \frac{1}{9} \left(\frac{\alpha}{3} + \gamma \right)^2 < 1.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\| \leq c < 1$, yang menyatakan $\sigma(T_+(\lambda)) \subseteq [0, c]$ dengan $T_+(\lambda)$ didefinisikan oleh (11). Sisa bukti sama seperti bukti pada Teorema 2.4.

□

3. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa: (1) bilangan $\alpha = u(0)$ dengan kondisi tertentu dapat menjadi nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville nonlinear, yang diberikan oleh Teorema 2.1; (2) dapat ditentukan spektrum nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville nonlinear pada interval $(-\infty, \alpha]$, yang diuraikan dalam Teorema 2.2 – 2.6.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih peneliti sampaikan kepada Direktur Jendral Pendidikan Tinggi yang telah mempercayai untuk mendanai peneliti ini. Ucapan terima kasih juga peneliti sampaikan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Sebelas Maret yang telah memfasilitasi sehingga penelitian ini selesai tepat pada waktunya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adamjan, V and Langer, H. (1995). Spectral Properties of A Class of Rational Operator Valued Functions. *Journal Operator Theory*, No. 33, hal : 259 – 277.
- [2] Adamjan, V, Langer, H and Mennicken, R. (1993). Eigenvalues of A Sturm-Liouville Problem Depending Rationally on The Eigenvalue Parameter. *Proceedings of MTNS*, Vol. II, hal : 569 – 594.
- [3] Cormani, V and R. Ryham. (2002). Variational Techniques for Sturm-Liouville Eigenvalue Problem. *VIGRE minicourse at University of Utah*.
- [4] Dewi Retno Sari dan Sutrima. (2003). Basis Riesz dari Penyelesaian Masalah Sturm-Liouville. *Seminar Nasional III dan Statistika VI*, tanggal 11 Oktober 2003 di Jurusan Statistika FMIPA ITS.
- [5] Dwyer, H.I and A. Zettl. (1994). Computing Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 1994 (1994), No. 06, hal: 1 – 10.
- [6] Dwyer, H.I and A. Zettl. (1995). *Eigenvalue Computation for Regular Matrix Sturm-Liouville Problems*. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 1995 (1995), No. 05, hal: 1 – 13.
- [7] Folland, G.B. (1992). *Fourier Analysis and Its Applications*. Wadsworth, Inc. Belmont, California.
- [8] Haberman, R. (1987). *Elementary Applied Partial Differential Equations : with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Second Edition. Prentice-Hall International Editions, New Jersey.
- [9] Langer, H, Mennicken, R, Moller, M. (1990). A Second Order Differential Operator Depending Nonlinearly on The Eigenvalue Parameter. *Operator Theory Advances Applications*, Vol. 48, BirkhauserVerlag, Basel, hal: 319 – 332.
- [10] Pasa, G.I. (2002). Estimations for the Characteristic Values of Sturm-Liouville Problem. *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol 93, hal: 973-979.
- [11] Sutrima. (2001). Penyelesaian Sistem Sturm-Liouville Melalui Teorema Spektral. *Jurnal MIPA ISSN : 0853-3016* Vol. 21, No. 1, hal: 25 – 31.

- [12] Sutrima. (2004). Representasi Spektral dari Operator Sturm-Liouville Berparameter *Jurnal MIPA* ISSN : 0853-3016 Vol 14 No. 1, hal: 17 - 23.
- [13] Sutrima. (2005). Pendekatan Variasional untuk Masalah Syarat Batas Sturm-Liouville. *Seminar Nasional, Aplikasi Matematika dan Teknologi Informasi pada Pengembangan Industri*, tanggal 7 Mei 2005 di Hotel Sahid Raya Surakarta.
- [14] Sutrima. (2009). Eksistensi Nilai Eigen dan Fungsi Eigen Masalah Sturm-Liouville Nonlinear. *Math-Info* ISSN: 1412-6702, Vol 1, No. 2, hal: 1 – 10.

ANALISIS FAKTOR RESIKO PADA MAHASISWA FMIPA UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA TERHADAP INDEKS PRESTASI RENDAH

Sri Sulistijowati H. dan Winita Sulandari
Jurusan Matematika FMIPA UNS

ABSTRAK. Penelitian ini bertujuan melakukan analisis regresi logistik untuk memprediksi faktor-faktor resiko pada mahasiswa FMIPA UNS terhadap indeks prestasi rendah. Sampel yang diambil adalah mahasiswa jurusan Matematika, Biologi, Fisika dan Kimia FMIPA UNS angkatan 2001 sampai dengan 2006 dengan menggunakan teknik *stratified cluster sampling*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari 133 mahasiswa yang terambil sebagai sampel diperoleh hasil bahwa 34,6 % mahasiswa yang memiliki indeks prestasi rendah ($IPK < 2,75$). Berdasarkan evaluasi model ternyata peubah-peubah yang berpengaruh terhadap IPK rendah adalah kemampuan bahasa Inggris (EAP), keaktifan mencari literatur dari internet (INTERNET1 dan INTERNET2), keaktifan mengikuti perkuliahan (AKTIF2), pembuatan jadwal belajar sesuai sks (JB) dan pekerjaan ibu (IBU). Dari keenam faktor tersebut diperoleh hasil bahwa mahasiswa dengan nilai tes EAP yang $< 2,75$ akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 33 kali dibandingkan mahasiswa dengan nilai tes EAP $\geq 2,75$. Sedangkan mahasiswa yang tidak pernah mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 12 kali dibandingkan mahasiswa yang sering mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet, mahasiswa yang jarang mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 4 kali dibandingkan mahasiswa yang sering mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet, mahasiswa yang kadang-kadang mengikuti perkuliahan yang diberikan dosen akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 9 kali dibandingkan mahasiswa yang selalu mengikuti perkuliahan yang diberikan dosen. Selain itu mahasiswa yang membuat jadwal belajar di luar perkuliahan untuk menerapkan sistem SKS pada awal perkuliahan akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 0,3 kali dibandingkan mahasiswa yang tidak membuat jadwal belajar di luar perkuliahan untuk menerapkan sistem SKS pada awal perkuliahan. Selanjutnya mahasiswa yang pekerjaan ibunya swasta akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 4 kali dibandingkan mahasiswa yang pekerjaan ibunya PNS atau ibu rumah tangga.

Kata kunci : IPK, model regresi logistik, *stratified cluster sampling*

1. PENDAHULUAN

Indeks Prestasi Kumulatif (IPK) mahasiswa adalah ukuran kemampuan mahasiswa setelah melalui proses pembelajaran dengan menggunakan sistem kredit semester. Nilai IPK ini sering dijadikan ukuran untuk dapat diterima bekerja di suatu

instansi atau perusahaan tertentu. Menuju era globalisasi ini standar IPK menjadi semakin meningkat apalagi bagi lulusan perguruan tinggi dalam negeri yang bersaing ketat dengan lulusan dari luar negeri.

Penelitian untuk melihat faktor resiko terhadap mahasiswa dengan IPK rendah dikarenakan mahasiswa yang telah lulus dengan IPK rendah akan mempunyai sedikit peluang untuk dapat bekerja pada berbagai instansi/perusahaan, sehingga akan memperpanjang masa tunggu lulusan (Hanrimo, 2004). Banyak instansi/perusahaan mensyaratkan $IPK \geq 2,75$ untuk dapat bekerja di tempat tersebut setelah melalui beberapa tes.

Dalam penelitian ini akan dilihat faktor internal dan faktor eksternal dari mahasiswa yang diduga berpengaruh terhadap IPK mahasiswa. Informasi yang diperoleh dari faktor-faktor tersebut dapat berupa data kontinu atau dapat berupa data kategorik sehingga diperlukan model regresi logistik yang mampu memodelkan dan memprediksi faktor resiko pada mahasiswa FMIPA UNS terhadap IPK rendah.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Faktor-faktor penyebab indeks prestasi kumulatif rendah

Faktor-faktor yang dimungkinkan menyebabkan IPK mahasiswa FMIPA rendah diklasifikasikan menjadi dua bagian yaitu faktor dalam dan faktor luar. Faktor-faktor dalam yang berasal dari mahasiswa itu sendiri antara lain adalah kemampuan berbahasa Inggris, penggunaan fasilitas perpustakaan dan internet, keaktifan mengikuti perkuliahan, pemahaman materi, penerapan sistem SKS, pembuatan jadwal belajar, lama belajar, kegiatan yang diikuti mahasiswa di luar kuliah dan pelaksanaan tugas kuliah selama kuliah. Sedangkan faktor-faktor luar antara lain peran tutorial, beban tugas kuliah, tempat tinggal, lingkungan kehidupan mahasiswa, penyampaian Kartu Hasil Studi ke orangtua atau wali, perhatian orangtua, pekerjaan Ibu, pekerjaan Bapak.

2.2. Analisis Reliabilitas dan Validitas

Faktor-faktor yang diduga menjadi penyebab IPK mahasiswa FMIPA rendah diteliti dengan menggunakan kuesioner yang kemudian dianalisis secara kualitatif. Item-item pertanyaan dalam kuesioner perlu diuji apakah benar-benar merupakan ukuran yang tepat. Kuesioner sebelum diedarkan biasanya diuji coba terlebih dahulu, apakah kuesioner tersebut memenuhi persyaratan validitas dan reliabilitas. Biasanya uji coba kuesioner

digunakan responden yang sejenis sebanyak 20 – 30 orang. Jumlah ini dianggap telah memenuhi persyaratan normalitas (Sarmanu, 2004)

2.3. Uji Validitas

Untuk menguji apakah instrumen yang digunakan dalam hal ini kuesioner memenuhi persyaratan validitas, pada dasarnya digunakan korelasi Pearson yaitu

$$r = \frac{n(\sum xy) - \sum x(\sum y)}{\sqrt{\{n(\sum x^2) - (\sum x)^2\} \{n(\sum y^2) - (\sum y)^2\}}}$$

dengan x adalah skor dari butir pertanyaan dan y adalah skor total (penjumlahan harga semua variable yang akan diuji). Cara analisisnya dengan cara menghitung koefisien korelasi antara masing-masing nilai pada nomor pertanyaan dengan nilai total dari nomor pertanyaan tersebut. Selanjutnya koefisien korelasi yang diperoleh r masih harus diuji signifikansinya dengan membandingkannya dengan r table. Bila r hitung \geq dari r tabel maka nomor pertanyaan tersebut valid. Bila menggunakan program SPSS, dapat dilihat harga p \leq 0,05 berarti nomor pertanyaan tersebut valid.

2.4. Uji Reliabilitas

Suatu kuesioner disebut reliabel/handal jika jawaban-jawaban responden tersebut konsisten. Reliabilitas dapat diukur dengan jalan mengulang pertanyaan yang mirip pada nomor-nomor berikutnya, atau dengan jalan melihat konsistensinya (diukur dengan korelasi) dengan pertanyaan lain. Untuk menguji reliabilitas, yang diuji keandalannya hanyalah nomor pertanyaan yang valid saja. Dengan bantuan SPSS, digunakan metode split-half dengan cara nomor pertanyaan dikelompokkan menjadi kelompok I dan II. Jumlah nilai kelompok I diberi symbol X dan kelompok II diberi symbol Y. Jika nomor pertanyaannya ganjil, nomor pertanyaan yang di tengah bias dimasukkan ke dalam kelompok I atau II. Selanjutnya kelompok I dikorelasikan dengan kelompok II dengan menggunakan korelasi Pearson (r). Kemudian r yang diperoleh dimasukkan ke dalam rumus korelasi genap gasal (r gg), yaitu

$$r_{gg} = \frac{2(r)}{1+r}$$

Uji signifikansi r gg dengan membandingkannya dengan r tabel.

2.5. Regresi Logistik untuk indeks prestasi mahasiswa FMIPA UNS

Setiap mahasiswa dapat diidentifikasi apakah mempunyai IPK rendah atau tinggi. Kejadian apakah seorang mahasiswa mempunyai IPK rendah atau tidak merupakan kejadian Bernoulli. Dalam penelitian ini digunakan nilai 1 untuk peubah acak Y yang menunjukkan IPK rendah dan nilai 0 yang menunjukkan IPK tinggi. Karena p didefinisikan sebagai peluang IPK rendah maka Y merupakan peubah acak yang mengikuti distribusi bernoulli $Y \sim B(p)$ yaitu

$$f(Y = y) = p(x)^y [1 - p(x)]^{(1-y)}$$

dengan

$$p(x) = E(Y = 1 | x) \text{ adalah peluang IPK rendah}$$

dan keadaan x didefinisikan sebagai

$$p(x) = \frac{\exp[\beta_0 + \beta_1 X]}{1 + \exp[\beta_0 + \beta_1 X]}.$$

Menurut Hosmer dan Lemeshow (1989) model linear umum dibentuk oleh tiga komponen yaitu komponen acak, yang mengidentifikasi distribusi peluang peubah respon, komponen sistematis yang merupakan fungsi linear dari peubah-peubah penjelas (prediktor) dan fungsi penghubung, yang merupakan penghubung antara komponen sistematis dengan nilai harapan dari komponen acak. Salah satu bentuk fungsi penghubung adalah fungsi logit yang didefinisikan sebagai perbandingan logaritma $p(x)$ terhadap $[1-p(x)]$ sebagai berikut

$$g(x) = \ln\{p(x)/[1 - p(x)]\} = \beta_0 + \beta_1 X.$$

Jika terdapat p peubah penjelas dan peubah penjelas ke- j merupakan peubah kategori dengan t -tingkatan maka fungsi penghubung logitnya adalah

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \sum \beta_{ju} X_{ju} + \dots + \beta_p X_p$$

dengan $u = 1, 2, \dots, t-1$.

Pada penelitian ini, komponen-komponen di atas adalah Y sebagai komponen acak, $g(x)$ sebagai komponen sistematis dan $p(x)$ sebagai nilai harapan dari komponen acak. Menurut Agresti (1990) jika komponen acak merupakan distribusi bernoulli, komponen sistematis merupakan data campuran (kontinu dan kategorik) dan fungsi penghubungnya adalah fungsi logit maka model yang sesuai adalah model regresi logistik.

2.6. Pendugaan Parameter Regresi Logistik

Pada model regresi logistik, metode pendugaan parameter yang dapat digunakan menurut Coslett (1981) adalah metode kemungkinan maksimum. Bentuk fungsi kemungkinan yang dimaksimumkan jika observasi satu dengan yang lainnya independen adalah

$$l(\beta) = \prod_{i=1}^n f(Y = y_i | x) \quad (1)$$

Parameter β diduga dengan memaksimumkan persamaan (1). Untuk memudahkan penghitungan dilakukan pendekatan dengan pendekatan logaritma, sehingga didapat fungsi log-kemungkinan sebagai

$$L(\beta) = \ln l(\beta) = \sum_{i=1}^n \{y_i \ln[p(x_i)] + (1 - y_i) \ln[1 - p(x_i)]\}$$

Untuk selanjutnya, dihitung turunan pertama dari $L(\beta)$ masing-masing terhadap $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j$ sehingga didapat persamaan

$$\sum [y_i - p(x_i)] = 0 \text{ dan } \sum x_i [y_i - p(x_i)] = 0, \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, n.$$

Karena $p(x_i)$ tidak linear dalam β , maka penduga kemungkinan maksimum untuk β dihitung dengan menggunakan algoritma Iteratively Reweighted Least Square (IRLS). Paket kemasan SPSS Versi 11 dapat digunakan untuk menghitung nilai-nilai dugaan β_i .

2.7. Evaluasi Terhadap Model

Untuk mengevaluasi model menurut Hosmer dan Lemeshow [5], digunakan statistic uji Wald (W) dan statistik uji-G (Uji Nisbah Kemungkinan).

Statistik uji W adalah untuk menguji parameter β_i yang didefinisikan sebagai

$$W = \frac{b_i}{se(b_i)}$$

dengan b_i adalah nilai dugaan untuk parameter β_i dan $se[b_i]$ adalah dugaan galat standar untuk koefisien b_i . W diasumsikan mengikuti distribusi normal standar. Prosedur "Binary Logistic" memberikan nilai W yang telah dikuadratkan dan nilai peluang ekor kanan distribusi Chi kuadrat.

Statistik uji G adalah untuk menguji suatu model yang didefinisikan sebagai

$$G = -2 [L_0 - L_q]$$

dengan L_0 dan L_q masing-masing adalah log kemungkinan dari model tanpa peubah penjelas dan model dengan q peubah penjelas. G diasumsikan mengikuti distribusi Chi kuadrat dengan derajat bebas q . Statistik G juga dapat menguji kebaikan suatu model reduksi terhadap model penuh. Jika model penuh memiliki p peubah penjelas dan model reduksi terdiri dari q peubah penjelas, maka statistik G dapat menguji parameter-parameter β_{q+1} sampai dengan β_p sekaligus yaitu dengan membandingkan nilai Log kemungkinan model penuh dengan nilai Log kemungkinan model reduksi. Untuk permasalahan ini G dirumuskan sebagai :

$$G = -2 [L_q - L_p]$$

dengan hipotesis

$$H_0 : \beta_{q+1} = \beta_{q+2} = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \text{paling sedikit ada satu parameter } \beta_i \neq 0 (i = q + 1, q + 2, \dots, p)$$

Untuk menarik kesimpulan dapat dilihat dari evaluasi di atas dan nilai-nilai penduga parameter perlu diinterpretasikan dengan menduga nilai *odds rasionya* ($\hat{\phi}$) yaitu

$$\hat{\phi} = \frac{n_{11} * n_{00}}{n_{10} * n_{01}} .$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini populasi yang menjadi fokus penelitian ini adalah mahasiswa FMIPA UNS dari jurusan Biologi, Fisika, Kimia dan Matematika. Sampel yang diambil 24,1% (32) dari mahasiswa jurusan Biologi, 15,8% (21) dari mahasiswa jurusan Fisika, 22,6% (30) dari mahasiswa jurusan Kimia dan 37,6% (50) dari mahasiswa jurusan Matematika. Sedangkan dari keseluruhan sampel yang dapat dianalisis, 0,8% (1) dari mahasiswa angkatan 2001, 4,5% (6) dari mahasiswa angkatan 2002, 8,3% (11) dari mahasiswa angkatan 2003, 29,3% (39) dari mahasiswa angkatan 2004, 20,3% (27) dari mahasiswa angkatan 2005 dan 36,8% (49) dari mahasiswa angkatan 2006. Pada pengambilan sampel ini juga diperoleh hasil bahwa 76,7% (102) adalah mahasiswa perempuan dan 23,3% (31) adalah mahasiswa laki-laki. Dari 133 mahasiswa yang diambil sebagai sampel diperoleh hasil bahwa 34,6 % mahasiswa yang memiliki indeks

prestasi rendah ($IPK < 2,75$). Persentase ini dianggap masih cukup besar sehingga penelitian ini diharapkan dapat mendukung program fakultas untuk meningkatkan kualitas lulusan.

3.1 Analisis validitas dan reliabilitas

Dari instrumen yang digunakan untuk mengukur faktor resiko mahasiswa mendapatkan indeks prestasi rendah yaitu berupa kuesioner dengan 20 butir pertanyaan maka kemudian dilakukan pengujian validitas dan reliabilitas untuk melihat kelayakan kuesioner tersebut terhadap 30 responden. Pengujian ini hanya dilakukan pada tiga butir pertanyaan yang berupa motivasi belajar mahasiswa dengan menggunakan fasilitas perpustakaan, internet, dan keaktifan mengikuti perkuliahan. Untuk butir-butir pertanyaan lainnya tidak diperlukan uji validitas dan reliabilitas, karena responden diperkirakan akan menjawab pertanyaan tersebut dengan konsisten.

Dari hasil pengujian validitas terlihat bahwa korelasi dari skor setiap pertanyaan dengan skor total hasil penjumlahan masing-masing mempunyai nilai yang lebih besar dari r tabel, sehingga disimpulkan ketiga butir pertanyaan yang diuji semuanya valid. Kemudian ketiga butir pertanyaan tadi dilakukan uji reliabilitas dengan metode *split-half* dan menghasilkan nilai korelasi yang juga lebih besar dari r tabel, sehingga dapat disimpulkan ketiga butir pertanyaan tersebut juga reliabel.

Setelah diuji coba kuesioner tersebut valid dan reliabel maka kuesioner tersebut diberikan kepada 300 sampel mahasiswa jurusan Biologi, Matematika, Fisika dan Kimia yang terpilih secara random dengan bantuan empat orang mahasiswa Matematika sebagai pencacah data. Dari 300 kuesioner yang disebar hanya 200 kuesioner yang kembali dan yang menjawab secara lengkap sebanyak 133 buah. Karena jumlah kuesioner sebanyak 133 buah dianggap sudah cukup besar maka hasilnya kemudian dianalisis dengan menggunakan analisis regresi logistik.

Dalam analisis regresi logistik poltomous ini, setiap butir pertanyaan dijadikan peubah dengan memberikan skor pada setiap jawaban dari masing-masing butir pertanyaan. Untuk jawaban lebih dari dua pilihan dibuat peubah *dummy*.

3.2 Model Regresi Logistik Poltomous dan Evaluasi Model

Untuk menganalisis data yang diperoleh, terlebih dulu menskor peubah dependen (respon) dan peubah independennya. Dari 23 peubah independen berdasarkan statistik uji G diperoleh hasil nilai $G = 70,474$ dengan nilai p sebesar 0,00. Jika dipilih taraf

signifikansi sebesar 0,05 maka disimpulkan bahwa model ini diterima yang berarti paling tidak ada salah satu parameter β_i yang tidak sama dengan nol atau secara bersama-sama semua peubah independen mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap indeks prestasi mahasiswa sebagai peubah responnya.

Sedangkan berdasarkan uji Wald diperoleh kesimpulan bahwa peubah yang berpengaruh terhadap model adalah EAP, INTERNET1, INTERNET2, AKTIF2, JB, IBU dengan taraf signifikansi yang dipilih sebesar 0,1. Karena peubah-peubah yang lain dianggap kurang signifikan pengaruhnya terhadap peubah respon, maka untuk selanjutnya dibuat model reduksi dengan tidak mengikutsertakan peubah-peubah tersebut. Berdasarkan statistik uji G untuk menguji kebaikan model reduksi terhadap model penuh didapat nilai G sebesar 59,180 dengan peluang p sebesar 0,000. Berdasarkan hal ini dapat disimpulkan bahwa pada taraf signifikansi 0,05 peubah-peubah EAP, INTERNET1, INTERNET2, AKTIF2, JB, IBU berpengaruh terhadap peubah respon.

Selanjutnya dibuat model reduksi untuk peubah-peubah independen selain peubah-peubah EAP, INTERNET1, INTERNET2, AKTIF2, JB, IBU. Berdasarkan statistik uji G untuk menguji kebaikan model reduksi terhadap model penuh didapat nilai G sebesar 12,868 dengan peluang p sebesar 0,682. Berdasarkan hal ini dapat disimpulkan bahwa pada taraf signifikansi 0,05 peubah-peubah selain peubah-peubah EAP, INTERNET1, INTERNET2, AKTIF2, JB, IBU tidak berpengaruh terhadap peubah respon.

Dari hasil analisis regresi logistik polinomial diperoleh model regresi logistik berikut.

$$f(Y = y) = p(x_i)^y [1 - p(x_i)]^{(1-y)}$$

dengan

$$p(x_i) = E(Y = 1 | x_i) \text{ adalah peluang IPK rendah}$$

dan keadaan x didefinisikan sebagai

$$p(x_i) = \frac{\exp[-3,063 + 3,496X_1 + 2,439X_2 + 1,332X_3 + 2,205X_4 - 1,301X_5 + 1,486X_6]}{1 + \exp[-3,063 + 3,496X_1 + 2,439X_2 + 1,332X_3 + 2,205X_4 - 1,301X_5 + 1,486X_6]}$$

dengan

Y = peubah respon IPK

X₁ = peubah EAP

X₂ = peubah INTERNET1

X₃ = peubah INTERNET2

X_4 = peubah AKTIF2

X_5 = peubah JB

X_6 = peubah IBU

3.3 Nilai *Odd Ratio*

Dari hasil analisis diperoleh nilai penduga *odd ratio* untuk peubah EAP adalah sebesar 33 yang menunjukkan bahwa mahasiswa dengan nilai tes EAP yang $< 2,75$ akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 33 kali dibandingkan mahasiswa dengan nilai tes EAP $\geq 2,75$. Sedangkan nilai penduga *odd ratio* untuk peubah INTERNET1 dan INTERNET2 adalah sebesar 12 dan 4, yang menunjukkan bahwa mahasiswa yang tidak pernah mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 12 kali dibandingkan mahasiswa yang sering mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet dan mahasiswa yang jarang mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 4 kali dibandingkan mahasiswa yang sering mencari literatur yang berkaitan dengan materi kuliah di internet. Untuk nilai penduga *odd ratio* untuk peubah AKTIF2 adalah sebesar 9 yang menunjukkan bahwa mahasiswa yang kadang-kadang mengikuti perkuliahan yang diberikan dosen akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 9 kali dibandingkan mahasiswa yang selalu mengikuti perkuliahan yang diberikan dosen. Sedangkan nilai penduga *odd ratio* untuk peubah JB adalah sebesar 0,3 yang menunjukkan bahwa mahasiswa yang membuat jadwal belajar di luar perkuliahan untuk menerapkan sistem SKS pada awal perkuliahan akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 0,3 kali dibandingkan mahasiswa yang tidak membuat jadwal belajar di luar perkuliahan untuk menerapkan sistem SKS pada awal perkuliahan. Selanjutnya nilai penduga *odd ratio* untuk peubah IBU adalah sebesar 4 yang menunjukkan bahwa mahasiswa yang pekerjaan ibunya swasta akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 4 kali dibandingkan mahasiswa yang pekerjaan ibunya PNS atau ibu rumah tangga.

4. KESIMPULAN

Dari hasil analisis data dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat diambil kesimpulan tentang kasus IPK mahasiswa FMIPA yang rendah antara lain :

1. Model regresi logistik berikut.

$$f(Y = y) = p(x_i)^y [1 - p(x_i)]^{(1-y)}$$

dengan

$p(x_i) = E(Y = 1 | x_i)$ adalah peluang IPK rendah

dan keadaan x didefinisikan sebagai

$$p(x_i) = \frac{\exp[-3,063 + 3,496X_1 + 2,439X_2 + 1,332X_3 + 2,205X_4 - 1,301X_5 + 1,486X_6]}{1 + \exp[-3,063 + 3,496X_1 + 2,439X_2 + 1,332X_3 + 2,205X_4 - 1,301X_5 + 1,486X_6]}$$

2. Berdasarkan evaluasi model ternyata peubah-peubah yang diduga berkaitan erat dengan IPK rendah adalah EAP, INTERNET1, INTERNET2, AKTIF2, JB, IBU
3. Dari keenam faktor tersebut yang memiliki koefisien b terbesar adalah koefisien untuk peubah EAP yang berarti mahasiswa dengan nilai tes EAP yang $< 2,75$ akan memiliki resiko memperoleh IPK rendah 33 kali dibandingkan mahasiswa dengan nilai tes EAP $\geq 2,75$.

Untuk penelitian selanjutnya disarankan melihat hubungan langsung dan tidak langsung dari peubah-peubah yang diduga merupakan faktor resiko mahasiswa memperoleh indeks prestasi rendah.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Agresti, A., 1990, *Categorical Data Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [2] Cosslett, Stephen R., 1981, *Maximum Likelihood Estimator for Choice-Based Samples*, *Econometrica*, 49, 1289-1316.
- [3] Draper, N.R. and H. Smith, 1981, *Applied Regression Analysis*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [4] Hosmer, J. and S. Lemeshow, 1989, *Applied Logistic Regression Analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [5] Hanrimo, 2004, *Strategi Peningkatan Product Quality*, Buletin UNS, Surakarta.
- [6] McFadden, Daniel, 1984, *Econometric Analysis of Qualitative Response Models*, in Zvi Griliches and M.D. Intriligator (eds). *Handbook of Econometrics*, Volume III, New York: North-Holland.
- [7] Sri S. H., Hasih P., Bambang H., 2004, *Penerapan Model Regresi Logistik Sebagai Analisis Faktor Resiko Pada Mahasiswa Matematika FMIPA UNS Terhadap Indeks Prestasi Rendah*, laporan penelitian DIKS FMIPA UNS.
- [8] Sarmanu, 2004, *Validitas Dan Reliabilitas Instrumen Penelitian*, makalah materi pelatihan, Lemlit UNAIR Surabaya

ANALISIS KURVA PERTUMBUHAN BOBOT AYAM BROILER

Wayan Surya Wardhani
Faculty of Sciences, Brawijaya University, Malang
e-mail : wwardhani@yahoo.com

ABSTRACT. It is very important to find out the maximum growth rate of chicken weight so that it could be used as a guideline for the farmer to give the chicken a special treatment at certain age. As a consequence, the chicken can gain weight as the market requires within a shorter time. The objectives of this research are to determine the critical point during the chicken growth by fitting the Lohmann chicken body weight growth with Logistic and Gompertz model and to determine which the best fit is. The weight observation was done from DOC to day 61 in 3-day interval. The research result showed that Gompertz model was more suitable in describing the chicken weight growth compared to Logistic model, as R^2 was about 99.7 % and maximum growth rate occurred at about day 23.

Keywords: body weight, Gompertz, Logistic

1. PENDAHULUAN

Salah satu bagian penting dalam statistika adalah pendugaan parameter model, termasuk diantaranya model pertumbuhan (Peterson, 2007). Suatu kenyataan bahwa suatu sistem pertumbuhan hewan dengan proses pertumbuhannya hampir tidak dapat digambarkan atau dipelajari dengan cara yang sederhana, namun dapat dipelajari dengan penyederhanaan proses yang berakhir pada terbentuknya model pertumbuhan. Dari model yang terbentuk diharapkan dapat memberikan ringkasan matematik mengenai perilaku data pertumbuhan dalam menghasilkan produknya. Tzeng dan Becker (1981) dalam Yakupoglu dan Atil (2001) menyatakan bahwa model matematika dari kurva pertumbuhan bermanfaat untuk menggambarkan laju pertumbuhan setiap saat dan persamaannya dapat digunakan untuk memprediksi peubah tertentu dari sekelompok hewan pada saat tertentu.

Model Logistic dan Gompertz merupakan turunan dari model Richard, di mana kurvanya berbentuk sigmoidal seiring dengan pertambahan waktu. Peubah yang diukur pada pertumbuhan hewan diantaranya adalah bobot badan, lingkaran badan, dan tinggi badan hewan. Melalui model sigmoid dapat diketahui titik kritis yang menunjukkan saat terjadinya laju pertumbuhan mencapai maksimum.

Salah satu cara untuk mengetahui pola pertumbuhan berat ayam broiler jenis Lohmann adalah dengan mengukur berat badan. Dikatakan bahwa rata-rata bobot ayam

bisa mencapai 1,48 kg/ ekor pada minggu ke 4 untuk ayam betina dan 1.66 kg untuk ayam jantan (Nuryanto, 2007). Banyak penelitian dilakukan untuk menduga model pertumbuhan bobot ayam namun belum dilakukan kajian lebih lanjut tentang terjadinya saat penting yang akan sangat berguna untuk diterapkan pada keadaan yang sesungguhnya di lapang. Karenanya diperlukan suatu cara untuk menduga saat terjadinya laju pertumbuhan bobot ayam mencapai maksimum; dengan demikian peternak dapat menentukan waktu yang tepat untuk memberikan perlakuan khusus untuk memperoleh kualitas ayam yang lebih baik.

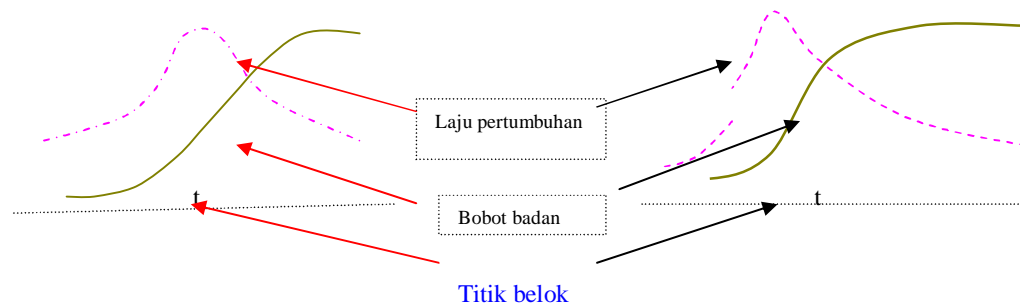
2. MATERI DAN METODE

Pertumbuhan organisme baik hewan maupun tumbuhan biasanya mengikuti kurva S Menurut Sitompul dan Guritno (1995), pengamatan pertumbuhan yang sering dilakukan adalah terhadap biomassa tanaman, yang menunjukkan pertumbuhan mengikuti pola bentuk S seiring dengan pertambahan waktu, dikenal sebagai model sigmoid. Model pertumbuhan sigmoid kebanyakan diterapkan untuk organisme atau bagian organisme yang menunjukkan bentuk pertumbuhan yang tertentu (*determinate growth pattern*) (Couston dan Venus, 1981).

Model Logistic dan model Gompertz adalah sigmoid, tetapi titik belok pada kedua model berbeda. Model Logistic dapat ditulis sebagai : $W(t) = A/(1 + \beta e^{-Kt})$ dengan A adalah bobot badan yang dicapai oleh L, β adalah konstanta (parameter skala waktu), K menunjukkan laju pertumbuhan, L adalah bobot badan dan t adalah umur ayam. Model tersebut simetris diantara kedua asimtotnya, dengan asimtot pada $L = 0$ dan $L = A$. Jika $t=0$, maka $L=A/(1 + \beta)$ merupakan nilai bobot badan awal. Jika $t \rightarrow \infty$, maka $W \rightarrow A$ yang merupakan batas pertumbuhan. Titik belok model Logistic tercapai pada saat $t = (\ln \beta) / K$ dan $W(t) = A/2$. Menurut Drapper dan Smith (1992), dari model Logistic diperoleh laju pertumbuhan absolut ($AGR=absolute\ growth\ rate$) yang dinyatakan sebagai $\frac{dL}{dt} = \frac{ABKe^{-Kt}}{(1 + Be^{-Kt})^2}$ artinya, laju pertumbuhan sebanding dengan hasil kali bobot badan pada saat t dengan beratnya bobot yang masih akan dicapai. Menurut Hunt (1982), laju pertumbuhan relatif ($RGR=relatif\ growth\ rate$) model Logistic adalah $\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{BKe^{-Kt}}{1 + Be^{-Kt}}$ Titik belok terjadi pada pertengahan pertumbuhan bobot badan dan merupakan saat di mana laju pertumbuhan mencapai maksimum (O'Neill dkk., 2003)

Dalam bidang biologi, model Gompertz lebih sesuai digunakan daripada model sigmoid yang lain. Menurut Causton dan Venus (1981) model Gompertz dapat ditulis sebagai:

$W(t) = A \exp(-\beta e^{-Kt})$ dengan A adalah bobot maksimum yang dicapai, β adalah konstanta (parameter skala waktu), K merupakan laju pertambahan bobot badan, $W(t)$: bobot badan pada saat t dan t adalah umur ayam. Model Gompertz tidak simetris diantara kedua asimtotnya, dengan asimtot pada $L=0$ dan $L=A$. Jika $t=0$, maka $L=Ae^{-\beta}$ yang merupakan nilai pertumbuhan awal. Jika $t \rightarrow \infty$, maka $L \rightarrow A$ yang merupakan batas pertumbuhan. Titik belok model pertumbuhan Gompertz tercapai ketika $d^2L/dt^2 = 0$ yaitu ketika $L = A/e$. Pada saat tersebut, $t = (\ln \beta)/K$. Pertumbuhan secara maksimum pada model Gompertz terjadi pada waktu $t = (\ln \beta)/K$ dan $W(t)=A/e$. Menurut Drapper & Smith (1992), AGR dapat dihitung dari turunan parsial : $\frac{\partial L}{\partial t} = A\beta K e^{(-Kt(-\beta e^{-Kt}))}$. Menurut O'Neill, dkk (2003), laju pertumbuhan relatif (RGR=relatif growth rate) pada model Gompertz adalah $\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = BKe^{-Kt}$. Titik belok pada model Gompertz terjadi lebih awal dibandingkan model Logistic, yaitu pada sepertiga dari bobot badan maksimum yang mungkin. Laju pertumbuhan akan mencapai puncaknya di titik belok dan akan turun secara linier seiring dengan bertambahnya umur seperti terlihat pada gambar berikut (O'Neill dkk., 2003).



Gambar 1. Model Logistic

Gambar 2. Model Gompertz

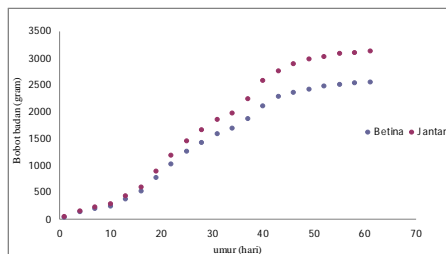
Pendugaan parameter model non linier, terutama model yang secara intrinsik non linier tidak dapat menggunakan metode kemungkinan maksimum atau metode kuadrat terkecil biasa secara langsung seperti model linier, karena memerlukan perhitungan yang sangat rumit. Oleh karena itu untuk menduga parameter model non linier digunakan metode iteratif yaitu suatu proses perhitungan yang diulang-ulang sampai ditemukan penduga yang konvergen (Yitnosumarto, 1988).

Pada penelitian ini digunakan ayam broiler strain Lohman, jantan dan betina. Peubah yang diamati adalah bobot ayam (gram) yang diukur setiap tiga hari dan pengukuran dihentikan jika bobot badan telah mencapai suatu besaran yang; tahapan analisis ssebagai berikut :

- Menentukan nilai duga awal bagi parameter model Logistic ($A^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $K^{(0)}$) yaitu :menghitung $A^{(0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t)$ kemudian substitusi $A^{(0)}$ ke persamaan $y = A/(1 + \beta)$ untuk mendapatkan $\beta^{(0)}$ dan men substitusikan $A^{(0)}$ dan $\beta^{(0)}$ untuk mendapatkan $K^{(0)}$.
- Menentukan nilai duga awal bagi parameter model Gompertz ($A^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $K^{(0)}$), secara analitik yaitu : menghitung $A^{(0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} W(t)$, selanjutnya substitusi $A^{(0)}$ ke persamaan $W = Ae^{-\beta}$ untuk mendapatkan $\beta^{(0)}$ dan substitusi $A^{(0)}$ dan $\beta^{(0)}$ untuk memperoleh $K^{(0)}$.
- Menduga parameter model pertumbuhan Logistic dan Gompertz secara iteratif dengan metode Levenberg-Marquardt dan menguji asumsi kenormalan dan homogenitas ragam
Menguji keakuratan model dan membandingkan keduanya kemudian menentukan titik belok dari model yang sesuai.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

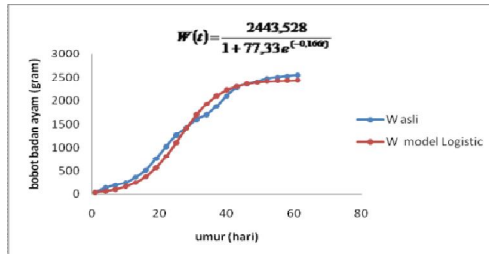
Pengukuran terhadap bobot ayam broiler diakhiri pada hari ke 61 karena beberapa pengamatan telah menunjukkan kenaikan bobot badan yang tidak signifikan. Scatter plot hasil pengukuran bobot badan ayam berdasarkan waktu disajikan pada gambar berikut :



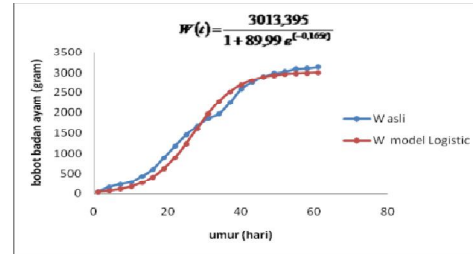
Gambar 3. Data bobot ayam

Tampak bahwa pada awalnya laju pertumbuhan ayam jantan dan betina sama hingga umur kira-kira 12 hari, tetapi kemudian berat ayam jantan lebih tinggi dari pada ayam

betina. Pendugaan parameter model Logistic dengan 16 kali iterasi diperoleh hasil seperti nampak pada Gambar 4 dan Gambar 5.



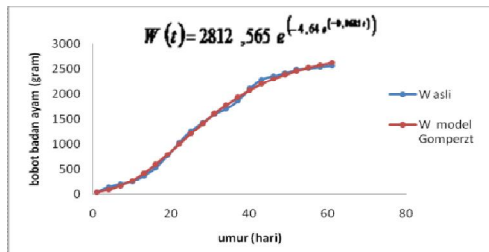
Gambar 4. Model bagi ayam betina
 $2333.76 < M < 2553.29$
 $6.23 \cdot 10^{-5} < \beta < 7.37 \cdot 10^{-5}$



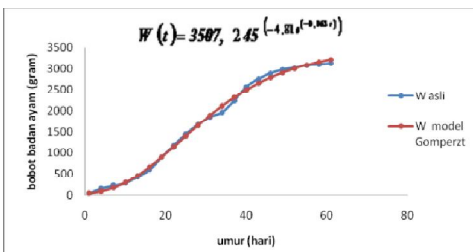
Gambar 5. Model bagi ayam jantan
 $2867.07 < M < 3159.72$
 $5 \cdot 10^{-5} < \beta < 5.97 \cdot 10^{-5}$

Uji kesesuaian model menghasilkan koefisien determinasi bagi model bobot ayam betina dan ayam jantan berturut-turut 98.1% dan 97.9%. Dari turunan kedua diperoleh titik belok (26.23, 1225.49) bagi ayam betina dan (27.2, 1497.89) bagi ayam jantan. Dapat dilihat bahwa pada saat laju pertumbuhan mencapai maksimum pada hari ke 26 atau 27, bobot ayam mencapai separuh ($=A/2$) dari bobot maksimum yang dicapai.

Berikutnya hasil pendugaan model Gompertz dengan 15 iterasi bagi ayam betina dan 20 kali iterasi bagi ayam jantan diperoleh :



Gambar 5. Model bagi ayam betina
 $2736.17 < M < 2888.96$
 $2.28 \cdot 10^{-5} < \beta < 2.56 \cdot 10^{-5}$



Gambar 6. Model bagi ayam jantan
 $3391.85 < M < 3622.65$
 $1.76 \cdot 10^{-5} < \beta < 2.02 \cdot 10^{-5}$

Dari turunan kedua diperoleh titik belok (22.56, 1036.35) bagi ayam betina dan (23.67, 1288.48) bagi ayam jantan. Uji kebaikan suai menghasilkan koefisien determinasi 99.7% bagi keduanya. Artinya model tersebut dapat mem-fit data dengan baik; laju pertumbuhan maksimum terjadi antara hari ke 22-23 pada ayam betina dan hari ke 23-24 bagi ayam jantan. Pada saat tersebut ayam jantan 252.13 gram lebih berat dari pada ayam betina.

Hal ini mendukung pernyataan bahwa Gompertz lebih baik untuk menggambarkan pertumbuhan (Marcato, *et al.*, 2008)

Puncak kurva AGR merupakan saat di mana terjadi titik belok. Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa saat terjadinya laju pertumbuhan maksimum pada kurva Gompertz terjadi lebih awal dibandingkan dengan model Logistic, didukung oleh teori yang dikemukakan oleh O'Neill dkk (2003). Selanjutnya dikatakan bahwa kurva laju pertumbuhan relatif (RGR) pada kedua model turun secara linier seiring dengan bertambahnya umur tanaman, tetapi kurva RGR pada model Gompertz lebih cekung bila dibandingkan dengan bentuk kurva RGR pada model Logistic yang cenderung linier.

4. KESIMPULAN

Hingga ayam broiler berumur 61 hari, model Gompertz lebih sesuai untuk menggambarkan pertumbuhan bobot ayam broiler dibandingkan dengan model Logistic. Laju pertumbuhan paling cepat terjadi pada saat ayam berumur 22-23 hari untuk ayam betina dan umur 23-24 hari untuk ayam jantan. Hasil tersebut dapat digunakan sebagai salah satu unsur dalam *database* ayam broiler.

Memperhatikan scatter plot dan kenyataan bahwa ayam dapat dipanen pada umur 4 minggu, maka dapat dikaji lebih lanjut kemungkinan memecah model tunggal di atas ke dalam dua model yang sama ataupun model yang berbeda, dengan suatu *cut-off point*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Couston, D.R. and J.C. Venus. *The Biometry Of Plant Growth*. Edward Arnold, London. 1981.
- [2] Draper, N.R. dan H. Smith. *Analisis Regresi Terapan*. Ed. Kedua. Terjemahan Bambang Sumantri. Gramedia, Jakarta. 1992.
- [3] Marcato, SM., Sakomura, NK., Munari, DP., Fernandes, JBK., Kawauchi. IM., Bonato, MA. *Growth and Body Nutrient Deposition of Two Broilers Commercial Genetic Lines*. Brazilian Journal of Poultry Science. April-June 2008/v.10/n.2/117-123. 2008.
- [4] Nuryanto. *Sexing Untuk Performa Optimal Broiler*. TROBOS. Media Agribisnis Peternakan dan Perikanan. 2007.
- [5] O'Neill, M; Bartimote, K; Hindmarsh, D. *Biometry I*. University of Sydney. 2003.
- [6] Petterson, K. *On Curve Estimation*. Journal of Applied Statistics. November 2007. Vol. 29, 973-990. 2007.

- [7] Sitompul, S.M. dan Guritno, B. *Analisis Pertumbuhan Tanaman*. Gajah Mada University Press, Yogyakarta. 1995.
- [8] Yakupoglu, C. and M. Atil. *Comparison of Growth Curve Models On Broilers II*. 2001. [http : // journals,tubitak. gov.tr/ veterinary/issues/vet-05-29-2/vet-29-2-22-0306-39.pdf](http://journals.tubitak.gov.tr/veterinary/issues/vet-05-29-2/vet-29-2-22-0306-39.pdf) Akses : 22 Juli 2006
- [9] Yitnosumarto, S. *Teori Dan Terapan : Analisi Regresi Dan Korelasinya*. Unibraw. 1988. (Tidak Dipublikasikan)

Lampiran

Tabel 1. Dugaan nilai awal parameter

| Perlakuan (Media Tanam) | Logistic | | | Gompertz | | |
|----------------------------|-----------|---------------|-----------|-----------|---------------|-----------|
| | $A^{(0)}$ | $\beta^{(0)}$ | $K^{(0)}$ | $A^{(0)}$ | $\beta^{(0)}$ | $K^{(0)}$ |
| T | 24.53 | 0.7035 | 0.2644 | 24.53 | 0.5327 | 0.2323 |
| T + PA | 39.53 | 1.6092 | 0.2781 | 39.53 | 0.9589 | 0.2235 |
| T + PK | 51.92 | 2.2799 | 0.3266 | 51.92 | 1.1878 | 0.2604 |
| T + PA + PK | 47.27 | 2.0997 | 0.3521 | 47.27 | 1.1313 | 0.2683 |
| T + B | 53.50 | 2.6345 | 0.3938 | 53.50 | 1.2906 | 0.3030 |
| T + B + PA | 59.67 | 3.4563 | 0.3648 | 59.67 | 1.4943 | 0.2622 |
| T + B + PK | 48.10 | 2.4114 | 0.2718 | 48.10 | 1.2272 | 0.2028 |
| T + B + PK + PA | 60.75 | 3.1609 | 0.5352 | 60.75 | 1.4259 | 0.0402 |

T = tanah, PA = pupuk anorganik, PK = pupuk kandang, B = bokashi

Tabel 2. Nilai parameter model pertumbuhan Logistic dan Gompertz.

| Perlakuan (Media Tanam) | Logistic | | | Gompertz | | |
|----------------------------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|
| | A | β | K | A | β | K |
| T | 27.8529 | 1.5471 | 0.2423 | 29.0621 | 0.9959 | 0.1734 |
| T + PA | 49.6048 | 4.6722 | 0.2730 | 57.7704 | 1.9558 | 0.1509 |
| T + PK | 56.5881 | 4.4786 | 0.3509 | 60.1711 | 1.9539 | 0.2292 |
| T + PA + PK | 55.8831 | 6.5097 | 0.4053 | 59.5742 | 2.3353 | 0.2525 |
| T + B | 65.1485 | 5.4699 | 0.3518 | 69.5311 | 2.1981 | 0.2271 |
| T + B + PA | 66.5700 | 6.9042 | 0.3741 | 71.9181 | 2.4894 | 0.2328 |
| T + B + PK | 59.3349 | 4.8896 | 0.3114 | 64.4492 | 2.0554 | 0.1961 |
| T + B + PK + PA | 67.6932 | 12.8828 | 0.6177 | 69.7420 | 3.4702 | 0.3967 |

T = tanah, PA = pupuk anorganik, PK = pupuk kandang, B = bokashi

Tabel 3. Salah baku bagi penduga parameter.

| Perlakuan (Media Tanam) | Logistic | | | Gompertz | | |
|----------------------------|----------|---------------|--------|----------|---------------|--------|
| | Sb(A) | sb(β) | sb(K) | Sb(A) | sb(β) | sb(K) |
| T | 1.8015 | 0.2178 | 0.0586 | 2.7559 | 0.0994 | 0.0560 |
| T + PA | 5.1070 | 0.8946 | 0.0577 | 11.8629 | 0.1991 | 0.0519 |
| T + PK | 3.4011 | 1.0658 | 0.0668 | 5.2559 | 0.2762 | 0.0543 |
| T + PA + PK | 3.1036 | 1.9154 | 0.0742 | 5.3674 | 0.4237 | 0.0619 |
| T + B | 4.5993 | 1.4731 | 0.0711 | 7.1359 | 0.3487 | 0.0576 |
| T + B + PA | 4.1175 | 1.8349 | 0.0653 | 6.6205 | 0.3727 | 0.0505 |
| T + B + PK | 6.0686 | 1.3863 | 0.0794 | 9.9187 | 0.3296 | 0.0654 |
| T + B + PK + PA | 1.9898 | 4.3851 | 0.0845 | 3.1536 | 0.8185 | 0.0706 |

T = tanah, PA = pupuk anorganik, PK = pupuk kandang, B = bokashi

Tabel 4. Titik Kritis(t^*), AGR maksimum (AGR*) dan RGR maksimum (RGR*)

| Perlakuan (Media Tanam) | Logistic | | | Gompertz | | |
|----------------------------|----------|--------|--------|----------|--------|---------|
| | AGR* | RGR* | t^* | AGR* | RGR* | t^* |
| T | 1.6872 | 0.1329 | 1.8009 | 1.8539 | 0.1452 | -0.0237 |
| T + PA | 3.3855 | 0.2131 | 5.6469 | 3.2070 | 0.2539 | 4.4453 |
| T + PK | 4.9642 | 0.2664 | 4.2728 | 5.0735 | 0.3561 | 2.9225 |
| T + PA + PK | 5.6624 | 0.3294 | 4.6219 | 5.5338 | 0.4581 | 3.3589 |
| T + B | 5.7298 | 0.2792 | 4.8302 | 5.8090 | 0.3978 | 3.4681 |
| T + B + PA | 6.2259 | 0.3090 | 5.1647 | 6.1592 | 0.4592 | 3.9177 |
| T + B + PK | 4.6192 | 0.2434 | 5.0967 | 4.6494 | 0.3313 | 3.6739 |
| T + B + PK + PA | 10.4535 | 0.5399 | 4.1378 | 10.1779 | 0.9258 | 3.1364 |

T = tanah, PA = pupuk anorganik, PK = pupuk kandang, B = bokashi

ANALISIS PENGELOMPOKKAN KABUPATEN/KOTAMADYA BERDASARKAN INDIKATOR PARTISIPASI PEREMPUAN PROPINSI JAWA TIMUR *)

Dimas Okky, Ismaini Zain, dan Dwiatmono A.W
Mahasiswa, Dosen jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
dim2oki@yahoo.com
ismaini_z@statistika.its.ac.id
dwiatmono@statistika.its.ac.id

ABSTRAK. Partisipasi perempuan dalam kemajuan suatu wilayah dipengaruhi oleh beberapa bidang seperti faktor pendidikan dan ketenagakerjaan. Berdasarkan bidang pendidikan dibagi menjadi beberapa variabel yaitu persentase perempuan bersekolah SMP, SMA, Perguruan Tinggi serta Angka Melek Huruf sedangkan pada bidang ketenagakerjaan dibagi menjadi tujuh variabel yaitu Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja, persentase perempuan bekerja, persentase perempuan menganggur, serta persentase dari berbagai sektor pekerjaan seperti sektor manufaktur, pertanian, jasa, dan formal. Data yang digunakan adalah data sekunder yaitu data SUSENAS tahun 2006 dengan unitnya adalah 38 Kabupaten/Kotamadya di propinsi Jawa Timur, untuk mengetahui pengelompokan Kabupaten/Kotamadya di propinsi Jawa Timur. Dari hasil penelitian didapatkan 3 kelompok yang yaitu pada kelompok I terdiri atas 15 Kabupaten/Kotamadya yang memiliki Angka Melek Huruf sedang dimana persentase perempuan berpendidikan SMP lebih besar, kelompok II terdiri atas 14 Kabupaten/Kotamadya yang memiliki Angka Melek Huruf rendah dimana persentase perempuan berpendidikan SMP lebih besar dan untuk kelompok III terdiri 9 Kabupaten/Kotamadya dengan Angka Melek Huruf tinggi dimana persentase perempuan berpendidikan SMA lebih besar.

Kata Kunci: Partisipasi perempuan, bidang pendidikan dan ketenagakerjaan, analisis kelompok

1. PENDAHULUAN

Perkembangan suatu wilayah tidak lepas dari partisipasi yang dilakukan didalamnya seperti dalam bidang pendidikan dan ketenagakerjaan, juga menuntut peran serta seluruh masyarakat secara aktif untuk berkembang dan maju baik laki-laki dan perempuan. Dalam hal ini khususnya perempuan karena partisipasi perempuan akan perkembangan suatu wilayah masih dikatakan kurang atau sedikit dibandingkan dengan laki-laki. Indikator partisipasi perempuan dalam pembangunan dibagi menjadi 2 yaitu segi pendidikan dan ketenagakerjaan.

Propinsi Jawa Timur adalah salah satu propinsi yang mempunyai jumlah penduduk terbesar kedua di Indonesia setelah DKI. Menurut data Badan Pusat Statistik (BPS) Jawa Timur, jumlah tenaga kerja perempuan pada Agustus 2008 mencapai 7,499 juta jiwa atau

naik cukup signifikan yakni 232,2 ribu orang dibandingkan pada tahun 2007 hanya sebesar 7,267 juta jiwa. Penelitian ini sebelumnya telah diteliti yang menyatakan bahwa kenaikan dalam tingkat partisipasi angkatan kerja perempuan di Indonesia faktor penyebabnya adalah bertambahnya kemiskinan. Menurut Badan Pusat Statistik (BPS) tahun 2005, salah satu indikator kemiskinan adalah dari status ekonomi. Dalam status ekonomi ini dapat dilihat berdasarkan keterlibatan perempuan dalam kegiatan ekonomi seperti pemilihan lapangan pekerjaan. Terdapat sembilan sektor lapangan pekerjaan yang dimana dari sembilan sektor usaha tersebut dikelompokkan menjadi 3 sektor utama atau yang disebut juga pekerjaan utama yakni sektor pertanian, industri dan jasa.

Partisipasi perempuan menyangkut peran tradisi dan transisi. Peran tradisi mencakup peran wanita sebagai istri, ibu dan pengelola rumah tangga. Sementara peran transisi meliputi pengertian perempuan sebagai suatu tenaga kerja, anggota masyarakat dan manusia pembangunan. Pada peran transisi ini perempuan sebagai tenaga kerja turut aktif dalam kegiatan ekonomis (mencari nafkah) di berbagai kegiatan yang disesuaikan keterampilan dan pendidikan yang dimiliki serta lapangan pekerjaan yang tersedia (Sukei,1991).

Dalam upaya membantu pemerintahan dalam menentukan suatu kebijakan maka pada penelitian ini dilakukan pengelompokan pada masing-masing Kabupaten/Kotamadya.

2. MATERI DAN METODE

2.1 Partisipasi perempuan dalam dunia kerja

Salah satu indikator yang dapat menunjukkan peran serta perempuan dalam dunia atau pembangunan adalah tingkat partisipasi perempuan yang semakin meningkat. Peran perempuan di sektor pertanian dalam arti luas memberikan kontribusi yang cukup besar. Menurut Sayogyo (Sudarta,2001) peran perempuan di bidang pertanian dimulai dari orang mengenal alam dan bercocok tanam. Dari itu mulai berkembang pembagian kerja antara laki-laki dan perempuan pada beragam pekerja baik di dalam rumah tangga maupun di dalam masyarakat luas. Terdapat kurang lebih 21,74 juta rumah tangga petani di Indonesia, persentase tingkat partisipasi angkatan kerja perempuan di sektor pertanian cenderung meningkat sampai 40,71%, ini berarti jumlah SDM perempuan yang bekerja hampir separuh SDM laki-laki. Kenyataan menunjukkan bahwa hampir 40% perempuan tani berasal dari golongan rumah tangga tidak mampu. Oleh karena itu SDM perempuan harus diberdayakan. Untuk itu pelatihan dan penyuluhan IPTEK untuk pengembangan

kualitas SDM pertanian harus dimulai dari menghilangkan segala bentuk diskriminatif (Sri Wahyuni, 1991).

Keterlibatan perempuan dalam bidang pekerjaan sering tidak diperhitungkan, besarnya upah yang diterima perempuan lebih rendah daripada laki-laki. Dengan tingkat pendidikan yang sama, pekerja perempuan hanya menerima sekitar 50% sampai 80% upah yang diterima laki-laki. Selain itu banyak perempuan yang bekerja pada pekerjaan sebagai buruh lepas atau pekerja keluarga tanpa memperoleh upah atau dengan upah rendah. Mereka tidak memperoleh perlindungan hukum dan kesejahteraan (Hastuti, 2005). Meskipun kaum perempuan tampil mayoritas dalam produksi pertanian.

2.2 Peningkatan peran kaum perempuan

Pendekatan *Women In Development*, partisipasi perempuan mensyaratkan adanya kemampuan teknis dan profesional yang dibutuhkan. Ini berarti bahwa potensi dan kapabilitas teknis kaum perempuan harus ditingkatkan melalui (1) upaya mengintegrasikan perempuan dalam berbagai bidang kehidupan, tanpa banyak mempersoalkan sumber-sumber yang menyebabkan mengapa perempuan dalam masyarakat bersifat inferior, sekunder dan dalam hubungan subordinasi terhadap laki-laki. Indikator integrasi perempuan dalam pembangunan diukur dari Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK) perempuan, akses pendidikan, hak-hak politik, kewarganegaraan dan sebagainya, (2) menempatkan perempuan sebagai pelaku penting dalam masyarakat sehingga posisi perempuan akan menjadi lebih baik, asumsinya perempuan telah dan selalu menjadi bagian dari pembangunan perempuan, dan (3) konstruksi sosial yang membentuk persepsi dan harapan serta mengatur hubungan antara laki-laki dan perempuan yang menyebabkan rendahnya kedudukan dan status perempuan harus dihilangkan.

Pembangunan yang berdimensi gender yang bersifat eksploitatif atau merugikan menjadi hubungan yang seimbang, selaras dan serasi. Sehingga konsep pemberdayaan tenaga kerja perempuan yang akan datang mencakup tiga hal yakni (1) *Capacity Building*, upaya membangun kemampuan kaum perempuan, (2) *Cultural Change*, perubahan-perubahan budaya yang mamihak kepada kaum perempuan dan (3) *Structural Adjustment*, penyesuaian terhadap struktural yang juga memihak kepada kaum perempuan. Maka keberhasilan konsep ini akan menjadi motivasi dan prestasi bagi kaum perempuan dalam pembangunan menuju kesuksesan.

2.3 Analisis kelompok

Analisis kelompok (*cluster analysis*) merupakan suatu metode analisis untuk mengelompokkan objek-objek pengamatan menjadi beberapa kelompok sehingga akan diperoleh kelompok dimana objek-objek dalam satu kelompok mempunyai persamaan sedangkan dengan anggota kelompok yang lain mempunyai perbedaan (Johnson dan Wichern, 2002).

Prosedur pengelompokan pada dasarnya ada dua, yaitu pengelompokan dengan prosedur hirarki dan tak berhirarki. Pada penelitian ini metode yang dipakai adalah prosedur hirarki (*Hierarchical Method*) memulai pembentukan kelompok dengan jumlah kelompok sama dengan jumlah objek (n) kemudian dua kelompok yang mempunyai jarak terdekat digabung menjadi satu kelompok sehingga jumlah kelompok menjadi $(n-1)$, kemudian jarak-jarak kelompok yang baru dihitung kembali. Prosedur ini dilakukan berulang-ulang hingga didapatkan 1 kelompok dengan anggota sebanyak n . Terdapat 3 metode dalam analisis kelompok prosedur hirarki antara lain metode pautan tunggal (*single linkage*), metode pautan rata-rata (*average linkage*), metode pautan lengkap (*complete linkage*). penelitian ini menggunakan metode pautan lengkap (*complete linkage*) yaitu dengan memaksimumkan jarak antar kelompok yang digabung.

2.4 Metode pautan lengkap (*complete linkage*)

Metode ini menggunakan aturan jarak maksimum antar kelompok. Proses penggabungan diawali dengan menentukan 2 obyek yang mempunyai jarak minimum. Jarak maksimum antara kelompok uv dan w adalah :

$$d_{(uv)w} = \text{maks} [d_{uw}, d_{vw}]$$

dimana :

d_{uw} = jarak antara kelompok u dan w

d_{vw} = jarak antara kelompok v dan w

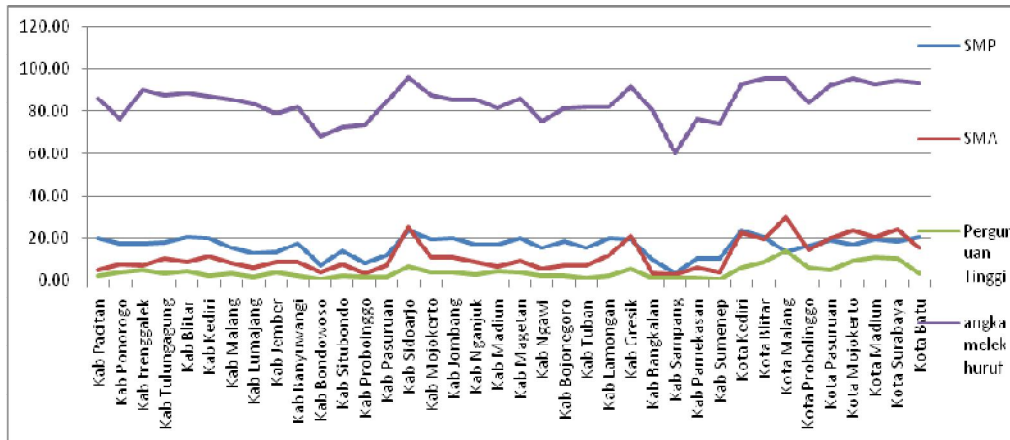
2.5 Sumber data dan variabel penelitian

Penelitian ini menggunakan data sekunder hasil Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) tahun 2006 propinsi Jawa Timur, dengan jumlah N sebanyak 38 yaitu Kabupaten/Kotamadya propinsi Jawa Timur. Dan variabel yang digunakan pada penelitian partisipasi perempuan dibedakan menjadi dua yaitu variabel pendidikan dan ketenagakerjaan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Penyebaran partisipasi perempuan dalam pendidikan pada kabupaten/kotamadya di Jawa Timur

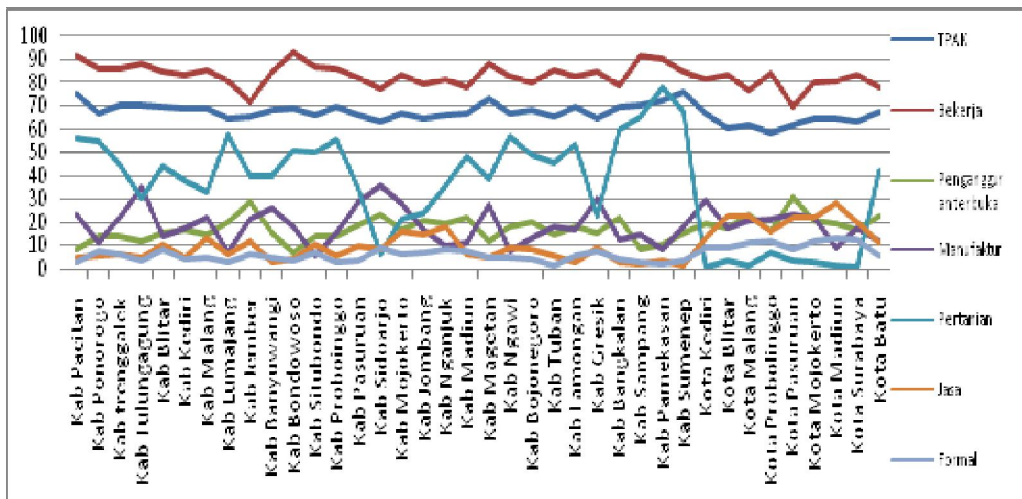
Penyebaran partisipasi perempuan dalam segi pendidikan dari masing-masing Kabupaten/Kotamadya dapat dilihat dari Gambar 1 yang dimana dapat diketahui untuk partisipasi perempuan dalam pendidikan yaitu pada angka melek huruf perempuan ini dapat dikatakan baik karena mempunyai nilai paling besar dengan nilai diatas 60 persen dari semua variabel pendidikan yaitu SMP, SMA maupun Perguruan Tinggi. Pada angka melek huruf ini terdapat Kabupaten/Kotamadya yang mempunyai nilai paling tinggi dan rendah yaitu Kabupaten Sidoarjo dan Kabupaten Sampang. Untuk pendidikan SMP, SMA, dan Perguruan Tinggi ini terdapat Kabupaten/Kotamadya dengan nilai tertinggi yaitu pada Kota Malang dengan perempuan berpendidikan SMA dan Perguruan Tinggi memiliki nilai paling tinggi, Kabupaten Sidoarjo dengan perempuan berpendidikan SMA dan SMP mempunyai nilai paling tinggi sedangkan Kabupaten/Kotamadya yang memiliki nilai paling rendah adalah Kabupaten Bangkalan, Kabupaten Sampang dan Kabupaten Sumenep. Pada Kabupaten Sampang ini selain memiliki nilai angka melek huruf paling kecil tetapi juga pada perempuan berpendidikan SMP, SMA dan Perguruan Tinggi juga memiliki nilai paling kecil.



Gambar 1 Penyebaran Partisipasi Perempuan dalam Pendidikan di Kabupaten/Kotamadya di Jawa Timur

3.2 Penyebaran partisipasi perempuan dalam ketenagakerjaan pada Kabupaten/Kotamadya di Jawa Timur

Partisipasi perempuan dalam segi ketenagakerjaan dari masing-masing Kabupaten/Kotamadya dapat dilihat dari Gambar 2 diketahui berdasarkan variabel ketenagakerjaan perempuan yang bekerja mempunyai nilai paling tinggi dimana mempunyai nilai diatas 70 persen dibandingkan variabel ketenagakerjaan lainnya. Pada variabel perempuan yang bekerja terdapat nilai paling rendah yaitu pada Kota Pasuruan sedangkan Kabupaten Bondowoso memiliki nilai paling tinggi. Pada Kota Pasuruan perempuan bekerja memiliki nilai paling rendah yang menyebabkan pengangguran di Kota ini tinggi. Untuk sektor dalam variabel ketenagakerjaan ini dibagi menjadi 4 sektor yaitu sektor manufaktur, pertanian, jasa, dan formal. Dari 4 sektor tersebut diketahui perempuan lebih banyak atau cenderung bekerja pada sektor pertanian, dimana pada Kabupaten Pamekasan perempuan lebih banyak bekerja pada sektor pertanian, Pada Kabupaten Sidoarjo perempuan lebih banyak bekerja pada sektor manufaktur, sedangkan pada Kota Madiun selain perempuan lebih banyak bekerja di sektor jasa dan sektor formal.



Gambar 2 Penyebaran Partisipasi Perempuan dalam Ketenagakerjaan di Kabupaten/Kotamadya di Jawa Timur

3.3 Pengelompokan partisipasi perempuan Kabupaten/Kotamadya di Jawa Timur

Dilakukan analisis pengelompokan (cluster) untuk mengetahui pengelompokan partisipasi perempuan pada masing-masing Kabupaten/Kotamadya di propinsi Jawa

Timur. Ukuran kedekatan antar objek yang digunakan adalah jarak korelasi sedangkan metode pengelompokan yang digunakan adalah metode *complete linkage*. Penelitian ini menggunakan metode *complete linkage* karena metode ini menghasilkan perbedaan karakteristik atau faktor-faktor yang mempengaruhi partisipasi perempuan dalam kemajuan Kabupaten/Kotamadya di propinsi Jawa Timur pada masing-masing kelompok.

Pengelompokan Kabupaten/Kotamadya di Jawa Timur mempunyai tujuan untuk mengetahui Kabupaten/Kotamadya yang memiliki karakteristik yang sama (homogen). Untuk hasil pengelompokan Kabupaten/Kotamadya di propinsi Jawa Timur dapat dilihat pada Tabel 1.

Pada Tabel 1 menunjukkan bahwa kelompok I terdiri atas 15 Kabupaten/Kotamadya, kelompok II terdiri atas 14 Kabupaten/Kotamadya, untuk kelompok III terdiri atas 9 Kabupaten/Kotamadya.

Tabel 1 Pengelompokan Kabupaten/Kotamadya di Propinsi Jawa Timur

| Kelompok | Kabupaten/Kotamadya |
|----------------|--|
| I (Kuning) | Kab.Pacitan, Kab.Ponorogo, Kab.Lumajang, Kab.Bondowoso, Kab.Situbondo, Kab.Probolinggo, Kab.Madiun, Kab.Ngawi, Kab.Bojonegoro, Kab.Tuban, Kab.Lamongan, Kab.Bangkalan, Kab.Sampang, Kab.Pamekasan, Kab.Sumenep |
| II (Biru) | Kab.Trenggalek, Kab.Tulungagung, Kab.Blitar, Kab.Kediri, Kab.Malang, Kab.Jember, Kab.Banyuwangi, Kab.Pasuruan, Kab.Mojokerto, Kab.Jombang, Kab.Nganjuk, Kab.Magetan, Kab.Gresik, Kota Batu |
| III (Putih) | Kab.Sidoarjo, Kota Kediri, Kota Blitar, Kota Malang, Kota Probolinggo, Kota Pasuruan, Kota Mojokerto, Kota Madiun, Kota Surabaya |

Sumber : Data SUSENAS tahun 2006, diolah peneliti

Tabel 2 menunjukkan rata-rata (mean), varian, maksimum dan minimum untuk variabel pendidikan seperti SMP, SMA, Perguruan Tinggi dan angka melek huruf sedangkan variabel ketenagakerjaan seperti TPAK, bekerja, pengangguran, serta dilihat berdasarkan sektor tempat bekerja yaitu sektor manufaktur, sektor pertanian, jasa, dan formal. Yang dimana kelompok I pada angka melek huruf perempuan mempunyai nilai rata-rata 83,55 persen dengan nilai minimum sebesar 72,48 persen dan nilai maksimum sebesar 93,54 persen yang berarti kelompok I mempunyai ciri-ciri dengan tingkat

pendidikan perempuan yang rendah sedangkan untuk tingkat partisipasi perempuan dalam dunia kerja sedang, pada kelompok I perempuan lebih banyak bekerja pada sektor pertanian dan manufaktur.

Pada kelompok II rata-rata persentase perempuan lebih besar yaitu 89,10 persen dengan nilai minimum dan maksimum sebesar 84,61 dan 93,01 persen, yang dimana pada kelompok 2 memiliki ciri-ciri yaitu tingkat pendidikan perempuan yang rendah sedangkan untuk tingkat partisipasi perempuan dalam dunia kerja tinggi, pada kelompok 2 perempuan lebih banyak bekerja pada sektor pertanian. Sedangkan pada kelompok III juga mempunyai rata-rata persentase angka melek huruf perempuan sebesar 92,73 persen dengan nilai minimum dan maksimum sebesar 84,25 dan 96,18 persen.

Tabel 2 Statistika deskriptif pada variabel pendidikan dan ketenagakerjaan pada masing-masing kelompok

| Kategori | Kelompok I | Kelompok II | Kelompok III |
|-------------------|------------|-------------|--------------|
| SMP | 16.67 | 7.43 | 19.06 |
| | (10.69) | (7.75) | (9.27) |
| SMA | 8.21 | 3.88 | 21.13 |
| | (6.57) | (1.29) | (27.25) |
| Perguruan Tinggi | 2.6 | 0.81 | 7.53 |
| | (1.13) | (0.14) | (9.18) |
| Angka melek huruf | 83.55 | 70.41 | 92.73 |
| | (25.14) | (39.09) | (13.86) |
| TPAK | 68.12 | 71.45 | 63.35 |
| | (7.18) | (7.24) | (6.42) |
| Bekerja | 82.86 | 89.1 | 80.21 |
| | (20.53) | (12.91) | (20.62) |
| Pengangguran | 17.13 | 10.9 | 19.79 |
| | (20.53) | (12.91) | (20.62) |
| Manufaktur | 17.19 | 14.84 | 23.05 |
| | (60.04) | (15.53) | (54.3) |
| Pertanian | 44.52 | 63.6 | 6.6 |
| | (97.88) | (110.67) | (64.3) |
| Jasa | 8.16 | 3.47 | 18.55 |
| | (15.73) | (2.34) | (39.62) |
| Formal | 5.11 | 2.89 | 9.71 |
| | (3.31) | (0.14) | (4.17) |

Sumber : Data SUSENAS tahun 2006, diolah peneliti

Pada kelompok III mempunyai ciri-ciri untuk tingkat pendidikan perempuan yang tinggi sedangkan pada tingkat partisipasi perempuan dalam dunia kerja rendah, kelompok

III perempuan lebih banyak bekerja pada sektor manufaktur dan jasa yang dimana pada kelompok III ini merupakan kelompok kota-kota besar. Secara visual, dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Pengelompokan Partisipasi Perempuan di Jawa Timur

4. KESIMPULAN

Hasil pengelompokan Kabupaten/Kotamadya di propinsi Jawa Timur berdasarkan partisipasi dalam segi pendidikan dan ketenagakerjaan menghasilkan 3 kelompok. Kelompok I terdiri 15 kabupaten/Kotamadya, kelompok II terdiri atas 14 kabupaten/kotamadya, dan kelompok III terdiri atas 9 Kabupaten/Kotamadya.

Pada kelompok I mempunyai ciri-ciri dengan tingkat pendidikan perempuan yang rendah sedangkan untuk tingkat partisipasi perempuan dalam dunia kerja sedang, pada kelompok I perempuan lebih banyak bekerja pada sektor pertanian dan manufaktur. Pada kelompok II memiliki ciri-ciri yaitu tingkat pendidikan perempuan yang rendah sedangkan untuk tingkat partisipasi perempuan dalam dunia kerja tinggi, pada kelompok II perempuan lebih banyak bekerja pada sektor pertanian. Sedangkan pada kelompok III mempunyai ciri-ciri untuk tingkat pendidikan perempuan yang tinggi sedangkan pada tingkat partisipasi perempuan dalam dunia kerja rendah, kelompok III perempuan lebih banyak bekerja pada sektor manufaktur dan jasa yang dimana pada kelompok III ini merupakan kelompok kota-kota besar.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini tidak akan berjalan lancar tanpa bantuan dari semua pihak. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terima kasih pada pihak-pihak yang telah membantu dalam penelitian ini.

1. Ibu Ismaini Zain dan Bapak Dwiatmono selaku ketua tim peneliti sekaligus pembimbing.
2. DIKTI, selaku pemberi dana penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] BPS. http://www.bps.go.id/brs_file/kemiskinan-01sep06.pdf. 2005. Diakses pada 3 maret 2010.
- [2] Sukesri dalam Ria P.Y. <http://ejournal.unud.ac.id/abstrak/mjlhsrikandiria.pdf>. 1991. Diakses pada 7 maret 2010.
- [3] Sudarta. *Peranan Pria dan Wanita dalam Urusan Rumah Tangga*. Jurnal Dinamika Kependudukan. 2000. Vol. II. no 1
- [4] Wahyuni S. *Peranan Wanita Dalam Pembinaan Budaya*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Jakarta. 1991.
- [5] Hastuti.. *Hambatan Sosial Budaya dalam Pengarusutamaan Gender di Indonesia*. SOCA. 2005. Vol. 5 no.2.
- [6] Johnson dan Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. New Jersey: Prentice Hall Inc. 2002.

ANALISIS POLA DATA SEBAGAI ALTERNATIF DALAM PENENTUAN ORDE INTERVENSI MULTI INPUT

Dewi Anugeraheni Sahari, Winita Sulandari, dan Siswanto

Jurusan Matematika FMIPA UNS

dewianugeraheni@gmail.com

Abstrak. Model intervensi merupakan suatu model *time series* yang dapat digunakan untuk memodelkan dan meramalkan data yang mengandung guncangan atau intervensi baik dari faktor eksternal maupun internal. Dalam menyusun model intervensi, ketepatan mengidentifikasi orde intervensi sangat diperlukan. Identifikasi orde intervensi melalui pola data diharapkan lebih mudah dan efisien dibandingkan menggunakan pola residu model sebelum intervensi. Untuk menentukan orde intervensi menggunakan pola data asli, harus diketahui karakteristik orde terhadap pola data. Karakteristik tersebut diperoleh dari beberapa pola respon hasil simulasi beberapa orde intervensi. Selanjutnya, orde intervensi dapat ditentukan dengan menyesuaikan pola data dengan karakteristik yang diperoleh.

Hasil dari penelitian ini diterapkan pada data IHK Surakarta periode Januari 2000 - November 2009 dan IHK Nasional periode Januari 1995 - Juli 1998. Dalam penerapan ini, orde intervensi diidentifikasi dengan dua metode, yaitu menggunakan pola residu dan pola data. Hasilnya menunjukkan bahwa identifikasi orde intervensi menggunakan pola data lebih mudah dan efisien.

Keyword: intervensi, *time series*, pola residu, pola data

1. PENDAHULUAN

Model intervensi merupakan suatu model *time series* yang dapat digunakan untuk memodelkan dan meramalkan data yang mengandung guncangan atau intervensi baik dari faktor eksternal maupun internal. Sampai saat ini, penelitian tentang analisis intervensi terbatas hanya memasukkan satu jenis guncangan (*single input*). Dalam penelitian ini akan dikaji lebih lanjut mengenai model intervensi multi input.

Menurut Box dan C. Reinsel (2008), dengan melihat struktur atau pola data asli dan melakukan pemeriksaan terhadap residu model sebelum intervensi dapat membantu dalam mengidentifikasi orde intervensi. Ismail *et. al* dan Nuvitasari *et. al* mengkaji lebih lanjut tentang penentuan orde intervensi melalui residu model. Pada penelitian ini akan dilakukan analisis terhadap pola data asli untuk menentukan orde intervensi yang diharapkan lebih mudah dan efisien. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini akan

diterapkan pada data IHK Surakarta periode Januari 2000 - November 2009 dan IHK Nasional periode Januari 1995 - Juli 1998.

2. MATERI DAN METODE

2.1 Model Intervensi Multi Input

Menurut Wei (1994), bentuk umum dari model intervensi multi input adalah

$$Z_t = \sum_{j=1}^k \frac{\omega_{s_j}(B)B^{b_j}}{\delta_{r_j}(B)} I_{jt} + N_t \quad (2.1)$$

dengan,

Z_t : variabel respon pada waktu t (deret *output*)

I_{jt} : variabel intervensi ke j pada waktu t (deret *input*)

N_t : error yaitu model ARIMA tanpa efek intervensi

b_j, r_j, s_j : orde pada model intervensi ke j

j : banyaknya intervensi

$\omega_{s_j}(B)$ dan $\delta_{r_j}(B)$ didefinisikan sebagai berikut ,

$$\omega_{s_j}(B) = \omega_{0_j} - \omega_{1_j}B^1 - \omega_{2_j}B^2 - \dots - \omega_{s_j}B^{s_j}$$

$$\delta_{r_j}(B) = 1 - \delta_{1_j}B^1 - \delta_{2_j}B^2 - \dots - \delta_{r_j}B^{r_j}$$

Model respon dari variabel intervensi dirumuskan sebagai

$$v_t = \frac{\omega_s(B)B^b}{\delta_r(B)} I_t$$

dengan v_t menyatakan besarnya respon (pengaruh) intervensi pada waktu t

2.2 Estimasi Parameter Model Intervensi

Estimasi parameter untuk model intervensi multi input dapat menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*. Model umum intervensi multi input pada persamaan 2.1 dapat dinyatakan sebagai

$$\theta^{-1}(B)\varphi(B)Z_t = \theta^{-1}(B)\varphi(B) \sum_{j=1}^k \frac{\omega_{s_j}(B)B^{b_j}}{\delta_{r_j}(B)} I_{jt} + a_t$$

Dengan asumsi bahwa $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$. Fungsi kepadatan a_t adalah

$$f(a_1, \dots, a_n | \sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n a_t^2\right)$$

sehingga fungsi likelihood dapat diperoleh, yaitu

$$L(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q | b, r, s, p, d, q, Z_t, I_t) = \sum_{t=1}^n a_t^2$$

Nilai parameter akan diperoleh dengan meminimumkan $\sum_{t=1}^n a_t^2$.

2.3 Variabel Intervensi

Terdapat tiga variabel intervensi yaitu fungsi *pulse*, *step* dan *ramp* (Mcleod dan Vingilis, 2005), yaitu

1. Fungsi *Pulse*

Menurut Box dan C. Reinsel (2008), fungsi *pulse* merepresentasikan pengaruh intervensi yang sifatnya temporer atau transien dan menghilang setelah waktu T , dinotasikan sebagai

$$I_t = P_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases} \quad (2.2)$$

2. Fungsi *Step*

Menurut Box dan C. Reinsel (2008), fungsi *step* menunjukkan pengaruh intervensi yang permanen setelah waktu T . Fungsi *step* pada waktu ke T dinotasikan sebagai

$$I_t = S_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases} \quad (2.3)$$

Dari persamaan 2.2 dan 2.3 dapat dilihat bahwa fungsi *pulse* dapat diturunkan dari fungsi *step*, yaitu

$$P_t^{(T)} = S_t^{(T)} - S_{t-1}^{(T)} = (1 - B)S_t^{(T)}$$

3. Fungsi *Ramp*

Fungsi intervensi *ramp* adalah suatu fungsi intervensi kontinu yang naik secara linear setelah waktu terjadinya intervensi (SAS *Help and Documentation*). Fungsi *ramp* dinotasikan sebagai

$$I_t = R_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t < T \\ t - T, & t \geq T \end{cases} \quad (2.4)$$

Dari persamaan 2.3 dan 2.4 dapat dilihat bahwa *ramp* dapat diturunkan dari fungsi *step*, yaitu

$$(1 - B)R_t^{(T)} = BS_t^{(T)}$$

Model respon dari variabel intervensi adalah

$$v_t = \frac{\omega_s(B)B^b}{\delta_r(B)} I_t$$

v_t menyatakan besarnya pengaruh intervensi pada waktu t . Pada penelitian ini, akan dilakukan simulasi orde pada setiap variabel intervensi. Penulisan variabel intervensi biasanya diikuti dengan orde intervensi (b, r, s) .

2.4 Metode Penelitian

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur, simulasi, dan diterapkan pada contoh kasus dengan mengacu pada buku-buku analisis runtun waktu dan karya ilmiah tentang analisis intervensi yang meliputi hasil-hasil penelitian dan jurnal. Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini.

1. Analisis pola data untuk menentukan orde intervensi multi input.
 - a. Membuat plot respon dari setiap variabel input dengan beberapa kombinasi nilai orde intervensi dan mengamati gerak respon, sehingga dapat ditentukan perbedaannya. Simulasi dilakukan dengan bantuan *software* Minitab 15.
 - b. Membuat kesimpulan tentang ciri-ciri gerak respon dengan beberapa nilai orde intervensi, kemudian menjadikan ini sebagai dasar dalam menentukan orde intervensi melalui plot data asli.
2. Menerapkan hasil yang diperoleh dalam langkah (1b) pada contoh kasus data IHK Surakarta periode Januari 2000 – November 2009 dan IHK Nasional periode Januari 1995 – Juli 1998. Hasil Identifikasi orde intervensi pada model intervensi multi input data IHK tersebut selanjutnya akan dibandingkan dengan hasil identifikasi menggunakan pola residu. Untuk membantu dalam proses penghitungan nilai parameter digunakan *software* SAS 9.1.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Analisis pola data untuk menentukan orde intervensi multi input

Berdasarkan pengamatan hasil simulasi pola respon, dapat diperoleh karakteristik pola data yang dinyatakan pada Tabel 1. Karakteristik pola data ini dapat dijadikan dasar untuk mengidentifikasi orde intervensi karena pola respon identik dengan pola data.

Tabel 1. Karakteristik pola respon pada beberapa nilai orde intervensi dengan penundaan efek b satuan waktu

| r, s | Karakteristik gerak respon fungsi | | |
|--------|--|---|---|
| | <i>Pulse</i> | <i>Step</i> | <i>Ramp</i> |
| 0,0 | Data mengalami lonjakan 1 kali sebesar ω_0 pada waktu $T + b$, kemudian pola data langsung kembali seperti semula (tanpa ada proses penurunan bobot respon secara eksponensial) | Data mengalami lonjakan sebesar ω_0 pada waktu $T + b$, kemudian data stabil pada nilai tersebut, tetapi masih membentuk pola seperti semula | Data mengalami lonjakan sebesar ω_0 pada waktu $T + b$ diikuti proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara linear |
| 1,0 | Data mengalami lonjakan 1 kali mulai waktu $T + b$, kemudian mengalami proses penurunan bobot respon secara eksponensial mulai waktu $T + b$ hingga pola data kembali seperti semula | Data mengalami lonjakan sebesar ω_0 pada waktu $T + b$ diikuti proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara eksponensial mulai waktu $T + b$, kemudian data stabil pada nilai tertentu dengan pola seperti data semula | Data mengalami lonjakan sebesar ω_0 pada waktu $T + b$ diikuti proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara eksponensial |
| 1,1 | Data mengalami lonjakan sebanyak 2 kali sebesar ω_0 dan $\omega_1 + \delta_1\omega_0$, kemudian mengalami proses penurunan bobot respon secara eksponensial mulai waktu $T + b + 2$ hingga pola data kembali seperti semula | Data mengalami lonjakan sebanyak 2 kali sebesar ω_0 dan $\omega_0 - \omega_1 + \delta_1\omega_0$, kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara eksponensial mulai waktu $T + b + 1$, kemudian data stabil pada nilai tertentu dengan pola seperti data semula | Data mengalami lonjakan sebanyak 1 kali sebesar ω_0 , kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara eksponensial mulai waktu $T + b + 1$ |
| 2,0 | Data mengalami lonjakan 1 kali sebesar ω_0 mulai waktu $T + b$, kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon dengan pola gelombang sinus dilanjutkan dengan pola eksponensial mulai waktu $T + b + 1$ hingga pola data kembali seperti semula | Data mengalami lonjakan 1 kali sebesar ω_0 mulai waktu $T + b$, kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) dengan pola gelombang sinus dilanjutkan dengan pola eksponensial mulai waktu $T + b$, kemudian | Data mengalami lonjakan sebesar ω_0 pada waktu $T + b$ diikuti proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara eksponensial |

Lanjutan tabel 1

| | | | |
|-----|--|---|---|
| | | data stabil pada nilai tertentu dengan pola seperti data semula | |
| 2,1 | Data mengalami lonjakan 2 kali sebesar ω_0 dan $\omega_1 + \delta_1\omega_0$ mulai waktu $T + b$, kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon dengan pola gelombang sinus dilanjutkan dengan pola eksponensial mulai waktu $T + b$ hingga pola data kembali seperti semula | Data mengalami lonjakan 2 kali sebesar ω_0 dan $\omega_0 - \omega_1 + \delta_1\omega_0$ mulai waktu $T + b$, kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) dengan pola gelombang sinus dilanjutkan dengan pola eksponensial mulai waktu $T + b$, kemudian data stabil pada nilai tertentu dengan pola seperti data semula | Data mengalami lonjakan sebanyak 2 kali sebesar ω_0 dan $2\omega_0 - \omega_1 + \delta_1\omega_0$, kemudian mengalami proses kenaikan bobot respon (arah naik atau turun) secara eksponensial mulai waktu $T + b + 1$ |

Dari Tabel 1 dapat disimpulkan bahwa keberadaan parameter δ menunjukkan adanya gerak respon secara eksponensial, baik mengalami kenaikan maupun penurunan.

Khusus untuk fungsi ramp, tidak dijumpai adanya pola gelombang sinus, walaupun $r \neq 0$. Dari hasil pengamatan terhadap plot respon dari ketiga variabel intervensi dengan berbagai orde, dapat dituliskan secara umum tentang pengaruh dari setiap parameter terhadap pola respon. Hal ini disajikan dalam Tabel 2.

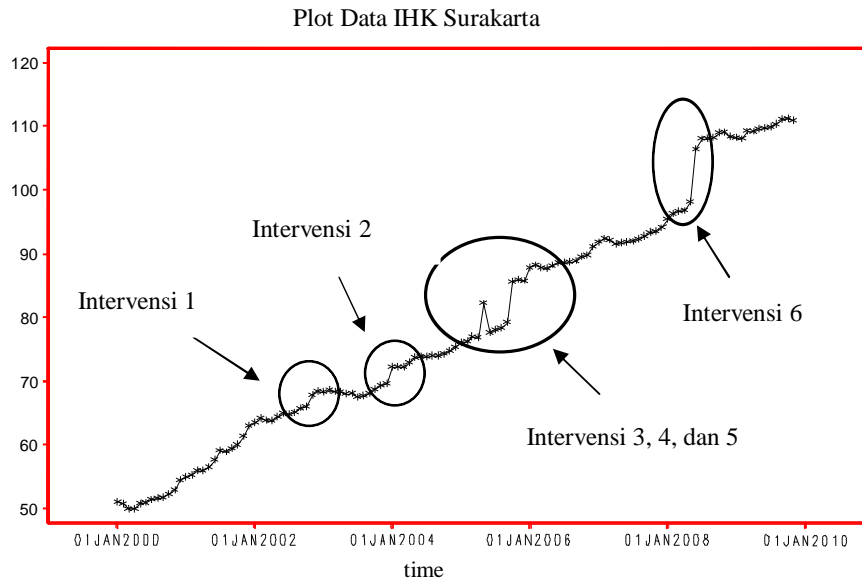
Tabel 2. Pengaruh setiap parameter dalam variabel intervensi terhadap pola respon

| Variabel input | ω_i | δ_1 | δ_2 | |
|----------------|---|--|--|---|
| <i>Pulse</i> | Besarnya ω menentukan besarnya lonjakan pada awal mulai adanya efek, banyaknya parameter ω menentukan banyaknya lonjakan | Besarnya δ_1 menentukan besar dan lama tidaknya efek dari variabel input (semakin besar δ_1 akan semakin besar efek dan semakin lama mengalami pola eksponensial, sehingga semakin lama data menjadi stabil kembali) | Keberadaan δ_2 menunjukkan adanya pola gelombang sinus dalam proses eksponensial yang semakin lama besarnya amplitudo gelombang semakin kecil mendekati nol | Terlihat sangat jelas (semakin besar nilai δ_2 semakin besar amplitudo gelombang, sehingga semakin lama menghilangnya) |
| <i>Step</i> | | | | Terlihat tidak terlalu jelas, nilai δ_2 tidak terlalu berpengaruh dalam proses eksponensial |
| <i>Ramp</i> | yang paling berpengaruh adalah ω_0 yaitu menunjukkan besarnya lonjakan yang pertama kali pada respon, sedangkan untuk ω_i yang lain hampir tidak berpengaruh pada pola respon | Sama seperti pada fungsi step dan pulse, tetapi data tidak pernah stabil (kembali pada pola data awal) | | Hampir tidak terlihat (hampir tidak berpengaruh pada pola data) |

3.2 CONTOH KASUS

3.2.1 Model Intervensi pada Data IHK Kota Surakarta

Contoh kasus yang digunakan adalah data IHK kota Surakarta pada Januari 2000-November 2009 berdasarkan tahun dasar 2007. Plot data disajikan pada Gambar 1.



Sumber: Badan Pusat Statistik

Gambar 1. Plot data IHK kota Surakarta periode Januari 2000 - November 2009 berdasarkan tahun dasar 2007

Hasil identifikasi orde intervensi menggunakan pola data dan residu disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Identifikasi orde intervensi melalui pola data dan residu pada model intervensi data IHK kota Surakarta

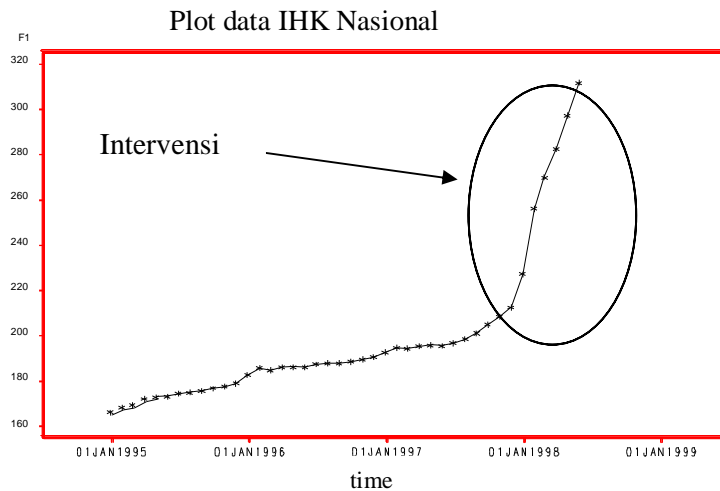
| Intervensi ke- | Variabel intervensi (b, r, s) | |
|----------------|-----------------------------------|----------------------------|
| | Melalui pola data | Melalui pola residu |
| 1 | <i>step</i> (0, 0, 0) | <i>step</i> (0, 0, 0) |
| 2 | <i>step</i> (0, 0, 0) | <i>step</i> (0, 0, 0) |
| 3 | <i>pulse</i> (0, 0, 0) | <i>pulse</i> (0, $_$, 0) |
| 4 | <i>step</i> (0, 0, 0) | <i>step</i> (0, $_$, 0) |
| 5 | <i>step</i> (0, 0, 0) | <i>step</i> (0, 0, 0) |
| 6 | <i>step</i> (0, 0, 0) | <i>step</i> (0, 0, 2) |

Identifikasi orde r pada intervensi 3 dan 4 mengalami kesulitan jika menggunakan pola residu. Hal ini dikarenakan jarak antara intervensi 3, 4 dan 5 sangat dekat. Oleh karena itu, orde r pada intervensi 3, 4, dan 5 lebih mudah ditentukan menggunakan pola data asli. Pada intervensi 6, terlihat identifikasi antara kedua metode

menghasilkan nilai orde s yang berbeda. Namun, setelah dilakukan uji signifikansi parameter model, nilai $s = 0$ memberikan nilai parameter yang tidak signifikan. Oleh karena itu, nilai s yang digunakan adalah nilai s yang diidentifikasi melalui plot data asli.

3.2.2 Model Intervensi pada Data IHK Nasional

Intervensi dengan variabel input fungsi *ramp* dijumpai pada data IHK nasional pada Januari 1995- Juli 1998, pada Tabel 6. Plot data disajikan pada Gambar 2.



Sumber: Badan Pusat Statistik

Gambar 2. Plot data IHK nasional (Januari 1995- Juli 1998)

Hasil identifikasi orde intervensi menggunakan pola data dan residu disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Identifikasi orde intervensi melalui pola data dan residu pada model intervensi data IHK Nasional

| Intervensi | Variabel intervensi (b, r, s) | |
|------------|-----------------------------------|-----------------------|
| | Melalui pola data | Melalui pola residu |
| 1 | <i>ramp</i> (0, 0, 2) | <i>ramp</i> (0, 2, 0) |

4 KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, dilakukan pemeriksaan karakteristik orde intervensi terhadap pola data asli. Berbagai karakteristik yang diperoleh dapat digunakan dalam menentukan orde intervensi melalui pola data asli. Bagi pembaca yang tertarik untuk

menerapkan model intervensi pada suatu data, terutama model intervensi multi input, sebaiknya identifikasi orde intervensi dilakukan melalui pola residu dan data asli, karena keduanya dapat saling mendukung.

5 DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonymous, *SAS Help and documentation*. Index: Intervention Models and Interrupted Time Series, 2005
- [2] Box, G.E.P., Jenkins, G.M., and Reinsel, G.C., *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 4th ed, John Wiley and Sons Ltd, United Kingdom, 2008
- [3] Ismail, Suhartono, Yahaya, A., Efendi R, *Intervention Model for Analyzing the Impact of Terrorism to Tourism Industry*. Journal of Mathematics and statistics, 2009, 5 (4), Hal. 322-329.
- [4] McLeod, A. I and Vingilis, E.R., *Power Computation for Intervention Analysis*. American Statistical Association and the American Society for Quality Technometrics, 2005, 47(2), Hal. 174-180.
- [5] Nuvtasari, E., Suhartono, Sasmito H. W., *Analisis Intervensi Multi Input fungsi step dan pulse untuk Peramalan Kunjungan Wisatawan ke Indonesia*, Financial Statistics Directorate, Information Technology, and Tourism, the Central Statistics Agency, 2008, <http://oc.its.ac.id/detilmateri.php?idp=746> (diakses 5 Desember 2009).
- [6] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis*, Canada: Allan M. Wylde, 1994

ANALISIS REGRESI TOBIT PADA PENDAPATAN PEREMPUAN KAWIN DALAM KEGIATAN EKONOMI DI JAWA TIMUR^{*)}

Mei Puspita Rini, Ismaini Zain, dan Dwiatmono Agus Widodo

Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

meipusparini@yahoo.co.id, ismaini_z@statistika.its.ac.id, dwiatmono@statistika.its.ac.id

ABSTRACT. Women's behavior in economic activities as individually could be seen from women participation in labor force. Those women who have participated in economy were called worker, and those who haven't were called non worker. Married women's income contain mixture scale, because it was null for non worker (discrete) and it was certain value for worker (continue). Data that have structure like that, is called truncated data. Linier Regression method couldn't be used for analyzing mixture data. Therefore, tobit regression was used. In this research, urban and rural was distinguished so characteristics and married women models could be obtained based on their residence. Main purpose of this research were describing income characteristic of married women and modelling income married women with factors that have influenced in women behaviour in economic activities. Source of data in this study originated from the secondary data obtained from the National Socioeconomic Survey data in the province of East Java in 2006, with married women's income as dependent variable and consists of 13 independent variables. Based on residential zoning, there was difference between urban and rural characteristic's. In urban zone, husband age didn't have significant influence in married women income, otherwise in rural zone, husband age have positive influence in married women income. Whereas in education, junior high school have significant influence to married women income in urban, but in rural it didn't have significant influence.

Key Words : Income, married women, economic participation, regression,t.

1. PENDAHULUAN

Keterlibatan perempuan dalam kegiatan ekonomi mencerminkan perilaku ekonomi. Perilaku ekonomi meliputi berpartisipasi dalam kegiatan ekonomi dan tidak berpartisipasi. Perempuan yang berpartisipasi ekonomi berarti bekerja dan yang tidak berpartisipasi berarti tidak bekerja. Perempuan kawin yang tidak bekerja berpendapatan nol dan yang bekerja mempunyai pendapatan tertentu yang bervariasi. Data tersebut disebut data campuran karena terdiri dari data yang berskala diskrit (bernilai nol) dan skala kontinu (mempunyai nilai tertentu yang bervariasi)^[1]. Oleh karena itu untuk menganalisis digunakan metode regresi tobit. Dengan menggunakan metode regresi tobit diharapkan hasil yang diperoleh menjadi lebih baik dari regresi klasik^[2].

Penelitian tentang partisipasi perempuan telah banyak dilakukan, diantaranya analisis terhadap perempuan kawin dengan menggunakan metode regresi logistik trikotomus, data dikategorikan menjadi tiga, yaitu tidak bekerja, bekerja formal dan informal^[3]. Penelitian lain tentang partisipasi perempuan berdasarkan lapangan kerja^[4]. Selain itu terdapat penelitian tentang partisipasi perempuan berdasarkan status usaha^[5]. Pada penelitian-penelitian tersebut variabel respon dibatasi hanya skala nominal dan dikategorikan. Hal tersebut mengurangi informasi data yang ada, sehingga dalam penelitian ini data tidak dikategorikan dan mempunyai skala campuran, untuk menganalisis digunakan metode regresi tobit.

Beberapa penelitian menggunakan regresi tobit telah dilakukan antara lain diperoleh kesimpulan bahwa dengan menggunakan regresi tobit dihasilkan variabel independen yang signifikan terhadap variabel dependen lebih banyak dibandingkan dengan menggunakan OLS^[6]. Hal serupa juga disimpulkan pada penelitian tentang kepuasan konsumen untuk jasa pengangkutan barang^[2]. Penelitian lain menyimpulkan pada regresi OLS data dibatasi minimal berskala interval sedangkan pada tobit data berupa skala campuran^[7]. Pada penelitian Zain, Widodo dan Wulandari variabel respon yang diamati adalah pendapatan perempuan dan lamanya jam kerja, perempuan tersebut berstatus kawin ataupun tidak dan diperoleh hasil persentase perempuan kawin yang bekerja cukup besar dibanding persentase perempuan belum kawin^[8]. Untuk itu dalam penelitian ini pengamatan lebih dispesifikasikan pada perempuan kawin.

Berdasarkan uraian diatas peneliti melakukan penelitian dengan tujuan mengetahui karakteristik pendapatan perempuan kawin dan memodelkan faktor-faktor yang mempengaruhi pendapatan perempuan kawin dalam kegiatan ekonomi berdasarkan tempat tinggal.

2. MATERI DAN METODE

Data tersensor

Variabel respon yang mempunyai sifat *mixture* (campuran) diskrit dan kontinu, diskrit untuk yang bernilai nol dan kontinu untuk yang tidak nol, data tersebut biasa disebut data tersensor^[1]. Disebut data tersensor jika pada variabel respon terdapat nilai yang dibatasi^[2].

regresi tobit (*Truncated Regression*).

Regresi merupakan analisis regresi yang digunakan untuk variabel tak bebas yang sebagian datanya berskala diskrit dan sebagian data berskala kontinu. Secara umum model dari regresi tobit adalah sebagai berikut^[9].

$$y_t = \begin{cases} y_t^*, & y_t > 0 \\ 0, & y_t \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dimana $t = 1, 2, 3, \dots, T$ dan y_t^* adalah variabel respon dengan persamaan sebagai berikut.

$$y_t^* = X_t \beta + u_t \quad (2)$$

dengan β : koefisien vektor berukuran $k \times 1$ yang tidak diketahui, k adalah banyaknya parameter

X_t : matriks berukuran $T \times k$ dari variabel prediktor

u_t : error yang diasumsikan berdistribusi $N(0, \sigma^2)$

y_t^* : matriks variabel respon berukuran $T \times 1$ yang berdistribusi normal (μ, σ^2)

Pendugaan parameter

Dalam menduga parameter regresi tobit digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dengan menggunakan metode ini diperoleh penduga yang konsisten dan efisien untuk sampel yang berukuran besar^[10], karena penduga parameter regresi tobit merupakan *closed form* maka untuk memperolehnya nilai penduga digunakan iterasi newton raphson.

Pengujian estimasi parameter

Untuk mendapatkan model regresi tobit digunakan pengujian parameter berikut^[10].

1. Uji Parsial

Uji Parsial digunakan untuk pengujian individu yang menunjukkan apakah suatu variabel bebas signifikan atau layak untuk masuk model atau tidak. Untuk mengujinya digunakan *Wald test*. Berikut hipotesisnya

$H_0: \beta_j = 0$ (koefisien β_j tidak signifikan secara statistik)

$H_1: \beta_j \neq 0$ (koefisien β_j signifikan secara statistik), $j = 1, 2, \dots, p$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$W = \left(\frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)} \right) \quad (3)$$

Dimana $\hat{\beta}_j$ adalah penaksir parameter β_j dan $SE(\hat{\beta}_j)$ adalah penduga *standart error* dari β_j , p adalah banyaknya variabel prediktor. H_0 ditolak jika nilai statistik uji $W < -$

$Z_{\alpha/2}$ atau $W > Z_{\alpha/2}$ atau jika $p\text{-value} < \alpha$ yang berarti β_j berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

2. Uji Serentak

Uji serentak digunakan untuk memeriksa fungsi koefisien β secara keseluruhan atau bersama-sama, untuk mengujinya digunakan metode *likelihood ratio* atau uji G. Berikut hipotesis yang digunakan.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

H_1 : minimal ada salah satu β_j yang tidak sama dengan nol, $j=1, 2, 3, \dots, p$.

Statistik Uji yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$G = -2 \ln \left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) \quad (4)$$

dimana $L(\hat{\omega})$ = nilai maksimum likelihood tanpa variabel prediktor tertentu.

$L(\hat{\Omega})$ = nilai maksimum likelihood dengan variabel prediktor tertentu.

H_0 ditolak jika $G > \chi^2_{(v,\alpha)}$ atau jika $p\text{-value} < \alpha$ yang berarti ada salah satu atau lebih β_j yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon.

Kriteria kebaikan model

Pada umumnya dalam analisis regresi untuk memperoleh kebaikan model digunakan koefisien determinasi R^2 . Berikut rumus R^2 untuk regresi tobit^[11].

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (5)$$

Dimana $\hat{u}_t = y_t - (\hat{\beta}' X_t) \Phi(\hat{\beta}' X_t / \hat{\sigma}) - \hat{\sigma} \phi(\hat{\beta}' X_t / \hat{\sigma})$

Faktor-faktor yang mempengaruhi perempuan kawin dalam melakukan kegiatan ekonomi.

Dalam konsep ketenaga kerjaan penduduk dibagi menjadi dua golongan yaitu penduduk umur kerja dan penduduk bukan umur kerja. Penduduk umur kerja terbagi dua yaitu bekerja dan menganggur. Penduduk dikatakan bekerja jika penduduk tersebut melakukan suatu kegiatan ekonomi yang dengan maksud memperoleh atau membantu memperoleh pendapatan atau keuntungan, paling sedikit 1 jam (tidak terputus) dalam seminggu yang lalu. Kegiatan tersebut meliputi kegiatan pekerja tak dibayar yang membantu dalam suatu usaha atau kegiatan ekonomi^[12].

Pendapatan merupakan upah dan gaji atas jam kerja atau pekerjaan yang telah diselesaikan, upah lembur, semua bonus dan tunjangan, perhitungan waktu-waktu tidak bekerja, bonus yang dibayarkan tidak teratur, penghargaan, dan nilai pembayaran

sejenisnya^[12]. Pendapatan merupakan suatu hal yang penting dalam mempengaruhi kehidupan seseorang dalam memenuhi kebutuhan hidupnya. Pendapatan bisa berasal dari bidang apa saja, dalam memperoleh pendapatan seseorang bisa bekerja di instansi pemerintah, swasta maupun dengan mendirikan usaha sendiri. Pendapatan bisa diperoleh karena usaha kerja dengan mengeluarkan tenaga atau dengan jasa atas kemampuan dan keahlian yang dimiliki seseorang^[12].

Beberapa hal yang mendorong perempuan bekerja antara lain karena kebutuhan finansial atau faktor ekonomi untuk memenuhi kebutuhan sehari-hari, kebutuhan relasional dan sosial akan identitas dan penerimaan sosial melalui komitmen kerja, kebutuhan aktualisasi diri untuk berkarya, berkreasi, mencipta, mengekspresikan diri dengan orang lain, membagikan ilmu dan pengalaman, menghasilkan sesuatu, mendapat penghargaan, penerimaan dan prestasi^[13]. Faktor tersebut berasal dari segi psikologis perempuan. Dalam kehidupan pribadinya ada beberapa faktor yang mendorong perempuan melakukan kegiatan ekonomi terutama bagi perempuan yang berkeluarga, antara lain karena jumlah anak, jumlah anak yang bekerja, jumlah anak yang sekolah, jumlah anak balita, umur, umur suami, umur perkawinan pertama, jumlah tahun dalam ikatan perkawinan, jumlah jam kerja suami, pendidikan perempuan kawin tersebut, pendidikan suami, lapangan kerja suami, status pekerjaan suami, rata-rata pengeluaran rumah tangga dalam sebulan^[3].

Metode

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder SUSENAS di provinsi Jawa Timur tahun 2006 dengan jumlah sampel sebanyak 15.182 responden. Variabel respon penelitian ini adalah pendapatan perempuan kawin dalam kegiatan ekonomi (y_t) dimana y_t bernilai 0 untuk perempuan kawin yang tidak bekerja dengan skala data diskrit dan bernilai y_t^* untuk perempuan kawin yang bekerja dalam bidang formal, selanjutnya disebut bekerja, dengan skala data kontinu.

$$y_t = \begin{cases} 0 & \text{jika tidak bekerja dan tidak berpendapatan} \\ y_t^* & \text{jika bekerja dan berpendapatan} \end{cases}$$

Pada penelitian ini untuk mengetahui perbedaan karakteristik dan pemodelan antara perkotaan dan pedesaan maka digunakan variabel moderator berdasarkan lokasi tempat tinggal. Variabel prediktor yang dilibatkan dalam penelitian ini sebanyak 13 variabel, berikut ditampilkan dalam Tabel 1.

Tabel 1 Variabel Prediktor

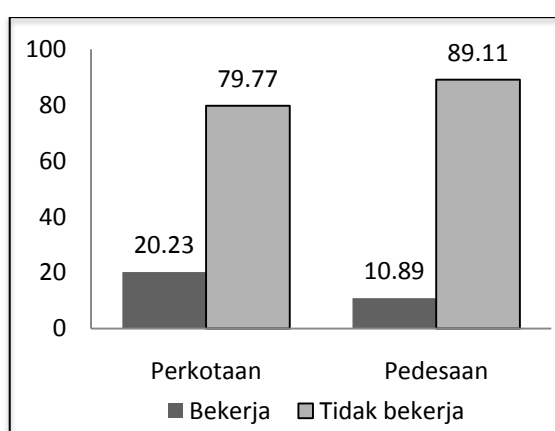
| Nama Variabel | Kategori | Skala | Ket |
|---|--|---------|----------|
| Jumlah ART | - | rasio | X_1 |
| Jumlah anak yang bekerja | - | rasio | X_2 |
| Jumlah anak umur balita | - | rasio | X_3 |
| Umur | - | rasio | X_4 |
| Umur suami | - | rasio | X_5 |
| Pendidikan terakhir | 0 \leq SD sederajat 1 = SMP sederajat 2 \geq SMA sederajat | ordinal | X_6 |
| Pendidikan terakhir suami | 0 \leq SD sederajat 1 = SMP sederajat 2 \geq SMA sederajat | ordinal | X_7 |
| Hari kerja dalam seminggu | - | rasio | X_8 |
| Jam kerja dalam seminggu | - | rasio | X_9 |
| Bidang pekerjaan utama | 0 = tidak bekerja 1 = pertanian 2 = industri 3 = perdagangan 4 = jasa 5 = lain-lain | nominal | X_{10} |
| Status kerja suami | 0= Tidak Bekerja 1= Bekerja | nominal | X_{11} |
| Rata-rata pengeluaran rumah tangga perbulan | - | rasio | X_{12} |
| Rumah tangga penerima BLT | 0 = Tidak menerima 1 = Menerima | nominal | X_{13} |

Sumber : Susenas 2006, diolah

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Karakteristik variabel penelitian

Keterlibatan perempuan kawin dalam kegiatan ekonomi ditunjukkan dengan besarnya pendapatan. Pendapatan tersebut bernilai nol jika perempuan kawin tidak bekerja dan mempunyai nilai tertentu jika perempuan kawin bekerja. Pendapatan perempuan kawin yang mempunyai nilai nol (diskrit) dan nilai tertentu (kontinu) data seperti itu termasuk data tersensor[1].



Gambar 1 Persentase Pendapatan Perempuan Kawin

Pada Gambar 1 diketahui terdapat perbedaan antara persentase perempuan kawin yang bekerja dan tidak bekerja. Tampak bahwa persentase perempuan kawin yang bekerja jauh lebih kecil dibanding dengan persentase perempuan kawin yang tidak bekerja baik di perkotaan maupun di pedesaan. Hal ini menunjukkan adanya perbedaan karakteristik perempuan kawin bekerja dan tidak bekerja. Jika dilakukan pengamatan terhadap seluruh data perempuan kawin tanpa membedakan yang bekerja dan tidak bekerja akan terjadi bias pada data, untuk menghindari terjadinya bias pada karakteristik perempuan kawin maka dilakukan pengamatan terpisah antara perempuan kawin bekerja dan tidak bekerja.

Pada Tabel 2 diperoleh *mean* pendapatan perempuan kawin yang bekerja di perkotaan lebih besar daripada di pedesaan, sebaliknya *standart deviasi* pendapatan perempuan kawin di pedesaan lebih besar daripada di perkotaan. Hal ini menunjukkan kualitas pendapatan di perkotaan lebih baik daripada di pedesaan.

Tabel 2 Deskripsi Pendapatan Perempuan Kawin (Rupiah/bulan)

| | Perkotaan | Pedesaan |
|-------------|------------|--------------|
| Mean | 867.809,79 | 581.769,25 |
| St. Deviasi | 930.074,63 | 1.028.587,51 |
| Min | 50.000 | 50.000 |
| Max | 15.000.000 | 20.000.000 |

Sumber : Susenas 2006, diolah

Berdasarkan Tabel 3 dapat diketahui karakteristik jumlah anggota rumah tangga relatif tidak berbeda antara bekerja dan tidak bekerja baik di perkotaan maupun di pedesaan. Demikian juga untuk karakteristik jumlah anak yang bekerja dan jumlah anak balita pada data perkotaan dan pedesaan baik yang bekerja maupun yang tidak bekerja. Namun pada karakteristik pengeluaran rumah tangga antara perkotaan dan pedesaan tampak ada perbedaan. Rata-rata pengeluaran di perkotaan lebih tinggi dibanding dengan pedesaan, begitu juga dengan *standart deviasi* pengeluaran rumah tangga di perkotaan lebih besar daripada di pedesaan. Hal ini dimungkinkan karena pola hidup masyarakat perkotaan yang cenderung konsumtif. Penduduk perkotaan banyak mengalokasikan pengeluaran untuk perumahan (fasilitas rumah, listrik dan bahan bakar), barang dan jasa (perawatan tubuh, kesehatan dan pendidikan), sedangkan penduduk pedesaan pengeluaran terbesar cenderung pada kebutuhan pokok^[14].

Tabel 3 Deskripsi Variabel Penelitian (Data Kontinu)

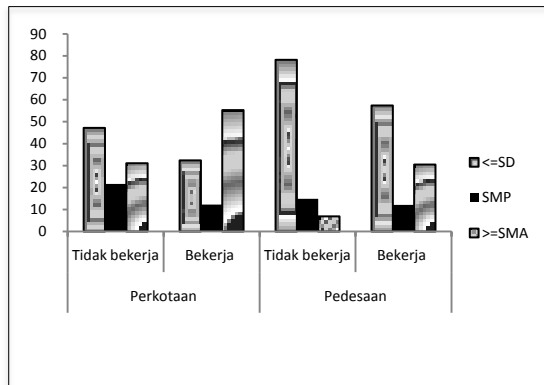
| | | Perkotaan | | Pedesaan | |
|-------------------------------------|------------|---------------|---------|---------------|---------|
| | | Tidak bekerja | Bekerja | Tidak bekerja | Bekerja |
| Jumlah ART (X_1) | Mean | 4 | 3,96 | 3,80 | 3,74 |
| | St. Dev | 1,38 | 1,30 | 1,34 | 1,12 |
| | Min | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | Max | 15 | 12 | 10 | 9 |
| Jumlah anak yang kerja (X_2) | Mean | 0,26 | 0,19 | 0,23 | 0,20 |
| | St.Dev | 0,58 | 0,53 | 0,52 | 0,50 |
| | Min | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Max | 4 | 4 | 5 | 4 |

| | | | | | |
|---|--------|--------------|--------------|------------|------------|
| Jumlah anak balita (X_3) | Mean | 0,28 | 0,25 | 0,23 | 0,19 |
| | St.Dev | 0,51 | 0,49 | 0,46 | 0,41 |
| | Min | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Max | 3 | 3 | 3 | 2 |
| Umur (X_4) | Mean | 40,99 | 39,41 | 41,06 | 38,76 |
| | St.Dev | 12,31 | 9,14 | 12,88 | 9,38 |
| | Min | 14 | 18 | 16 | 17 |
| | Max | 96 | 80 | 90 | 85 |
| Umur suami (X_5) | Mean | 46,17 | 43,46 | 46,69 | 43,51 |
| | St.Dev | 13,20 | 10,09 | 13,52 | 10,44 |
| | Min | 14 | 20 | 16 | 20 |
| | Max | 98 | 91 | 98 | 90 |
| Hari kerja dalam seminggu (X_8) | Mean | | 5,90 | | 5,86 |
| | St.Dev | | 0,78 | | 1,13 |
| | Min | | 1 | | 1 |
| | Max | | 7 | | 7 |
| Jam kerja dalam seminggu (X_9) | Mean | | 41,38 | | 36,94 |
| | St.Dev | | 13,68 | | 13,40 |
| | Min | | 1 | | 5 |
| | Max | | 98 | | 84 |
| Rata-rata pengeluaran RT/bulan (X_{12}) | Mean | 1.166.953,46 | 1.379.109,14 | 730.957,37 | 913.327,20 |
| | St.Dev | 864.230,46 | 910.788,63 | 513.773,43 | 607.872,51 |
| | Min | 174.702 | 228.214 | 129.679 | 176.961 |
| | Max | 22.859.303 | 7.001.726 | 21.769.492 | 7.276.435 |

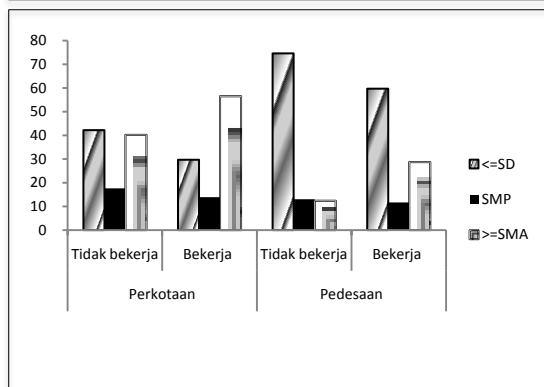
Sumber : Susenas 2006, diolah

Berdasarkan Gambar 2 tampak terdapat perbedaan karakteristik antara perempuan kawin yang bekerja dengan yang tidak bekerja, serta perbedaan karakteristik di perkotaan dan di pedesaan. Dilihat dari latar belakang pendidikan di perkotaan persentase tertinggi adalah perempuan kawin dengan pendidikan lebih dari sama dengan SMA yang berstatus bekerja di bidang jasa. Sebaliknya pada data pedesaan persentase tertinggi didominasi perempuan kawin berpendidikan kurang dari sama dengan SD dengan status tidak bekerja. Keadaan tersebut tidak jauh berbeda pada karakteristik

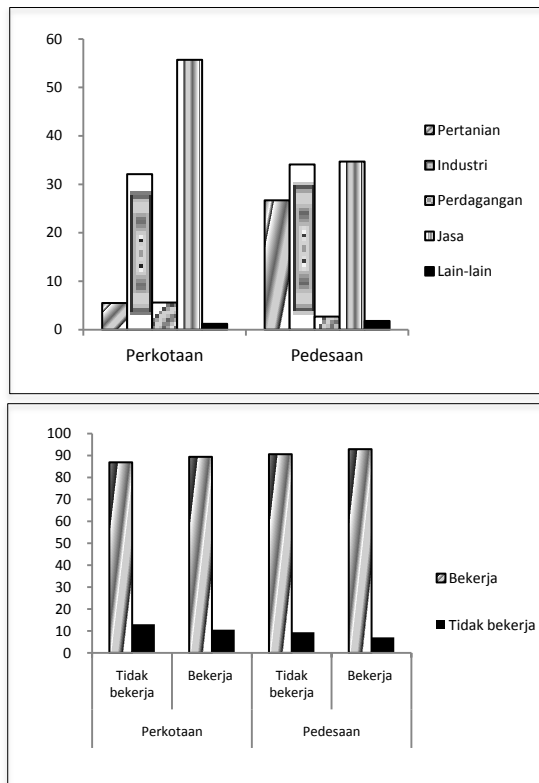
suami, di perkotaan pendidikan suami sebagian besar berpendidikan lebih dari sama dengan SMA, dengan status istri bekerja. Sebaliknya di pedesaan sebagian besar perempuan kawin yang tidak bekerja mempunyai suami lulusan kurang dari sama dengan SD.



(a) Pendidikan

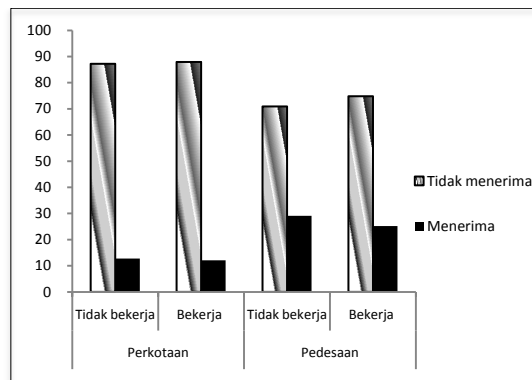


(b) Pendidikan Suami



(c) Jenis Pekerjaan Utama

(d) Status Kerja Suami



(e) Rumah Tangga Penerima BLT

Gambar 2 Karakteristik Variabel Penelitian Berdasarkan Tempat Tinggal dan Partisipasi Ekonomi

Sebelum melakukan pemodelan regresi tobit, variabel yang kategorik didummykan terlebih dahulu untuk mendapatkan model terbaik. Langkah pertama yang dilakukan adalah pengujian secara parsial, Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji *Wald* sesuai dengan persamaan 3 diperoleh nilai koefisien yang ditampilkan pada Tabel 6. Pada pemodelan perkotaan semua variabel prediktor telah signifikan terhadap pendapatan

perempuan kawin, lain halnya dengan pedesaan terdapat variabel yang tidak signifikan yaitu variabel jumlah anak balita dan umur.

Tabel 6. Koefisien Pengujian Variabel Penelitian Secara Parsial

| | Perkotaan | Pedesaan |
|-----------|--------------------|------------|
| Intercept | 160.486* | 48.288* |
| X1 | 3.768,15* | 3.977,03* |
| Intercept | 190.718* | 68.145* |
| X2 | -60.050* | -21.251* |
| Intercept | 179.257* | 67.430* |
| X3 | -13.431* | -18.006 |
| Intercept | 192.368* | 65.328* |
| X4 | -413,65* | -48,04 |
| Intercept | 262.884* | 99.278* |
| X5 | -1.914,19* | -774,94* |
| Intercept | 56.010* | 23.754* |
| X6_1 | 24.431* | 19.429* |
| X6_2 | 318.768* | 389.891* |
| Intercept | 66.795* | 28.588* |
| X7_1 | 28.558* | 23.100* |
| X7_2 | 239.009* | 224.577* |
| Intercept | 7.753,36 | 1.715,27 |
| X8 | 140.635* | 96.534* |
| Intercept | 19.271* | 5.868,368 |
| X9 | 18.671* | 14.291* |
| Intercept | 0.0000000001658407 | - |
| X10_1 | 312.509* | 215.737* |
| X10_2 | 688.165* | 438.582* |
| X10_3 | 731.638* | 355.000* |
| X10_4 | 1.031.501* | 1.026.866* |
| X10_5 | 1.245.000* | 486.000* |

Lanjutan Tabel 6.

| | | |
|-----------|-----------|----------|
| Intercept | 177.656* | 64.941* |
| X11_1 | -16.757* | -17.268* |
| Intercept | 15.124* | -24.855* |
| X12 | 0,13* | 0,12* |
| Intercept | 191.553* | 78.635* |
| X13_1 | -126.905* | -53.249* |

Sumber : Susenas 2006, diolah

Keterangan : *) Uji wald signifikan pada $\alpha = 0.05$

Langkah selanjutnya melakukan uji secara serentak terhadap variabel prediktor yang telah signifikan pada uji parsial. Adapun statistik uji yang digunakan adalah statistik uji G sesuai dengan pada persamaan 4. Berikut diperoleh hasil yang ditampilkan pada Tabel 7.

Tabel 7 Koefisien Pengujian Variabel Secara Serentak terhadap Pendapatan Perempuan Kawin

| | Perkotaan | Pedesaan |
|-----------|------------|-----------|
| Intercept | -172.280* | -90.433* |
| X1 | 1.714,94 | 493,58 |
| X2 | -33.052* | -11.331 |
| X3 | 1.418,93 | |
| X4 | 3.233,92* | |
| X5 | -1.145,43 | 1.207,14* |
| X6_1 | 36.695* | -189,18 |
| X6_2 | 99.743* | 91.625* |
| X7_1 | -29.033* | 1.464,21 |
| X7_2 | -1.383,25 | 27.495* |
| X8 | -115.911* | -33.665* |
| X9 | 6.446,24* | 7.359,29* |
| X10_1 | 809.687* | 185.161* |
| X10_2 | 1.103.523* | 325.087* |
| X10_3 | 1.087.092* | 251.009* |
| X10_4 | 1.389.618* | 874.531* |
| X10_5 | 1.525.585* | 401.124* |

Lanjutan Tabel 7.

| | | |
|-------|------------|----------|
| X11_1 | -7.007.73* | -16.703* |
| X12 | 0,06* | 0,04* |
| X13_1 | -34.612* | -368,53 |

Sumber : Susenas 2006, diolah

Keterangan : *) Uji G signifikan pada $\alpha = 0.05$

Berdasarkan pengujian secara serentak diketahui terdapat beberapa variabel prediktor yang telah signifikan terhadap pendapatan perempuan kawin. Sehingga diperoleh model regresi tobit untuk data di perkotaan adalah sebagai berikut.

$$\hat{Y} = -172.280 - 33.052X_2 + 3.233,92X_4 + 36.695X_{6(1)} + 99.743X_{6(2)} - 29.033X_{7(1)} - 115.911X_8 + 6.446,24 X_9 + 809.687X_{10(1)} + 1.103.523X_{10(2)} + 1.087.092X_{10(3)} + 1.389.618X_{10(4)} + 1.525.585X_{10(5)} - 7.007.73 X_{11(1)} + 0,06 X_{12} - 34.612 X_{13}$$

Berikut untuk pemodelan pendapatan perempuan kawin di pedesaan.

$$\hat{Y} = -90.433 + 1.207,14 X_5 + 91.625 X_{6(2)} + 27.495 X_{7(2)} - 33.665 X_8 + 7.359,29 X_9 + 185.161 X_{10(1)} + 325.087 X_{10(2)} + 251.009 X_{10(3)} + 874.531 X_{10(4)} + 401.124 X_{10(5)} - 16.703 X_{11(2)} + 0.04 X_{12}$$

Berdasarkan pemodelan tersebut dapat dilihat antara perkotaan dan pedesaan terdapat perbedaan pada variabel umur suami dan pendidikan SMP. Pada perkotaan umur suami tidak berpengaruh signifikan terhadap pendapatan perempuan kawin, sebaliknya pada pedesaan umur suami berpengaruh positif terhadap pendapatan perempuan kawin. Sedangkan dalam bidang pendidikan, pada perkotaan pendidikan yang mempengaruhi pendapatan perempuan kawin adalah pada jenjang SMP, namun pada pedesaan variabel ini tidak berpengaruh signifikan terhadap pendapatan perempuan kawin.

Pada pemodelan pendapatan perempuan di perkotaan diperoleh nilai R^2 sebesar 47 persen, hal ini mengartikan bahwa sembilan variabel yang telah signifikan terhadap pendapatan perempuan kawin di perkotaan bisa dijelaskan sebesar 47 persen. Sedangkan pada data pedesaan, ada delapan variabel prediktor yang bisa menjelaskan model pendapatan perempuan kawin sebesar 32 persen.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Persentase perempuan kawin yang bekerja di perkotaan lebih besar dari pada di pedesaan, dimana sebagian besar bekerja di bidang jasa. Selain itu rata-rata

pendapatan perempuan kawin di perkotaan juga lebih besar dari pada di pedesaan. Sebaliknya *standart deviasi* di perkotaan lebih kecil dibanding pedesaan. Perempuan kawin yang bekerja di perkotaan sebagian besar berpendidikan lebih dari sama dengan SMA, lain halnya dengan di pedesaan sebagian besar perempuan kawin yang bekerja berpendidikan terakhir kurang dari sama dengan SD.

2. Pada pemodelan pendapatan perempuan kawin di perkotaan maupun di pedesaan hampir semua variabel mempunyai pengaruh yang sama kecuali pada variabel umur suami, pendidikan SMP dan rumah tangga penerima BLT. Pada data perkotaan variabel yang berpengaruh positif terhadap pendapatan perempuan kawin adalah umur, pendidikan SMP, pendidikan diatas atau sama dengan SMA, jumlah jam kerja/minggu, bidang pekerjaan utama pertanian, bidang pekerjaan utama industri, bidang pekerjaan utama perdagangan, bidang pekerjaan utama jasa, bidang pekerjaan utama lain-lain dan rata-rata pengeluaran rumah tangga perbulan, sedangkan variabel jumlah anak yang bekerja, pendidikan terakhir suami SMP, banyaknya hari kerja/minggu, status kerja suami bekerja dan penerima BLT berpengaruh negatif terhadap pendapatan perempuan kawin. Pada data pedesaan diperoleh variabel yang berpengaruh positif terhadap peningkatan pendapatan perempuan kawin adalah faktor umur suami, pendidikan lebih dari atau sama dengan SMA, jumlah jam kerja/minggu, bidang pekerjaan utama pertanian, bidang pekerjaan utama industri, bidang pekerjaan utama perdagangan, bidang pekerjaan utama jasa, bidang pekerjaan utama lain-lain dan rata-rata pengeluaran/bulan, yang berpengaruh negatif adalah variabel jumlah hari kerja/minggu dan status kerja suami.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kepada Ibu Dr. Dra. Ismaini Zain, M.Si dan Bapak Ir. Dwiatmono Agus Widodo, M.Ikom selaku dosen pembimbing yang selalu sabar memberi bimbingan, arahan dan meluangkan waktu kepada penulis. Serta semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyelesaian makalah ini yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terutama Dikti yang telah memberi kesempatan dalam penelitian Prioritas Nasional Batch II tahun 2010.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Greene, W. H., *Econometrics Analysis, 4th edition*, Prentice Hall, New Jersey. 2000

- [2] Suhardi, I. Y. dan Llewelyn. R., *Penggunaan Model Regresi Tobit untuk Menganalisa Faktor-Faktor yang Berpengaruh terhadap Kepuasan Konsumen untuk Jasa Pengangkutan Barang*, Jurnal Manajemen & Kewirausahaan, 2001. **Vol.3**, No.2: 106-112.
- [3] Suroso, H., *Model Logistik untuk Mengetahui Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Istri Bekerja di Propinsi Jawa Timur*, ITS, Surabaya. 2002.
- [4] Siburian, M. L., *Analisis Regresi Logistik Multinomial pada Faktor-Faktor yang Berpengaruh terhadap Partisipasi Ekonomi Perempuan berdasarkan Lapangan Pekerjaan Utama di Jawa Timur*, ITS, Surabaya. 2009.
- [5] Siagian, S., *Analisis Regresi Logistik Multinomial pada Faktor-Faktor yang Berpengaruh terhadap Partisipasi Perempuan dalam Kegiatan Ekonomi berdasarkan Status Usaha di Jawa Timur*, ITS, Surabaya. 2009.
- [6] Zain, I. & Suhartono, *Model Regresi Tobit dan Aplikasinya*, ITS, Surabaya. 1997.
- [7] Kusfiva, E., *Analisis Regresi Linier Berganda dengan Metode OLS, Probit dan Tobit pada Pengeluaran Rumah Tangga untuk Konsumsi Buah-Buahan*, ITS, Surabaya. 2000.
- [8] Zain, I., Widodo, D. A. & Wulandari, I. A., *Pemodelan Data Tersensor partisipasi Ekonomi Perempuan pada Rumah Tangga miskin (RTM) dan Non RTM dengan Metode Regresi Tobit Multivariat*, ITS, Surabaya. 2009.
- [9] Fair, R. C., *A Note on the Computation of the Tobit Estimator*, Jurnal Econometrica, 1977. **Vol. 45**, No.7.
- [10] Hosmer, D. W. & Lemeshow, S., *Applied Logistic Regression*, John Wiley and Son, New York. 2000.
- [11] Bierens, H. J., *The Tobit Model*,
http://econ.la.psu.edu/~hbierens/EasyRegTours/TOBIT_Tourfiles/TO-BIT.PDF, diakses tanggal 10 Maret 2010. 2004.
- [12] BPS, *Perkembangan Beberapa Indikator Utama Sosial-Ekonomi Indonesia Oktober 2009*, Badan Pusat Statistik, Jakarta. 2009.
- [13] Dewi, I. S., *Kesiapan Menikah pada Wanita Dewasa Awal yang Bekerja*, UNSU, Medan. 2006.
- [14] Suhartini, S. H., Nurwati, A. & Wahyu, K., *Dampak Krisis Ekonomi terhadap Ketahanan Pangan Masyarakat Berpendapatan Rendah di Nusa Tenggara Barat*. 2010.

ANALISIS REGRESI *TOBIT* PADA PENGELUARAN BIAYA KESEHATAN PADA RUMAH TANGGA DI JAWA TIMUR *)

Imam Uddin Hanief, Ismaini Zain, dan Dwiatmono A.W
Mahasiswa, Dosen jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
imam_statistikaits@yahoo.com.id
ismaini_z@statistika.its.ac.id
dwiatmono@statistika.its.ac.id

ABSTRAK. Setiap rumah tangga mempunyai kemampuan yang berbeda-beda dalam pengeluaran biaya kesehatan. Pengeluaran biaya kesehatan merupakan data dengan skala campuran, sebagian pengamatan yang bernilai nol berskala diskrit dan lainnya kontinyu. Metode yang dapat digunakan untuk mengolah data berskala campuran adalah regresi tobit. Tujuan penelitian adalah membuat model pengeluaran biaya kesehatan rumah tangga dengan regresi tobit. Data berasal dari Survey Sosial Ekonomi Nasional Jawa Timur tahun 2006 dengan jumlah sampel sebanyak 29949 rumah tangga. Variabel prediktor yang digunakan antara lain tingkat pendidikan kepala rumah tangga, kondisi rumah, biaya makanan, biaya non makanan, Bantuan Langsung Tunai, proporsi anggota rumah tangga yang sakit, proporsi kepemilikan asuransi dan biaya asuransi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ada perbedaan pengeluaran biaya kesehatan rumah tangga di perkotaan dan pedesaan. Pada pemodelan digunakan transformasi \ln terhadap variabel pengeluaran biaya kesehatan rumah tangga. Pada model perkotaan terdapat tujuh variabel signifikan; sedangkan pada pedesaan terdapat sembilan. Tingkat pendidikan kepala rumah tangga, kondisi rumah, biaya makanan, biaya non makanan, dan proporsi anggota rumah tangga yang sakit menjadi variabel yang berpengaruh pada kedua model. Selain itu ada dua variabel lain yang berpengaruh pada model pedesaan yaitu Bantuan Langsung Tunai dan proporsi kepemilikan asuransi.

Kata kunci: regresi tobit, pengeluaran biaya kesehatan rumah tangga, perkotaan dan pedesaan

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi sering digunakan untuk mengetahui pola hubungan antar variabel. Pada regresi linier klasik, variabel respon berupa data kontinyu^[1]. Ada kasus tertentu dimana variabel respon berupa kombinasi antara data kontinyu dan diskrit; sebagai contoh pengeluaran Rumah Tangga (RT) untuk biaya kesehatan. Setiap RT mempunyai kemampuan yang berbeda-beda dalam pengeluaran biaya kesehatan. Bahkan ada pula RT yang tidak mengeluarkan biaya kesehatan. RT yang mengeluarkan biaya kesehatan berskala kontinyu dan yang tidak mengeluarkan diskrit.

Penelitian tentang pengeluaran biaya kesehatan sebelum ini telah dilakukan oleh beberapa peneliti, antara lain Aday, Begley, Lairson dan Slater (dalam Nadjib dan Pujiyanto^[2]), Ridlo^[3], dan Fauzi^[4]. Menurut penelitian Aday, Begley, Lairson dan Slater^[2]

bahwa penduduk berpendapatan rendah biasanya mengeluarkan porsi yang lebih besar dari pengeluaran non makanan untuk kesehatan dibandingkan penduduk berpendapatan menengah atas. Selanjutnya penelitian Ridlo^[3] berdasarkan hasil Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) tahun 2000 menyatakan bahwa kemauan membayar biaya kesehatan pada RT di Indonesia 50 persen lebih kecil daripada kemampuan membayar. Hal ini mengindikasikan bahwa ada faktor-faktor tertentu yang mempengaruhi RT dalam mengeluarkan anggaran untuk biaya kesehatan. Kemudian Fauzi^[4] melakukan penelitian tentang faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan di Jawa Timur dengan data SUSENAS 2006. Dalam penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan RT meliputi kondisi rumah, wilayah dan status RT. Dalam penelitian tersebut digunakan regresi logistik sebagai metode pengolahan data. Variabel pengeluaran biaya kesehatan RT dikategorikan menjadi mengeluarkan dan tidak mengeluarkan. Jika pada RT yang mengeluarkan biaya kesehatan dibuat sama maka berdampak hilangnya variasi jumlah biaya yang dikeluarkan. Sehingga informasi jumlah pengeluaran biaya kesehatan pun juga ikut hilang.

Pengeluaran biaya kesehatan merupakan data dengan skala campuran, sebagian pengamatan yang bernilai nol berskala diskrit dan lainnya kontinyu. Data campuran tersebut oleh Greene^[5] disebut sebagai data tersensor atau *censored* data. Dibutuhkan metode khusus untuk mengolah data tersebut dan metode yang dapat digunakan adalah analisis regresi *tobit*. Tobin^[6] pertama kali menggunakan metode ini untuk memodelkan hubungan pendapatan RT terhadap pengeluaran RT. Beberapa penelitian yang menggunakan regresi *tobit* dilakukan antara lain oleh Cox dan Linn^[7] dan Purnomo^[8]. Cox dan Linn^[7] memperoleh kesimpulan bahwa model regresi *tobit* dapat menghasilkan *standard error* yang lebih *robust* dibandingkan model regresi linier klasik dan juga nilai prediksi yang kuat untuk kasus data tersensor. Selanjutnya Purnomo^[8] memperoleh kesimpulan bahwa model *tobit* menghasilkan R^2 lebih besar daripada regresi linier klasik pada kasus data tersensor.

Berdasarkan uraian diatas, peneliti melakukan kajian untuk mendapatkan faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan RT di Jawa Timur dengan data SUSENAS 2006. Pada penelitian ini dibuat model dengan menggunakan regresi *tobit* dan model dibedakan berdasarkan wilayah perkotaan dan pedesaan, serta melihat karakteristik pengeluaran biaya kesehatan RT pada masing-masing wilayah.

2. MATERI DAN METODE

2.1 Faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan rumah tangga

Faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan dapat dikelompokkan menjadi empat faktor, yaitu: geografi(wilayah), sosial ekonomi, budaya serta akses mutu dan pelayanan kesehatan. Faktor pertama adalah geografi, dalam hal ini dikhususkan pada pembagian wilayah antara desa dan kota. Asian Development Bank^[9] dalam penelitiannya menyatakan bahwa ketidakadilan dalam pembiayaan kesehatan paling sering dijumpai di negara-negara dimana pembiayaan kesehatannya didominasi dengan cara pembayaran tunai (*out-of-pocket payment*). Penduduk di pedesaan yang membayar biaya kesehatan secara tunai jumlahnya lebih banyak dibandingkan dengan penduduk di daerah perkotaan. Kedua adalah kondisi sosial ekonomi. Merupakan faktor yang mempunyai indikator paling banyak dalam mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan. Kondisi sosial ekonomi meliputi tingkat pendidikan kepala rumah tangga, kondisi rumah, pengeluaran rumah tangga. Ketiga adalah faktor budaya. Namun pada penelitian ini faktor budaya tidak digunakan karena tidak ada variabel yang sesuai dengan data SUSENAS yang ada. Dan yang terakhir adalah akses mutu dan pelayanan kesehatan. Peningkatan mutu dan pelayanan kesehatan merupakan salah satu langkah untuk meningkatkan derajat kesehatan^[10]. Semakin tinggi kualitas pelayanan maka semakin baik pula tingkat kesehatan. Berbagai cara yang dilakukan untuk meningkatkan kualitas pelayanan kesehatan antara lain melalui perbaikan sarana prasarana kesehatan dan jaminan asuransi kesehatan.

2.2 Analisis regresi *tobit*

Regresi *tobit* merupakan analisis regresi dimana nilai variabel responnya memiliki beberapa nilai masukan yakni berupa sebagian data diskrit dan sebagian lagi kontinyu^[11].

$$y_i^* = \beta'x_i + u_i \quad (1)$$

y_i^* adalah variabel respon dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Nilai x_i merupakan variabel prediktor yang mempengaruhi variabel respon, sedangkan β' adalah parameter model. Residual pada regresi *tobit* (u_i) berdistribusi $N(0, \sigma^2)$. Dikarenakan variabel respon sebagian bernilai nol dan sebagian lagi kontinyu, nilai pengamatan y_i diperoleh dari

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, & \text{jika } y_i^* > 0 \\ 0, & \text{jika } y_i^* \leq 0 \end{cases}$$

Variabel respon pada regresi *tobit* mengikuti distribusi normal tersensor. Jika $y_i > 0$, maka fungsi kepadatan peluangnya adalah sebagai berikut.

$$f(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}_i - \beta'\mathbf{x}_i)^2\right) \quad (2)$$

Untuk $y_i = 0$ digunakan probabilitas sebagai berikut.

$$Pr(\mathbf{y}_i = 0|\mathbf{x}_i) = 1 - \Phi\left(\frac{\beta'\mathbf{x}_i}{\sigma}\right) \quad (3)$$

2.3 Penaksiran parameter regresi *tobit*

Penaksiran parameter dalam regresi *tobit* menggunakan metode MLE (*Maximum Likelihood Estimator*). A'Hearn^[12] menyatakan bahwa penggunaan metode MLE akan lebih konsisten, efisien secara *asymptotically* dan berdistribusi normal.

$$\ln L = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} \ln 2\pi + \ln \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2} \left(\frac{y_i - \beta'\mathbf{x}_i}{\sigma}\right)^2 - \ln \Phi\left(\frac{\beta'\mathbf{x}_i}{\sigma}\right) \quad (4)$$

Nilai maksimum fungsi likelihood diperoleh dengan cara menurunkan fungsi likelihoodnya terhadap parameter yang dicari dan disama dengankan nol. Persamaan tersebut merupakan persamaan yang tidak linear sehingga harus diselesaikan dengan cara iterasi^[9]. Kemudian diselesaikan dengan metode iterasi *Newton Raphson* untuk mendapatkan nilai taksiran dari model *tobit*.

2.4 Pengujian estimasi parameter

Persamaan yang mengandung beberapa variabel prediktor dan berpengaruh terhadap variabel respon dapat dilakukan pengujian dengan *likelihood ratio test*^[13]. *Likelihood ratio test* digunakan untuk menguji estimasi parameter secara serentak, sedangkan uji *wald* digunakan untuk pengujian secara individu.

Pada uji serentak $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ melawan H_1 : paling sedikit terdapat satu $\beta_i \neq 0$. Statistik uji yang digunakan adalah $\lambda = -2 \ln \left(\frac{L_{rest}}{L_{full}} \right)$. L_{full} merupakan nilai maksimum fungsi *likelihood* dari model penuh yang mengandung semua β_i , sedangkan L_{rest} adalah nilai maksimum fungsi *likelihood* dari model tertentu. Statistik uji ini mengikuti distribusi *chi-square* dengan derajat bebas k yaitu banyaknya parameter dalam model. Dan H_0 ditolak pada level α tertentu jika $\lambda > \chi_{k,\alpha}^2$.

Pada uji individu $H_0 : \beta_j = 0$ melawan $H_1 : \beta_j \neq 0$. Statistik uji yang digunakan adalah $w = \frac{\hat{\beta}_j}{Se(\hat{\beta}_j)}$. Nilai $\hat{\beta}_i$ merupakan nilai koefisien dari estimasi variabel

prediktor tertentu dengan nilai standar error sebesar $se(\hat{\beta}_i)$. H_0 ditolak pada level α tertentu jika $w > t_{tabel}$ atau $p\text{-value}$ kurang dari α .

2.5 Penentuan kebaikan model

R^2 digunakan untuk mengukur persentase total variasi dalam variabel respon yang dapat dijelaskan oleh model regresi^[14]. Pada regresi *tobit* penggunaan R^2 dijelaskan oleh Bierens^[15] dengan rumus pada persamaan (5).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (5)$$

dengan $\hat{u}_i = y_i - \beta' x_i \Phi(\beta' x_i / \sigma) - \sigma \Phi(\beta' x_i / \sigma)$

2.6 Data dan variabel penelitian

Sumber data yang digunakan dalam penelitian berasal dari data hasil SUSENAS 2006 di Jawa Timur. Unit sampel adalah rumah tangga sebanyak 29949. Variabel respon dalam penelitian ini adalah pengeluaran biaya kesehatan RT untuk pembiayaan rumah sakit, puskesmas, dokter praktek, dukun, obat-obatan, dan lainnya. Dan variabel prediktor yang mempengaruhi antara lain tingkat pendidikan kepala rumah tangga, kondisi rumah, biaya makanan, biaya non makanan, Bantuan Langsung Tunai (BLT), proporsi anggota rumah tangga yang sakit, proporsi kepemilikan asuransi dan biaya asuransi. Pada variabel yang berjenis kategori dibuat menjadi *dummy*. Variabel tersebut meliputi tingkat pendidikan kepala rumah tangga, kondisi rumah dan BLT.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa rata-rata pengeluaran biaya kesehatan RT di perkotaan hampir dua kali lipat dari rata-rata di pedesaan, yakni sebesar 44.101 rupiah setiap bulannya. Pengeluaran biaya kesehatan RT di perkotaan mencapai angka maksimum sebesar dua puluh lima juta rupiah; sedangkan di pedesaan tujuh juta rupiah. Namun dalam Tabel 1 juga terlihat ada RT yang tidak mengeluarkan biaya kesehatan.

RT yang tidak mengeluarkan biaya kesehatan di perkotaan sebanyak 4798 RT dan di pedesaan sebanyak 6832 RT. Dengan jumlah RT yang tidak mengeluarkan biaya kesehatan sebanyak itu dan nilai maksimum yang mengeluarkan biaya kesehatan sangat besar, wajar bila nilai variasi pada kedua wilayah juga besar.

Tabel 1 Pengeluaran Biaya Kesehatan(Rupiah/Bulan)

| Deskripsi | Wilayah | |
|----------------|-----------------|----------------|
| | Kota | Desa |
| N | 13.215 | 16.734 |
| Mean | 44.101 | 23.731 |
| Varians | 144.388.000.000 | 26.855.560.763 |
| Min | 0 | 0 |
| Max | 25.000.000 | 7.000.000 |

Sumber : SUSENAS 2006, diolah

3.1 Model regresi tobit pengeluaran biaya kesehatan RT

Pada statistika deskripif diketahui bahwa variasi nilai pengeluaran biaya kesehatan baik di perkotaan maupun pedesaan sangat besar. Dalam pemodelan digunakan transformasi \ln untuk mengatasi permasalahan tersebut. Hasil pemodelan dengan transformasi \ln ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2 Estimasi parameter model perkotaan dan pedesaan

| Variabel | Estimasi | |
|------------|------------|------------|
| | Perkotaan | Pedesaan |
| Intersep | 4.865* | 5.1446* |
| Edu(1) | - | - |
| Edu(2) | -0.5979* | -0.4750* |
| atap(1) | -0.4907* | -0.7640* |
| dinding(1) | - | - |
| lantai(1) | -0.4031* | - |
| x_5 | - | - |
| air(1) | - | - |
| bab(1) | -0.2311* | -0.2837* |
| lstr(1) | - | -0.2831* |
| x_9 | 0.0000078* | 0.0000095* |
| x_{10} | 0.0000002* | 0.0000004* |
| BLT(1) | - | -0.6260* |
| x_{12} | 4.9323* | 3.0270* |
| x_{13} | - | -0.2528* |
| x_{14} | - | - |

Sumber : SUSENAS 2006, diolah

* signifikan pada $\alpha = 0.05$

Terdapat perbedaan pada kedua model. Pada model perkotaan terdapat tujuh variabel yang berpengaruh signifikan, antara lain : edu(2), atap(1), lantai(1), bab(1), biaya makanan (x_9), biaya non makanan (x_{10}), dan proporsi ART yang sakit selama satu bulan (x_{12}), sedangkan pada model pedesaan ada sembilan variabel, antara lain: edu(2), atap(1), bab(1), listrik(1), biaya makanan (x_9), biaya non makanan (x_{10}), blt(1), proporsi ART yang sakit selama satu bulan (x_{12}) dan proporsi kepemilikan asuransi (x_{13}). Ada beberapa variabel dimana pada kedua model sama-sama berpengaruh dan ada juga yang berbeda.

Pada perkotaan, variabel lantai(1) berpengaruh terhadap model tetapi pada pedesaan tidak. Sedangkan variabel BLT(1) dan proporsi kepemilikan asuransi (x_{13}) pada model pedesaan berpengaruh tetapi pada model perkotaan tidak .

Secara matematis, model pengeluaran biaya kesehatan RT dengan transformasi ln di perkotaan adalah sebagai berikut.

$$\ln \hat{y} = 4.865 - 0.5979\text{edu}(2) - 0.4907\text{atap}(1) - 0.4031\text{lantai}(1) - 0.2311\text{bab}(1) + 0.0000078x_9 + 0.0000002x_{10} + 4.93x_{12}$$

Dimana:

- $\ln \hat{y}$ = Pendugaan pengeluaran biaya kesehatan RT perkotaan dengan transformasi ln
- edu(2) = Beda antara tingkat pendidikan perguruan tinggi dengan dibawah SMP
- atap(1) = Beda antara atap lain dengan genteng atau beton
- lantai(1) = Beda antara lantai tanah dengan bukan tanah
- bab(1) = Beda antara fasilitas BAB lain dengan fasilitas BAB sendiri
- x_9 = Pengeluaran biaya makanan RT dalam satu bulan
- x_{10} = Pengeluaran biaya non makanan RT dalam satu bulan
- x_{12} = Proporsi ART yang sakit selama satu bulan

Model pengeluaran biaya kesehatan RT dengan transformasi ln di pedesaan secara matematis adalah sebagai berikut.

$$\ln \hat{y} = 5.145 - 0.475\text{edu}(2) - 0.764\text{atap}(1) - 0.283\text{bab}(1) - 0.283\text{listrik}(1) + 0.0000095x_9 + 0.0000004x_{10} - 0.626\text{blt}(1) + 3.027x_{12} - 0.252x_{13}$$

Dimana:

- $\ln \hat{y}$ = Pendugaan pengeluaran biaya kesehatan RT pedesaan dengan transformasi ln
- edu(2) = Beda antara tingkat pendidikan perguruan tinggi dengan dibawah SMP
- atap(1) = Beda antara atap lain dengan genteng atau beton
- bab(1) = Beda antara fasilitas BAB lain dengan fasilitas BAB sendiri

- listrik(1) = Beda antara sumber penerangan PLN dengan non PLN
 x_9 = Pengeluaran biaya makanan RT dalam satu bulan
 x_{10} = Pengeluaran biaya non makanan RT dalam satu bulan
 blt(1) = Beda antara penerima BLT dengan non penerima BLT
 x_{12} = Proporsi ART yang sakit selama satu bulan
 x_{13} = Proporsi kepemilikan asuransi dalam satu RT

Kedua model yang dihasilkan dengan transformasi ln menghasilkan nilai R^2 seperti pada Tabel 3. Nilai R^2 model perkotaan dan pedesaan dengan transformasi ln sebesar 0,25 dan 0,13.

Tabel 3 Nilai Kebaikan Model dengan Transformasi ln

| Model regresi tobit | Nilai R^2 |
|---------------------|-------------|
| Perkotaan | 0,25 |
| Pedesaan | 0,13 |

Sumber : SUSENAS 2006, diolah

Tabel 3 mempunyai arti bahwa pada model perkotaan 25 persen variasi pengeluaran biaya kesehatan RT yang bisa dijelaskan oleh model, dan pada model pedesaan hanya 13 persen yang dapat dijelaskan model.

3.2 Pembahasan

Pembahasan berdasarkan hasil yang diperoleh pada analisis sebelumnya dan dirangkum pada pada Tabel 4. Tingkat pendidikan KRT baik pada perkotaan maupun pedesaan mempunyai pengaruh terhadap pengeluaran biaya kesehatan RT. Namun hanya beda tingkat pendidikan perguruan tinggi dengan SMP ke bawah yang berpengaruh signifikan dan bertanda negatif. Hal ini menunjukkan bahwa KRT dengan pendidikan perguruan tinggi mempunyai kecenderungan tidak mengeluarkan uang secara tunai untuk biaya berobat dan berdampak pada penurunan pengeluaran biaya kesehatan. Salah satu penyebab yang mungkin adalah gaya hidup orang yang berpendidikan perguruan tinggi lebih menyukai hidup sehat dan menggunakan asuransi sebagai alternatif untuk menekan pengeluaran biaya kesehatan.

Kondisi fisik rumah mempunyai pengaruh negatif dan signifikan. Pada model perkotaan, kondisi rumah diwakili oleh jenis atap, jenis lantai, dan jenis fasilitas BAB.; sedangkan pada model pedesaan, kondisi rumah diwakili oleh jenis atap, jenis fasilitas BAB, dan jenis sumber penerangan. Jenis atap selain genteng/beton, jenis lantai tanah, fasilitas BAB selain sendiri dan sumber penerangan non PLN mempunyai kecenderungan

penurunan pengeluaran biaya kesehatan RT. Kondisi rumah tersebut menggambarkan ciri rumah kategori miskin. Hal ini dimungkinkan terjadi karena RT tersebut lebih mengalokasikan pendapatan di sektor lain seperti konsumsi makanan.

Pengaruh pengeluaran biaya makanan dan non makanan pada model perkotaan dan pedesaan adalah positif dan signifikan. Hal ini menunjukkan bahwa RT yang mempunyai pengeluaran biaya makanan dan non makanan yang besar mempunyai kecenderungan peningkatan pengeluaran biaya kesehatan RT. Ini dapat terjadi dikarenakan RT tersebut mempunyai pendapatan berkecukupan. Kondisi RT yang memiliki pendapatan berkecukupan memungkinkan RT tersebut membelanjakan pendapatannya diberbagai sektor, salah satunya kesehatan.

Pada dasarnya biaya kesehatan dikeluarkan jika ada yang sakit. Pada model perkotaan maupun pedesaan terlihat bahwa proporsi ART yang sakit selama satu bulan berpengaruh signifikan dan positif. Hal ini wajar terjadi dikarenakan semakin banyak ART yang sakit berdampak pada pengeluaran biaya kesehatan yang semakin besar pula.

Pada model pedesaan terdapat dua variabel yang signifikan dan tidak ada pada model perkotaan. Variabel tersebut adalah RT penerima BLT dan proporsi kepemilikan asuransi. Kedua variabel tersebut berpengaruh signifikan dan bertanda negatif. Hal ini menunjukkan bahwa RT penerima BLT berkecenderungan menurunkan pengeluaran biaya kesehatan RT. Ini bisa saja terjadi dikarenakan RT penerima BLT mayoritas berada di pedesaan. Pemberian bantuan berupa uang secara tunai pada RT miskin di pedesaan dapat meningkatkan kualitas hidup masyarakat di desa sehingga berdampak pada penurunan biaya kesehatan RT. Begitu pula dengan proporsi kepemilikan asuransi yang mempunyai kecenderungan menurunkan pengeluaran biaya kesehatan RT. Salah satu penyebab yang mungkin adalah program jaminan pembiayaan kesehatan keluarga miskin yang diberikan pemerintah. Penurunan pengeluaran biaya kesehatan RT mampu ditekan melalui program tersebut. Secara tidak langsung masyarakat pedesaan yang miskin mendapatkan bantuan pembiayaan gratis tanpa harus mengeluarkan biaya.

Berdasarkan nilai R^2 kedua model regresi tobit pengeluaran biaya kesehatan RT tidak terlalu bagus. Nilai R^2 yang rendah tersebut dapat diindikasikan bahwa cukup sulit membuat model pengeluaran biaya kesehatan RT. Kondisi ini berbeda dengan yang dialami oleh dua peneliti dari Bangladesh dan Singapura yang juga meneliti tentang pengeluaran biaya kesehatan dengan metode yang berbeda. Haque^[16] yang meneliti pengeluaran biaya kesehatan masyarakat Bangladesh memperoleh nilai R^2 sebesar 0,47; sedangkan Huang^[17] di Singapura memperoleh R^2 sebesar 0.45. Kedua peneliti

menggunakan unit individu sebagai sampel. Berdasarkan penjelasan tersebut dapat disimpulkan bahwa pengeluaran biaya kesehatan secara individu mampu digambarkan dalam model persamaan dengan cukup baik, tetapi untuk pengeluaran secara RT masih sulit dibuat model

Tabel 4 Koefisien Tanda dan Signifikansi Pengujian

| Variabel | Perkotaan | | Pedesaan | |
|---|-------------|--------------|-------------|--------------|
| | Koef. Tanda | Signifikansi | Koef. Tanda | Signifikansi |
| Tingkat Pendidikan KRT | | | | |
| SMA vs SMP kebawah | - | - | - | - |
| Perguruan Tinggi vs SMP kebawah | Negatif | Signifikan | Negatif | Signifikan |
| Jenis atap lain vs genteng/beton | Negatif | Signifikan | Negatif | Signifikan |
| Jenis dinding lain vs tembok/kayu | - | - | - | - |
| Jenis lantai tanah vs bukan tanah | Negatif | Signifikan | - | - |
| luas lantai rumah (x_5) | - | - | - | - |
| Jenis sumber air minum lain vs air kemasan/leding/pompa | - | - | - | - |
| Jenis fasilitas BAB lain vs sendiri | Negatif | Signifikan | Negatif | Signifikan |
| Jenis sumber penerangan non PLN vs PLN | - | - | Negatif | Signifikan |
| biaya makanan selama satu bulan | Positif | Signifikan | Positif | Signifikan |
| biaya non makanan selama satu bulan | Positif | Signifikan | Positif | Signifikan |
| Jenis RT penerima BLT vs non penerima BLT | - | - | Negatif | Signifikan |
| proporsi ART sakit dalam satu bulan | Positif | Signifikan | Positif | Signifikan |
| proporsi kepemilikan asuransi dalam satu RT | - | - | Negatif | Signifikan |
| biaya asuransi selama satu bulan | - | - | - | - |

Sumber : SUSENAS 2006, diolah

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut. Permodelan regresi tobit pengeluaran biaya kesehatan RT perkotaan terdapat tujuh variabel signifikan; sedangkan pada pedesaan terdapat sembilan variabel signifikan. Tingkat pendidikan KRT baik pada perkotaan maupun pedesaan mempunyai dampak penurunan pengeluaran biaya kesehatan RT. Kondisi fisik rumah juga berdampak menurunkan pengeluaran biaya kesehatan RT. Pada model perkotaan, kondisi rumah diwakili oleh jenis atap, jenis lantai, dan jenis fasilitas BAB; sedangkan pada model pedesaan, kondisi rumah diwakili oleh jenis atap, jenis fasilitas BAB, dan jenis sumber penerangan. Peningkatan pengeluaran biaya kesehatan RT pada kedua model dipengaruhi oleh biaya makanan, biaya non makanan dan proporsi ART yang sakit selama satu bulan. Pada model pedesaan terdapat dua variabel signifikan lain yang tidak ada pada model perkotaan. Variabel tersebut adalah RT penerima BLT dan proporsi kepemilikan asuransi. Kedua variabel tersebut berpengaruh signifikan dan berdampak menurunkan pengeluaran biaya kesehatan RT.

Diskusi

Berdasarkan nilai R^2 model, diperoleh hasil bahwa model tidak terlalu baik sehingga kesimpulan yang diperoleh tentang faktor-faktor yang mempengaruhi pengeluaran biaya kesehatan RT belum bisa dijadikan sebagai acuan dalam pembuatan kebijakan di bidang kesehatan. Diperlukan pengkajian lebih jauh mengenai pengeluaran biaya kesehatan RT. Pengeluaran biaya kesehatan masih sulit dibuat model jika unit pengamatannya berupa rumah tangga. Disarankan untuk penelitian selanjutnya menggunakan data individu.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini tidak akan berjalan lancar tanpa bantuan dari semua pihak. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terima kasih pada pihak-pihak yang telah membantu dalam penelitian ini.

1. Ibu Ismaini Zain dan Bapak Dwiatmono selaku ketua tim peneliti sekaligus pembimbing.
2. DIKTI, selaku pemberi bantuan dana penelitian.
3. Pihak-pihak lain yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Draper, N.R dan Smith, H. *Applied Regression Analysis*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. 1981.
- [2] Nadjib, M dan Pujiyanto. *Pola Pengeluaran Rumah Tangga untuk Kesehatan pada Kelompok Marjinal dan Rentan*. Makara, Kesehatan. 2002. Vol. 6, No.2.
- [3] Ridlo, I.A. *Tentang JPKM*. <http://www.kebijakankesehatan.co.cc/2008/09/-tentang-jpkm.html>. 2008. Diakses pada 15 feb 2010.
- [4] Fauzi, N. *Analisis Regresi Logistik pada Pengeluaran untuk Kesehatan Rumah Tangga Miskin(RTM) dan Non Miskin Jawa Timur*. Program Studi DIII Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember : Surabaya. 2010.
- [5] Greene,W. *Censored Data and Truncated Distribution*. New York: New York University. 2005.
- [6] Tobin, J. *Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables*. *Econometrica*. 1958. Vol. 26, No. 1, hal.24-36
- [7] Cox, S.H. dan Linn, Y. *Annuity Lapse Rate Modeling: Tobit Or Not Tobit*. [http://www.soa.org/files/pdf/Cox Linn paper](http://www.soa.org/files/pdf/Cox%20Linn%20paper.pdf). 2006. Diakses pada 27 Maret 2010.
- [8] Purnomo, T.C. *Perbandingan Model Regresi Linier Klasik Dan Tobit Bivariat : Studi Kasus Pada Pengeluaran Rumah Tangga Untuk Konsumsi Daging Dan Susu*. Program Studi Master Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember : Surabaya. 2008.
- [9] Asian Development Bank. *Health Sector Reform in Asia and the Pacific. Options for Developing Countries*. Asian Development Bank : Manila. 1999.
- [10] Departemen Kesehatan R.I. *Indikator Indonesia Sehat 2010 dan Pedoman Penetapan Indikator Provinsi Sehat dan Kabupaten/Kota Sehat*. Pusat Data dan Informasi Depkes : Jakarta. 2003.
- [11] Amemiya, T. *Tobit Models : A Survey*. *Journal of Econometrics*. 1984. Vol 24. 3-61
- [12] A'Hearn, B. *A Restricted Maximum Likelihood Estimator For Truncated Height Samples*. *Economics and Human Biology*. 2004. Vol. 2. 5-19.
- [13] Galiano, M.M. dan Kunert, J. *Comparison of ANOVA with the Tobit model for analysing sensory data*. *Food Quality and Preference*. 2006. Vol 17. 209-218.
- [14] Schroeder, L.D., Sjoquist, D.L, dan Stephan, P.A. *Understanding Regression Analysis : An Introductory Guide*. Sage Publication. 1996.

- [15] Bierens, H.J. *The Tobit Model*. <http://econ.la.psu.edu/./Tobit.PDF>. 2004. Diakses pada 27 Maret 2010.
- [16] Haque, M.S. *Determinants of Household Health Care Expenditure in Chittagong, Bangladesh*. East West University. 2006.
- [17] Huang, S.L., *Factor Influencing Healthcare Spending in Singapore : Regression Model*. *International Journal of the Computer, the Internet and Management*. 2004. Vol.12 No.3. 51-62.

COMPARISON OF THE PROPERTIES OF CORONAL MASS EJECTIONS

Bachtiar Anwar

Division of Applied Solar Physics and Space Environment

National Institute of Aeronautics and Space (LAPAN)

Jl. DR. Djundjunaan 133, Bandung 40173

e-mail: bachtiana@yahoo.com

ABSTRACT. Coronal mass ejections (CMEs) are a huge ejection of magnetized coronal plasma from the Sun. It may effect to the Earth's environment and cause damages to space-based and ground-based technologies if it is directed to the Earth. The level of effects (geoeffectiveness) of the CME's to the Earth's environment seems to differ from one CME to another. It may depend upon the type of CME whether partial or halo and the complexity of the solar magnetic fields in the interplanetary space. The type of CME (Halo or Partial) is related to the position of the source region of CME, while complexity of magnetic field in interplanetary space is related to the phase of solar activity. Some CMEs that occurred on April 2000, October 2003 and July 2005 are selected to resemble their dependence of the phase of solar activity: close to maximum solar activity (2000) and declining phase (2003, 2005). The source region of CMEs are identified from the SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) observations in extreme-ultraviolet (EUV) and white-light wavelengths. The sky-projected speed of each CME is measured based on SOHO/LASCO images to estimate the arrival time of CME at the Earth's orbit. The geoeffectiveness of CME is evaluated based on the level of geomagnetic storm that occurred using the Dst (Day storm time) index compiled by Kyoto University. It is concluded that the occurrences of CMEs near to solar maximum (2000) more frequent compared to a declining phase of solar activity (2003). Surprisingly, the number of CMEs in 2005 was comparable to CMEs during April 2000. Furthermore, a high in number of halo type CMEs does not always result in a high number of large geoeffectiveness.

Keywords: CME, geoeffectiveness, geomagnetic storm, space weather.

1. INTRODUCTION

The Earth's space environment is influenced by solar activity such as coronal mass ejections (CMEs), energetic particles from flares, dark filament eruption, and high-speed particle stream from low-latitude coronal holes. Of these, the most powerful disturbance from the Sun is CME as the event involves a huge of coronal plasma enveloped by strong magnetic field propagate from the Sun to interplanetary space with various speeds, as low as 10 km/s up to 2700 km/s [10, 11]. Even though, not all CMEs will cause severely

disturbance to the Earth's space environment. It is because the level of effect of CME to the Earth, or geoeffectiveness, varies from one CME to others [1, 2, 3].

In near to solar maximum where the number of sunspot groups significantly large, the occurrence CMEs from active regions that release flares (an explosion at the Sun that converts magnetic energy to mostly radiation from radio to X-ray wavelengths) increases. The active regions are concentrated in latitudes in a range of S50 and N50. CME triggered by a dark filament eruption may be located at or close to an active region. Otherwise, it is located far from the active latitude usually at high latitude. The physical processes of triggering the occurrences of CMEs are different depend upon the source region. Study on the triggering process of CMEs is very crucial for space weather as it can be used as an early warning on a possibility of the occurrence of CMEs.

Other possible the source region of CME is a helmet streamer. This is a coronal structure which forms a helmet or dome with a tail structure at the top. This structure may form over a large active region or outside the active region. The helmet streamer that formed above an active region is the potential source region of a powerful CME such as 'halo' type when it is directed to the Earth. Location of active region that produced a CME at solar disk can be used to forecast whether a CME has a strong impact to the Earth's space environment or not.

Identifying the source region of a CME is very crucial as it will provide more precise in forecasting the arrival of CME related disturbance at the Earth's orbit [6]. This is part of space early warning system to be developed at LAPAN [4, 7, 8, 9, 12, 13]. Based on a statistical study, a CME may reach the Earth as early as 19 hours or longer up to 6 days. The geoeffectiveness of CMEs depends upon the position of the source region of CME in solar disk, its initial speed, as well as acceleration or deceleration during its propagation in the interplanetary space []. This study deals with the effects of CMEs on the Earth's space environment.

2. OBSERVATION DATA

In this work, the solar data taken by SOHO spacecraft are utilized. SOHO spacecraft observes the Sun at multi-wavelengths based on optical imaging taken by the Large Angle and Spectrometric Coronagraph Experiment (LASCO) and Michelson Doppler Imager (MDI), as well as extreme ultraviolet (EUV) taken by the Extreme ultraviolet Imaging Telescope (EIT). LASCO is used to take images of outer solar corona

from 1.2 up to 30 solar radii using C2 and C3 telescopes. The LASCO/C-2 has a narrow field of view (FOV) from 1.2 to 6.5 solar radii and therefore can recognize the structure of CME in great detail. Meanwhile, the LASCO/C-3 has FOV in a range from 3.5 – 30 solar radii. Examples of CME taken by LASCO/C3 are given in Figure 1.

This telescope is used to trace a plasma flow of CMEs in outer part of solar corona and determine the sky-projected speed of CMEs. MDI observes the features at photosphere such as active region (sunspot group) to follow its morphological evolution as well as their magnetic pattern. The SOHO/EIT images are used to study the evolution of coronal structure to study the dynamics of the lower part of solar corona. Its practical use is for finding the source region of CME as EIT is able to detect a sudden increase in intensity that may correspond to the occurrence of flare or coronal wave of CME. The Dst index that showed geomagnetic activity globally in April 2000 is given in Figure 2. There was a large geomagnetic storm on April 6-7, 2000. The source disturbance at the Sun that caused such geomagnetic storm was likely a coronal mass ejection (CME).

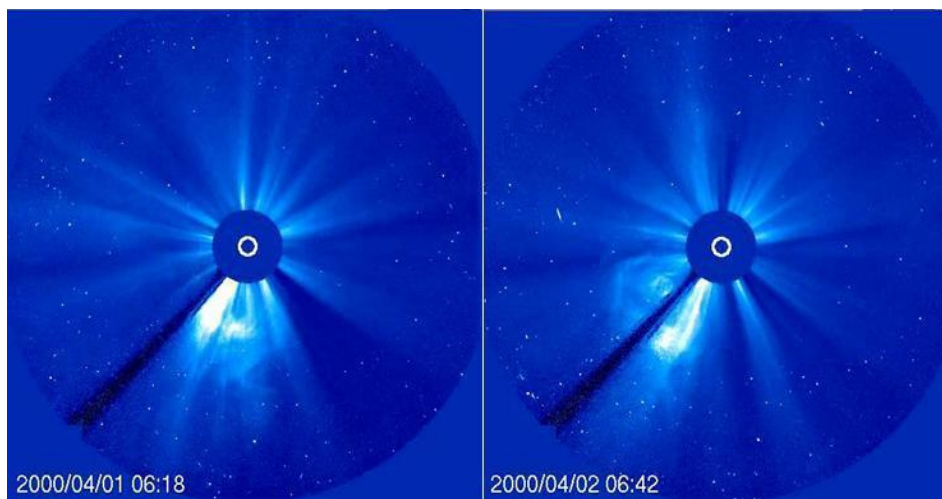


Figure 1. Two CMEs were observed by SOHO/LASCO-C3 on April 01 06:18 UT (left) and April 02, 2000 06:42 UT (right). These two CMEs seem to have a small geoeffectiveness as shown by Dst index in Figure 2.

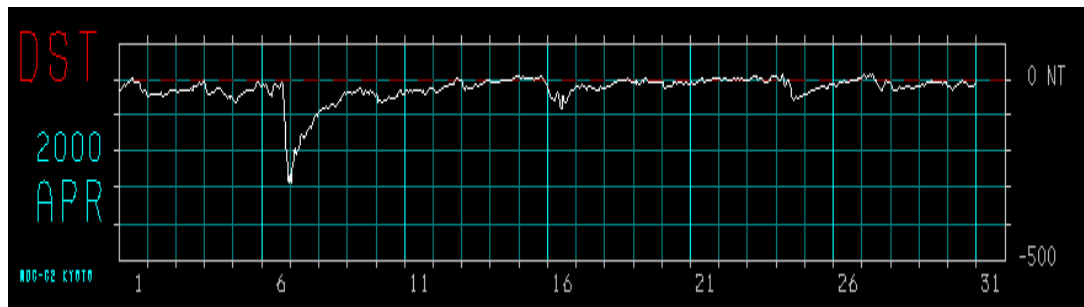


Figure 2. Geomagnetic activity in April 2000 showed by Dst index. A severely geomagnetic storm was occurred on April 6, 2000 at 23 UT.

3. METHODS AND DATA ANALYSIS

SOHO spacecraft provides solar data continuously to support space weather activity for worldwide community. In order to study the geoeffectiveness of CMEs, the following steps have been performed:

1. Compile the SOHO data (EIT, MDI, LASCO) from SOHO website.
2. Identify the CME occurrence (start and end time) from LASCO images.
3. Inspect the soft X ray flux from GOES to determine the start time of transient event (flare) close to the appearance time of CME. It is used to find the relationship whether this flare was related to the identified CME. Other CME may be related to a dark filament eruption.
4. Inspect the GOES/SXI or SOHO/SXT movie to find the location of active region related to flare. This is used to find a possible source region of CME related to a flare.
5. Conclude whether CME and flare occurrence were related or not.
6. Identify an increase of intensity or coronal loop motion in SOHO/EIT 195Å images before the appearance of CME to confirm the finding in step 5.
7. Create difference images of SOHO/EIT 195Å to enhance the intensity change in corona. Locate whether the change or plasma flow were originated from the solar disk facing to or away from the Earth.
8. Identify a dark filament or prominence eruption from SOHO/EIT 304Å, if any.
9. Determine the source region of CME using SOHO/EIT and SOHO/MDI [6].
10. Do measurement of the sky-projected speed of CME [5]
11. Determine the arrival time of CME at the Earth's orbit.
12. Confirm the arrival time of CME at the Earth using Dst (Disturbance storm time) index.

Construction of a movie from sequence of images taken by SOHO's instrument involves an alignment of the center position of the Sun at each image to avoid motion in the movie caused by a jitter motion of the spacecraft. Suppose that the center of solar disk of the first image is (X_o, Y_o) , the center position of the subsequence solar images are represented as (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , ..., (X_n, Y_n) , where n is the number of subsequence images. To align the images to the first one, the subsequence images should be shifted to amount of ΔX_i and ΔY_i , as follows:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= X_i - X_o \\ \Delta Y_i &= Y_i - Y_o \quad \text{where } i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

Note that the shift of image involves operation of all pixels. In this work, the size of image is 512 x 512 pixels. To enhance a weak flow in coronal images (EIT or LASCO), a difference technique was utilized. A difference image was simply constructed from two images taken in a close in time (less than 2 hours), where the second image was subtracted from the first one. The difference images of EIT enhance the coronal brightening or darkening which may resemble a sudden increase in intensity (flare) or a coronal wave related to a CME event.

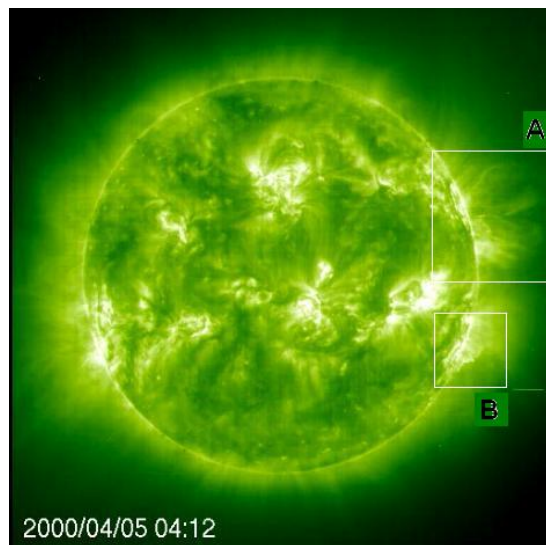


Figure 3. An image taken by SOHO/EIT 195Å on April 05, 2000 at 04:12 UT showed a eruption of coronal loops (A) and a magnetic arcade or Post-Flare Loops (B). The events seem to correspond to the occurrence of CMEs.

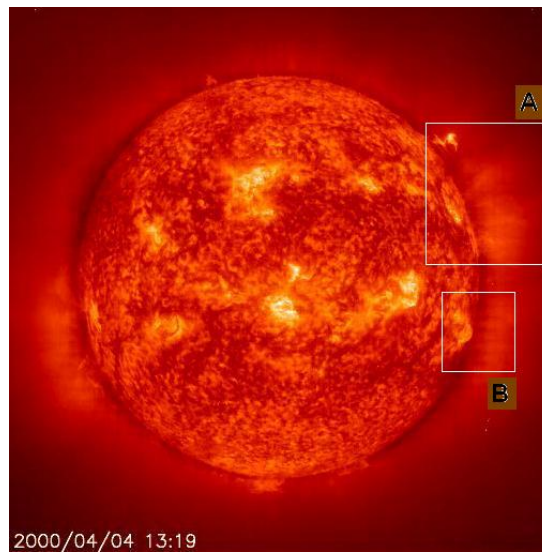


Figure 4. An image taken by SOHO/EIT 304 Å on April 4, 2000 at 13:19 UT. There was a filament eruption (A) and loops structure related to an active region (B) that may caused the occurrence of CMEs (see also Figures 3 and 5).

Identification of the source region of CME is shown in Figures 3 -7. Each CME seen in LASCO-C2 and C-3 has the source region at the Sun. It could be a flare that occurred in an active region or eruption of dark filament. Figures 3 and 4 show a dark filament eruption at the West solar limb (box A) and Post-Flare Loops system following an impulsive phase of a flare (box B). The event in box B seems to trigger the occurrence of a CME on April 5, 2000, at the South-West of solar limb shown in Figure 5 (upper). Furthermore, a CME on April 18, 2000, was cause by a large dark filament that occurred close to the South solar limb or high latitude. This CME caused a small geomagnetic storm as shown in Figure 2.

A method to determine the sky-projected speed of CME manually by measuring the loop top of CME has been developed [5]. The results are compared with the measurement of linear speed by CDAW as shown in Table 1. Some measurements resulted in a large difference between two methods. It can be understood as the selection of the loop top of CME for measurements is very sensitive to cause an error.

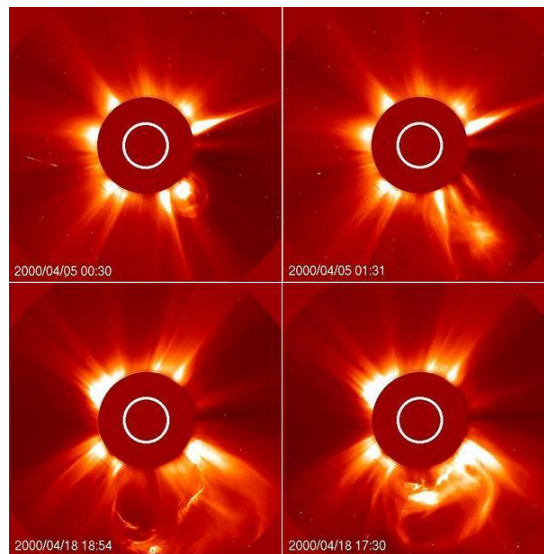


Figure 5. Two CMEs were observed by SOHO/LASCO-C2 on April 5 (upper row) and April 18, 2000 (lower row).

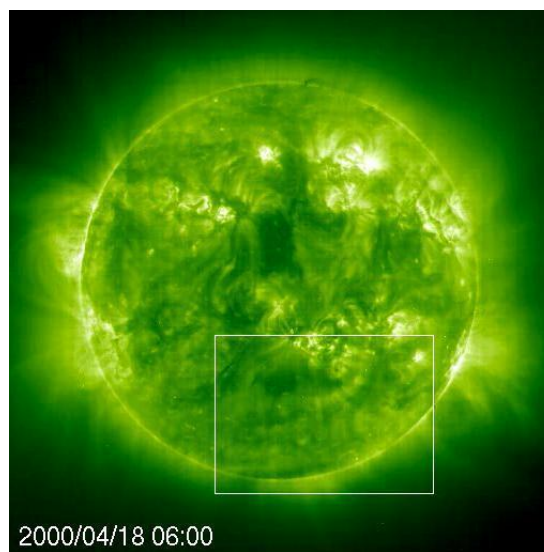


Figure 6. An image of SOHO/EIT 195Å taken on April 18, 2000, at 06:00 UT that showed a dark filament before eruption (box).

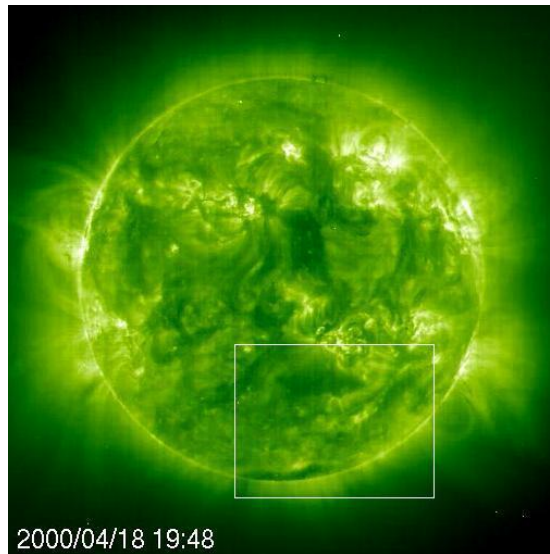


Figure 7. An image of SOHO/EIT 195Å taken on April 18, 2000, at 06:00 UT that showed a dark filament after eruption (box).

Table 1. Comparison of the sky-projected speeds determined in this work and CDAW for some CME events.

| DATE TIME | SPEED (THIS WORK) | LINEAR SPEED (CDAW) | DIFFERENCE (km/s) |
|------------------|------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| 20050704 22:06 | 200 | 425 | 225 |
| 20050704 02:30 | 80 | 78 | 2 |
| 20050712 16:54 | 410 | 523 | 113 |
| 20050713 03:06 | 600 | 759 | 159 |
| 20050714 06:30 | 500 | 541 | 41 |

4. RESULTS AND DISCUSSIONS

In this section, the results are provided along with discussions. Figure 8 shows an example of identification of a CME that occurred on July 10, 2005, caused a small geomagnetic storm as Dst index indicated a value greater than -100 nT. On July 9-10, 2005, there were two geomagnetic storms which caused by two CMEs that occurred 1 – 2 days in advance. There is no severely geomagnetic storm in July 2005. We can therefore conclude that CME than occurred have a small geoeffectiveness. Other example of identification of the source disturbance at the Sun and its effects to the Earth's space

environment is given in Figure 9. Two super-storms occurred within a period of less than 24 hours and caused two severely geomagnetic storms. This is an example of high or large geoeffectiveness of CME.

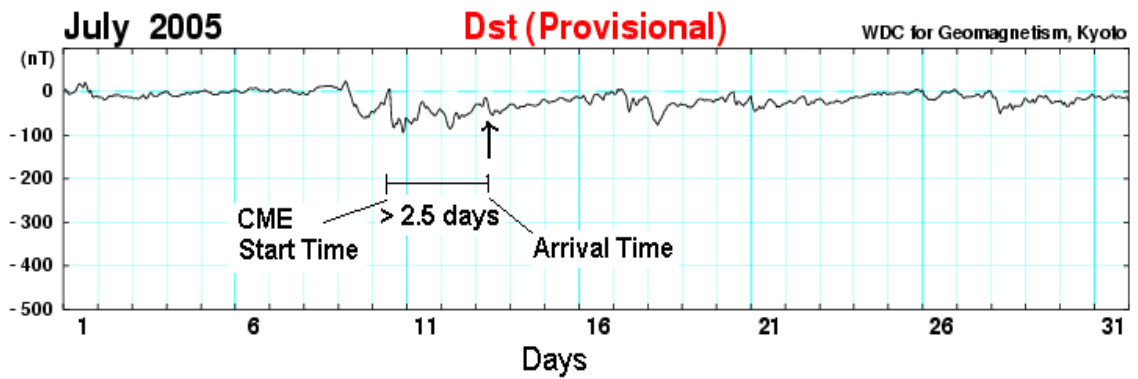


Figure 8. Ilustration of identification of a CME that occurred on July 10, 2005, caused a small geomagnetic storm 2.5 days later.

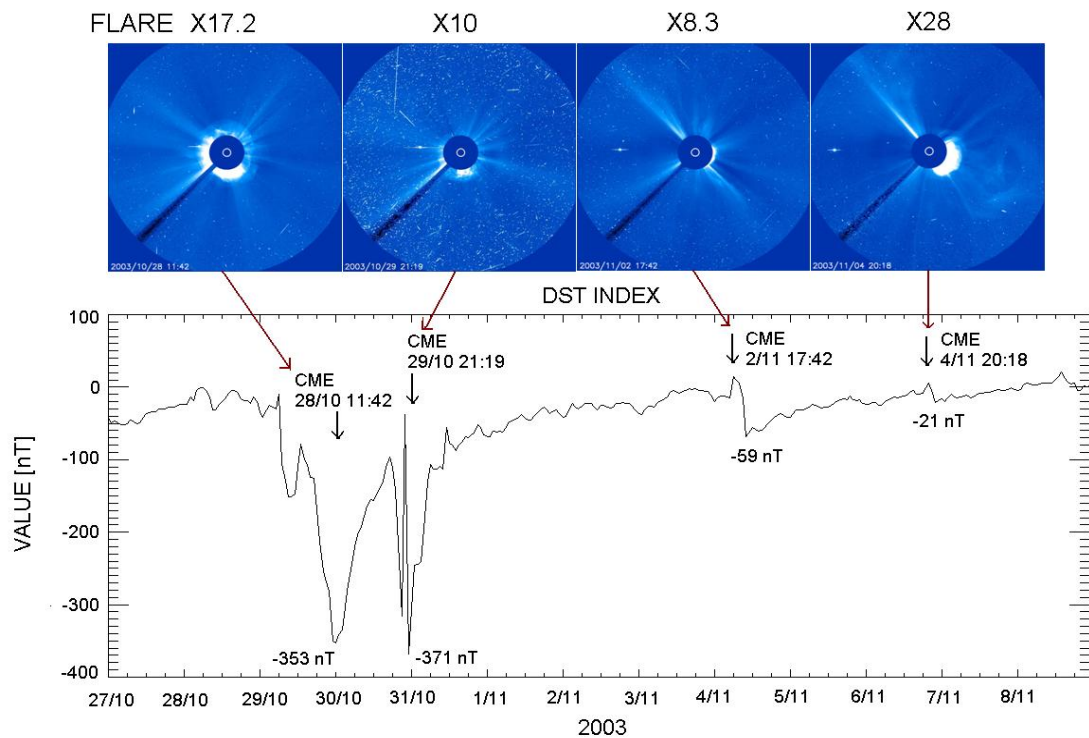


Figure 9. Two severely geomagnetic storms were occurred on October 29-31, 2003, caused by two halo CMEs from NOAA active region 10486 that occurred on October 28-29, 2003. The same active region released two other CMEs on November 2 and 4, 2003.

The two CMEs have a small geoeffectiveness as the Dst index indicated values greater than -100 nT.

Table 2 shows a statistical properties of CMEs compared to its effects (geoeffectiveness) using Dst index. While the number of CMEs occurrences decreased from April 2000 (141) to October 2003 (110), the number increased to a value greater in July 2005 (144). Maximum solar activity means that the number of sunspot groups is high then declines toward a minimum solar activity. The fact that the number of CMEs was slightly change can be interpreted that the occurrences of CMEs not only related to active regions (flares). The other events at the Sun that triggers the launch of CMEs are dark filament eruptions. This needs further a statistical study on the source regions of CMEs. Other fact that can be derived from Table 1 is that the number of halo type CMEs was small in April 2000 (3), and tends to increase in October 2003 (4) and even greater in July 2005. Though, their effects to the Earth's space environment (geoeffectiveness) were small near solar maximum in April 2000 (1) and increase in declining phase in October 2003 (2), and surprisingly there were more halo type CMEs (16) with no Dst index less than -100 nT in July 2005. Table 1 also compares the occurrence of halo type CME with partial CME with a width greater than 100° and these CMEs affects the Earth monitored by Dst index. Halo CMEs are generally though to be the cause of high geoeffectiveness if it is directed to the Earth. Table 1 gives different facts that are generally accepted. Speed of halo type CME tends to have greater values compared to partial CMEs of width greater than 100° .

Table 2. A statistical properties of CMEs in April 2000, October 2003 and July 2005 based on CDAW CME catalog list.

| Month-Year | Total | Halo CMEs | Speed range (km/s) | Width > 100° CMEs | Speed range (km/s) | Dst < -100 nT |
|---------------|-------|-----------|--------------------|--------------------------|--------------------|---------------|
| April, 2000 | 141 | 3 | 409 - 1188 | 17 | 215 - 1110 | 1 |
| October, 2003 | 110 | 4 | 627 - 2459 | 22 | 189 - 1537 | 2 |
| July, 2005 | 144 | 16 | 417 - 2528 | 13 | 161 - 1588 | 0 |

5. CONCLUDING REMARKS

A study on the geoeffectiveness of CMEs based on solar data taken on April 2000, October 2003, and July 2005, has been performed. It is concluded that the occurrences of CMEs near to solar maximum (2000) more frequent compared to a declining phase of solar activity (2003). Surprisingly, the number of CMEs in 2005 was comparable to CMEs during April 2000. A high in number of halo type CMEs does not always result in a high number of large geoeffectiveness. The reason is that the CMEs are mostly located at high latitude of the Sun (greater than 60°).

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The use of solar data from SOHO and GOES spacecrafts is acknowledged. SOHO is an international project between ESA and NASA. GOES is NASA's satellite at the geostationary satellite orbit (GSO) operated by NOAA designed to monitor the Sun in X-ray as well as space environment around the Earth. Dst index is compiled by World Data Center for Geomagnetism of Kyoto University, Japan. Data processing and analysis of this work were performed at the Division of Geomagnetism and Space Electromagnetism, Center for Utilization of Space Sciences, LAPAN, Bandung.

REFERENCES

- [1] Anwar, B. 2009h Identifying the Source Disturbance of Geomagnetic Storm, *Proc. Digital Information & System Conference (DISC) 2009*, Maranatha Christian University, October 3, 2009, Bandung,.
- [2] Anwar, B. 2009g The Response of Magnetosphere to Coronal Mass Ejection at the West Solar Limb, *SIPTEKGAN*, LAPAN, October 11, 2009, Jakarta.
- [3] Anwar, B. 2009f Analyzing Coronal Mass Ejection of July 10, 2005 and Its Effect on the Earth's Magnetosphere, *Proc. Digital Information & System Conference (DISC) 2009*, Maranatha Christian University, October 3, Bandung.
- [4] Anwar, B. 2009e Noise Removal of LASCO Images Using Median Filter, *Proc. National Seminar in Mathematics*, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Surabaya State University, August 8, 2009, Surabaya.
- [5] Anwar, B. 2009d Determination of Final Speed of Coronal Mass Ejection, *Proc. National Seminar in Mathematics*, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Surabaya State University (UNESA), June 20, 2009, Surabaya.
- [6] Anwar, B. 2009c Identifying the Source Region of Coronal Mass Ejection, *Proc. National Seminar in Mathematics and Natural Sciences*, Faculty of Mathematics and

- Natural Sciences, Satyawacana Christian University (UKSW), June 13, 2009, Salatiga.
- [7] Anwar, B. 2009b Automatic Detection of Coronal Mass Ejection, *Proc. National Seminar in Mathematics and Natural Sciences*, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, May 16, 2009, Yogyakarta State University, Yogyakarta.
- [8] Anwar, B. 2009a Monitoring the Sun for Space Weather, *Proc. National Seminar in Education Mathematics (LSM XVII)*, April 4, 2009, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Yogyakarta State University.
- [9] Anwar, B. 2008 Development of Database System for Space Early Warning, *Proc. National Seminar in Science and Technology II*, 17-18 November 2008, Lampung University, p.18.
- [10] Bothmer, V. and Daglis, I.A. *Space Weather, Physics and Effects*, Springer-Praxis Publishing, 2007.
- [11] Lanzerotti, L.J. Space Weather Effects on Technologies, in “*Space Weather*”, Song, P., Singer, H.J. and Siscoe, G.L. (Eds), Geophysical monograph, **125**, 2001, p.11.
- [12] Setiahadi, B. Problems of Equilibria and Instabilities on Solar Coronal Magnetic Fields and Its Evolution Towards Energetic Energy Liberation: Effect to Interplanetary Space, *Proc. National Seminar in Mathematics*, FMIPA UNDIP, 2005, E1., p.1.
- [13] Setiahadi, B., Sakurai, T., Miyazaki, H., and Hiei, E. Research on Magnetohydrodynamic Transport Phenomena in Solar-Terrestrial Space at LAPAN Watukosek 2006, *Proc. National Seminar in Space Science III*, 2006, p. 17.
- [14] Singer, H.J., Heckman, G.R. and Hirman, J.W. Space Weather Forecasting: A Grand Challenge in “*Space Weather*”, Song, P., Singer, H.J. and Siscoe, G.L. (Eds), *Geophysical monograph*, **125**, 2001, p.11.

DELTA UNTUK HARGA OPSI ASIA PADA *TRADED ACCOUNT*

Didit Budi Nugroho
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jln. Diponegoro 52-60 Salatiga 50711 Jawa Tengah
di2t_bn@yahoo.co.id
didit.bn@gmail.com

ABSTRAK. Artikel ini menyelidiki *delta* untuk opsi Asia rata-rata aritmatika klas *fixed strike* tipe Eropa pada *traded account*. Ditunjukkan bahwa nilai *delta* opsi Asia mempunyai batas yang sama seperti pada *delta* opsi Eropa. *Delta call* Asia terbatas antara 0 dan 1, sedangkan *delta put* Asia terbatas antara -1 dan 0. Selain itu juga diamati bahwa *delta call* Asia tanpa pembayaran *dividen* akan mendekati 1 lebih lambat daripada *delta call* Eropa, sedangkan *delta put* Asia akan mendekati 0 lebih cepat daripada *delta* untuk *put* Eropa. Hasil lain yaitu nilai *delta* opsi *call* Asia tanpa pembayaran *dividen* selalu lebih besar daripada opsi dengan pembayaran *dividen*.

Kata Kunci: *delta*, opsi Asia, metode beda hingga.

1. PENDAHULUAN

Opsi merupakan suatu surat berharga keuangan (*financial security*) yang dapat diperdagangkan dan nilainya tergantung pada nilai dari aset pokok (*underlying asset*). Lebih tepatnya, opsi adalah suatu kontrak yang memberikan hak kepada pemilik (*holder*) untuk melakukan *exercise*, yaitu merealisasikan hak untuk opsi yang ada. Pada sembarang opsi, terdapat dua pihak yang terlibat. Seorang *investor* yang membeli suatu opsi dinamakan pemilik dan seorang *trader* yang menjual suatu opsi dinamakan penerbit (*writer*). Dalam dunia *investor* dan *trader*, opsi hanya di-*exercise* ketika nilainya lebih besar dari nol, yang selanjutnya dikatakan bahwa opsi adalah *in-the-money*.

Opsi dapat diklasifikasikan berdasarkan pada waktu *exercise*. Suatu opsi bertipe Amerika dapat di-*exercise* pada sembarang waktu selama masa hidup opsi, sedangkan opsi bertipe Eropa hanya dapat di-*exercise* pada saat jatuh tempo.

Ketika suatu opsi telah diberi harga dan dijual, maka penerbit opsi akan menghadapi masalah bagaimana strategi yang tepat untuk mengelola resiko. Strategi yang bisa dilakukan yaitu *naked position* dimana penerbit tidak melakukan apa-apa atau *covered position* dimana penerbit membeli saham sebanyak saham yang tercantum dalam opsi. Strategi tersebut dinamakan pemagaran (*hedging*), lihat [2]. Kedua strategi di atas tidak akan memberikan kenyamanan dalam mengelola resiko. Ini dikarenakan kedua

strategi bisa memberikan dua hasil yang mungkin yaitu untung atau rugi. Strategi lain yang lebih akurat dalam mengelola resiko yaitu penghitungan dari yang dikenal dengan nama *Greeks (hedge ratios)*. *Greeks* didefinisikan sebagai laju perubahan dari harga opsi terhadap parameter-parameternya.

Delta (disimbolkan Δ) opsi adalah laju perubahan harga opsi terhadap pergerakan harga aset pokok dan didefinisikan sebagai derivatif parsial pertama dari harga opsi terhadap harga aset pokok. Ini berarti bahwa ketika harga aset pokok berubah satu satuan maka harga opsi berubah sebesar Δ kali perubahan harga aset pokok. Dalam prosedur pemagaran tak beresiko Black-Scholes [1], posisi *call* dibiayai dengan membuat suatu portofolio dimana penerbit menjual satu satuan opsi *call* dan memegang Δ satuan aset pokok. Jadi, jika penerbit telah menjual opsi *call* untuk sebanyak N aset pokok maka posisi penerbit dapat dipagari dengan membeli sebanyak $\Delta \times N$ aset pokok.

Artikel ini berfokus pada *delta* untuk opsi Asia rata-rata aritmatika kontinu klas *fixed strike* tipe Eropa pada *traded account*. *Delta* dihitung menggunakan metode beda hingga dimana penulis telah menunjukkan dalam artikel sebelumnya, lihat [3], bahwa metode tersebut memberikan hasil terbaik untuk *delta* pada harga saham di sekitar harga pelaksanaan (*strike price*) dibandingkan metode pohon trinomial dan metode elemen hingga. Selanjutnya *delta* untuk opsi Asia akan dibandingkan dengan *delta* untuk opsi Eropa yang mempunyai penyelesaian eksplisit.

2. MATERI DAN METODE

Opsi pada *traded account*, menurut Shreve dan Věcěr [4], adalah suatu kontrak yang membolehkan pemilik opsi untuk mengubah atau mengganti banyaknya aset pokok selama masa hidup opsi. Mereka juga menunjukkan bahwa opsi-opsi Asia rata-rata aritmatika merupakan opsi-opsi pada suatu *traded account*. Pada opsi Asia rata-rata aritmatika kontinu, *payoff* (sejumlah uang yang diterima pada saat *exercise*) tergantung pada rata-rata aritmatika dari harga aset pokok selama masa hidup opsi. Sampai saat ini tidak ada rumus eksplisit untuk harga opsi tersebut.

Sekarang diperhatikan opsi Asia rata-rata aritmatika kontinu klas *fixed strike* tipe Eropa. Untuk suatu harga pelaksanaan K , *payoff* untuk harga opsi *call* Asia didefinisikan sebagai

$$V(T) = A(T) - K$$

dengan $A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S(u) du$ untuk harga saham S dan masa hidup T tahun. Selanjutnya

harga opsi *put* Asia dapat dihitung menggunakan *Put-Call parity* opsi Asia:

$$V_{call} - V_{put} = \frac{1}{(r - \gamma)T} (e^{-\gamma(T-t)} - e^{-r(T-t)}) S(0) - e^{-rT} K.$$

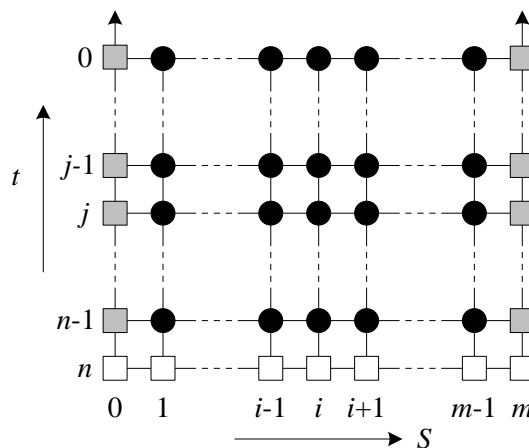
Dalam artikel ini digunakan model harga opsi Asia dari Věcěr [5]. Kekayaan $X(t)$ dari pemilik opsi Asia pada saat t memenuhi persamaan diferensial parsial:

$$dX_t = rX_t dt + q_t(dS_t - rS_t dt + \gamma S_t dt)$$

dimana r adalah suku bunga bebas resiko, γ adalah *dividend yield* kontinu, dan $q(t)$ adalah banyaknya saham pada saat t yang menyatakan strategi perdagangan dari pemilik opsi.

Untuk mereplikasi opsi, pada saat t pemilik opsi menahan

$$q(t) = \frac{1}{(r - \gamma)T} (e^{-\gamma(T-t)} - e^{-r(T-t)}).$$



Gambar 1. Grid pada bidang berhingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan harga opsi. Molekul \square menunjukkan lokasi nilai-nilai awal (diketahui). Molekul \blacksquare menunjukkan lokasi nilai-nilai batas (diketahui). Molekul \bullet menunjukkan lokasi titik-titik dalam (dihitung)

Teknik penghitungan harga opsi Asia telah diberikan oleh Věcěr [5] menggunakan metode beda hingga Crank-Nicolson. Selanjutnya, dengan teknik numerik tersebut, dalam artikel ini akan dihitung *delta* untuk harga opsi Asia. Penghitungan *delta* didasarkan pada hampiran beda rata-rata:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

yang mempunyai galat pemotongan sebanding dengan h^2 . Secara teknis, menghitung *delta* adalah mengukur perubahan harga opsi terhadap perubahan harga aset pokok tanpa

perubahan waktu. Jadi, pada molekul komputasi beda hingga yang diilustrasikan dalam Gambar 1, rumus hampiran beda rata-rata untuk *delta* dinyatakan oleh

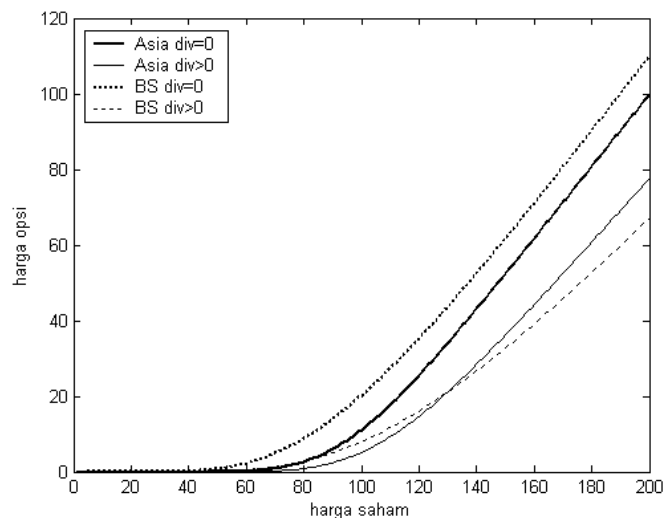
$$\Delta_i = \frac{V_{i+1,0} - V_{i-1,0}}{S_{i+1} - S_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian akan dibandingkan antara *delta* opsi Asia dan *delta* opsi Eropa dengan atau tanpa pembayaran *dividen*. Diperhatikan opsi atas saham dengan harga pelaksanaan $K = \$100$ dan jatuh tempo $T = 1$ tahun. Data pasar mengasumsikan bahwa suku bunga bebas resiko $r = 10\%$ dan simpangan baku $\sigma = 40\%$. Dalam komputasi diambil harga-harga saham dari \$1 sampai \$200, banyak subinterval waktu dan saham adalah 200.

3.1 Fungsi Harga

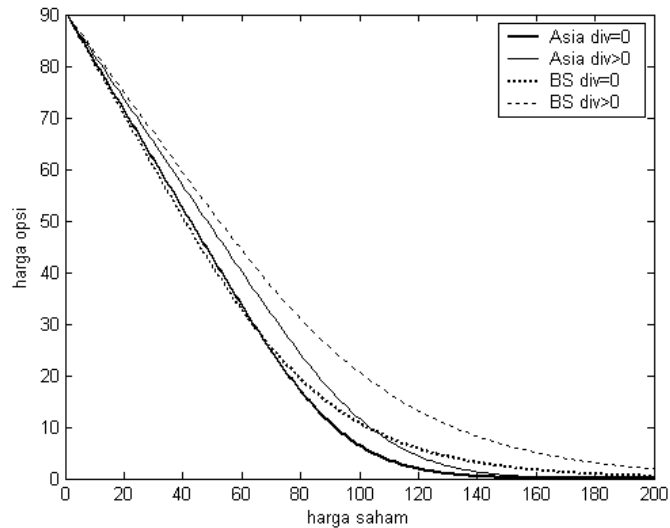
Gambar 2 menunjukkan fungsi harga *call* Asia dan Eropa sebagai fungsi dari harga saham saat ini. Diamati bahwa harga opsi *call* Asia dengan pembayaran *dividen* selalu lebih rendah daripada tanpa pembayaran *dividen*. Tingkah laku tersebut adalah sama seperti pada opsi *call* Eropa. Sementara itu, jika dibandingkan dengan opsi *call* Eropa tanpa pembayaran *dividen*, maka harga opsi *call* Asia dengan atau tanpa pembayaran *dividen* adalah selalu lebih rendah.



Gambar 2. Harga opsi *call* Eropa dan Asia sebagai fungsi dari harga saham saat ini, dengan *dividen* $\gamma = 0$ dan $\gamma = 0.25$. Keterangan: *div* = *dividen* dan BS= opsi Eropa dengan rumus Black-Scholes.

Gambar 3 menunjukkan fungsi harga *put* Asia dan Eropa sebagai fungsi dari harga saham saat ini. Diamati bahwa harga opsi *put* Asia tanpa pembayaran *dividen* selalu lebih

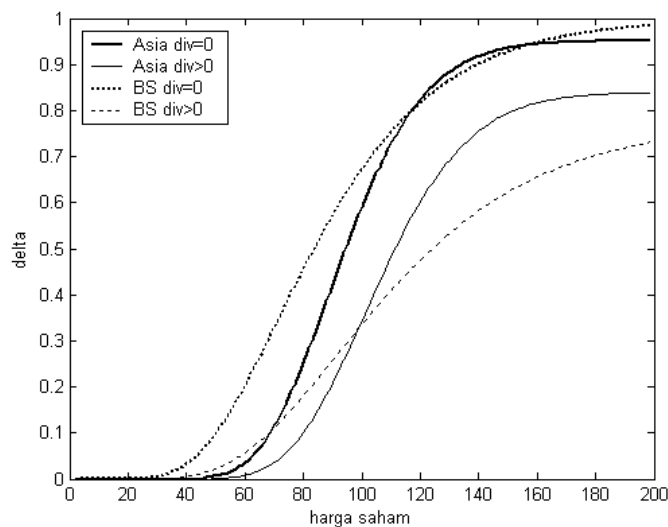
rendah daripada dengan pembayaran *dividen*. Tingkah laku tersebut adalah sama seperti pada opsi *put* Eropa. Sementara itu, jika dibandingkan dengan opsi *put* Eropa dengan pembayaran *dividen*, maka harga opsi *put* Asia dengan atau tanpa pembayaran *dividen* adalah selalu lebih rendah.



Gambar 3. Harga opsi *put* Eropa dan Asia sebagai fungsi dari harga saham saat ini, dengan *dividen* $\gamma = 0$ dan $\gamma = 0.25$.

3.2 Delta untuk *Call*

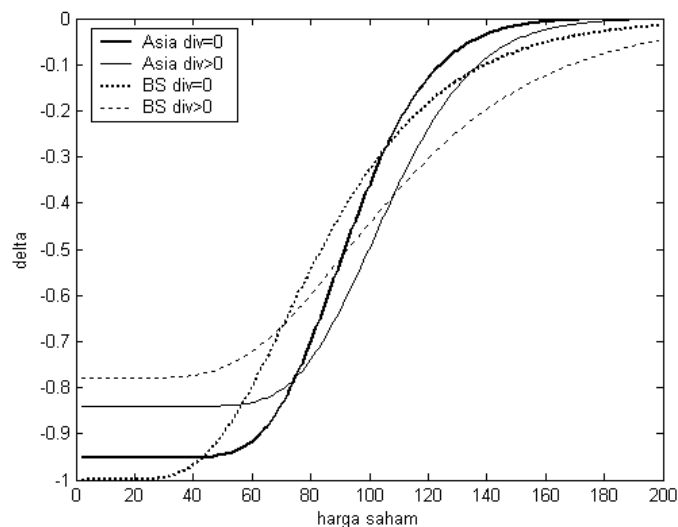
Gambar 4 menunjukkan tingkah laku *delta* untuk *call* Asia: *delta* tanpa pembayaran *dividen* mempunyai nilai yang selalu lebih tinggi daripada *delta* dengan pembayaran *dividen*. Dibandingkan dengan *call* Eropa, terlihat bahwa nilai *delta call* Asia bisa lebih tinggi atau lebih rendah. Secara khusus, *delta call* Asia tanpa pembayaran *dividen* akan mendekati 1 lebih lambat daripada *delta call* Eropa.



Gambar 4. Delta untuk opsi *call* Eropa dan Asia sebagai fungsi dari harga saham saat ini, dengan *dividen* $\gamma = 0$ dan $\gamma = 0.25$.

3.3 Delta untuk *Put*

Gambar 5 menunjukkan tingkah laku bahwa *delta* untuk *put* Asia lebih cepat mendekati 0 daripada *delta* untuk *put* Eropa. Secara khusus, *delta put* Asia tanpa pembayaran *dividen* lebih cepat mendekati 0 daripada dengan pembayaran *dividen*. Di sini dicatat bahwa nilai negatif menyatakan banyaknya saham yang dilepas.



Gambar 5. Delta untuk opsi *put* Eropa dan Asia sebagai fungsi dari harga saham saat ini, dengan *dividen* $\gamma = 0$ dan $\gamma = 0.25$.

4. KESIMPULAN

Paper ini telah menyelidiki tingkah laku *delta* untuk opsi Asia rata-rata aritmatika kontinu tipe Eropa. Pertama, *delta* opsi *call* Asia tanpa pembayaran *dividen* selalu lebih besar daripada dengan pembayaran *dividen*. Ini berarti bahwa penerbit opsi Asia tanpa pembayaran *dividen* akan memegang aset pokok lebih banyak daripada opsi dengan pembayaran *dividen*. Situasi tersebut tidak dijumpai pada opsi *put* Asia.

Kedua, *delta call* Asia tanpa pembayaran *dividen* akan mendekati 1 lebih lambat daripada *delta call* Eropa. Sementara itu, *delta put* Asia akan mendekati 0 lebih cepat daripada *delta* untuk *put* Eropa. Ini berarti bahwa ketika harga saham semakin besar daripada harga pelaksanaan, maka penerbit opsi Asia akan melepaskan saham lebih sedikit daripada penerbit opsi Eropa.

Terakhir, diamati bahwa *delta* untuk opsi *call* Asia juga terbatas antara 0 dan 1 sama seperti *delta call* Eropa. Sementara itu, *delta* untuk opsi *put* Asia juga terbatas antara -1 dan 0 yang adalah sama seperti *delta put* Eropa.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Black, F. and M. Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659.
- [2] Kwok, Y. K. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore: Springer-Verlag.
- [3] Nugroho, D. B. 2010. *Penghitungan Sensitivitas Harga Opsi dalam Berbagai Metode Numerik*, Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains V, FSM UKSW.
- [4] Shreve, S.E. and J. Věcěr. 2000. Options on A Traded Account: Vacation Calls, Vacation Puts and Passport Options, *Finance and Stochastics* 4, 255-274.
- [5] Věcěr, J. 2001. New Pricing of Asian Option, *Journal of Economic*.

DETERMINING POVERTY MAP USING SMALL AREA ESTIMATION METHOD

Eko Yuliasih and Irwan Susanto
PT Bank UOB Buana Jakarta and Mathematics Dept. FMIPA Sebelas Maret University
yuliasih.eko@gmail.com

Abstract. Poverty is a phenomenon that always occurs in every country especially in the developing country such as Indonesia. Poverty is defined as a condition where someone has not capability to fulfill their basic needs (food and non food). The difference of geographic condition and the unequal of demography always become some problems in the geographic targeting of the poor in the poverty reduction program. One of method that is accurately effective and sensitive with poverty in the small area is Small Area Estimation method by Elbers et al. It is known as Elbers, Lanjouw, Lanjouw method (ELL method). The objective of this method is to map the incidence of poverty in every county or city using the steps in ELL method. In this study, we use Central Java as our case study. The results of this study are the model consumption of Central Java, poverty indicators for each city in Central Java and the poverty maps so that can give information and facilitate the government for making priority in poverty reduction programs.

Keywords: Poverty map, ELL Method

1. INTRODUCTION

Poverty is a phenomenon that always occurs in every country especially in the developing country. Every country has the difference of geographic condition, poverty levels, the tools to measure and handling the poverty. Poverty is defined as a condition where someone has not capability to fulfill their basic needs (food and non food). Someone is called as a poor people if his or her expenditure or income below poverty line. Poverty line is the minimum incomes that have to fulfill his or her minimum living standard. If poverty line is high, then there are so many people that are poor.

Indonesia, a country that is very large in size of population and has the difference of geographic condition in every province, always has some problems in the geographic targeting of the poor in the poverty reduction program. Obviously, in order to make poverty reduction programs, we need an instrument that is accurately effective and sensitive with poverty, which in turn the objective of poverty reduction can be exactly attained.

SMERU [7] stated that, ideally, geographic targeting should be based on a description of poverty incidence and other indicators of economic welfare in small area or

at low administrative levels. In Indonesia, the administrative levels start from the national level, and descend to the provincial, county or city, sub district, and village levels.

There is one way to obtain village level information on the distribution of economic welfare that is to carry out a household survey representative at the village level. However, this is very difficult to be done because a household survey is too large and expensive to carry out.

Fortunately, as a result of recent methodological advances in this study, the World Bank has developed a new method to estimate small area distribution of economic welfare from statistical data collections that is normally available in a country. The result of this method will be pointed out in a geographic map, known as a poverty map.

A poverty map is a visual representation of the spatial incidence of poverty that can facilitate the focused pro poor interventions and guide the allocation of public spending to reduce poverty. It will help the government to reduce poverty exactly. Moreover, it can reduce the risk of poor households being missed by poverty reduction programs.

One of the methods for producing small area estimation of the spatial description of economic welfare is small area estimation method by Elbers, Lanjouw, Lanjouw. It is known as Elbers, Lanjouw, Lanjouw (ELL) Method. This method was introduced by Chris Elbers, J. O. Lanjouw, and Peter Lanjouw and is based on regression models of income or expenditure with random effects at the level of survey clusters. This method has been done successfully in other countries, especially in South Africa and Ecuador. In the first application, this method would be done if the sources of data needed are available. This method has been applied in Indonesia to map the poverty in East Kalimantan, East Java and Jakarta. But no one has mapped the poverty in Central Java.

In this study, we use the application of small area estimation method that is described by Elbers, Lanjouw, Lanjouw (or ELL method) to estimate the small area of poverty in county or city levels, to calculate the poverty indicators, to make a poverty map of Central Java and to interpret it.

2. THEORETICAL AND METHODOLOGY

2.1 The definition of poverty

According to the World Bank [2], poverty is concerned with absolute standard living part of the poor society in the equality refers to relative living standards across the whole society.

United Nations Development Program (UNDP) [2] defines poverty as hunger; poor of haven; incapacity to go to a doctor when getting sick; have not any access to go to school and illiteracy; jobless; afraid of the future; incapacity to get pure water; powerless; has no representative and freedom.

According to Government's Law No. 42 1981 [2], the poor is the people who have not any job and have not any capability to fill their basic commodities of humanity or people who have a job but they cannot fill the basic commodities of humanity. In addition, by the Asian Development Banks' point of view [2], poverty is a deprivation of essential assets and opportunities that every human is entitled.

2.2 The indicators of poverty

In this study, we use poverty indicators from BPS. To measure poverty, BPS calculates a number of summary statistics describing the incidence, depth and severity of poverty. These include the headcount index (which measures the incidence of poverty), the poverty gap (which measures the depth of poverty) and the poverty severity (which measures the severity of poverty).

Foster, et al in Avenzora [1] show that the three poverty measures may all be calculated using the following formula:

$$P_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^M \left(\frac{z - y_{ch}}{z} \right)^{\alpha}, \text{ where } \alpha = 0, 1, 2 \quad (2.1)$$

where:

z = poverty line

y_{ch} = per capita consumption of household in location c

N = the number of people in the sample population

M = the number of poor people (household)

i. the headcount index. When $\alpha = 0$, then

$$P_0 = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^M \left(\frac{z - y_{ch}}{z} \right)^0 = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^M 1 = \frac{M}{N}. \quad (2.2)$$

Commonly, it is denoted as the headcount ratio or when turned into a percentage, the headcount index (proportion of person whose expenditure level is under the poverty line). Although it is to interpret the incidence of poverty, the headcount index is not sensitive to estimate how far below the poverty line poor people is.

- ii. the poverty gap index. When $\alpha = 1$, then

$$P_1 = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^M \left(\frac{z - y_{ch}}{z} \right)^1 = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^M \left(\frac{z - y_{ch}}{z} \right). \quad (2.3)$$

It is denoted as the poverty gap index which is simply the sum of all the poverty gaps in the population can be used as an indicator of the minimum cost of eliminating poverty using perfectly targeted transfers.

- iii. the poverty severity index. When $\alpha = 2$, then

$$P_2 = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^M \left(\frac{z - y_{ch}}{z} \right)^2. \quad (2.4)$$

This is poverty severity index which is sensitive to the distribution of living standards among the poor. The poverty severity index measures the severity (or intensity) of poverty. This is the other relevant poverty indicator that is inequality in the distribution of expenditures among poor people (it is also referred to as severity).

To determine whether poverty has changed over time or varies over some geographic or demographic characteristic, estimation of the sampling variance for the indexes are required. According to Kakwani in Jolliffe [4], there are two formulas to estimate the variance of the index class of poverty indexes that are easy to calculate the frequent used. Those are

- a. variance of P_0

$$\text{var}(P_0) = \frac{P_0(1-P_0)}{(n-1)}, \quad (2.5)$$

where n is sample size.

b. Variance of $P_\alpha, \alpha = 1, 2$

$$\text{var}(P_\alpha) = \frac{(P_{2\alpha} - P_\alpha^2)}{(n-1)} \quad (2.6)$$

2.3 The poverty mapping

Poverty map is a visual presentation of the spatial incidence of poverty able to facilitate a better or a better focused pro poor interventions and guide the allocation of public spending to reduce poverty. This poverty map will help the government in reducing poverty precisely. Moreover, it can reduce the risk of poor households being missed by poverty reduction programs.

According to Peter Lanjouw [5], there are three basic steps of poverty mapping.

Those are

Steps 1: identifying variables at the household level that is defined in the household survey.

Steps 2: estimating model of consumption. The parameter estimates the model of consumption and it will be applied to the census data, the expenditure is predicted and the poverty statistics are derived.

Steps 3: inputting the model of consumption into census data at the household level, and the estimation of poverty and inequality measure at a variety of levels of spatial disaggregating.

2.4 Small Area Estimation

Small Area Estimation (SAE) [6] is a statistical technique that models the living standard information available in small household survey data to establish comparability of other non comparable household surveys with population census and generate estimation of living standards of household in population census. SAE provides an opportunity to obtain high resolution poverty maps through the integration of census data.

One of the methods for producing small area estimation of the spatial description of economic welfare is small area estimation method by Elbers, Lanjouw, Lanjouw. It is known as Elbers, Lanjouw, Lanjouw (ELL) method.

2.5 ELL method

ELL method [3] is a new method in the construction of poverty map that has been introduced by the World Bank. This methodology is introduced by Chris Elbers, J. O. Lanjouw, and Peter Lanjouw. It involves a household survey and a population census as

data sources. This method has capability to estimate the poverty level and the poverty indicators until the lowest levels. The systematic procedures for Poverty Mapping is

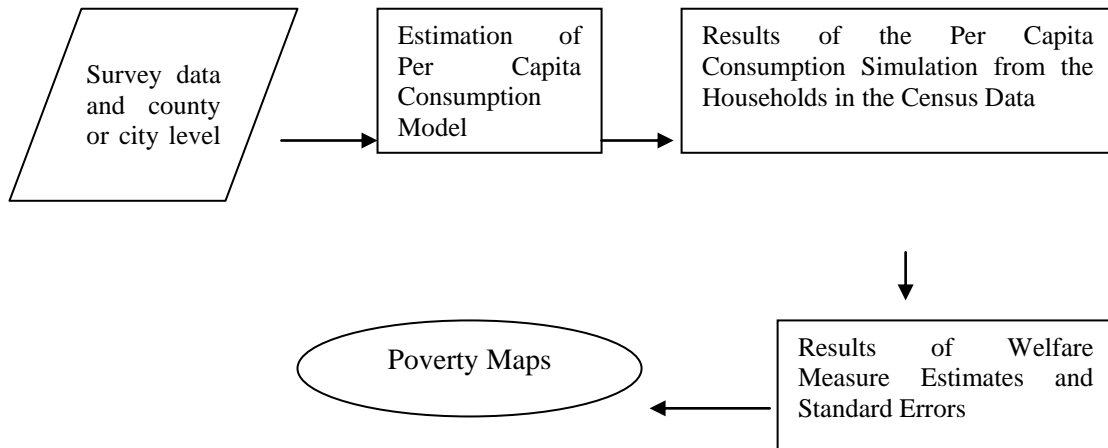


Figure 1. Systematic Procedures for Poverty mapping

2.6 The consumption model

According to Elbers *et al* [3], the first stage begins with an accurate empirical model of y_{ch} , per capita expenditure of household h in location c , is defined as:

$$\ln y_{ch} = x_{ch}\beta + u_{ch} \tag{2.7}$$

Where $\ln y_{ch}$ is the logarithm of per capita consumption of household h in location c , x_{ch} is a vector of characteristics of this household, and u_{ch} is the error term which is distributed $N(0, \Sigma)$.

Because survey data is just a sub sample of whole population, the location information is not available for all regions in the census data. Thus, we cannot include the location variable in the survey model. Therefore, the residual of (2.7) must contain the location variance and u_{ch} can be decomposed into uncorrelated terms:

$$u_{ch} = \eta_c + \varepsilon_{ch} \tag{2.8}$$

Where η_c is a location error term common to all household within the location and ε_{ch} is a household specific error term. It is further assumed that the η_c is uncorrelated across location and the ε_{ch} is uncorrelated across households. With these assumptions, equation (2.7) is reduced to

$$\ln y_{ch} = x_{ch}\beta + \eta_c + \varepsilon_{ch} \tag{2.9}$$

3. THE RESULT

3.1 Description Data

In this study, we use three sources of data: (i) SUSENAS 2006, (ii) Central Java in Figure 2006, and (iii) data and information of poverty 2005-2006. To estimate the consumption model, we use the data on household consumption obtained from SUSENAS 2006, the data on household characteristics is obtained from Central Java in Figure 2006 and to calculate the poverty measures, we use data and information of poverty 2005-2006.

3.2 Selecting Variables.

The procedure in selecting the explanatory variables of equation (2.9) refers to the research of SMERU and available in SUSENAS data. The explanatory variables are only selected and will be used in estimating the consumption model if they contribute significantly to the explanation of (log) per capita consumption. The explanatory variables that are selected by stepwise method are occupation sector of household head (agriculture and mining), household size and working status of household head (seeking).

3.3 Estimating the Consumption Model.

The result of 3.2 can give us information that explanatory variables will be used to estimate the consumption model. First step to estimate the consumption model is to use

Ordinary Least Squares (OLS) and save the residuals as a variable \hat{u}_{ch} . We find the consumption model as

$$\ln y_{ch} = 14.127 - 0.4a + (3.555 \times 10^{-6})b - (1.728 \times 10^{-6})c - (1.888 \times 10^{-5})d \quad (3.1)$$

where

a = Household size

b = Working status of household head (seeking)

c = Occupation sector of household head (agriculture)

d = Occupation sector of household head (mining)

3.4 Calculating the Poverty Indicators.

There are three measurements of poverty indicators. These are the headcount index which measures the incidence poverty, the poverty gap index which measures the depth of poverty, and the poverty severity index which measures the severity of poverty.

Commonly, those poverty indicators are known as FGT family of poverty measures.

Using PovMap 2.0 [8], we find those poverty indicators for each location,

Table 3.1 The poverty indicators and standard errors of each poverty indicators for each location

| County or City | Headcount Index | Standard error of Headcount Index | Poverty Gap Index | Standard error of Poverty Gap Index | Poverty Severity Index | Standard error of Poverty Severity Index |
|-------------------|-----------------|-----------------------------------|-------------------|-------------------------------------|------------------------|--|
| Cilacap | 0.62 | 0.00038 | 0.5853 | 0.000374 | 0.5689 | 0.000447 |
| Banyumas | 0.54 | 0.00041 | 0.5051 | 0.000396 | 0.4885 | 0.0004 |
| Purbalingga | 0.7 | 0.00051 | 0.6765 | 0.000504 | 0.6653 | 0.000736 |
| Banjarnegara | 0.52 | 0.00054 | 0.4742 | 0.000521 | 0.4583 | 0.000494 |
| Kebumen | 0.61 | 0.00044 | 0.5904 | 0.000437 | 0.5781 | 0.000527 |
| Purworejo | 0.67 | 0.00056 | 0.6449 | 0.000546 | 0.6297 | 0.000743 |
| Wonosobo | 0.55 | 0.00057 | 0.5073 | 0.000552 | 0.4866 | 0.000561 |
| Magelang | 0.58 | 0.00046 | 0.5556 | 0.000448 | 0.5405 | 0.000503 |
| Boyolali | 0.6 | 0.00051 | 0.542 | 0.000484 | 0.5114 | 0.000531 |
| Klaten | 0.58 | 0.00047 | 0.5566 | 0.000452 | 0.5403 | 0.000509 |
| Sukoharjo | 0.51 | 0.00055 | 0.4947 | 0.000547 | 0.4882 | 0.000541 |
| Wonogiri | 0.62 | 0.00049 | 0.5757 | 0.000471 | 0.549 | 0.000555 |
| Karanganyar | 0.58 | 0.00055 | 0.5598 | 0.00054 | 0.5465 | 0.000611 |
| Sragen | 0.64 | 0.00052 | 0.6002 | 0.000502 | 0.5763 | 0.000623 |
| Grobongan | 0.62 | 0.00042 | 0.5926 | 0.000414 | 0.5768 | 0.000502 |
| Blora | 0.61 | 0.00054 | 0.5873 | 0.000528 | 0.5762 | 0.000633 |
| Rembang | 0.6 | 0.00065 | 0.5553 | 0.000626 | 0.5323 | 0.000705 |
| Pati | 0.55 | 0.00046 | 0.5038 | 0.00044 | 0.4796 | 0.000444 |
| Kudus | 0.6 | 0.00056 | 0.5678 | 0.000546 | 0.5502 | 0.000629 |
| Jepara | 0.55 | 0.00048 | 0.5034 | 0.000467 | 0.4844 | 0.000471 |
| Demak | 0.54 | 0.00049 | 0.5265 | 0.000485 | 0.5162 | 0.000512 |
| Semarang | 0.62 | 0.00051 | 0.5896 | 0.000503 | 0.5734 | 0.000607 |
| Temanggung | 0.54 | 0.0006 | 0.5076 | 0.00058 | 0.4916 | 0.00059 |
| Kendal | 0.52 | 0.00052 | 0.5016 | 0.000512 | 0.4941 | 0.000514 |
| Batang | 0.54 | 0.00061 | 0.4966 | 0.00058 | 0.4737 | 0.000576 |
| Pekalongan | 0.63 | 0.00053 | 0.5885 | 0.000518 | 0.5708 | 0.000624 |
| Pemalang | 0.56 | 0.00043 | 0.5359 | 0.000416 | 0.5197 | 0.000448 |
| Tegal | 0.61 | 0.00041 | 0.5837 | 0.0004 | 0.5656 | 0.000477 |
| Brebes | 0.6 | 0.00037 | 0.5536 | 0.000356 | 0.5305 | 0.000399 |
| Magelang (City) | 0.58 | 0.00137 | 0.5642 | 0.001347 | 0.5541 | 0.001537 |
| Surakarta (City) | 0.56 | 0.00069 | 0.5458 | 0.00068 | 0.5353 | 0.000747 |
| Salatiga (City) | 0.6 | 0.00118 | 0.5716 | 0.001157 | 0.556 | 0.001344 |
| Semarang (City) | 0.62 | 0.0004 | 0.5746 | 0.000389 | 0.5519 | 0.000455 |
| Pekalongan (City) | 0.54 | 0.00096 | 0.5022 | 0.000919 | 0.4817 | 0.000924 |
| Tegal (City) | 0.55 | 0.00102 | 0.5148 | 0.000988 | 0.4985 | 0.00102 |

Table 3.1 provides the headcount index, poverty gap index, and poverty severity index for each location. Let us see Cilacap, the headcount index of Cilacap is 0.62 or 62 % with standard error 0.00038. It means that there are 62% of people in Cilacap are poor. Poverty gap index of Cilacap is 0.5853 or 58.53, it means that the gap between the average gap of expenditure for every people and poverty line. The standard error of poverty gap index is about 0.000374. Whereas poverty severity in Cilacap is 0.5689 or 56.89% with standard error 0.000447. It means that the severity in Cilacap is 56.89%.

3.5 Poverty Maps of Central Java and The Interpretation.

Poverty map is a visual presentation of the spatial incidence of poverty that can facilitate a better focus pro poor interventions and guide the allocation of public spending to reduce poverty. Since the poverty indicators at county or city levels have been calculated and available for each poverty indicator, we can make poverty maps for each poverty indicators. These are the maps by virtue of poverty measures in every county or city



Figure 3.1 Poverty Map by virtue of headcount index



Figure 3.2 Poverty map by virtue of poverty gap index



Figure 3.3 Poverty Class by Virtue of Poverty Severity Index

In the calculation of poverty map, the poverty map is not only influenced by geographic condition but also the demographic condition of the county or city. Let us see

the county of Sukoharjo, for the incidence of poverty; it is in the interval of 0.51-0.542 where it is included in the lowest poverty incidence. It means that the poor people in Sukoharjo are about 51% until 54.2%. For the poverty gap; it is in the interval of 0.4742-0.5079 where it is included in the lowest poverty gap index. It means that the gap between the average gap of expenditure for every people and poverty line is about 47.42% until 50.79% and for the severity poverty; it is in the interval of 0.4583-0.4928 where it is included in the lowest poverty severity index or the severity level in county of Sukoharjo is about 45.83% until 49.28%.

To interpret the other location, we can use the same interpretation on Sukoharjo. Using the poverty poverty maps, we can make the priority in poverty reduction program.

4. The Conclusions

As mentioned in the previous chapter, we will conclude that

1. The estimation of consumption model is

$$\ln y_{ch} = 14.127 - 0.4a + (3.555 \times 10^{-6})b - (1.728 \times 10^{-6})c - (1.888 \times 10^{-5})d$$

where

a = Household size

b = Working status of household size

c = Occupation sector of household head (agriculture)

d = Occupation sector of household head (mining)

2. Using the consumption model of Central Java, we have calculated the poverty indicators (headcount index, poverty gap index, poverty severity index) and made poverty maps by virtue of poverty indicators

BIBLIOGRAPHY

- [1] Avenzora, A., *Kemiskinan*, Data dan Informasi Kemiskinan Tahun 2005-2006 Buku 2: Kabupaten (Data and Information of Poverty 2005-2006 2nd Book: County), CV.Nario Sari, Jakarta, 2007.
- [2] Asrial, *Pemetaan Kemiskinan Kabupaten Gayo Lues 2005*, Laporan Akhir, Badan Perencanaan Pembangunan Daerah Kabupaten Gayo Lues working wih Badan Pusat Statistik Kabupaten Aceh Tenggara. Aceh Tenggara, Gayo Lues, 2005.

-
- [3] Elbers, C., et al, *Micro-Level Estimation Poverty and Inequality*. *Econometrica*, 2003, Vol. 71, No.1, 355-364.
- [4] Jolliffe, D. (2003). *Comparisons of Metropolitan-Nonmetropolitan Poverty During the 1990s*. Rural Development Research Report Number 96. United States Department of Agriculture. United States America.
- [5] Lanjouw, P., *Estimating Geographically Disaggregated Welfare Levels and Changes*, Tool Kit-Chapter 4. The World Bank.
- [6] Rao, J.N.K., *Small Area Estimation*, a John Wiley&Sons, Inc, Publication, New Jersey, 1937.
- [7] SMERU, *Peta Kemiskinan Indonesia: Asal Mula dan Signifikansinya(The Poverty Map of Indonesia: Genesis and Significance)*, Newsletter No. 26: May-Aug/2008. Jakarta.
- [8] Zhao,Q. and Lanjouw, P., *Using PovMap2 A USER's GUIDE*. The World Bank, 2003.

ESTIMASI PARAMETER MODEL BUHLMANN STRAUB PADA TEORI KREDIBILITAS DENGAN MENGGUNAKAN R

Affiati O, Dedi Rosadi, dan Adhitya RE
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya,
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Gadjah Mada
affiatioktaviarina@yahoo.co.id
dedirosadi@ugm.ac.id
adhityaronnie@ugm.ac.id

ABSTRAK. Model Buhlmann Straub adalah generalisasi dari model Bühlmann. Parameter dari model Buhlmann Straub dalam kehidupan nyata sering tidak diketahui nilainya sehingga dibutuhkan suatu estimasi untuk menentukan nilai parameter tersebut. Estimasi –e

Kata kunci: Buhlmann Straub, estimasi parameter

1. PENDAHULUAN

Kredibilitas adalah suatu teknik untuk memprediksi rasio kerugian dari suatu kelas risiko ke depan dengan diberikan rasio kerugian sebelumnya dari kelas-kelas risiko yang berkaitan.

Model kredibilitas disusun untuk mengatasi heterogenitas dan memberikan estimasi yang baik untuk rasio kerugian setiap perusahaan melalui karakterisasi heterogenitas

2. MATERI DAN METODE

Model Bühlmann-Straub adalah generalisasi dari model Bühlmann. Oleh karena kelemahan dari model Bühlmann yaitu tidak dapat mengatasi perbedaan jumlah exposure/tertanggung pada tahun sebelumnya (contohnya pada asuransi kelompok, model Bühlmann tidak dapat mengatasi perubahan dari jumlah anggota yang masuk ke dalam asuransi dari suatu kelompok melebihi dua atau lebih periode observasi) maka dikembangkan model generalisasi dari model Bühlmann yaitu model Bühlmann-Straub[2].

2.1 Model Buhlmann Straub

Model Bühlmann-Straub dapat dimodelkan sebagai berikut :

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt} \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, J \text{ dan } t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

Dengan asumsi $E(\Xi_j) = 0, E(\Xi_{jt}) = 0, \text{var}(\Xi_j) = a, \text{var}(\Xi_{jt}) = \frac{s^2}{w_{jt}}$

Ξ_j dan Ξ_{jt} saling independent.

dimana w_{jt} pembobotan pada observasi X_{jt} yang menggambarkan presisi relatif diri sebagai observasi.

Variabel random X_{jt} dinotasikan sebagai deviasi dari *loss ratio* $m + \Xi_j$ untuk kelompok tertanggung ke-k pada tahun ke-t dan perusahaan ke-j.

Untuk mencari prediktor linier homogen terbaik dari *loss ratio* $m + \Xi_j$ adalah dengan cara meminimalkan jumlah kuadrat error berikut:

$$E \left[\left(m + \Xi_j - \sum_{i,t} h_{jt} X_{jt} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\text{Oleh karena } \left[E \left(m + \Xi_j - \sum_{i,t} h_{jt} X_{jt} \right) \right]^2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Maka } \left\{ \min_{h_{ij}, h_{i\Sigma}=1} E \left(\left(m + \Xi_j - \sum_{ij} h_{ij} X_{it} \right)^2 \right) = \min_{h_{i\Sigma}=1} \text{var} \left(m + \Xi_j - \sum_{i,j} h_{it} X_{it} \right) \right\} \quad (4)$$

$$= \min_{h_{i\Sigma}=1} \text{var} \left(\Xi_j - h_{j\Sigma} \Xi_j - \sum_{1+j} h_{j\Sigma} \Xi_i - \sum_{i,t} h_{it} \Xi_{it} \right) \quad (5)$$

$$= \min_{h_{i\Sigma}=1} \text{var} \left((1 - h_{j\Sigma}) \Xi_j - \sum_{1+j} h_{j\Sigma} \Xi_i - \sum_{i,t} h_{it} \Xi_{it} \right) \quad (6)$$

$$\text{Dimana } h_{j\Sigma} = \sum_{t=1}^T h_{jt} \quad (7)$$

$$\min_{h_{i,t}: \sum_{i,t} h_{i,t} = 1} E \left[\left(m + \Xi_j - \sum_{i,t} h_{it} X_{it} \right)^2 \right] = \min_{h_{i,t}: \sum_{i,t} h_{i,t} = 1} \left\{ (1 - h_{j\Sigma})^2 a + \sum_{i \neq j} h_{i\Sigma}^2 a + \sum_i \sum_t h_{it}^2 \frac{s^2}{w_{it}} \right\} \quad (8)$$

$$= \min_{h_{i,t}: \sum_{i,t} h_{i,t} = 1} \left\{ (1 - h_{j\Sigma})^2 a + \sum_{i \neq j} h_{i\Sigma}^2 \left(a + \frac{s^2}{w_{i\Sigma}} \right) + h_{j\Sigma}^2 \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right\} \quad (9)$$

$$\text{Dimana } w_{i\Sigma} = \sum_{t=1}^T w_{it} \quad (10)$$

$$\text{Oleh karena } z_j = \frac{aw_{j\Sigma}}{s^2 + aw_{j\Sigma}} \text{ maka } \frac{a}{z_j} = \left(a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right) \text{ sehingga} \quad (11)$$

$$\min_{h_{i,t}: \sum_{i,t} h_{i,t} = 1} E \left[\left(m + \Xi_j - \sum_{i,t} h_{it} X_{it} \right)^2 \right] = \min_{h_{i,t}: \sum_{i,t} h_{i,t} = 1} \left\{ (1 - h_{j\Sigma})^2 a + \sum_{1+j} h_{i\Sigma}^2 \left(\frac{a}{z_i} \right) + h_{j\Sigma}^2 \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right\} \quad (12)$$

$$= \min_{h_{j\Sigma}=1} \left\{ (1-h_{j\Sigma})^2 a + h_{j\Sigma}^2 \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} + (1-h_{j\Sigma})^2 \sum_{i=1}^j \frac{h_{j\Sigma}^2}{(1-h_{j\Sigma})^i} \frac{a}{z_i} \right\} \quad (13)$$

Dengan mensubstitusikan $\frac{h_{j\Sigma}}{(1-h_{j\Sigma})}$ oleh $\frac{z_i}{(z_\Sigma - z_j)}$ dengan $z_\Sigma = \sum_{j=1}^j z_j$, maka

$$\min_{h_{j\Sigma}=1} E \left[\left(m + \Xi_j - \sum_{i,j} h_{ij} X_{ij} \right)^2 \right] = \min_{h_{j\Sigma}=1} \left\{ (1-h_{j\Sigma})^2 a + \frac{a}{(z_\Sigma - z_j)} + h_{j\Sigma}^2 \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right\} \quad (15)$$

Dengan teorema Lagrange, dengan kendala $h_{j\Sigma} = 1$ maka bentuk Lagrange yaitu:

$$(1-h_{j\Sigma})^2 \left(a + \frac{a}{(z_\Sigma - z_j)} + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right) h_{j\Sigma} - \left(a + \frac{a}{(z_\Sigma - z_j)} \right) - \lambda = 0 \quad (16)$$

Kemudian dengan mendiferensialkan bentuk tersebut terhadap $h_{j\Sigma}$ diperoleh

$$\left(a + \frac{a}{(z_\Sigma - z_j)} + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right) h_{j\Sigma} - \left(a + \frac{a}{z_\Sigma - z_j} \right) - \lambda = 0 \quad (17)$$

Bentuk di atas akan minimal apabila dipilih $\lambda = 0$ sehingga

$$h_{j\Sigma} = \frac{\left(a + \frac{a}{(z_\Sigma - z_j)} \right)}{\left(a + \frac{a}{z_\Sigma - z_j} + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \right)} \quad (18)$$

Dengan perhitungan biasa akan didapatkan

$$h_{j\Sigma} = z_j + (1-z_j) \frac{z_j}{z_\Sigma} \quad (19)$$

Oleh karena pembobotan relatif $w_{j\Sigma}$ untuk $X_{jw} = \sum_{i=1}^r \frac{W_{ij}}{W_{j\Sigma}} X_{ij}$ sama dengan pembobotan

kredibilitas z_1 dan estimator $X_{jw} = \sum_{i=1}^j \frac{z_{ji}}{z_{j\Sigma}} X_{ji}$ adalah estimator terbaik untuk m maka

$$\text{estimator terbaik untuk loss ratio } m + \Xi_j \text{ adalah } z_j X_{jw} + (1-z_j) X_{zw} \quad (20)$$

2.2 Estimasi Parameter Model Bühlmann-Straub

Oleh karena parameter seperti m , s^2 dan a kadang-kadang tidak diketahui nilainya, maka diperlukan suatu estimasi untuk mengestimasi nilai-nilai dari parameter m , s^2 , dan a [2] yaitu:

2.2.1. Estimasi untuk $m : \hat{m}$

Telah diketahui bahwa estimasi tak bias untuk m adalah $\hat{m} = X_{ww}$

$$\text{Dimana } X_{ww} = \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \frac{W_{jt}}{W_{\Sigma\Sigma}} X_{jt}$$

$$\text{Bukti: } E(X_{ww}) = E\left(\sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \frac{W_{jt}}{W_{\Sigma\Sigma}} (m + \Xi_j + \Xi_{jt})\right) = m$$

2.2.2. Estimasi untuk $s^2 : \hat{s}^2$

$$\text{Diketahui estimasi tak bias untuk } s^2 : \hat{s}^2 = \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T w_{jt} (X_{jt} - X_{jw})^2$$

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } J(T-1) E(\hat{s}^2) &= E\left(\sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T w_{jt} (X_{jt} - \bar{X}_{j\cdot})^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T w_{jt} [\text{var}(X_{jt}) + \text{var}(X_{jw}) - 2 \text{cov}(X_{jt}, X_{jw})] \end{aligned}$$

$$\text{Dimana } \text{var}(X_{jt}) = a + \frac{s^2}{w_{jt}}, \text{var}(X_{jw}) = a + \frac{s^2}{T} \text{ dan}$$

$$\text{cov}(X_{jt}, X_{jw}) = \text{var}(X_{jw}) = a + \frac{s^2}{T}$$

$$\text{Jadi } J(T-1) E(\hat{s}^2) = s^2 \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \left[1 - \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}\right] = J(T-1) s^2$$

2.2.3. Estimasi untuk $a = \hat{a}$

Sebelum mengestimasi parameter a , maka dapat diperoleh bahwa

$$E(\bar{X}_{j\cdot} | \Theta_j) = \mu(\Theta_j), \text{var}(\bar{X}_{j\cdot} | \Theta_j) = \frac{v(\Theta_j)}{T}$$

$$\text{Sehingga } a = \text{var}(\bar{X}_{jw}) - \frac{s^2}{w_{j\Sigma}}$$

$$\text{Oleh karena } X_{ww} = \sum_{t=1}^T \frac{W_{j\Sigma}}{W_{\Sigma\Sigma}} X_{jw}$$

Dan mensubstitusikan $\beta = a$ dan $\alpha = s^2$ maka diperoleh

$$E\left[\sum_{j=1}^J w_{j\Sigma} (X_{jw} - X_{ww})^2\right] = a \left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}}\right) + s^2 (J-1)$$

$$\text{Jadi diperoleh } \hat{a} = \frac{\left[\sum_{j=1}^J w_{j\Sigma} (X_{jw} - X_{ww})^2 - s^2 (J-1) \right]}{\left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)}$$

$$\begin{aligned} \text{Bukti: } & \left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) E(a) + (J-1)s^2 = \sum_{j=1}^J w_{j\Sigma} (X_{jw} - X_{ww})^2 \\ & = \sum_{j=1}^J w_{j\Sigma} \left[\text{var}(X_{jw}) + \text{var}(X_{ww}) - 2 \text{cov}(X_{jw}, X_{ww}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Dimana } \text{var}(X_{jw}) = \frac{1}{w_{j\Sigma}^2} \text{var} \left(\sum w_{jt} (m + \Xi_j + \Xi_{jt}) \right) = a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}}$$

$$\text{var}(X_{ww}) = \frac{1}{w_{\Sigma\Sigma}^2} \text{var} \left(\sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T w_{jt} (m + \Xi_j + \Xi_{jt}) \right) = a \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}^2} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}}$$

$$\text{cov}(X_{jw}, X_{ww}) = \frac{1}{w_{\Sigma\Sigma}} \text{cov} \left(X_{jw}, \sum_{j=1}^J w_{j\Sigma} X_{jw} \right) = \frac{aw_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga, } & E(a) \left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) + (J-1)s^2 \\ & = \sum_{j=1}^J w_{j\Sigma} \left[a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} + a \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}^2} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} - 2 \left(\frac{aw_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) \right] \\ & = a \left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^J \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) + (J-1)s^2 \end{aligned}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Data asuransi gempa bumi tahun 2000-2004 pada tabel di atas dihitung dengan menggunakan estimasi parameter menggunakan program R. Premi pada tabel di atas merupakan prediksi premi untuk tahun 2005.

Untuk penelitian lebih lanjut, estimasi-estimasi parameter dapat menggunakan metode Bayesian dan aplikasinya dapat menggunakan jenis asuransi yang lain.

Tabel 1.

| Grup | premi | | Grup | premi |
|------|----------|--|------|----------|
| 1 | 6,341294 | | 11 | 16,28387 |
| 2 | 12,27935 | | 12 | 16,18251 |
| 3 | 8,968203 | | 13 | 20,19684 |
| 4 | 9,734277 | | 14 | 14,20975 |
| 5 | 7,376272 | | 15 | 15,1546 |
| 6 | 24,21798 | | 16 | 11,36292 |
| 7 | 12,82023 | | 17 | 10,97357 |
| 8 | 10,31254 | | 18 | 23,87162 |
| 9 | 20,91037 | | 19 | 228,5622 |
| 10 | 119,7451 | | 20 | 21,8222 |

4. KESIMPULAN

Parameter dari model Buhlmann Straub dalam kehidupan nyata sering tidak diketahui nilainya sehingga dibutuhkan suatu estimasi untuk menentukan nilai parameter tersebut.

Dari hasil perhitungan diperoleh:

1. estimasi untuk $\hat{m} = X_{ww}$
2. estimasi untuk $s^2 : \hat{s}^2$

$$s^2 : \hat{s}^2 = \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T w_{jt} (X_{jt} - X_{jw})^2$$

3. estimasi untuk $a = \hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{\left[\sum_{j=1}^J w_{jE} (X_{jw} - X_{ww})^2 - s^2 (J-1) \right]}{\left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^J \frac{w_{jE}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)}$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Rosadi, D. *Modul Praktikum Komputasi Statistika Pengantar Analisa Statistika Dengan R*. 2005
- [2] Kaas, R. *Modern Actuarial Risk Theory Using R*, SpringerVerlag Berlin Heidelberg. 2008
- [3] Statistik Asuransi Kebakaran 2000-2004, PT. Reasuransi Internasional Indonesia

MODEL FUNGSI TRANSFER MULTI INPUT UNTUK JUMLAH WISATAWAN MANCANEGERA MELALUI BANDARA ADI SOEMARMO

Ratna Dewi Ayu Nestri, Sri Sulistijowati H., dan Siswanto
Jurusan Matematika FMIPA UNS
email: neys_wy@yahoo.co.id

ABSTRAK. Dari tahun ke tahun tingkat kunjungan wisatawan ke Surakarta terus meningkat, karena wisata budaya menjadi daya tarik utama wisatawan. Faktor yang mempengaruhi jumlah wisatawan ke Surakarta dapat dilihat dari faktor ekonomi antara lain tingkat inflasi dan nilai tukar dollar terhadap rupiah. Dengan meningkatnya nilai tukar dollar dan inflasi maka akan mempengaruhi jumlah wisatawan mancanegara (wisman) yang datang ke Surakarta. Meningkatnya pendapatan pada sektor pariwisata maka akan meningkatkan pendapatan daerah Surakarta. Dengan mengambil data jumlah wisman melalui Bandara adi Soemarmo, tingkat inflasi dan nilai tukar dollar dari tahun 2004 sampai 2009. Model yang tepat adalah model fungsi transfer multi input. Estimasi parameter yang digunakan pada penelitian ini menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Karena deret nilai sisa independen, acak dan normal, maka hasil yang diperoleh dapat diaplikasikan pada peramalan data jumlah wisman ke Kota Surakarta melalui Bandara Adi Soemarmo.

Kata kunci: Jumlah wisman, model fungsi transfer multi input, MLE, deret nilai sisa.

1. PENDAHULUAN

Liu dan Hanssens [3] menjelaskan bahwa model fungsi transfer sering digunakan dalam model analisis runtun waktu yang biasanya diaplikasikan di bidang teknik, ekonomi dan manajemen. Model ini merupakan perluasan dari model regresi linier. Menurut Syakuri [5], perbedaan yang mendasar dibanding model regresi adalah bagaimana model fungsi transfer dibangun dengan mengidentifikasi karakteristik system input dan output. Liu dan Hanssens [3] telah meneliti model fungsi transfer multi input tentang "*Identification of Multiple-Input Transfer Function Models*" yang menjelaskan bagaimana mengidentifikasi model fungsi transfer multi input dengan estimasi parameter menggunakan Metode Kuadrat Terkecil. Fathurahman [2] menulis tentang Pemodelan Fungsi Transfer Multi Input yang memodelkan data curah hujan dipengaruhi oleh kelembaban udara, tekanan udara, suhu udara, penyinaran matahari dan kecepatan angin.

2. MATERI DAN METODE

Pada model fungsi transfer multi input terdapat beberapa variabel input (X) yang dimasukkan pada suatu model. Bentuk model fungsi transfer multi input menurut Wei [6] dapat ditulis sebagai berikut

$$y_t = \sum_{j=1}^j \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} x_{j,t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

dimana

- y_t : variabel dependen
- x_t : variabel independen ke-j
- $\omega_j(B)$: operator moving average order s_j untuk variabel ke-j
- $\delta_j(B)$: operator autoregresi order r_j untuk variabel ke-j
- $\theta(B)$: operator moving average order q
- $\phi(B)$: operator autoregresi order p
- a_t : nilai gangguan acak

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi kasus. Data diambil dari BPS Surakarta dan website dari Bank Indonesia [1]. Menurut Makridakis *et. al* [4] terdapat empat tahap dalam pembentukan model fungsi transfer:

Tahap 1 : Identifikasi bentuk model

- a. Mempersiapkan deret input dan output
- b. Pembentukan deret input
- c. “Pemutihan” deret output
- d. Penghitungan korelasi–silang (cross correlation) dan autokorelasi untuk deret input dan output yang telah diputihkan
- e. Penetapan (r, s, b) untuk model fungsi transfer yang menghubungkan deret input dan output
- f. Penetapan (p_n, q_n) untuk model ARMA (p_n, q_n) dari deret gangguan (n_t)

Tahap 2 : Penaksiran parameter–parameter model fungsi transfer

- a. Taksiran awal nilai parameter–parameter
- b. Taksiran akhir nilai parameter–parameter

Tahap 3 : Uji diagnose model fungsi transfer

- a. Penghitungan autokorelasi untuk nilai sisa model (r, s, b)
- b. Penghitungan korelasi–silang antara nilai sisa dengan deret gangguan yang telah diputihkan

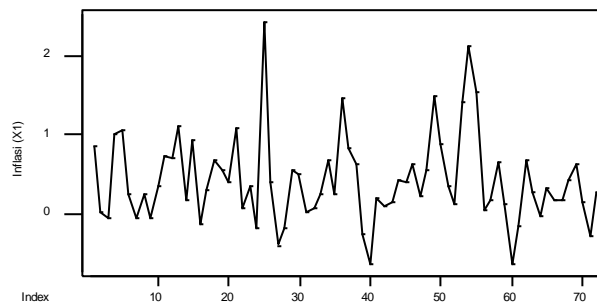
c. Uji kenormalan residual

Tahap 4 : Penggunaan model fungsi transfer untuk peramalan

Peramalan nilai-nilai yang akan datang dengan menggunakan model fungsi transfer multi input

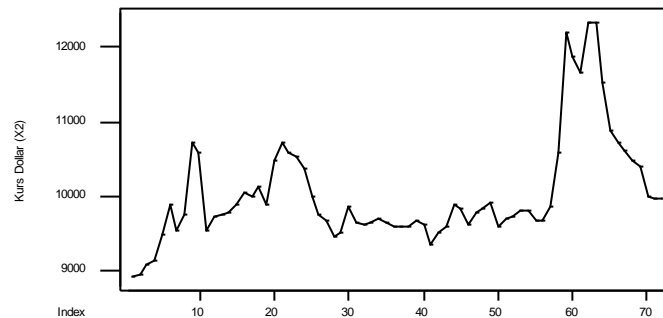
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam memodelkan fungsi transfer multi input, tahap pertama yang harus dilakukan dalam model fungsi transfer multi input adalah mempersiapkan deret input dan deret output. Asumsi yang harus dipenuhi adalah deret input dan output harus stasioner, dari data tersebut dapat dilihat plot time series pada Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3.



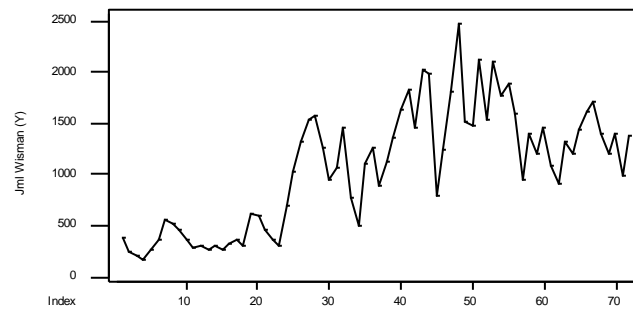
Gambar 1. Plot Time Series Tingkat Inflasi

Dari Gambar 1. terlihat bahwa data tingkat inflasi tidak terlalu berfluktuasi sehingga tidak memerlukan transformasi ataupun pembedaan, karena deret tersebut telah stasioner. Untuk meyakinkan apakah deret input telah stasioner dapat dilakukan Uji ADF, dengan output dari *Software Eviews 4* pada Tabel 1.



Gambar 2. Plot Time Series Nilai Tukar Dollar

Dari Gambar 2. terlihat bahwa data nilai tukar dollar menunjukkan fluktuasi yang tajam, maka digunakan transformasi logaritma 10 dan perbedaan orde pertama, untuk memperkecil fluktuasi data agar deret input stasioner. Untuk meyakinkan apakah deret input telah stasioner atau belum, dapat dilakukan Uji ADF, dengan output dari *Software Eviews 4* pada Tabel 1.



Gambar 3. Plot Time Series Jumlah Wisatawan

Dari Gambar 3. terlihat bahwa data jumlah wisman menunjukkan fluktuasi yang tajam, maka digunakan transformasi akar pangkat dua dan perbedaan orde pertama, untuk memperkecil fluktuasi data agar deret input stasioner. Untuk meyakinkan apakah deret input telah stasioner atau belum, dapat dilakukan Uji ADF, dengan output dari *Software Eviews 4* pada Tabel 1.

Tabel 1. Uji ADF

| | Tingkat Inflasi ($X_{1,t}$) | Nilai Tukar Dollar ($X_{2,t}$) | Jumlah Wisman (Y_t) |
|-------------|----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| T-Statistik | -9.821354 | -7.102861 | -9.087828 |
| Prob | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Pada Tabel 1. terlihat bahwa $p\text{-value} < 5\%$ maka data telah stasioner (tidak mengandung akar-akar unit). Setelah deret input dan deret output telah stasioner, tahap berikutnya adalah pemutihan deret input dan output.

Pemutihan deret input $x_{j,t}$ dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menetapkan model ARIMA dari deret $x_{j,t}$. Untuk menetapkannya dapat dilihat dari plot ACF dan PACF dan didapatkan model ARIMA untuk deret input adalah

- Tingkat inflasi : ARIMA (1,0,2)
- Nilai tukar dollar : ARIMA (3,1,0)

Sehingga didapatkan model pemutihan deret input adalah

$$(1 - 0.9971B)x_{1,t} = (1 - 0.65133B - 0.26277B^2)\alpha_{1,t}$$

$$(1 - 0.25947 + 0.32272B^2 - 0.24691B^3)x_{2,t} = \alpha_{2,t}$$

Fungsi transfer yang diterapkan adalah memetakan ke dalam y_t oleh karena itu parameter-parameter yang digunakan adalah parameter-parameter yang sudah diperoleh pada pemutihan deret input (x_t). Sehingga didapatkan deret $\alpha_{j,t}$ (deret input yang telah diputihkan) dan β_t (deret output yang telah diputihkan).

Menurut Makridakis *et. al* [4] terdapat tiga parameter kunci di dalam model fungsi transfer adalah (r, s, b) , dimana r merupakan derajat fungsi $\delta(B)$, s menunjukkan derajat fungsi $\omega(B)$. Nilai b menyatakan bahwa nilai y_t tidak dipengaruhi oleh nilai $x_{j,t}$ sampai periode $t + b$. Nilai s menyatakan untuk beberapa lama deret output secara terus menerus dipengaruhi oleh nilai-nilai baru dari deret input. Nilai r menunjukkan bahwa nilai y_t berkaitan dengan nilai-nilai masa lalunya.

Setelah didapatkan deret $\alpha_{j,t}$ dan β_t maka dibuat plot korelasi-silang antara $\alpha_{j,t}$ dan β_t . Dalam penentuan bobot respon impuls didapatkan dari plot korelasi-silang antara $\alpha_{j,t}$ dan β_t dan memberikan hasil pada Tabel 2.

Tabel 2. Estimasi Nilai Bobot Respon Impuls

| Variabel input | r | S | b |
|----------------|-----|-----|-----|
| x_1 | 2 | 2 | 8 |
| x_2 | 0 | 0 | 4 |

Dari Tabel 2. didapatkan model fungsi transfer multi input yang telah diperoleh adalah

$$y_t = \frac{\omega_{1,0} - \omega_{1,1}B - \omega_{1,2}B^2}{1 - \delta_{1,1}B - \delta_{1,2}B^2} x_{1,t-8} + \omega_{2,0}x_{2,t-4} + (1 - \theta_1 B)a_t$$

Setelah didapat model di atas, pertama kali ditentukan taksiran awal dari parameter-parameter $\omega_{1,0}, \omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \omega_{2,0}, \delta_{1,1}, \delta_{1,2}$ dan θ_1 . Tahap estimasi parameter model fungsi transfer multi input awal merupakan tahap penentuan taksiran parameter-parameter awal pada model untuk variabel input. Untuk mencari taksiran terbaik digunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Hasil taksiran awal parameter pada Tabel 3.

Tabel 3. Estimasi Parameter Awal

| Parameter | Estimate | t Value | Pr > t | Lag | Variable | Shift |
|----------------|----------|---------|---------|-----|----------|-------|
| θ | 0.49752 | 4.14 | 0.0001 | 1 | Y | 0 |
| $\omega_{1,0}$ | -4.14063 | -4.02 | 0.0002 | 0 | x1 | 8 |
| $\omega_{1,1}$ | 0.06847 | 0.04 | 0.9647 | 1 | x1 | 8 |
| $\omega_{1,2}$ | -4.16389 | -2.5 | 0.0156 | 2 | x1 | 8 |
| $\delta_{1,1}$ | 0.25293 | 0.61 | 0.542 | 1 | x1 | 8 |
| $\delta_{1,2}$ | 0.70945 | 1.76 | 0.0847 | 2 | x1 | 8 |
| $\omega_{2,0}$ | 66.9135 | 4.49 | <.0001 | 0 | x2 | 4 |

Dari Tabel 3. terlihat bahwa hanya terdapat beberapa parameter yang signifikan karena p-value < 0.05 yaitu $\theta, \omega_{1,0}, \omega_{1,2}, \omega_{2,0}$. Setelah didapatkan parameter-parameter yang signifikan, maka dilakukan estimasi parameter akhir pada Tabel 4.

Tabel 4. Estimasi parameter model fungsi transfer multi input akhir

| Parameter | Estimate | t Value | Pr > t | Lag | Variable | Shift |
|----------------|----------|---------|---------|-----|----------|-------|
| θ | 0.52696 | 4.54 | < .0001 | 1 | Y | 0 |
| $\omega_{1,0}$ | -4.47096 | -4.98 | < .0001 | 0 | x1 | 8 |
| $\omega_{1,2}$ | -4.42313 | -4.96 | < .0001 | 2 | x1 | 8 |
| $\delta_{1,2}$ | 0.95482 | 15.22 | < .0001 | 2 | x1 | 8 |
| $\omega_{2,0}$ | 57.01547 | 4.48 | < .0001 | 0 | x2 | 4 |

Dari Tabel 4. terlihat bahwa semua parameter telah signifikan dan dapat digunakan memodelkan fungsi transfer multi input untuk data jumlah wisman yaitu

$$y_t = \frac{-4.471 + 4.42313B^2}{1 - 0.95482B^2} x_{1,t-8} + 157.0515x_{2,t-4} + (1 - 0.52696B)a_t$$

Setelah didapatkan model fungsi transfer maka akan dilakukan uji diagnostik. Ada tiga pengujian diagnostik yaitu menguji independensi antara deret nilai sisa (a_t) dan deret input yang telah diputihkan ($\alpha_{j,t}$), menguji bahwa deret a_t yang pada dasarnya merupakan deret random atau acak, dan menguji kenormalan residual.

Tabel 5. Autokorelasi Residu

| To Lag | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq |
|--------|------------|----|------------|
| 12 | 20.28 | 11 | 0.0517 |
| 18 | 26.8 | 17 | 0.0611 |
| 24 | 31.65 | 23 | 0.1076 |

Dari Tabel 5. diperoleh bahwa semua nilai p -value dari uji χ^2 Box-Pierce lebih besar dari $\alpha = 5\%$, sehingga dapat disimpulkan bahwa residual model fungsi transfer multi input acak dan model dianggap telah memadai. Setelah asumsi pertama terpenuhi, maka akan diuji apakah deret a_t independen.

Tabel 6. Korelasi-Silang antara Residu dengan x_1

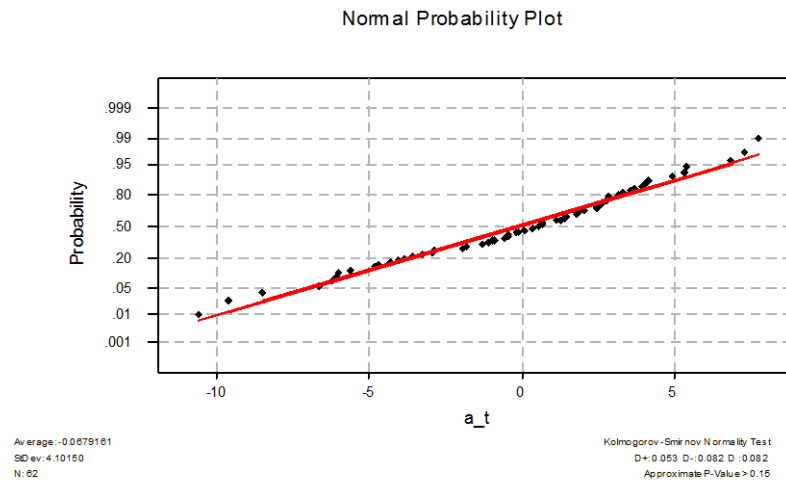
| To Lag | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq |
|--------|------------|----|------------|
| 5 | 6.35 | 3 | 0.0957 |
| 11 | 8.49 | 9 | 0.486 |
| 17 | 14.91 | 15 | 0.4577 |
| 23 | 18.31 | 21 | 0.6294 |

Tabel 7. Korelasi-Silang antara Residu dengan x_2

| To Lag | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq |
|--------|------------|----|------------|
| 5 | 2.33 | 5 | 0.8025 |
| 11 | 7.3 | 11 | 0.7742 |
| 17 | 10.06 | 17 | 0.9009 |
| 23 | 15.56 | 23 | 0.8733 |

Dari Tabel 6. dan Tabel 7. terlihat bahwa semua nilai p -value dari uji χ^2 Box-Pierce lebih besar dari $\alpha = 5\%$, sehingga deret a_t tersebut independen.

Untuk mengetahui pola kenormalan residual pada model fungsi transfer multi input dilakukan dengan melihat plot sebaran residual yang dibandingkan dengan kurva normal. Dari output *Minitab 13.0* dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Plot Distribusi Normal Model Fungsi Transfer Multi Input

Pada Gambar 4 terlihat bahwa residual model berdistribusi normal dengan p -value lebih besar dari $\alpha = 5\%$, sehingga model baik digunakan.

Setelah model fungsi transfer multi input dari jumlah wisman melalui Bandara Adi Soemarmo didapatkan dan uji diagnostik telah dipenuhi, maka model tersebut dapat digunakan untuk peramalan jumlah wisman melalui Bandara Adi Soemarmo pada tahun 2010 yang tersaji dalam Tabel 8.

Tabel 8. Nilai Peramalan Jumlah Wisman Melalui Bandara Adi Soemarmo

| Bulan | Peramalan | Batas Atas | Batas Bawah |
|----------------|-----------|------------|-------------|
| Januari 2010 | 1290 | 762 | 1957 |
| Februari 2010 | 1163 | 620 | 1875 |
| Maret 2010 | 1242 | 637 | 2047 |
| April 2010 | 1219 | 584 | 2085 |
| Mei 2010 | 1111 | 446 | 2076 |
| Juni 2010 | 1164 | 407 | 2310 |
| Juli 2010 | 1403 | 500 | 2764 |
| Agustus 2010 | 1423 | 458 | 2919 |
| September 2010 | 1429 | 378 | 3155 |
| Oktober 2010 | 1441 | 299 | 3438 |
| November 2010 | 1468 | 242 | 3730 |
| Desember 2010 | 1475 | 184 | 3998 |

4. KESIMPULAN

Model fungsi transfer yang memadai untuk menyatakan hubungan antara tingkat inflasi dan nilai tukar dollar dengan jumlah wisman adalah:

$$y_t = \frac{-4.471 + 4.42313B^2}{1 - 0.95482B^2} x_{1,t-8} + 157.0515x_{2,t-4} + (1 - 0.52696B)a_t$$

dengan $y_t = (1-B)\sqrt{Y_t}$, $x_{1,t} = X_{1,t}$ dan $x_{2,t} = (1-B)\log X_{2,t}$

dimana deret tingkat inflasi dan nilai tukar dollar dengan nilai sisa, saling independen. Demikian juga antara nilai sisa yang satu dengan yang lainnya saling independen.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bank Indonesia. (2004-2009), *Kurs Uang Kertas Asing*. www.bi.go.id
- [2] Fathurahman, M. (2009), *Pemodelan Fungsi Transfer Multi Input*. Jurusan Statistik, FMIPA Universitas Mulawarman.
- [3] Liu, L-M. and D. M. Hanssens. (1982), *Identification of Multiple-Input Transfer Function Models*. Graduate School of Management University of California Los Angeles. California.
- [4] Makridakis, S., S. C. Wheelwright, and V. E. McGEE. (1995), *Metode dan Aplikasi Peramalan*, Jakarta: Erlangga.

- [5] Syakuri, A. (2003), *Model Fungsi Transfer dengan Input Tunggal Dalam Analisis Time Series*. Universitas Gadjah Mada.
- [6] Wei, W.W.S., (1994), *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods*, Addison Wesley Publishing Company, California.

MODEL OPTIMAL PRODUKSI PADI DI INDONESIA MENGGUNAKAN ESTIMASI KUADRAT TERKECIL DAN ESTIMASI-M

Yuliana Susanti dan Hasih Pratiwi
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret
yulsusan@yahoo.com
hasih.pratiwi@yahoo.com

ABSTRACT. Paddy is the main food for most of the Indonesian people. This commodity has strategic and political nature. It means that the government will be shaken if the paddy's price is high and unstable. Therefore, the existence and adequacy of this commodity must always be noted. The purpose of this research is to determine an optimal regression model to predict the paddy production in Indonesia using least square estimation and M-estimation.

By using data from The Indonesian Ministry of Agriculture and Center Bureau of Statistics, the optimal regression model for production of paddy can be obtained with M-estimation. The increment of one hectare of harvest area and damaged area will increase 4,84 tons and 15,4 tons of paddy production respectively, while the increment of one quintal per hectare of productivity will increase 17,150 tons of paddy production. The hypothesis testing for regression parameters shows that the harvest area, the productivity and the damaged area have influence on the production of paddy significantly.

Keywords: regression model, least square estimation, M-estimation

1. PENDAHULUAN

Kebijakan harga makanan pokok merupakan salah satu instrumen penting dalam menciptakan ketahanan pangan nasional (Husni M.dkk,2004). Mengingat pentingnya upaya pemenuhan kebutuhan pangan, diperlukan usaha untuk memprediksi produksi pada tahun yang akan datang. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk memprediksi produksi padi serta menyelidiki faktor-faktor yang mempengaruhinya, diantaranya adalah analisis regresi. Analisis regresi merupakan teknik statistik yang digunakan untuk menyelidiki dan memodelkan hubungan antara variabel bebas dan variabel tak bebas. Jika Y variabel tak bebas dan X_1, X_2, \dots, X_k variabel-variabel bebas, maka model regresi linear secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

dengan $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ adalah parameter-parameter regresi dan ε adalah eror yang berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi sama. Permasalahan yang muncul dalam analisis regresi adalah menentukan estimator terbaik untuk $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. Dalam menemukan estimator terbaik sangat dipengaruhi oleh penggunaan metode. Sebagai contoh, penggunaan metode kuadrat terkecil tidak akan tepat dalam menyelesaikan permasalahan yang mengandung observasi pencilan atau ekstrem (data yang tidak mengikuti pola umum data) karena asumsi kenormalan tidak dapat dipenuhi

(Zhang, 1996). Dalam analisis regresi, adanya produksi yang jauh melampaui produksi secara umum dapat dikategorikan sebagai pencilan, sehingga penggunaan metode kuadrat terkecil untuk mengestimasi parameter regresi kurang tepat (Barnett and Lewis, 1978).

Untuk mengatasi hal ini diperlukan metode estimasi parameter yang bersifat *robust* dimana nilai estimasinya tidak banyak dipengaruhi oleh perubahan kecil dalam data (Yuliana, 2008). *Robust* diartikan sebagai ketidaksensitifan atau ketegaran terhadap perubahan-perubahan kecil dari asumsi (Huber, 1981:1). Menurut Miguel (2003) estimasi dengan metode *maximum likelihood estimator* (MLE) akan menghasilkan estimator yang bersifat sama seperti metode kuadrat terkecil, artinya MLE juga tidak *robust* terhadap pengaruh pencilan. Suatu teknik *robust* yang terkenal adalah estimasi M, dimana estimasi ini merupakan perluasan dari MLE dan merupakan estimasi yang *robust*. Tujuan penelitian ini adalah menentukan model regresi optimal untuk memprediksi produksi padi di Indonesia.

2. MODEL REGRESI LINEAR

Secara umum, model regresi linear yang melibatkan p variabel bebas dapat dinyatakan sebagai

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

dengan Y_i adalah variabel respon pada pengamatan ke- i , β_0, \dots, β_p adalah parameter, X_i adalah nilai variabel bebas pada pengamatan ke- i , dan ε_i adalah sesatan random yang berdistribusi normal $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dimana sesatannya tidak saling berkorelasi (Montgomery and Peck, 2006:66).

2.1 Metode Kuadrat Terkecil

Model regresi linear dapat diestimasi dengan metode kuadrat terkecil yang mempunyai ide dasar meminimumkan jumlahan kuadrat sesatan, yaitu

$$J = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_p x_{ip})^2. \quad (2.2)$$

Untuk meminimumkan (2.2), dicari turunan J secara parsial terhadap β_j $j = 0, 1, \dots, p$ dan menyamakannya dengan nol sehingga diperoleh estimasi model regresi linear

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + \dots + b_p x_{ip}. \quad (2.3)$$

Sedangkan estimasi dari sesatan disebut sisa dan dinyatakan dengan

$$e_i = \hat{y}_i - (b_0 + b_1 x_{i1} + \dots + b_p x_{ip}).$$

Sisa memberikan keterangan tentang data yang tidak mengikuti pola umum model regresi linear yang digunakan, ditandai dengan sisanya yang relatif besar. Sisa semacam ini disebut pencilan. Suatu data dikatakan sebagai pencilan jika $|e_i/s| > 2$ dengan s adalah rata-rata kuadrat sisa (RKS), $RKS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n-2)$ (Sembiring, 2003: 164). Meskipun merupakan data yang tidak biasa, membuang pencilan bukanlah tindakan yang bijaksana. Bisa jadi data pencilan menyimpan informasi yang penting. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode estimasi yang tidak peka terhadap pencilan.

2.2 Estimasi-M

Beberapa peneliti merancang suatu metode untuk mengatasi dampak dari pencilan jika digunakan metode kuadrat terkecil, yang dinamakan estimasi-M (Montgomery and Peck, 2006: 373). Pada metode kuadrat terkecil, nilai sesatan yang besar akan semakin memperbesar jumlahan kuadratnya. Estimasi-M mengantisipasi hal tersebut dengan mendefinisikan suatu fungsi $\rho(\varepsilon)$, yang disebut fungsi Huber. Pada estimasi-M, b_0, \dots, b_p yang secara berturut-turut merupakan estimasi dari β_0, \dots, β_p dipilih sedemikian sehingga $\sum \rho(\varepsilon)$ minimum. Fungsi Huber didefinisikan sebagai

$$\rho(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2 & \text{jika } -k \leq \varepsilon \leq k \\ 2k|\varepsilon| - k^2 & \text{jika } \varepsilon < -k \text{ atau } \varepsilon > k \end{cases}$$

dengan $k=1,5 \hat{\sigma}$ dan $\hat{\sigma}$ adalah estimasi dari standar deviasi sisa. Untuk mengestimasi σ , digunakan $\hat{\sigma}=1,483 \text{ MAD}$, dengan MAD (*Median of Absolute Deviation*) adalah median dari sisa absolut $|e_i|$ (Birkes dan Dodge, 1993: 87).

Untuk mendapatkan nilai estimasi-M, diperlukan suatu algoritma penghitungan. Berikut diberikan algoritma estimasi-M yang diacu dari Birkes and Dodge (1993: 93).

1. Dipilih estimasi awal b_0 dari metode kuadrat terkecil lalu dihitung $\hat{y}_i = b_0^0 + b_1^0 x_{i1} + \dots + b_p^0 x_{ip}$, sisa $e_i^0 = y_i - \hat{y}_i^0$, dan $\hat{\sigma} = 1,483 \text{ MAD}$.
2. Dipotong e_i^0 agar mendapatkan nilai e_i^* , yaitu:

$$e_i^* = 1,5 \hat{\sigma} \quad \text{jika } e_i^0 > 1,5 \hat{\sigma}$$

$$e_i^* = -1,5 \hat{\sigma} \quad \text{jika } e_i^0 < -1,5 \hat{\sigma}$$
3. Dihitung $y_i^* = \hat{y}_i^0 + e_i^*$ lalu dari nilai y_i^* tersebut dicari nilai b_0 menggunakan metode kuadrat terkecil. Proses iterasi berlanjut sampai diperoleh nilai b_0 yang sama dengan iterasi sebelumnya.

Dari nilai b_0 di atas, diperoleh regresi dengan estimasi-M seperti persamaan (2.3).

3. UJI SIGNIFIKANSI MODEL REGRESI LINEAR

Setelah diperoleh model regresi, langkah selanjutnya adalah pengujian hipotesis untuk mengetahui apakah variabel bebas mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap variabel tak bebas. Hipotesisnya adalah

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \forall j = q+1, q+2, \dots, p$$

$$H_1 : \exists j \ni \beta_j \neq 0 \quad j = q+1, q+2, \dots, p$$

dengan q adalah sejumlah variabel bebas yang masuk dalam model tereduksi

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_q X_{iq} + \varepsilon_i. \quad (3.1)$$

Statistik ujinya adalah

$$F_M = \frac{STR_{reduced} - STR_{full}}{(p-q)\hat{\lambda}} \quad \text{dengan} \quad \hat{\lambda} = \frac{(n/m)\sum(e_i^*)^2}{n-p-1}. \quad (3.2)$$

STR (*Sum of transformed Residuals*) adalah jumlah sisa yang ditransformasi. STR_{full} dan $STR_{reduced}$ masing-masing diperoleh dari model penuh dan model tereduksi. Algoritma STR_{full} dapat dijelaskan sebagai berikut

1. Dihitung sisa e_i dan $\hat{\sigma} = 1,483$ MAD.
2. Dipotong e_i agar mendapatkan nilai $\rho(e_i)$ yaitu

$$\rho(e_i) = e_i^2 \quad \text{untuk } -1,5\hat{\sigma} \leq e_i \leq 1,5\hat{\sigma}$$

$$\rho(e_i) = 2k|e_i| - k^2 \quad \text{untuk } e_i < -1,5\hat{\sigma} \text{ atau } e_i > 1,5\hat{\sigma}$$
3. Dihitung $STR_{full} = \sum \rho(e_i)$.

Penghitungan $STR_{reduced}$ sama dengan STR_{full} hanya saja nilai $\hat{\sigma}$ tetap (berasal dari model penuh). Nilai $\sum e_i^*$ pada $\hat{\lambda}$ diperoleh dengan memotong e_i menjadi $-1,5\hat{\sigma}$ jika $e_i < -1,5\hat{\sigma}$ dan $1,5\hat{\sigma}$ jika $e_i > 1,5\hat{\sigma}$, sedangkan m adalah jumlah e_i yang tidak dipotong. Selanjutnya hipotesis ditolak jika $F_M > F$ tabel dengan derajat bebas $(p-q, n-p-1)$ dan tingkat signifikansi α (Birkes and Dodge, 1993: 95).

4. METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari instansi pemerintahan terkait, yaitu dari Departemen Pertanian (Deptan) dan Badan Pusat Statistik (BPS) tahun 2007 dan 2008. Untuk mencapai tujuan penelitian, dilakukan langkah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi produksi padi.
2. Menyelidiki hubungan faktor satu dengan lainnya.
3. Membuat plot antara produksi atau Y dengan masing-masing faktor atau variabel bebas untuk mengetahui apakah hubungan antara Y dengan masing-masing variabel bebas dapat didekati dengan garis lurus.
4. Mengestimasi model regresi antara Y dengan semua faktor dengan metode kuadrat terkecil dan melakukan uji asumsi regresi.
5. Melakukan transformasi data jika asumsi tidak dipenuhi.
6. Mengestimasi model regresi data transformasi dengan metode kuadrat terkecil dan melakukan uji asumsi regresi.
7. Pencilan yang dihasilkan kemudian dikeluarkan dan dilakukan estimasi model regresi lagi tanpa mengikutsertakan data pencilan.
8. Langkah 6 dan 7 diulang sampai diperoleh model regresi yang tidak menghasilkan pencilan, lalu melakukan uji asumsi regresi.
9. Mengestimasi model regresi antara Y dengan semua faktor menggunakan estimasi-M, yaitu
 - a. Menentukan estimasi awal dengan metode kuadrat terkecil.
 - b. Menghitung e_i^0 dan $\hat{\sigma}$, lalu memotong e_i^0 untuk mendapatkan e_i^* .
 - c. Menghitung \hat{y}_i^* , kemudian meregresikannya kembali dengan metode kuadrat terkecil.
 - d. Jika estimasi parameter yang diperoleh sama dengan sebelumnya maka proses berhenti dan diperoleh model regresi dengan estimasi-M. Sebaliknya, jika berbeda dengan sebelumnya maka iterasi berlanjut hingga diperoleh estimasi parameter yang sama.
 - e. Menguji asumsi-asumsi regresi.
10. Menguji apakah variabel-variabel bebas mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap variabel tak bebas. Pengujian dilakukan dengan langkah sebagai berikut
 - a. Menghitung STR_{full} dan $\hat{\lambda}$.
 - b. Menentukan model-model tereduksi yang mungkin bisa dibangun dari model penuh, kemudian mencari masing-masing estimasi model regresinya dengan estimasi-M.
 - c. Menghitung $STR_{reduced}$ dan F_M .

- d. Membandingkan nilai F_M dengan nilai F tabel, lalu menarik kesimpulan dari hasil yang diperoleh.
- e. Menentukan model optimal berdasarkan data produksi padi tahun 2008 dan tahun 2007.

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan data yang diperoleh dari BPS dan Deptan, tidak semua faktor yang diduga mempengaruhi produksi padi tersedia untuk setiap propinsi. Data lengkap yang terkait dengan produksi padi untuk tahun 2008 adalah luas lahan panen, produktivitas dan luas lahan puso, sedangkan untuk tahun 2007 data yang tersedia adalah luas lahan panen, produktivitas dan produksi benih padi sebar.

5.1 Produksi Padi Tahun 2008

Pada bagian ini dibahas model regresi linear produksi padi (Y) seluruh propinsi di Indonesia berdasarkan luas lahan panen (X_1), produktivitas (X_2) dan luas lahan puso (X_3). Estimasi model regresi linearnya adalah

$$\hat{Y} = -935465 + 5.02X_1 + 18149X_2 + 12.9X_3 \quad (5.1)$$

dan selanjutnya dilakukan uji asumsi untuk melihat apakah asumsi regresi linear dipenuhi ataukah tidak.

Untuk melihat asumsi kenormalan dapat dilihat melalui plot probabilitas normal sisa. Pada plot ini terdapat satu titik yang terletak jauh dari garis lurus, untuk itu asumsi kenormalan tidak dipenuhi. Hal ini diperkuat oleh nilai korelasi antara residu dengan n score, yaitu 0,957. Karena nilai ini kurang dari nilai hampirannya yaitu 0,966, maka asumsi kenormalan tidak dipenuhi. Selanjutnya untuk asumsi homosedastik dapat dilihat pada plot antara e_i dengan \hat{Y} . Plot data tidak membentuk pola khusus, sehingga asumsi homosedastik dipenuhi (tidak dilanggar). Untuk mendeteksi asumsi selanjutnya adalah asumsi non autokorelasi, yaitu dengan melihat plot e_i dengan pengamatan terurut. Plot e_i acak atau tidak membentuk pola khusus, sehingga asumsi non-autokorelasi dipenuhi (tidak dilanggar). Untuk lebih meyakinkan hal ini dapat dilihat nilai Durbin Watsonnya yaitu 1,76616. Karena $1,76616 > 1,43$ (dari tabel Durbin Watson untuk $\alpha = 5\%$ dan $n = 33$ serta jumlah variabel bebas = 3 diperoleh $(d_L; d_U) = (1,04; 1,43)$) maka asumsi non-autokorelasi tidak dilanggar. Selanjutnya untuk melihat asumsi non-multikolinearitas dapat dilihat pada nilai VIF nya. Nilai VIF untuk ketiga variabel bebas berturut-turut adalah 4,319; 1,359 dan 3,860, semuanya kurang dari 5, sehingga asumsi non-

multikolinieritas tidak dilanggar. Jadi dari keempat asumsi yang dilanggar hanya asumsi kenormalannya. Dilihat dari nilai $F = 872,04$ dengan $p\text{-value} = 0$, ini menunjukkan bahwa model regresi linear Y dengan X_1, X_2 dan X_3 sudah baik.

Selanjutnya karena asumsi kenormalan dilanggar, akan dilakukan estimasi model regresi linear dengan estimasi-M. Proses penghitungan estimasi-M yang iteratif dimulai dengan menentukan estimasi awal koefisien regresi, yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil yaitu $b^0 = (-935.465 ; 5,02 ; 18.149; 12,9)$ kemudian berdasarkan algoritma estimasi-M, dihitung nilai \hat{y}_i^0 dan sisa $e_i^0 = y_i - \hat{y}_i^0$. Median dari deviasi absolut $|e_i^0|$ adalah $MAD = 109.356$, maka $1,5 \hat{\sigma} = 243.262$. Terdapat enam sisa yang nilainya lebih besar dari $1,5 \hat{\sigma}$, maka sisanya dipotong menjadi 243.262 dan enam sisa yang lebih kecil dari $-1,5 \hat{\sigma}$, dipotong menjadi -243.262 dan diperoleh nilai $y_i^* = \hat{y}_i^0 + e_i^*$. Nilai y_i^* yang diperoleh digunakan untuk menghitung b^0 pada iterasi selanjutnya. Iterasi berlanjut hingga memperoleh nilai b^0 yang sama dengan iterasi sebelumnya. Hasil penghitungan b^0 tiap-tiap iterasi disajikan dalam Tabel 5.1. Proses berhenti pada iterasi ke-11 karena nilai b^0 yang baru sama dengan sebelumnya. Jadi, model regresi linearnya adalah

$$\hat{y} = -860.639 + 4,84 X_1 + 17.150 X_2 + 15,4 X_3 \quad (5.2)$$

Model regresi (5.2) menunjukkan bahwa untuk peningkatan setiap satu hektar luas panen dan luas puso padi, maka produksinya juga meningkat masing-masing sebesar 4,84 ton dan 15,4 ton. Untuk peningkatan produktivitas sebesar satu kwintal/ha akan mengakibatkan peningkatan produksi padi sebesar 17.150 ton.

Setelah diperoleh model regresi linear (5.2), dilakukan uji hipotesis untuk mengetahui apakah luas lahan panen, produktivitas atau luas puso mempunyai pengaruh terhadap produksi padi di Indonesia tahun 2008.

Tabel 5.1 Nilai b^0 , MAD, Sisa Terpotong, dan y_i^* Tiap Iterasi pada Estimasi-M

| Iterasi ke | b^0 | MAD | Sisa terpotong |
|------------|----------------------------------|--------|---|
| 1 | (-873283 ; 4,89 ; 17273 ; 14,5) | 109356 | 2, 6, 8, 9, 10, 15, 20, 22, 26, 31, 32, 33 |
| 2 | (-864150 ; 4,85 ; 17184 ; 15,1) | 135439 | 15 |
| 3 | (-861614 ; 4,84 ; 17160 ; 15,3) | 140915 | 15 |
| 4 | (-860910 ; 4,84 ; 17153 ; 15,4) | 142436 | 15 |
| 5 | (-860714 ; 4,84 ; 17151 ; 15,4) | 142858 | 15 |
| 6 | (-860660 ; 4,84 ; 17150 ; 15,4) | 142975 | 15 |
| 7 | (-860645 ; 4,84 ; 17150 ; 15,4) | 143008 | 15 |
| 8 | (-860641 ; 4,84 ; 17150 ; 15,4) | 143017 | 15 |
| 9 | (-860640 ; 4,84 ; 17150 ; 15,4) | 143020 | 15 |
| 10 | (-860639 ; 4,84 ; 17150 ; 15,4) | 143020 | 15 |
| 11 | (-860639 ; 4,84 ; 17150 ; 15,4) | 143020 | 15 |

Tujuh kemungkinan model tereduksi pada model regresi linear dengan tiga variabel independen, yaitu

$$Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i \tag{5.3}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \varepsilon_i \tag{5.4}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \tag{5.5}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i \tag{5.6}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \tag{5.7}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i \tag{5.8}$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i \tag{5.9}$$

Sebelum dilakukan uji hipotesis untuk masing-masing model tereduksi, dihitung nilai STR_{full} yang berasal dari model regresi (5.2). Berdasarkan algoritma penghitungan STR_{full} , langkah pertama yang dilakukan adalah mencari sisa e_i dari model regresi (5.2), diperoleh nilai $MAD = 71.573.227.192$, sehingga $k = 1,5 \hat{\sigma} = 101.218.786.199$. Semua sisa berada pada interval $-1,5 \hat{\sigma} \leq e_i \leq 1,5 \hat{\sigma}$ dan diperoleh nilai $\rho(e_i) = e_i^2$. Hasil penjumlahan $\rho(e_i)$ adalah $STR_{full} = 715.732.271.921$. Untuk mendapatkan nilai $\hat{\lambda}$, sebelumnya dihitung nilai $\sum(e_i^*)^2 = 715731635626$ dan diperoleh

$$\hat{\lambda} = \frac{(n/m)\sum(e^*)^2}{n-p-1} = \frac{(33/32)715732271921}{33-3-1} = 25451663767$$

Selanjutnya dihitung $STR_{reduced}$ yang berasal dari model tereduksi (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), dan (5.9). Untuk itu terlebih dahulu dicari estimasi ketujuh model tereduksi, sama seperti model penuh tetapi nilai $\hat{\sigma}$ tetap (tidak iteratif, berasal dari model penuh), sehingga $1,5\hat{\sigma} = 318.148$. Untuk memastikan variabel apa saja yang mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap produksi padi, dilakukan uji hipotesis untuk masing-masing model tereduksi yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 5.2.

Tabel 5.2 Uji Signifikansi Variabel Bebas dengan $\alpha = 5\%$

| Model | F_M | Kesimpulan |
|---|-----------|---------------|
| $Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$ | 1163,9000 | H_0 ditolak |
| $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \varepsilon_i$ | 14,9765 | H_0 ditolak |
| $Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i$ | 17,3632 | H_0 ditolak |
| $Y_i = \beta_0 + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i$ | 15,4358 | H_0 ditolak |
| $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i$ | 24,5755 | H_0 ditolak |
| $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i$ | 17,6067 | H_0 ditolak |
| $Y_i = \beta_0 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \varepsilon_i$ | 37,5900 | H_0 ditolak |

Dari ketujuh hipotesis tersebut menghasilkan suatu kesimpulan yaitu bahwa luas lahan panen, produktivitas dan luas lahan puso memberikan pengaruh signifikan terhadap produksi padi.

5.2 Produksi Padi Tahun 2007

Pada bagian ini dibahas model regresi linear produksi padi (Y) seluruh provinsi di Indonesia berdasarkan luas lahan panen (X_1), produktivitas (X_2) dan produksi benih sebar (X_3). Model regresi produksi padi terhadap luas lahan panen, produktivitas dan produksi benih sebar yaitu

$$\hat{Y} = -824623 + 5.16X_1 + 15032X_2 + 7.25X_3 \quad (5.10)$$

Selanjutnya dilakukan uji asumsi untuk melihat apakah asumsi regresi linear dipenuhi ataukah tidak. Plot probabilitas normal sisa menunjukkan bahwa titik-titiknya di dekat garis lurus, hal ini menunjukkan bahwa asumsi kenormalan sudah dipenuhi. Hal ini diperjelas dengan nilai korelasi antara sisa dengan n score adalah 0,982. Karena nilai ini lebih besar daripada nilai hampirannya yaitu 0,966, maka asumsi kenormalan dipenuhi. Selanjutnya untuk asumsi homoskedastik dapat dilihat pada plot antara e_i dengan \hat{y} . Plot ini tidak membentuk pola khusus, sehingga homoskedastik dipenuhi (tidak dilanggar).

Untuk mendeteksi asumsi selanjutnya adalah asumsi non autokolelasi, yaitu dengan melihat plot e_i berdasarkan urutan pengamatan. Plot e_i acak atau tidak membentuk pola khusus, sehingga asumsi non-autokorelasi dipenuhi (tidak dilanggar). Untuk lebih meyakinkan hal ini dapat dilihat nilai Durbin Watsonnya yaitu 1,55329 . Dari tabel Durbin Watson untuk $\alpha = 5\%$, $n = 33$ dan jumlah variabel bebas = 3 didapat $(d_L; d_U) = (1,04; 1,43)$. Karena $1.55329 > 1.43$ maka asumsi non-autokorelasi tidak dilanggar. Selanjutnya untuk melihat asumsi non-multikolinearitas dapat dilihat pada nilai *VIF* nya. Karena semua nilai *VIF* untuk ketiga variabel bebas < 5 (berturut-turut adalah 1,367; 1,428 dan 1,242), berarti asumsi non-multikolinearitas dipenuhi. Jadi dari keempat asumsi semuanya telah dipenuhi, sehingga untuk estimasi parameternya cukup digunakan estimasi kuadrat terkecil.

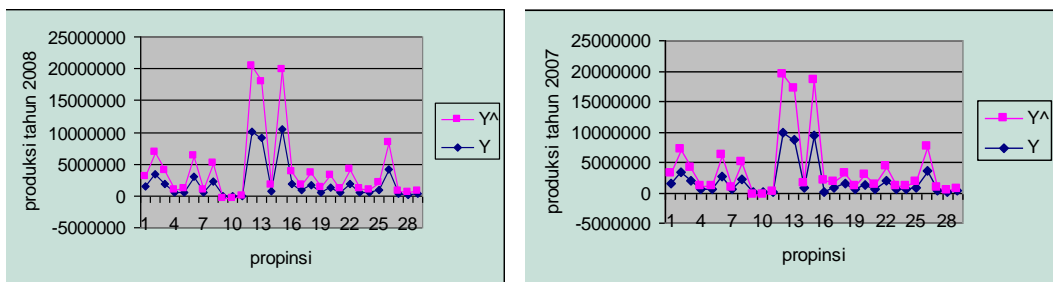
Selanjutnya jika dilihat dari nilai $F = 971$ dengan $p\text{-value} = 0 < \alpha = 5\%$, ini menunjukkan bahwa model regresi linear Y dengan X_1 , X_2 dan X_3 sudah baik, sedangkan $p\text{-value}$ untuk masing-masing variabel bebas adalah 0, 0,031 dan 0,306 sehingga variabel X_3 tidak signifikan, karena $p\text{-value}$ untuk X_3 adalah $0,306 > 5\%$. Oleh karena itu, ditentukan regresi dengan dua variabel X_1 dan X_2 yaitu

$$\hat{Y} = -881932 + 5.18X_1 + 16979X_2 \quad (5.11)$$

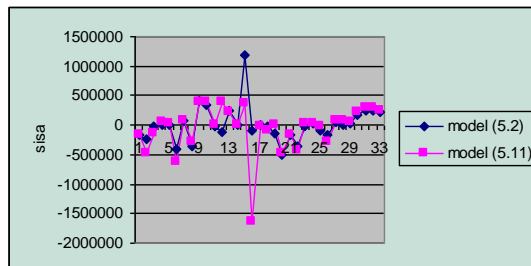
Plot probabilitas normal sisa menunjukkan bahwa asumsi kenormalan sudah dipenuhi. Hal ini diperjelas dengan nilai korelasi antara sisa dengan $n\text{score}$ adalah 0,976. Karena nilai ini lebih besar daripada nilai hampirannya yaitu 0,966, maka asumsi kenormalan dipenuhi. Selain itu, untuk asumsi homosedastik dapat dilihat pada plot residu terhadap nilai prediksi yang menunjukkan tidak membentuk pola khusus, sehingga asumsi homosedastik dipenuhi (tidak dilanggar). Untuk mendeteksi asumsi selanjutnya adalah asumsi non-autokolelasi, yaitu dengan melihat plot e_i berdasarkan urutan pengamatan. Plot e_i acak atau tidak membentuk pola khusus, sehingga asumsi non-autokorelasi dipenuhi (tidak dilanggar). Selanjutnya untuk melihat asumsi non-multikolinearitas dapat dilihat pada nilai *VIF* nya. Karena nilai *VIF* untuk kedua variabel bebas adalah $1,314 < 5$, berarti asumsi non-multikolinearitas tidak dilanggar. Jadi dari keempat asumsi semuanya telah dipenuhi. Model regresi (5.11) menyatakan bahwa setiap penambahan satu hektar luas lahan panen dan satu kuintal per hektar produktivitas akan menaikkan produksi padi masing-masing sebesar 5,18 ton dan 16.979 ton padi

5.3 Model Regresi Terbaik

Dari bagian 5.1 dan 5.2 diperoleh dua model regresi yang semuanya memenuhi asumsi-asumsi regresi. Dari dua model regresi (5.2) dan (5.11) akan dipilih model regresi terbaik. Pada Gambar 5.1 dapat dilihat produksi padi dan prediksinya berdasarkan model (5.2) dan (5.11). Gambar 5.1 menunjukkan plot yang hampir sama sehingga untuk menentukan model yang lebih baik dapat ditentukan melalui sisa masing-masing model, yaitu selisih data produksi dan prediksinya. Gambar 5.2 menunjukkan bahwa sisa model (5.2) untuk setiap data relatif lebih kecil dibandingkan sisa model (5.11).



Gambar 5.1 Produksi padi dan prediksinya



Gambar 5.2 Sisa untuk model (5.2) dan (5.11)

Tabel 5.3 Perbandingan $R^2_{adjusted}$ dan s

| Model regresi | $R^2_{adjusted}$ | s |
|--|------------------|---------|
| $\hat{Y} = -860639 + 4.84X_1 + 17150X_2 + 15.4X_3$ | 99,7% | 157.100 |
| $\hat{Y} = -881932 + 5.18X_1 + 16979X_2$ | 98,9% | 273.841 |

Ada kriteria lain yang dapat digunakan untuk menentukan model regresi terbaik, yaitu koefisien determinasi R^2 (atau $R^2_{adjusted}$, jika terdapat lebih dari satu variabel bebas) dan deviasi standar s . Model terbaik akan mempunyai R^2 atau $R^2_{adjusted}$ terbesar dan s terkecil. Dari Tabel 5.3 terlihat bahwa model (5.2) memberikan $R^2_{adjusted}$ yang lebih besar dan s yang lebih kecil daripada model (5.11), sehingga hasil ini mendukung analisis sisa

sebelumnya bahwa model regresi terbaik adalah model (5.2). Untuk model (5.2), $R^2_{adjusted} = 99,7\%$ menunjukkan bahwa variasi total Y sebesar 99,7% diterangkan oleh X_1 , X_2 , dan X_3 , sedangkan sisanya sebesar 0,3% disebabkan oleh faktor lain atau kesalahan yang bersifat random.

6. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa model optimal untuk produksi padi di Indonesia diperoleh dengan estimasi-M, yaitu

$$\hat{Y} = -860.639 + 4,84X_1 + 17.150X_2 + 15,4X_3$$

Variasi produksi padi sebesar 99,7% ditentukan oleh luas lahan panen, produktivitas, dan luas lahan puso. Selain itu, uji signifikansi koefisien regresi menunjukkan bahwa luas lahan panen, produktivitas, dan luas lahan puso mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap produksi padi. Peningkatan setiap satu hektar luas lahan dan satu hektar luas puso masing-masing akan meningkatkan produksi padi sebesar 4,84 ton dan 15,4 ton, sedangkan peningkatan produktivitas sebesar satu kwintal per hektar akan meningkatkan produksi padi sebesar 17.150 ton.

7. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat DIKTI, Departemen Pendidikan Nasional yang memberikan dukungan dana melalui Hibah Penelitian Sesuai Prioritas Nasional Batch II tahun 2009.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdulrachman, *Statistik Pertanian (Agricultural Statistics) 2008*, Departemen Pertanian Indonesia, ISBN: 979-8958-65-9, 2008.
- [2] Badan Pusat Statistik, www.bps.go.id/releases/Production_of_Paddy_Maizze_and_Soy-beans, 2008.
- [3] Barnett, J. and Lewis, *Outliers in Statistical Data*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.
- [4] Birkes, D. and Dodge, Y., *Alternative Methods of Regression*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [5] Dewi, S dan Idris, *Efisiensi Produksi Sistem Usaha Tani Padi Pada Lahan Sawah Irigasi Teknis*, BPPT Sulawesi Tenggara, 2006.

- [6] Heriawan, R. *Statistik Indonesia 2008*, Badan Pusat Statistik Indonesia, Katalog BPS: 1101001, 2008
- [7] _____, *Produksi Tanaman Pangan 2008*, Badan Pusat Statistik Indonesia, Katalog BPS: 5203014, 2009
- [8] Huber, P.J., *Robust Statistic*, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1981.
- [9] Husni M., Sudi, M., dan Mewa, A., Faktor-faktor yang mempengaruhi Produksi, Konsumsi dan harga beras serta inflasi Bahan Makanan, *Jurnal Argo Ekonomi*, Vol.22. No.2.hal: 119-146, 2004.
- [10] Li, S.Z., Wang, H., and Soh, W.Y.C., Robust Estimation of Rotation Angle from Image Sequences Using the Annelling M Estimator, *Jurnal of Mathematical Imaging and Vision*, vol 8. No, pp: 181-192, 1998.
- [11] Miguel, A.A., *Convergence of the optimal M-estimator over a parametric family of M-estimators*, 2003.
- [12] Montgomery, D.C. and Peck, E.A., *Introduction to Linear Regression Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 2006.
- [13] Neter, J. and Wasserman, W. *Applied Linear Statistical Models*, 4th ed., Richard D. Irwin, Homewood, Ill, 2003.
- [14] Sembiring, R.K., *Analisis Regresi*, ITB, Bandung, 2003.
- [15] Yuliana dan Susanti, Y. Estimasi M dan sifat-sifatnya pada Regresi Linear Robust, *Jurnal Math-Info* Vol. 1, UNS, Surakarta, 2008.
- [16] Zhang, Z., *Robust Estimations*, <http://www.sop.Inria.fr/robust/personel/zhang/Publis/tutorial-Estinu/modezo.html>, 1996.

PENGGOLONGAN RESIKO JUMLAH KLAIM ASURANSI KENDARAAN PADA MODEL REGRESI GENERALIZED POISSON I DENGAN R

Neva Satyahadewi, Dedi Rosadi, dan Adhitya Ronnie Effendi
Jurusan Matematika, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia
Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia
neva_s04@yahoo.co.id
dedirosadi@ugm.ac.id
adhityaronnie@ugm.ac.id

ABSTRACT. Poisson regression model since several years ago has been used for risk classification. In Poisson regression model, the mean and variance values are considered equal. In fact, often found in the data variance of the number of claims with a value greater than the mean value (overdispersion). So the Poisson regression model is considered inappropriate to resolve the issue. So the Generalized Poisson I (GP I) regression model is used to solve the overdispersion problem.

In this paper, by using R, the Poisson and Generalized Poisson I (GP I) regression models will be applied to the data by type of vehicle insurance claims Malaysia's; Third Party Property Damage (TPPD). Based on estimates of dispersion parameters, a , the Generalized Poisson regression model is known that in case of overdispersion. Once the Poisson and Generalized Poisson regression models is tested using deviance test, Pearson Chi-square, AIC, BIC, it is concluded that the best regression models generated by the Generalized Poisson I regression model.

Keywords: Poisson regression model, Generalized Poisson, overdispersion

1. PENDAHULUAN

Penggolongan resiko adalah proses dari pemodelan alternatif dengan menggolongkan resiko menurut *rating factors* dengan karakteristik-karakteristik yang dibentuk ke dalam *rating classes*. Sebagai contoh, di dalam asuransi motor yang diperlakukan sebagai faktor penilaian dapat dilihat pada gender pengguna, pengalaman klaim dan usia, tipe kendaraan, atau kapasitas dan tahun. Tujuan dari penggolongan resiko dalam suatu asuransi adalah untuk menaksir penggolongan secara adil, yaitu resiko yang diasuransikan tinggi harus digolongkan ke dalam kelas-kelas resiko yang lebih tinggi dan sebaliknya. Kegagalan untuk mencapai tujuan ini boleh menjurus kepada kurang baiknya pemilihan untuk sesuatu yang diasuransikan dan kerugian ekonomi pada para penjamin.

Model regresi Poisson secara luas telah banyak digunakan untuk memodelkan penggolongan resiko. Sebagai contoh, McCullagh dan Nelder dalam buku *Generalized Linear Models* (1989) menggunakan model regresi Poisson untuk memodelkan jumlah klaim pada peristiwa kerusakan muatan yang dibawa kapal-kapal di dalam asuransi laut. Di dalam asuransi motor, Brockman dan Wright dalam penelitiannya tahun 1992 menerapkan model itu pada klaim kerusakan kepemilikan motor di UK, dan Renshaw

tahun 1994 memakai model tersebut untuk klaim-klaim motor yang disediakan oleh suatu perusahaan asuransi yang terkemuka di dalam UK. Selanjutnya, model regresi Poisson diterapkan oleh Ismail dan Jemain tahun 2003 pada himpunan dari klaim kerusakan mobil milik pribadi yang disediakan oleh satu perusahaan asuransi di Malaysia.

Bagaimanapun, model regresi Poisson berasumsi bahwa rata-rata dan variansi dari variabel dependen adalah sama, $E(Y)=Var(Y)$, atau disebut juga equidispersi. Dalam praktek, data itu boleh ditampilkan *overdispersion* atau *extra* – variasi Poisson, yaitu, suatu situasi di mana variansi melebihi rata-rata, $Var(Y)>E(Y)$. Selain itu, data juga dapat disajikan underdispersi, yaitu keadaan dimana variansi kurang dari rata-rata, $Var(Y)<E(Y)$. Pembebanan yang tidak sesuai pada Poisson mengabaikan standar error dan terlalu menekankan makna dari parameter-parameter regresi, dan sebagai konsekuensi, memberikan kesimpulan salah tentang parameter-parameter regresi. Oleh karena itu, sasaran dari penelitian ini untuk menggunakan model regresi *Generalized Poisson I* (GP I) sebagai satu alternatif untuk penggolongan resiko. Selanjutnya, dengan menggunakan R, model-model regresi Poisson dan *Generalized Poisson I* (GP I) dicoba, diuji dan dibandingkan pada jenis data jumlah klaim Asuransi motor di Malaysia; *Third Party Property Damage* (TPPD).

2. DASAR TEORI

2.1 *Generalized Linear Model* (GLM)

Pada GLM terdapat 3 komponen, yaitu :

- Variabel respon Y_1, Y_2, \dots, Y_N yang diasumsikan memiliki distribusi yang termasuk ke dalam keluarga eksponensial.
- Sekumpulan parameter $\beta = [\beta_1 \dots \beta_p]^T$ dan variabel penjelas (*explanatory variable*)

$$X = \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_p^T \end{bmatrix} \text{ yang kemudian membentuk fungsi linear } \eta = x_i^T \beta .$$

- Fungsi link monoton g sedemikian sehingga $g(\mu_i) = x_i^T \beta$ dengan $\mu_i = E[Y_i]$. Fungsi link menentukan model yang menghubungkan $\mu_i = E[Y_i]$ dengan fungsi linear $x_i^T \beta$. Suatu fungsi link di sebut sebagai fungsi link kanonik (*canonical link function*) apabila $g(\mu_i) = \theta$ dengan θ adalah parameter kanonik dalam

$$f(y; \theta) = \exp \left\{ \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right\}$$

Dalam hal ini, ϕ adalah parameter dispersi dan $f(y; \theta)$ merupakan fungsi probabilitas variabel random Y yang termasuk dalam keluarga eksponensial.

2.2 Model Regresi Poisson

Pada regresi Poisson diasumsikan bahwa variabel dependen Y yang menyatakan jumlah (cacah) kejadian berdistribusi Poisson, diberikan sejumlah variabel independen x_1, x_2, \dots, x_k .

$$P(Y = y | x_1, \dots, x_k) = \frac{\mu^y \cdot e^{-\mu}}{y!}, y = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

Atau dengan kata lain, $Y_i \sim Poi(\mu_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Salah satu tujuan dari analisis regresi adalah untuk menentukan pola hubungan antara variabel respon dengan variabel penjelas. Selanjutnya, dalam regresi Poisson hubungan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$E[Y_i | x_i] = \mu_i = \beta_0 + x_1 \beta_1 + \dots + x_k \beta_k \quad (2.2.2)$$

Atau $E[Y_i | X_i] = \mu_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$.

Karena nilai $\mu_i > 0$, maka digunakan fungsi link $\eta_i = \log(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$ atau $\eta_i = \log \mu_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ untuk menghubungkan $\mu_i = E[Y_i | X_i]$ dengan fungsi linear $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$, sehingga hubungan antara $\mu_i = E[Y_i | X_i]$ dan $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ menjadi tepat. Dengan demikian, model regresi dapat ditulis dalam bentuk:

$$E[Y_i | X_i] = \mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.3)$$

Dengan $\boldsymbol{\beta}$ merupakan parameter yang tidak diketahui dalam model dan harus di estimasi.

Untuk memasukkan covariates dan untuk menjamin non-negatif, mean atau *fitted value* diasumsikan sebagai perkalian, yaitu,

$$E(Y_i | \mathbf{x}_i) = \lambda_i = e_i \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}) \quad (2.2.4)$$

di mana e_i menunjukkan ukuran paparan (*exposure*), \mathbf{x}_i merupakan vektor $p \times 1$ dari variabel penjelas, dan $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor $p \times 1$ dari parameter regresi.

3. Model Regresi Poisson Tergeneralisasi

3.1 Distribusi *Generalized Poisson*

Definisi 3.1 Jika Y adalah suatu variabel random berdistribusi *Generalized Poisson* dengan parameter θ dan λ , maka fungsi kepadatan peluang dinyatakan sebagai berikut:

$$P(Y = y|\theta, \lambda) = \begin{cases} \theta(\theta + \lambda y)^{y-1} \frac{e^{-(\theta+\lambda y)}}{y!}, & y = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & y > m, \lambda < 0 \\ 0, & y \text{ yang lain} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

dengan $\theta > 0, \max(-1, -\theta/4) \leq \lambda \leq 1$; dan m adalah bilangan bulat positif terbesar sedemikian sehingga $\theta + m\lambda > 0$ bila λ bernilai negatif.

Teorema 3.1 Jika Y merupakan suatu variabel random GPD yang dinotasikan dengan $Y \sim GP(\theta, \lambda)$, maka nilai mean dan variansinya adalah sebagai berikut:

$$E[Y] = \mu = \mu(\theta, \lambda) = \frac{\theta}{1 - \lambda}$$

$$\text{Var}(Y) = \sigma^2(\theta, \lambda) = \frac{\theta}{(1 - \lambda)^3}$$

3.2 Model Regresi *Generalized Poisson*

Definisi 3.2 Asumsikan bahwa variabel dependen y_i yang menyatakan jumlah kejadian adalah berdistribusi *Generalized Poisson*. Diberikan sejumlah variabel independen x_1, x_2, \dots, x_p .

$$P(Y_i = y_i | x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{cases} \theta(\theta + \lambda_i y_i)^{y_i-1} \frac{e^{-(\theta+\lambda_i y_i)}}{y_i!}, & y_i = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & y_i > m, \lambda_i < 0 \\ 0, & y_i \text{ yang lain} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Persamaan (3.2.1) dinotasikan dengan $Y_i \sim GP(\theta_i, \lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$; nilai rata-rata dan variansi dinyatakan dengan $E(Y_i | x_i) = \mu_i = \mu(x_i)$ dan $\text{Var}(Y_i | x_i) = \sigma_i^2(\theta_i, \lambda_i)$.

Selanjutnya, untuk menentukan penggolongan resiko pada jumlah klaim (*claim count*), maka model regresi *Generalized Poisson* dibedakan menjadi dua tipe, yaitu *Generalized Poisson Tipe I (GP I)* dan *Generalized Poisson Tipe II (GP II)*.

3.2.1 *Generalized Poisson I (GP I)*

Wang dan Famoye (1997) menyatakan bahwa fungsi kepadatan peluang dari distribusi GP I adalah

$$P(Y_i = y_i) = \left(\frac{\mu_i}{1 + a\mu_i} \right)^{y_i} \frac{(1 + ay_i)^{y_i - 1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i(1 + ay_i)}{1 + a\mu_i} \right), y_i = 0, 1, \dots \quad (3.2.2)$$

dengan Y_i sebagai variabel random untuk distribusi GP I.

Mean diasumsikan ke dalam persamaan $E[Y_i|x_i] = \mu_i = e_i \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$, sedangkan variansi bersyarat ekuivalen dengan $Var[Y_i|x_i] = \mu_i(1 + a\mu_i)^2$. Ketika parameter dispersi, a , sama dengan nol, fungsi kepadatan peluang pada persamaan (3.2.5) akan beralih menuju Poisson, sehingga mean sama dengan variansi, yaitu $E[Y_i|x_i] = Var[Y_i|x_i]$. Untuk $a > 0$, variansi lebih besar daripada mean, $E[Y_i|x_i] > Var[Y_i|x_i]$, dan untuk kondisi ini model regresi merepresentasikan data cacah dengan overdispersi. Sedangkan untuk $a < 0$, variansi lebih kecil daripada mean, $E[Y_i|x_i] < Var[Y_i|x_i]$, dan untuk kondisi ini model regresi merepresentasikan data cacah dengan underdispersi.

Jika $\boldsymbol{\beta}$ di estimasi dengan metode maksimum *likelihood* dan log *likelihood* dinotasikan dengan ℓ , maka persamaan yang terkait adalah:

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, a) = \sum_i \left\{ y_i \log \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})} \right) + (y_i - 1) \log(1 + ay_i) - \frac{\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})(1 + ay_i)}{1 + a \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})} - \log(y_i!) \right\}$$

Selanjutnya, apabila persamaan tersebut diturunkan terhadap β_j , maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_j} = \sum_i \frac{y_i - \mu_i}{(1 + a\mu_i)^2} x_{ij}; j = 1, 2, \dots, p$$

Persamaan terakhir di set sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\sum_i \frac{(y_i - \mu_i)}{(1 + a\mu_i)^2} x_{ij} = 0; j = 1, 2, \dots, p \quad (3.2.3)$$

Karena persamaan (3.2.3) adalah juga ekuivalen dengan kuadrat terkecil terbobot, dengan suatu pengabaian modifikasi, estimasi dari $\boldsymbol{\beta}$ dapat diselesaikan dengan prosedur IWLS.

Di dalam penelitian ini, akan digunakan dua metode untuk memecahkan parameter dispersi, a , yaitu dengan metode maksimum *likelihood* dan metode moment. Persamaan untuk penyelesaian metode maksimum *likelihood* dapat diperoleh dengan menurunkan persamaan log *likelihood* terhadap a , adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \sum_i -\frac{y_i \mu_i}{1 + a \mu_i} + \frac{y_i (y_i - 1)}{1 + a y_i} - \frac{\mu_i (y_i - \mu_i)}{(1 + a \mu_i)^2} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} = \sum_i \frac{y_i \mu_i^2}{(1 + a \mu_i)^2} - \frac{y_i^2 (y_i - 1)}{(1 + a y_i)^{2 \rightarrow}} + \frac{2 \mu_i^2 (y_i - \mu_i)}{(1 + a \mu_i)^3} \quad (3.2.5)$$

Di bawah metode moment, a bisa di estimasi dengan persamaan Pearson *Chi-Squares* dengan derajat kebebasan, yaitu:

$$\sum_i \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\mu_i (1 + a \mu_i)^2} - (n - p) = 0 \quad (3.2.6)$$

di mana n menandakan banyaknya kelas penilaian maksimum dan p banyaknya parameter-parameter regresi. Prosedur iterasi urutan serupa dengan di atas dapat juga digunakan untuk menghasilkan estimasi maksimum *likelihood* dari β dan estimasi moment dari a .

3.3 Evaluasi Model

3.3.1 Pearson Chi-Square

Ukuran lain yang bisa digunakan untuk uji *goodness of fit* yaitu statistik *Pearson Chi-Square* (Mc Cullagh dan Nelder, 1983) yang didefinisikan sebagai

$$X^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\text{Var}(Y_i)}$$

3.3.2 Deviance

Deviance yaitu logaritma dari uji rasio *likelihood*-nya (Mc Cullagh dan Nelder, 1983). Uji rasio *likelihood*nya membandingkan *current model*-nya dengan *saturated model*-nya. *Deviance* dituliskan sebagai berikut:

$$D = 2(l(\mathbf{y}; \mathbf{y}) - l(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{y}))$$

di mana $l(\mathbf{y}; \mathbf{y})$ dan $l(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{y})$ adalah model log *likelihood* yang dievaluasi masing-masing di bawah $\boldsymbol{\mu}$ dan \mathbf{y} . Untuk model yang memadai, D juga memiliki asimtotik distribusi *chi-square* dengan $n - p$ derajat kebebasan. Oleh karena itu, jika nilai-nilai untuk kedua *Pearson Chi-Square* dan D adalah dekat dengan derajat kebebasan, model dapat dianggap memadai.

3.4 AIC dan BIC

Ukuran yang digunakan adalah kriteria informasi Akaike yang digambarkan sebagai $AIC = -\ell + p$, di mana ℓ menotasikan log *likelihood* yang dievaluasi di bawah μ dan p adalah banyaknya parameter-parameter. Untuk ukuran ini, semakin kecil AIC, semakin baik model tersebut. Ukuran *goodness-of-fit* yang lain adalah dengan menggunakan kriteria Bayesian-Schwartz yang digambarkan sebagai $BIC = \ell - p \log\left(\frac{n}{2\pi}\right)$ di mana ℓ menandakan log *likelihood* yang dievaluasi di bawah μ , p adalah banyaknya parameter dan n adalah banyaknya rating kelas. Untuk ukuran ini, semakin kecil *BIC* maka semakin baik model itu.

4. APLIKASI NUMERIK

4.1 Data Malaysia

Secara khusus, klaim TPPD mencakup kewajiban hukum untuk penggunaan kendaraan bermotor yang diasuransikan. Data, yang didasarkan pada kebijakan 170.000 mobil pribadi selama tiga tahun, periode 1998-2000, telah disediakan oleh Asosiasi Asuransi Umum Malaysia (PIAM). Pemaparan ini dinyatakan dalam unit mobil per tahun dan terjadi klaim terdiri dari klaim yang sudah dibayar maupun yang outstanding. Tabel 4.1 menunjukkan *rating factors* dan *rating classes* untuk *exposure* dan klaim yang dikeluarkan. Dalam hal ini, terdapat $2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 240$ perkalian *rating classes* yang diklasifikasikan menurut frekuensi klaim.

Tabel 4.1 Rating factors dan rating classes untuk data Malaysia

| <i>Rating factors</i> | <i>Rating classes</i> | <i>Rating factors</i> | <i>Rating classes</i> |
|--|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| <i>Coverage type</i> | <i>Comprehensive</i> | <i>Vehicle year</i> | <i>0-1 year</i> |
| | <i>Non-comprehensive</i> | | <i>2-3 year</i> |
| <i>Vehicle make</i> | <i>Local</i> | | <i>4-5 year</i> |
| | <i>Foreign</i> | | <i>6+</i> |
| <i>Vehicle use and driver's gender</i> | <i>Private-male</i> | <i>Location</i> | <i>Central</i> |
| | <i>Private-female</i> | | <i>North</i> |
| | <i>Business</i> | | <i>East</i> |
| | | | <i>South</i> |
| | | | <i>East Malaysia</i> |

Penghitungan klaim pertama kali diterapkan dalam model regresi perkalian Poisson. Pencocokan hanya melibatkan data sejumlah 233 poin karena terdapat tujuh kelas yang memiliki nilai *exposure* sama dengan nol. *Rating factors* yang berbeda dipasang pada beberapa model, yaitu yang pertama hanya memperhatikan efek utama saja, selanjutnya efek utama ditambah masing-masing faktor-faktor interaksi pasangan. Dengan menggunakan *deviance* dan derajat bebas, statistik *Chi-Square* dihitung dan dibandingkan untuk memilih model yang terbaik.

4.2 Hasil Analisis Data

Berikut ini akan disajikan contoh hasil analisis *deviance* model regresi Poisson yang memuat *rating factors* utama. Berdasarkan tabel 4.2 analisis *deviance* dari masing-masing *rating factors* masih signifikan. Hal ini berarti, dari analisis tersebut dapat dilanjutkan untuk pemodelan regresi Poisson tahap berikutnya. Dengan membuat berbagai macam kombinasi *rating factors*, maka dapat diketahui *rating factors* apa saja yang memiliki interaksi atau yang signifikan. Menurut hasil estimasi parameter model regresi Poisson dengan menggunakan *rating factors* dari tabel 4.2, dihasilkan p-value yang tidak signifikan pada $\beta_3_{\text{location}}$ sebesar 0,56. Dengan demikian, $\beta_3_{\text{location}}$ harus direduksi dan dilakukan estimasi parameter kembali sampai semua *rating factors* signifikan.

Selanjutnya, berdasarkan analisis *deviance* pada tabel 4.2 di atas, akan dilakukan estimasi parameter β dan a . Estimasi parameter akan dilakukan dengan bantuan R dan diestimasi dengan model Poisson, GP I (MLE) dan GP I (moment).

Tabel 4.2 Analisis *deviance* model regresi Poisson untuk masing-masing *rating factors*

| | Df | <i>Deviance</i> | Resid.Df | Resid.Dev | P(> Chi) |
|----------------------------------|----|-----------------|----------|-----------|-----------|
| NULL | | | 232 | 17366,9 | |
| $\beta_{\text{coverage_type}}$ | 1 | 5329,6 | 231 | 12037,3 | 0,0 |
| $\beta_{\text{vehicle_make}}$ | 1 | 315,7 | 230 | 11721,6 | 1,248e-70 |
| $\beta_1_{\text{using_gender}}$ | 1 | 431,8 | 229 | 11289,8 | 6.538e-96 |
| $\beta_2_{\text{using_gender}}$ | 1 | 6218,2 | 228 | 5071,6 | 0.0 |
| $\beta_1_{\text{vehicle_year}}$ | 1 | 42,5 | 227 | 5029,1 | 7.215e-11 |
| $\beta_2_{\text{vehicle_year}}$ | 1 | 47,7 | 226 | 4981,4 | 5.073e-12 |
| $\beta_3_{\text{vehicle_year}}$ | 1 | 49,8 | 225 | 4931,7 | 1.731e-12 |

Lanjutan Tabel 4.2

| | | | | | |
|----------------------|---|--------|-----|--------|------------|
| $\beta 1_{location}$ | 1 | 77,6 | 224 | 4854,0 | 1.240e-18 |
| $\beta 2_{location}$ | 1 | 920,5 | 223 | 3933,5 | 3.408e-202 |
| $\beta 3_{location}$ | 1 | 92,4 | 222 | 3841,1 | 7.073e-22 |
| $\beta 4_{location}$ | 1 | 2199,9 | 221 | 1641,2 | 0.0 |

Hasil estimasi parameter untuk masing-masing *rating factors*, dapat dilihat pada tabel 4.3. Perbandingan antara Poisson dan *Generalized Poisson I* (GP I) menunjukkan bahwa parameter regresi untuk semua model memberikan estimasi yang hampir sama. Pada model GP I (moment) mempunyai nilai standar error yang relatif lebih besar dibandingkan dengan model lainnya. Nilai AIC pada model Poisson dan model GP I (MLE) menunjukkan bahwa nilai AIC pada GP I (MLE) lebih kecil daripada nilai AIC pada Poisson. Ini berarti, model GP I (MLE) lebih baik daripada model Poisson. Menurut uji statistik Pearson *Chi-Square*, apabila nilai Pearson *Chi-Square* dibagi dengan derajat bebasnya menghasilkan nilai lebih besar dari satu, maka hal ini menunjukkan bahwa terjadi overdispersi. Dengan demikian, model GP I (MLE) mengindikasikan terjadinya overdispersi, dimana nilai $a > 0$ dan Pearson *Chi-Square* dibagi derajat bebasnya adalah lebih besar dari satu. Karena pada GP I (moment) terdapat p-value yang tidak signifikan, maka GP I (moment) diabaikan.

Tabel 4.3 Poisson vs Generalized Poisson I
 untuk masing-masing *rating factors*

| Parameter | Poisson | | | GP I (MLE) | | | GP I (moment) | | |
|---------------------------|-----------|-----------|------|------------|-----------|------|---------------|-----------|------|
| | est | std.error | pval | est | std.error | pval | est | std.error | pval |
| α | | | | 0.001 | | | 0.029 | | |
| intercept | -2.492 | 0.032 | 0.00 | -2.51 | 0.038 | 0.00 | -2.634 | 0.122 | 0.00 |
| $\beta_{coverage_type}$ | -0.561 | 0.064 | 0.00 | -0.58 | 0.067 | 0.00 | -0.749 | 0.122 | 0.00 |
| $\beta_{vehicle_make}$ | -0.092 | 0.028 | 0.00 | -0.09 | 0.032 | 0.00 | -0.077 | 0.083 | 0.33 |
| $\beta 1_{using_gender}$ | -0.515 | 0.033 | 0.00 | -0.52 | 0.035 | 0.00 | -0.574 | 0.086 | 0.00 |
| $\beta 2_{using_gender}$ | -6.062 | 1.000 | 0.00 | -6.06 | 1.000 | 0.00 | -6.063 | 1.003 | 0.00 |
| $\beta 1_{vehicle_year}$ | -0.387 | 0.037 | 0.00 | -0.38 | 0.043 | 0.00 | -0.274 | 0.125 | 0.03 |
| $\beta 2_{vehicle_year}$ | -0.639 | 0.041 | 0.00 | -0.62 | 0.046 | 0.00 | -0.513 | 0.124 | 0.00 |
| $\beta 3_{vehicle_year}$ | -0.780 | 0.039 | 0.00 | -0.75 | 0.044 | 0.00 | -0.529 | 0.122 | 0.00 |
| $\beta 1_{location}$ | -0.215 | 0.031 | 0.00 | -0.20 | 0.035 | 0.00 | -0.107 | 0.108 | 0.30 |
| $\beta 2_{location}$ | -0.443 | 0.059 | 0.00 | -0.44 | 0.061 | 0.00 | -0.435 | 0.118 | 0.00 |
| $\beta 4_{location}$ | -0.517 | 0.062 | 0.00 | -0.52 | 0.064 | 0.00 | -0.507 | 0.116 | 0.00 |
| df | 222 | | | 221 | | | 221 | | |
| log likelihood | 21117.81 | | | 21132.08 | | | 21162.54 | | |
| AIC | -42213.63 | | | -42242.16 | | | -42303.08 | | |
| BIC | -42175.66 | | | -42204.2 | | | -42265.12 | | |
| Pearson Chi-Square | 481.8 | | | 440.59 | | | 219.97 | | |

Model regresi GP I (MLE) yang diperoleh dari tabel 4.3 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mu_i = & \exp(-2,51 - 0,58\beta_{\text{coverage_type}} - 0,09\beta_{\text{vehicle_make}} \\ & - 0,52\beta_{1_using_gender} - 6,06\beta_{2_using_gender} \\ & - 0,38\beta_{1_vehicle_year} - 0,62\beta_{2_vehicle_year} \\ & - 0,75\beta_{3_vehicle_year} - 0,20\beta_{1_location} \\ & - 0,44\beta_{2_location} - 0,52\beta_{3_location}) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan prosedur yang sama, dapat juga dibuat analisis *deviance* pada model GP I (MLE) untuk *rating factors use-gender* dan *coverage type*.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan aplikasi numerik yang telah disampaikan pada bab-bab sebelumnya, maka dapat di ambil beberapa kesimpulan. Pertama, model regresi *Generalized Poisson* terbaik untuk penggolongan resiko pada jumlah klaim dapat diperoleh dengan cara memeriksa hubungan antar variabel prediktor (kolinieritas), menentukan model regresi poisson, memeriksa kasus overdispersi, equidispersi, atauakah underdispersi dengan menggunakan uji Pearson *Chi-Square* maupun *deviance*, menentukan model Regresi *Generalized Poisson* I, mengestimasi parameter model regresi *Generalized Poisson* I dengan menggunakan metode MLE dan IRWLS

Kedua, cara menguji model regresi *Generalized Poisson* terbaik untuk penggolongan resiko pada jumlah klaim yaitu pengujian signifikansi parameter regresi menggunakan uji normalitas dengan melihat p-value nya. Untuk menentukan model terbaik yang menggambarkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor yaitu dengan melihat nilai AIC pada masing-masing model. Model yang mempunyai nilai AIC terkecil dan parameternya signifikan merupakan model regresi terbaik.

Ketiga, hasil dari contoh analisis data pada jenis data jumlah klaim Asuransi motor di Malaysia; *Third Party Property Damage* (TPPD) menunjukkan bahwa model regresi *Generalized Poisson* I merupakan model yang paling tepat digunakan untuk data yang bersifat overdispersi dibandingkan dengan model regresi Poisson.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini masih terbatas membahas tentang model regresi multiplikatif *Generalized Poisson* I. Oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengkaji lebih lanjut tentang model regresi *additif Generalized*

Poisson. Selain itu, masih dapat dikembangkan lagi masalah bagaimana cara mengatasi masalah overdispersi pada model regresi multiplikatif/additif *Generalized Poisson*, sehingga dapat dihasilkan suatu model yang lebih baik lagi.

Selain itu, diharapkan pula hasil dari penelitian ini dapat mendorong para praktisi untuk melakukan analisa serupa yang lebih lanjut, terutama berkaitan dengan penilaian premi untuk perusahaan asuransi mereka. Tujuannya adalah untuk mendukung ke arah suatu ukuran akurat dari tingkat frekuensi klaim dan pada akhirnya dapat memberikan perhitungan premi secara adil untuk pihak-pihak yang terkait.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bain, L.J., and Engelhardt, M., 1992, *Introduction To Probability and Mathematical Statistics 2nd Edition*, Duxbury Press:California.
- [2] Brockman, M. J., and T. S. Wright. 1992. *Statistical Motor Rating: Making Effective Use of Your Data*. *Journal of the Institute of Actuaries*. 119(3): 457-543.
- [3] Consul, P. C., and F. Famoye, 1992, *Generalized Poisson Regression Model, Communication Statistics(Theory & Methodology)*, 21(1): 89-109.
- [4] Famoye, F., 1993, *Restricted Generalized Poisson Regression Model, Communication Statistics(Theory & Methodology)*, 22(5): 1335-1354.
- [5] Ismail, N., and A. A. Jemain. 2003. *Modeling Frequency of Auto Insurance Claims with Overdispersion Correction*. *Prosiding Seminar Sains Aktuari Matematik Kewangan*. Bangi: Fakulti Sains dan Teknologi,Universiti Kebangsaan Malaysia. 23-35.
- [6] Ismail, N., and A. A. Jemain., 2005, *Generalized Poisson Regression: An Alternative For Risk Classification*, *Jurnal Teknologi Universiti Teknologi Malaysia*: 43(C) 39-54.
- [7] Ismail, N., and A. A. Jemain, 2007, *Handling Overdispersion with Negative Binomial and Generalized Poisson Regression Models*, *Casualty Actuarial Society Forum*, Winter:103-158.
- [8] McCullagh, P., and J. A. Nelder, 1989, *Generalized Linear Models. 2nd Edition*. Chapman and Hall, London.
- [9] Renshaw, A. E. 1994. *Modeling the Claims Process in the Presence of Covariates*. *ASTIN Bulletin*. 24(2):26

LAMPIRAN Program R**1. Model GP I (MLE)**

```

GP.mle <- function(datasignifikan)
{
x=as.matrix(datasignifikan[,-(11:12)])
X=cbind(1,x)
count=as.vector(datasignifikan[,12])
exposure=as.vector(datasignifikan[,11])
new.a <- c(0.001)
new.beta <- rep(c(0.001), dim(X)[2])
for (i in 1:50)
{
a=new.a
beta=new.beta
miul=exposure*exp(as.vector(X%*%beta))
W=diag(miul/(1+a*miul)^2)
I.inverse=solve(t(X)%*%W%*%X)
k=(count-miul)/miul
z=t(X)%*%W%*%k
new.beta=as.vector(beta+I.inverse%*%z)
new.miul=exposure*exp(as.vector(X%*%new.beta))
G=sum(-(count*miul/(1+a*miul))+(count*(count-1))/(1+a*count))-(miul*(count-
miul))/((1+a*miul)^2)
G.prime=sum(((count*(miul^2)/(1+a*miul)^2)-((count^2)*(count-1))/
((1+a*count)^2))-2*(miul^2)*(count-miul))/((1+a*miul)^3)
if((new.a<0)*(new.a<=-1/max(count)))
new.a=-1/(max(count)+1)
else
if((new.a<0)*(new.a<=-1/max(new.miul)))
new.a=-1/(max(new.miul)+1)
else
if((new.a<0)*(new.a<=-1/max(count))*
(new.a<=-1/max(new.miul)))

```

```

new.a= min(-1/(max(count)+1),-1/(max(new.miul)+1))
else
new.a=new.a

likelihood=sum((count*log(miul/(1+(new.a*miul))))+((count-1)
*log(1+(new.a*count)))-((miul*(1+(new.a*count)))/(1+(new.a*miul)))
-lfactorial(count[i]))
pearson=sum((count-miul)^2/(miul*(1+(a*miul))^2))
}
varians=as.vector (diag(I.inverse))
std.error=sqrt(varians)
df=dim(X)[1]-dim(X)[2]-1
n=dim(X)[1]
p=dim(X)[2]
aic=-2*likelihood+(2*p)
BIC=-2*likelihood+p*log(n)
cat("nilai a =",new.a,"\n")
Zhit=beta/std.error
pval=2*pnorm(-abs(Zhit))
cat("=====",
"\n")
frame=data.frame(beta=c("intercept","β_coverage_type","β_vehicle_make","β1_
using_gender","β2_using_gender","β1_vehicle_year","β2_vehicle_year","β3_veh
icle_year","β1_location","β2_location","β4_location"),nilai_beta=new.beta,stand
ar.error=std.error,varians=varians,pval=round(pval,3))
cat("nilai estimasi beta tiap dummy","\n")
print(frame,digits=2)
cat("=====",
"\n")
cat("df =",df,"\n")
cat("log likelihood =",likelihood,"\n")
cat("AIC =",aic,"\n")
cat("BIC =",BIC,"\n")
cat("pearson =",pearson,"\n")

```

```
}

```

```
GP.mle(datasignifikan)

```

2. Model GP I (moment)

```
GP.moment=function(datasignifikan)

```

```
{

```

```
x=as.matrix(datasignifikan[-(11:12)])

```

```
X=cbind(1,x)

```

```
count=as.vector(datasignifikan[,12])

```

```
exposure=as.vector(datasignifikan[,11])

```

```
new.a=c(0.001)

```

```
new.beta=rep(c(0.001),dim(X)[2])

```

```
for (i in 1:50)

```

```
{

```

```
  a=new.a

```

```
  beta=new.beta

```

```
  miul=exposure*exp(as.vector(X%*%beta))

```

```
  W=diag(miul/(1+a*miul)^2)

```

```
  I.inverse=solve(t(X)%*%W%*%X)

```

```
  k=(count-miul)/miul

```

```
  z=t(X)%*%W%*%k

```

```
  new.beta=as.vector(beta+I.inverse%*%z)

```

```
  new.miul=exposure*exp(as.vector(X%*%new.beta))

```

```
  G=sum((count-new.miul)^2/(new.miul*(1+a*new.miul)^2))-(dim(X)[1]
-dim(X)[2])

```

```
  G.prime=-sum((count-new.miul)^2/(1+a*new.miul)^3))

```

```
  new.a=a-G/G.prime

```

```
  if((new.a<0)*(new.a<=-1/max(count)))

```

```
    new.a=-1/(max(count)+1)

```

```
  else

```

```
    if((new.a<0)*(new.a<=-1/max(new.miul)))

```

```
      new.a=-1/(max(new.miul)+1)

```

```
    else

```

```
      if((new.a<0)*(new.a<=-1/max(count))*

```

```

(new.a<=-1/max(new.miul))
        new.a= min(-1/(max(count)+1),-1/(max(new.miul)+1))
    else
        new.a=new.a

    likelihood=sum((count*log(miul/(1+new.a*miul)))+((count-1)*
log(1+new.a*count))-(miul*(1+new.a*count))/((1+new.a*miul))
-lfactorial(count[i]))
        pearson=sum((count-miul)^2/(miul*(1+(a*miul))^2))
    }
varians=as.vector (diag(I.inverse))
std.error=sqrt(varians)
df=dim(X)[1]-dim(X)[2]-1
n=dim(X)[1]
p=dim(X)[2]
aic=-2*likelihood+2*p
BIC=-2*likelihood+p*log(n)
cat("nilai a =",new.a,"\n")
Zhit=beta/std.error
pval=2*pnorm(-abs(Zhit))
cat("=====", "\n")
frame=data.frame(beta=c("intercept","β_coverage_type","β_vehicle_make","β1_
using_gender","β2_using_gender","β1_vehicle_year","β2_vehicle_year","β3_veh
icle_year","β1_location","β2_location","β4_location"),nilai_beta=new.beta,stand
ar.error=std.error,varians=varians,pval=round(pval,3))
cat("nilai estimasi beta tiap dummy", "\n")
print(frame,digits=2)
cat("=====", "\n")
cat("df =",df,"\n")
cat("log likelihood =",likelihood,"\n")
cat("AIC =",aic,"\n")
cat("BIC =",BIC,"\n")
cat("pearson =",pearson,"\n")}
GP.moment(datasignifikan)

```

OPTIMISASI PORTOFOLIO *MEAN-VaR* DENGAN VOLATILITAS TAK KONSTAN DAN EFEK *LONG MEMORY*

Sukono, Subanar, dan Dedi Rosadi

Jurusan matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran, Jl. Raya Jatinangor Km 21,
Jatinangor, Sumedang-Bandung, Telp./Faks. : 022-7794696,

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gajah Mada, Jl. Sekip Utara Bulak Sumur 21,
Yogyakarta 55281, Telefon/Faks: 0274-902360

e-mail: fsukono@yahoo.com

e-mail: subanar@yahoo.com

email: dedirosadi@ugm.co.id

ABSTRACT. Fluctuation of the stock price movement often follows the time series pattern, so that has non constant volatility and often followed the long memory effect existing. In this paper we discuss the portfolio optimization based on mean-Value-at-Risk (VaR) by non constant volatility and the long memory effect. Here, mean of the stock return will be estimated using autoregressive fractional integrated moving average (ARFIMA) models, and the volatility we estimated using generalized autoregressive conditional heteroscedastic (GARCH) models. VaR as the risk measure determined based on mean and non constant volatility that. Furthermore, based on mean-VaR, portfolio optimization problem performed using Lagrangian multiplier, and the solution done using Kuhn-Tucker method. The result of the formulation will be used to analyze some stock data that traded in the Indonesian capital market.

Keywords: ARFIMA, GARCH, VaR, Lagrangean Multiplier, Kuhn-Tucker.

1. PENDAHULUAN

Fluktuasi tingkat pengembalian saham seringkali berkelompok-kelompok (*clusters*), yang mana terdapat kelompok memiliki volatilitas tinggi pada periode waktu tertentu, diikuti oleh volatilitas tinggi pula pada periode waktu berikutnya. Sebaliknya, terdapat kelompok yang memiliki volatilitas rendah pada periode tertentu, diikuti oleh volatilitas rendah pula pada periode berikutnya. Bahkan seringkali terdapat efek jangka panjang atau *long memory* (Tsay, [17]).

Dalam setiap investasi, perhatian investor akan diarahkan pada tingkat pengembalian (*rate of return*) investasinya. Investor akan memilih investasi yang menjanjikan tingkat keuntungan (*return*) tertinggi (Yulianti *et al.*, [18]; Elton & Gruber, [5]). Karena investasi yang dilakukan mengandung unsur ketidakpastian, maka investor harus mempertimbangkan faktor risiko (Alexander, [1]). Strategi yang sering digunakan dalam kondisi investasi yang berisiko adalah membentuk portofolio, yaitu melakukan

diversifikasi berinvestasi pada beberapa saham untuk mengurangi tingkat risiko, dan mengoptimalkan tingkat keuntungan yang diharapkan (Yuliati *et al.*, [18]).

Value-at-Risk (VaR), sampai saat ini telah menjadi populer sebagai alat pengukuran risiko investasi (Tsay, [17]; Dowd, [3]). Analisis investasi dapat dilakukan dengan beberapa model, seperti model *long memory* (Korkmaz *et al.*, [13]; Kang & Yoon, [14]), model-model GARCH (Shi-Jie Deng, [18]), model *Value-at-Risk* (Froot *et al.*, [8]), dan optimisasi portofolio (Jinwen Wu, [11]; Panjer *et al.*, [16]). Pembentukan portofolio adalah cara yang populer untuk melakukan diversifikasi investasi.

Dalam paper ini bermaksud melakukan analisis optimisasi portofolio investasi *mean-VaR*, di mana tingkat pengembalian saham mengikuti pola runtun waktu, dengan mengasumsikan bahwa tingkat pengembalian saham memiliki volatilitas tak konstan dan terdapat efek *long memory*. Adapun tujuannya adalah untuk mendapatkan proporsi (bobot) alokasi dana yang akan diinvestasikan dalam pembentukan portofolio, sehingga akan diperoleh tingkat pengembalian harapan portofolio yang maksimum dan tingkat risiko yang minimum.

2. METODE PENELITIAN

Misalkan P_{it} menyatakan harga saham i pada waktu t , tingkat pengembalian saham i pada waktu t dihitung menggunakan persamaan $r_{it} = \ln(P_{it} / P_{it-1})$ (Tsay, [17]; Dowd, [3]).

2.1 Model Rata-rata dan Variansi

Pemodelan rata-rata dan variansi dilakukan terhadap data tingkat pengembalian saham r_{it} , yang diasumsikan terdapat efek *long memory*.

Pemodelan rata-rata. Untuk tingkat pengembalian saham r_{it} , identifikasi efek *long memory* dilakukan dengan menggunakan metode *Range-Scale* (R/S) (Korkmaz *et al.*, [11]; Tsay, [17]). Untuk mengestimasi parameter diferensi fraksional d dilakukan dengan menggunakan metode *maximum likelihood*. Proses diferensi secara fraksional didefinisikan sebagai

$$(1-B)^d r_{it} = u_{it}, \quad -0,5 < d < 0,5 \quad (1)$$

di mana $\{u_{it}\}$ deret residual *white noise*, dan B menyatakan *backshape*. Teorema binomial pangkat pecahan yang digunakan adalah

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{d}{k} B^k, \quad \binom{d}{k} = \frac{d(d-1)\dots(d-k+1)}{k!} \quad (2)$$

Jika deret diferensi fraksional $(1-B)^d r_{it}$ mengikuti model *autoregressive moving average* derajat p dan q , atau ditulis sebagai ARMA(p, q), dengan persamaan

$$r_{it} = \psi_0 + \sum_{k=1}^p \psi_k r_{it-k} + u_{jt} - \sum_{l=1}^q \theta_l u_{it-l}, \quad (3)$$

maka r_{it} disebut proses *autoregressive fractionally integrated moving average* derajat p , d dan q , atau ditulis sebagai ARFIMA(p, d, q) (Tsay, [17]).

Adapun proses pemodelan rata-rata adalah sebagai berikut: (i) **Identifikasi model**; yaitu menetapkan nilai-nilai tentatif p dan q dengan menggunakan *correlogram*. (ii) **Estimasi parameter**; dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil atau metode maximum likelihood untuk mengestimasi model *autoregressive integrated moving average* (ARIMA). (iii) **Uji diagnosis**; caranya dengan menguji apakah residual dari model rata-rata bersifat acak sehingga merupakan residual yang relatif kecil, atau residual bersifat *white noise*. (iv) **Prediksi**; yakni menggunakan model rata-rata yang dipilih untuk memprediksi l -langkah ke depan (Tsay, [17]).

Pemodelan variansi. Pemodelan variansi dilakukan dengan menggunakan model-model *generalized autoregressive conditional heteroscedastic* (GARCH). Untuk tingkat pengembalian r_{it} , misalkan $u_{it} = r_{it} - \mu_{it}$ adalah residual tingkat pengembalian saham i pada waktu t , di mana μ_{it} rata-rata tingkat pengembalian saham i pada waktu t . Residual u_{it} mengikuti model GARCH(m, n) jika

$$u_{it} = \sigma_{it} \varepsilon_{it}, \quad \sigma_{it}^2 = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^m \alpha_k u_{it-k}^2 + \sum_{l=1}^n \beta_l \sigma_{it-l}^2 + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

di mana $\{\varepsilon_{it}\}$ barisan variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik (iid) dengan rata-rata 0 dan variansi 1, $\alpha_{i0} > 0$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{\max(m,n)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ (Sukono *et al.*, [15]; Tsay, [17]; Shi-Jie Deng, [16]).

Proses pemodelan variansi dilakukan sebagai berikut: (i) **Estimasi model rata-rata**; yaitu mengestimasi dan memilih model rata-rata yang baik seperti dilakukan pada pemodelan rata-rata di atas. (ii) **Uji efek ARCH**; dilakukan pengujian efek ARCH terhadap residual dari model rata-rata dengan uji ARCH-LM. (iii) **Identifikasi model**; jika efek ARCH secara statistik signifikan, selanjutnya menetapkan nilai-nilai m dan s

dengan bantuan *correlogram*. (iv) **Estimasi model;** yaitu mengestimasi secara serempak model rata-rata dan model variansi, dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil atau metode *maximum likelihood* untuk mengestimasi model GARCH(m, n). (v) **Uji diagnosis;** menguji apakah residual dari model variansi bersifat *white noise*. (vi) **Prediksi;** yakni menggunakan model rata-rata dan variansi yang dipilih untuk memprediksi rata-rata $\hat{\mu}_{it} = \hat{r}_h(l)$, dan variansi $\hat{\sigma}_{it}^2 = \hat{\sigma}_{it}^2(l)$, untuk l -langkah ke depan (Tsay, [17]).

2.2 Model Portofolio dan Value-at-Risk

Dalam pembentukan portofolio investasi, akan berhubungan dengan proporsi alokasi dana pada masing-masing saham yang dianalisis. Adaikan w_i adalah proporsi dana yang dialokasikan pada saham i , di mana $\sum_{i=1}^N w_i = 1$, maka tingkat pengembalian portofolio dapat dinyatakan sebagai

$$R_w = \sum_{i=1}^N w_i R_{it}, \quad (5)$$

di mana R_w tingkat pengembalian portofolio pada waktu t , dan N banyaknya saham dalam pembentukan portofolio (Jogiyanto, [10]; Yulianti *et al.*, [18]; Elton & Gruber, [5]).

Berdasarkan (5), diperoleh rata-rata (ekspektasi) portofolio dengan bobot w_i dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{\mu}_w = \sum_{i=1}^N w_i \hat{\mu}_{it} \quad (6)$$

Sedangkan variansi portofolio dapat dinyatakan sebagai

$$\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_{it}^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}; \quad i \neq j \quad (7)$$

di mana $\sigma_{ij} = \text{Cov}(r_{it}, r_{jt})$.

Andaikan besarnya investasi awal sebesar satu satuan, dan tingkat signifikansi risiko kerugian sebesar α , maka VaR untuk portofolio dengan bobot w_i adalah

$$\text{VaR}_w = z_\alpha \hat{\sigma}_w - \hat{\mu}_w \quad (8)$$

di mana z_α adalah nilai persentil dari distribusi normal standar dengan tingkat signifikansi α (Cheng *et al.*, [2]; Denuit *et al.*, [4]; Khindanova & Rachev, [13]).

2.3 Optimisasi Portofolio Berdasar Mean-VaR

Misalkan bahwa vektor nilai-nilai ekspektasi dan matriks kovariansi diberikan berturut-turut oleh: $\boldsymbol{\mu}^T = (\hat{\mu}_{1t}, \dots, \hat{\mu}_{Nt})$, dengan $\hat{\mu}_{it} = E[R_{it}]$, $i = 1, \dots, N$, dan $\boldsymbol{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$, dengan $\hat{\sigma}_{ij} = Cov(r_{it}, r_{jt})$, $i, j = 1, \dots, N$. Merujuk pembahasan sebelumnya, bobot tingkat pengembalian saham pada suatu portofolio $\mathbf{w}^T = (w_1, \dots, w_N)$, di mana $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ atau $\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$ dengan $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$ vektor dengan elmen satu-satu. Merujuk persamaan (6) dapat ditulis kembali sebagai

$$\mu_w = E[R_w] = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}, \quad (9)$$

dan persamaan (7) ditulis kembali sebagai

$$\sigma_w^2 = Var(R_w) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}. \quad (10)$$

Dengan tingkat signifikansi α , persentil z_α diperoleh dari tabel distribusi normal standar. Sehingga *Value-at-Risk* portofolio investasi persamaan (13) dapat ditulis kembali sebagai

$$VaR_w = z_\alpha \sigma_w - \mu_w = z_\alpha (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}. \quad (11)$$

Suatu portofolio \mathbf{w}^* disebut (*mean-VaR*) efisien jika tidak ada portofolio \mathbf{w} dengan $\mu_w \geq \mu_{w^*}$ dan $VaR_w < VaR_{w^*}$ (Panjer *et al.*, [14]). Untuk mendapatkan suatu portofolio efisien, para praktisi menggunakan fungsi obyektif sangat sederhana. Yaitu maksimumkan $\{2\tau\mu_w - VaR_w\}$, $\tau \geq 0$ di mana τ adalah *toleransi risiko* investor. Sehingga, untuk investor dengan toleransi risiko $\tau \geq 0$ harus menyelesaikan persoalan optimasi (Panjer *et al.*, [14]):

$$\begin{aligned} & \max\{2\tau\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - z_\alpha (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w}\} \\ & \text{subject to } \mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Karena matriks kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$ semi-definite positif, fungsi obyektif adalah *quadratic concave*. Karenanya, (12) adalah suatu persoalan optimasi *quadratic concave*. Fungsi Lagrangean diberikan oleh

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = (2\tau + 1)\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - z_\alpha (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2} + \lambda(\mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1).$$

Menggunakan teorema Kuhn-Tucker, syarat optimalitas adalah

$$\partial L / \partial \mathbf{w} = (2\tau + 1)\boldsymbol{\mu} - z_\alpha \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} / (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w})^{1/2} + \lambda \mathbf{e} = 0 \text{ dan } \partial L / \partial \lambda = \mathbf{e}^T \mathbf{w} - 1 = 0. \quad (13)$$

Berdasarkan perhitungan aljabar, jika dimisalkan $A = \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}$, $B = (2\tau + 1)(\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu})$ dan $C = (2\tau + 1)^2 (\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}) - z_{\alpha}^2$, maka dengan rumus ABC diperoleh

$$\lambda = \{-B + (B^2 - 4AC)^{1/2}\} / 2A \quad (14)$$

Untuk $\tau = 0$, menyelesaikan persamaan (13) diperoleh suatu portofolio minimum dengan vektor bobot \mathbf{w}^{Min}

$$\mathbf{w}^{Min} = \frac{\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \quad (15)$$

Untuk $\tau > 0$, diperoleh portofolio optimum dengan vektor bobot \mathbf{w}^*

$$\mathbf{w}^* = \frac{(2\tau + 1) \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{e}}{(2\tau + 1) \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \lambda \mathbf{e}^T \Sigma^{-1} \mathbf{e}} \quad (16)$$

Jika vektor \mathbf{w}^{Min} disubstitusikan ke dalam persamaan (9) dan (11), maka akan diperoleh tingkat pengembalian portofolio minimum dan *Value-at-Risk* minimum. Sedangkan, jika vektor \mathbf{w}^* disubstitusikan ke dalam persamaan (9) dan (11), maka akan diperoleh tingkat pengembalian portofolio dan *Value-at-Risk* optimum (Sukono *et al.*, [15]).

3. ANALISIS DATA

Data yang dianalisis di sini meliputi data saham PRUF, BBRI, MPPA, BMRI, dan INDF, selanjutnya secara berturut-turut diberi simbol S_1 sampai dengan S_5 . Data saham maupun masing-masing ditentukan tingkat pengembalian (*return*), dan kemudian digunakan untuk pemodelan rata-rata dan variansi berikut ini.

3.1 Pemodelan Rata-rata dan Variansi

Dalam bagian ini digunakan *software* R untuk identifikasi efek *long memory*, dan Eviews 4 untuk estimasi model rata-rata dan variansi.

Identifikasi efek long memory. Untuk mengidentifikasi efek *long memory*, diestimasi dulu parameter diferensi fraksional d dalam persamaan (1). Untuk menentukan nilai diferensi fraksional d , digunakan metode Gewek dan Porter-Hudak, dengan bantuan *software* R. Hasilnya, untuk data tingkat pengembalian saham S_1 sampai dengan S_5 diberikan dalam Tabel-1 berikut ini.

Tabel-1. Identifikasi Efek *Long Memory*

| Saham | \hat{d}_i | $SE(\hat{d}_i)$ | Interval Konfidensi | z_i | Efek <i>Long Memory</i> |
|-------|-------------|-----------------|------------------------------------|-------|-----------------------------|
| S_1 | -0,098 | 0,1346 | $-0,356 < \hat{\delta}_1 < 0,172$ | 5,86 | Signifikan |
| S_2 | -0,062 | 0,1321 | $-0,383 < \hat{\delta}_2 < 0,197$ | 2,38 | Signifikan |
| S_3 | 0,433 | 0,0553 | $0,325 < \hat{\delta}_3 < 0,514$ | 2,12 | Signifikan |
| S_4 | 0,001 | 0,2751 | $-0,538 < \hat{\delta}_4 < 0,540$ | 1,62 | Tidak Signifikan |
| S_5 | 0,218 | 0,1340 | $-0,0446 < \hat{\delta}_5 < 0,481$ | 3,51 | Signifikan |

Untuk meyakinkan adanya pola *long memory*, dilakukan uji hipotesis $H_0 : \hat{\delta}_i = 0$ melawan $H_1 : \hat{\delta}_i \neq 0, i=1, \dots, 5$. Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh statistik z_i , sedangkan untuk tingkat signifikansi $\alpha = 0,95$, dari tabel distribusi normal standar diperoleh nilai $Z_{0,95/2} = 1,96$. Karena nilai z_1, z_2, z_3 dan z_5 lebih besar dari nilai $Z_{0,95/2}$, disimpulkan bahwa hasil uji adalah signifikan, berarti data tingkat pengembalian S_1, S_2, S_3 dan S_5 terdapat efek *long memory*. Hal ini didukung pula bahwa interval konfidensinya masih dalam interval $-0,5 < d < 0,5$. Sedangkan tingkat pengembalian saham S_4 tidak terdapat efek *long memory*. Langkah selanjutnya menggunakan data yang telah diferensi fraksional \hat{d}_i untuk estimasi model rata-rata dan model variansi.

Estimasi model rata-rata. Data terdidiferensi \hat{d}_i akan digunakan untuk estimasi model rata-rata menggunakan *software* Eviews-4. Pertama, identifikasi dan estimasi model rata-rata. Identifikasi melalui sampel *autocorrelation function* (ACF) dan *partial autocorrelation function* (PACF). Berdasarkan pola ACF dan PACF masing-masing tingkat pengembalian saham, ditentukan model tentatifnya. Hasil estimasi, dapat ditunjukkan bahwa secara berturutan model-model ARFIMA(0, \hat{d}_1 , 1), ARFIMA(1, \hat{d}_2 , 1), ARFIMA(2, \hat{d}_3 , 0), ARMA(1,1) dan ARFIMA(2, \hat{d}_5 , 0) adalah terbaik. Kedua, uji diagnosis terhadap model-model tersebut, menggunakan *correlogram* data residual dan uji hipotesis Ljung-Box. Hasil uji menunjukkan residual model-model tersebut adalah *white noise*. Hasil uji normalitas residual a_{it} menunjukkan berdistribusi normal. Sehingga tidak perlu untuk melihat model-model alternatif lainnya.

Estimasi Model Variansi. Pertama, dilakukan deteksi unsur *autoregressive conditional heteroscedasticity* (ARCH) terhadap residual a_{it} , menggunakan metode ARCH-LM dengan *software* Eviews-4. Hasilnya didapat nilai χ^2 (obs * *R-Square*) masing-masing tingkat pengembalian saham S_1 sampai dengan S_5 berturut-turut adalah 112,8209; 52,8883; 9,1234; 17,7026 dan 9,12340 dengan probabilitas masing-masing 0,0000 atau lebih kecil 5%, yang berarti terdapat unsur ARCH.

Kedua, identifikasi dan estimasi model variansi. Di sini digunakan model-model *generalized autoregressive conditional heteroscedasticity* (GARCH) merujuk persamaan (4). Berdasarkan *correlogram* residual kuadrat a_{it}^2 , yakni grafik ACF dan PACF masing-masing dipilih model variansi tentatif yang mungkin. Estimasi model variansi masing-masing tingkat pengembalian saham dilakukan secara serempak dengan model rata-ratanya. Hasilnya, diperoleh model terbaik berturut-turut adalah: S_1 mengikuti model ARFIMA(0, \hat{d}_1 , 1)-GARCH(1,1) dengan persamaan rata-rata $r_{1t} = a_{1t} - 0,070448a_{1t-1}$ dan variansi $\sigma_{1t}^2 = 0,00000674 + 0,072812a_{1t-1}^2 + 0,897956\sigma_{1t-1}^2 + \varepsilon_{1t}$; S_2 model ARFIMA(1, \hat{d}_2 , 1)-GARCH(1,1)-M dengan persamaan rata-rata $r_{2t} = -0,359453r_{2t-1} + 0,465529a_{2t-1} + 0,676944\sigma_{2t}^2 + a_{2t}$ dan variansi $\sigma_{2t}^2 = 0,0000196 + 0,054776a_{2t-1}^2 + 0,915829\sigma_{2t-1}^2 + \varepsilon_{2t}$; S_3 model ARFIMA(2, \hat{d}_3 , 0)-GARCH(1,1) dengan persamaan rata-rata $r_{3t} = -0,15440r_{3t-1} - 0,126754r_{3t-2} + a_{3t}$ dan variansi $\sigma_{3t}^2 = 0,0000774 + 0,177777a_{3t-1}^2 + 0,488259\sigma_{3t-1}^2 + \varepsilon_{3t}$; S_4 model ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-M dengan persamaan rata-rata $r_{4t} = -0,646429r_{4t-1} + 0,700476a_{4t-1} + 3,105569\sigma_{4t}^2 + a_{4t}$ dan variansi $\sigma_{4t}^2 = 0,0000212 + 0,056086a_{4t-1}^2 + 0,912034\sigma_{4t-1}^2 + \varepsilon_{4t}$ dan S_5 model ARFIMA(2, \hat{d}_5 , 0)-TGARCH(1,1) dengan persamaan rata-rata $r_{5t} = -0,013454r_{5t-1} - 0,004895r_{5t-2} + a_{5t}$ dan variansi $\sigma_{5t}^2 = 0,0000735 - 0,025404a_{5t-1}^2 + 0,033608I_{5t-1} + 0,545633\sigma_{5t-1}^2 + \varepsilon_{5t}$.

Berdasarkan uji ARCH-LM, residual ε_{it} dari model-model untuk saham S_1 sampai dengan S_5 sudah tidak terdapat unsur ARCH, dan juga telah *white noise*. Model rata-rata

dan variansi ini akan digunakan menghitung nilai-nilai $\hat{\mu}_{it} = \hat{r}_{it}(1)$ dan $\hat{\sigma}_{it}^2 = \hat{\sigma}_{it}^2(1)$ secara rekursif.

Prediksi Rata-rata dan Variansi. Menggunakan model rata-rata dan variansi dari tingkat pengembalian saham S_1 sampai dengan S_5 tersebut di atas, selanjutnya untuk menghitung nilai-nilai $\hat{\mu}_{it} = \hat{r}_{it}(1)$ dan $\hat{\sigma}_{it}^2 = \hat{\sigma}_{it}^2(1)$ secara rekursif. Hasilnya diberikan dalam Tabel-2 berikut ini.

Tabel-2. Rata-rata dan Variansi

| Saham | $\hat{\mu}_{it}$ | $\hat{\sigma}_{it}^2$ |
|-------|------------------|-----------------------|
| S_1 | 0,000112 | 0,00012 |
| S_2 | 0,001840 | 0,00143 |
| S_3 | 0,000511 | 0,00025 |
| S_4 | 0,002980 | 0,00148 |
| S_5 | 0,000158 | 0,00025 |

3.2 Optimisasi Portofolio

Optimisasi portofolio dilakukan dengan bantuan *software* Matlab-7. Karena lima saham yang digunakan untuk pembentukan portofolio, maka ditentukan bahwa vektor $\mathbf{e}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$. Dari Tabel-2 dapat disusun vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}^T = (0,000112 \ 0,001840 \ 0,000511 \ 0,002980 \ 0,000158)$. Dengan asumsi kovariansi antar saham $\sigma_{ij} = 0$, dari Tabel-2 dapat dibentuk matriks kovariansi dengan pembulatan hingga empat desimal sebagai

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0014 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0003 \end{pmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 8333,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 699,30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4000,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 675,70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4000,0 \end{pmatrix}$$

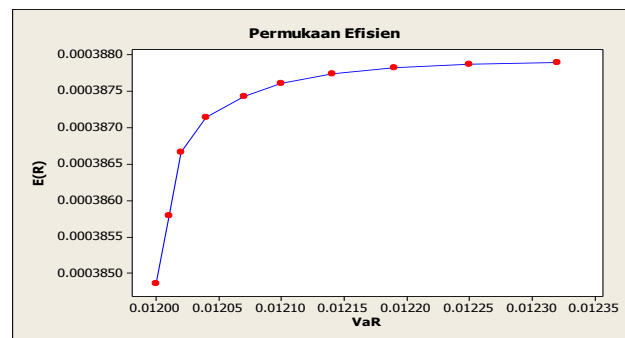
Selanjutnya, ditentukan beberapa nilai toleransi risiko τ yang layak, di sini diambil $\tau = 0, \dots, 9$. Kemudian bobot portofolio dihitung menggunakan persamaan (16), sedangkan rata-rata portofolio dihitung menggunakan persamaan (9), dan *Value-at-Risk* (VaR) sebagai ukuran risiko dihitung menggunakan persamaan (11). Hasilnya diberikan dalam Tabel-3 berikut ini.

Tabel-3. Bobot, Rata-rata dan Value-at-Risk Portofolio

| τ | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 | w_5 | $\hat{\mu}_w$ | VaR_w |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|---------|
| 0 | 0,4714 | 0,0392 | 0,2257 | 0,0376 | 0,2262 | 0,00038486 | 0,01200 |
| 1 | 0,4714 | 0,0392 | 0,2257 | 0,0376 | 0,2262 | 0,00038579 | 0,01201 |
| 2 | 0,4714 | 0,0391 | 0,2257 | 0,0376 | 0,2262 | 0,00038666 | 0,01202 |
| 3 | 0,4714 | 0,0391 | 0,2257 | 0,0375 | 0,2262 | 0,00038714 | 0,01204 |
| 4 | 0,4715 | 0,0391 | 0,2257 | 0,0375 | 0,2262 | 0,00038743 | 0,01207 |
| 5 | 0,4715 | 0,0391 | 0,2257 | 0,0375 | 0,2263 | 0,00038761 | 0,01210 |
| 6 | 0,4716 | 0,0390 | 0,2257 | 0,0374 | 0,2263 | 0,00038774 | 0,01214 |
| 7 | 0,4718 | 0,0390 | 0,2256 | 0,0373 | 0,2264 | 0,00038782 | 0,01219 |
| 8 | 0,4721 | 0,0388 | 0,2256 | 0,0370 | 0,2265 | 0,00038787 | 0,01225 |
| 9 | 0,4734 | 0,0383 | 0,2253 | 0,0361 | 0,2270 | 0,00038789 | 0,01232 |
| 10 | * | * | * | * | * | - | - |

* Bilangan imajiner, jadi tidak layak

Menggunakan nilai-nilai estimasi rata-rata $\hat{\mu}_w$ dan Value-at-Risk VaR_w portofolio dari Tabel-3 di atas dapat dibuat grafik permukaan efisien seperti Gambar-1 berikut ini.



Gambar-1. Permukaan Efisien Suatu Portofolio

Memperhatikan hasil yang diberikan dalam Tabel-3, tampak bahwa setiap peningkatan nilai toleransi risiko τ , dari 0 sampai dengan 9 mengakibatkan perubahan komposisi bobot portofolio, walaupun sangat lambat. Juga mengakibatkan peningkatan nilai rata-rata portofolio yang disertai dengan peningkatan nilai risiko, yang dalam hal ini diukur dengan VaR. Toleransi risiko $\tau > 9$ sudah tidak layak untuk berinvestasi, dikarenakan akan memberikan komposisi bobot portofolio yang imajiner. Daerah yang

layak untuk berinvestasi ditunjukkan oleh grafik permukaan efisien portofolio seperti Gambar-1 di atas.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis di atas dapat disimpulkan bahwa data tingkat pengembalian S_1 , S_2 , S_3 dan S_5 terdapat efek *long memory*. Sedangkan tingkat pengembalian saham S_4 tidak terdapat efek *long memory*. Data terdidiferensi \hat{d}_i berturut-turut untuk saham S_1 mengikuti model ARFIMA(0, \hat{d}_1 , 1)-GARCH(1,1); S_2 model ARFIMA(1, \hat{d}_2 , 1)-GARCH(1,1)-M; S_3 model ARFIMA(2, \hat{d}_3 , 0)-GARCH(1,1); S_4 model ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-M dan S_5 model ARFIMA(2, \hat{d}_5 , 0)-TGARCH(1,1). Nilai toleransi risiko τ yang layak adalah $\tau=0, \dots, 9$, sedangkan toleransi risiko $\tau > 9$ sudah tidak layak untuk berinvestasi, dikarenakan akan memberikan komposisi bobot portofolio yang imajiner. Setiap peningkatan nilai toleransi risiko τ , mengakibatkan perubahan komposisi bobot portofolio, dan mengakibatkan peningkatan nilai rata-rata portofolio yang disertai dengan peningkatan nilai risiko VaR.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alexander, C. (Editor). (1999). *Risk Management and Analysis*. Volume 1 : Measuring and Modelling Financial Risk. New York : John Wiley & Sons Inc.
- [2] Cheng, S., Liu, Y., & Wang, S. 2004. Progress in Risk Measurement. *AMO-Advanced Modelling and Optimization*, Volume 6, Number 1, 2004.
- [3] Dowd, K. (2002). *An Introduction to Market Risk Measurement*. New Delhi, India: John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Denuit, D., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. & Laeven, R. (2005). Risk Measurement With Equivalent Utility Principles. http://www.papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=880007 (Downloaded in January 2007).
- [5] Elton, E.J. & Gruber, M.J. (1991). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Fourth Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [6] Froot, K.A., Venter, G.G. & Major, J.A. (2007). Capital and Value of Risk Transfer. *Working Paper*. New York: Harvard Business School, Boston, MA 02163. [Http://www.people.hbs.edu/kfroot/](http://www.people.hbs.edu/kfroot/). (Downloaded in December 2009).

- [7] Franses, P.H. & Van Oest, R. (2004). On the Econometrics of the Koyck Model. *Econometric Institute Report 2004-07*. <http://www.publishing.eur.nl/fir/asset/1190/ei200407.pdf>. (Downloaded in December 2009).
- [8] Hanafi, M.M. (2006). *Manajemen Risiko*. Yogyakarta: UPP STIM YKPN.
- [9] Jinwen Wu. (2007). The Study of the Optimal Mean-VaR Portfolio Selection. *International Journal of Business and Management*, Vol 2, No 5 (2007). <http://www.ccsenet.org/journal/index.php/ijbm/article/view/2051>. (Downloaded in December 2009).
- [10] Jogiyanto, H.M. (2007). *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*. Edisi 2007. Yogyakarta: BPFE.
- [11] Korkmaz, T., Cevic, E.I. & Ozatac, N. (2009). Testing for Long Memory in ISE Using ARFIMA-FIGARCH Model and Structural Break Test. *International Research Journal of Finance and Economics*. ISSN 1450-2887 Issue 26 (2009). <http://www.Eurojournals.com/finance.htm>.
- [12] Kang, S.H. & Yoon, S-M. (2007). Value-at-Risk Analysis of the Long Memory Volatility Process: The Case of Individual Stock Return. *Working Paper*. School of Commerce, University of South Australia. <http://www.korfin.org/data/journal/21-1-04.pdf>. (Downloaded in February 2008).
- [13] Khindanova, I.N. & Rachev, S.T., Value at Risk : Recent Advances, *Working Paper*, University of California, Santa Barbara and University of Karlsruhe, Germany, 2005. <http://www.econ.ucsb.edu/papers/wp3-00.pdf...> (Down-loaded in November 2008).
- [14] Panjer, H.H., Boyle, D.D., Cox, S.H., Dufresne, D., Gerber, H.U., Mueller, H.H., Pedersen, H.W., & Pliska, S.R., *Financial Economics*. With Applications to Investments, Insurance and Pensions, the Actuarial Foundation, Schaumburg, Illinois, 1998.
- [15] Sukono, Subanar & Rosadi, D. (2009). Mean-VaR Portfolio Optimization under CAPM by Non Constan Volatility in Market Return. *Working Paper*. Presented in 5th International Conference on Mathematics, Statistics and Their Application at Andalas University, Padang, West Sumatera-Indonesia, June 9-11, 2009.
- [16] Shi-Jie Deng. (2004). Heavy-Tailed GARCH models: Pricing and Risk Management Applications in Power Market. *IMA Control & Pricing in Communication & Power Networks*. 7-17 Mar. 2004. <http://www.ima.umn>.

edu/talks/.../deng/power_workshop_ima032004-deng.pdf. (Downloaded in March 2007).

- [17] Tsay, R.S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- [18] Yuliati, S.H., Prasetyo, H., & Tjiptono, F. (1996). *Manajemen Portofolio dan Analisis Investasi*. Yogyakarta: ANDI.

PEMILIHAN JENIS KARTU TELEPON SELULER DI SURAKARTA MENGUNAKAN ANALISIS FAKTOR

Astika Ratnawati dan Etik Zukhronah
Jurusan Matematika, FMIPA UNS

ABSTRAK. Perusahaan penyedia jasa layanan telekomunikasi berlomba-lomba mengeluarkan kartu telepon seluler untuk memuaskan serta memberikan banyak fasilitas dan layanan terbaik bagi pelanggannya. Banyaknya perusahaan penyedia layanan telekomunikasi seluler yang mengeluarkan produk-produk dengan keunggulan masing-masing akan mengubah perilaku pelanggan dalam proses keputusan pembelian, yaitu kecenderungan dalam memilih jenis kartu telepon seluler. Berdasarkan kondisi ini, perlu dilakukan penelitian untuk menganalisis faktor-faktor yang berpengaruh terhadap pelanggan dalam memilih kartu telepon seluler. Analisis yang digunakan pada penelitian ini adalah analisis faktor.

Data yang digunakan pada penelitian ini berasal dari kuisioner yang diberikan kepada pelanggan pengguna telepon seluler di Surakarta yang dipilih dengan sampling random sederhana. Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan analisis faktor untuk mengetahui faktor-faktor yang menjadi kebutuhan pelanggan dalam memilih kartu telepon seluler di Surakarta.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa terdapat enam faktor yang menjadi prioritas pelanggan dalam memilih kartu telepon seluler yaitu faktor harga, pelayanan, kelengkapan, fitur, produk dan fasilitas.

Kata kunci : kartu telepon seluler, analisis faktor

1. PENDAHULUAN

Komunikasi merupakan faktor penting dalam kehidupan sehari-hari dan dianggap mampu membantu kelancaran hidup pelanggan telekomunikasi. Seiring dengan perkembangan zaman, pelanggan mulai beralih menggunakan telepon seluler yang lebih canggih dan praktis. Hal ini mendorong perusahaan penyedia jasa layanan telekomunikasi seluler dapat mengambil peluang baru dari keinginan-keinginan dan kebutuhan pelanggan yang belum terpenuhi. Perusahaan tersebut berlomba-lomba mengeluarkan kartu telepon seluler dengan jenis *Global System for Mobile communication (GSM)* dan *Code Division Multiple Access (CDMA)*. Perusahaan dihadapkan pada persaingan dengan perusahaan lain yang mengeluarkan produk sejenis serta menyediakan produk atau jasa kepada pelanggan yang lebih baik. Untuk menghadapi persaingan tersebut, perusahaan perlu mengetahui kebutuhan pelanggan dalam memilih produknya.

Kota Surakarta termasuk kota yang maju di bidang komunikasi terutama penggunaan telepon seluler. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya penjual dan pengguna

telepon seluler di Surakarta. Untuk itu, diperlukan kartu telepon seluler yang sesuai dengan kebutuhan komunikasinya.

Yunarwanto (2002) melakukan penelitian dengan tujuan untuk mengetahui posisi persaingan operator telepon seluler prabayar merek I, merek II, merek III, merek IV serta merek V berdasarkan persepsi konsumen dan pengaruh posisi pesaingannya terhadap jumlah pelanggan di Kota Malang. Metode analisis yang digunakan adalah atribut vektor. Metode ini untuk mengetahui keunggulan atribut masing-masing operator ponsel prabayar.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai faktor-faktor yang berpengaruh terhadap pelanggan di Surakarta dalam memilih jenis kartu telepon seluler. Variabel yang digunakan adalah atribut jenis kartu telepon seluler. Data yang diperoleh dari penelitian ini dianalisis dengan menggunakan analisis faktor. Analisis ini dimaksudkan untuk membuat ringkasan informasi yang terkandung dalam sejumlah besar variabel ke dalam suatu kelompok faktor yang lebih kecil.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Uji Validitas dan Reliabilitas

Validitas menunjukkan sejauhmana ketepatan dan kecermatan suatu alat ukur dalam melakukan fungsi ukurnya (Azwar, 1997:5) . Suatu alat ukur dapat dikatakan memiliki validitas yang tinggi jika alat tersebut menjalankan fungsi ukurnya atau memberikan hasil ukur yang sesuai dengan maksud dilakukannya pengukuran tersebut. Validitas adalah aspek kecermatan pengukuran. Uji validitas untuk data yang diperoleh dengan menggunakan kuesioner dapat dilakukan dengan menghitung koefisien korelasi *product-moment*, yaitu korelasi antara tiap-tiap pertanyaan dengan skor totalnya.

Pengujian validitas dilakukan dengan membandingkan angka korelasi yang diperoleh dengan angka kritis tabel korelasi nilai r . Angka kritis diperoleh dari tabel korelasi nilai r dengan taraf signifikansi 5% dan derajat bebas $n-2$. Jika angka korelasi yang diperoleh lebih besar daripada angka kritis tabel korelasi nilai r maka tiap-tiap pertanyaan tersebut dikatakan valid (Singarimbun dan Effendi, 1989:139).

Reliabilitas merupakan indeks yang menunjukkan sejauhmana suatu alat ukur dapat dipercaya atau dapat diandalkan. Hasil pengukuran dapat dipercaya jika dalam beberapa kali pelaksanaan pengukuran terhadap kelompok subjek yang sama diperoleh hasil yang relatif sama. Relatif sama dalam hal ini berarti tetap adanya perbedaan-perbedaan kecil diantara hasil beberapa kali pengukuran. Jika perbedaan itu sangat besar dari waktu ke waktu maka hasil pengukuran tidak dapat dipercaya dan dikatakan tidak

reliabel. Estimasi terhadap tingginya reliabilitas dapat dilakukan dengan teknik alpha Cronbach. Menurut Ghozali (2002:133), variabel memiliki tingkat reliabilitas yang tinggi jika nilai koefisien reliabilitas yang diperoleh lebih besar atau sama dengan 0,6.

2.2. Analisis Faktor

Analisis faktor pada prinsipnya digunakan untuk mengelompokkan variabel-variabel menjadi lebih sedikit jumlahnya tanpa kehilangan informasi yang berarti. Variabel-variabel tersebut dikelompokkan berdasarkan hubungan antar variabel. Hasil pengelompokan tersebut dinamakan dengan faktor. Menurut Size (2005), suatu faktor tidak dapat diartikan menjadi satu variabel karena ada kombinasi dari banyak variabel yang terdapat dalam satu faktor.

Menurut Johnson dan Wichern (1982:401), analisis faktor merupakan teknik analisis multivariat yang bertujuan untuk menjelaskan hubungan diantara p variabel yang diamati dengan cara membangkitkan m faktor penting, dengan $m < p$. Misal \mathbf{X} adalah vektor random yang memiliki p komponen pada pengamatan ke- i , dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks variansi-kovariansi Σ . Vektor \mathbf{X} bergantung secara linear dengan variabel F_1, F_2, \dots, F_m yang disebut faktor-faktor bersama, dan sumber variasi dari $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ yang disebut faktor-faktor spesifik.

Model analisis faktor menurut Johnson dan Wichern (1982:402) adalah

$$\begin{aligned} X_1 - \mu_1 &= l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \dots + l_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\ X_2 - \mu_2 &= l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \dots + l_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ X_p - \mu_p &= l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + \dots + l_{pm}F_m + \varepsilon_p \end{aligned}$$

dengan X_i adalah variabel ke- i , μ_i adalah rata-rata dari variabel ke- i , l_{ij} adalah bobot variabel ke- i pada faktor ke- j , F_j adalah faktor bersama ke- j , ε_i adalah faktor spesifik ke- i , $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, m$. Asumsi yang mendasari model analisis faktor adalah

1. vektor \mathbf{F} dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ saling bebas, $\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{F}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}') = \mathbf{0}$,
2. faktor bersama tidak saling berkorelasi, $\text{cov}(\mathbf{F}) = E(\mathbf{F}\mathbf{F}') = \mathbf{I}$,
3. faktor spesifik tidak saling berkorelasi, $\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Psi}$

$$\text{dengan } \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_p \end{bmatrix}.$$

Menurut Hair *et al.* (1998:101) secara garis besar ada tiga tahapan dalam analisis faktor.

1. Melakukan uji kelayakan variabel dengan menghitung nilai *Measure of Sampling Adequacy (MSA)* yang dirumuskan sebagai

$$\text{angka } MSA = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m r_{ij}^2}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m r_{ij}^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m r_{i,j}^2} \quad (2.1)$$

dengan r_{ij} adalah korelasi antara variabel ke- i dan ke- j , $r_{i,j}$ adalah korelasi parsial antara variabel ke- i dan variabel lain dengan variabel ke- j sebagai kontrol. Jika nilai $MSA < 0.50$ maka variabel tersebut dikeluarkan dari analisis.

2. Melakukan ekstraksi variabel sehingga diperoleh satu atau beberapa faktor. Banyaknya faktor ditentukan berdasarkan kriteria akar laten, yaitu banyaknya faktor sama dengan banyaknya nilai eigen dari matriks variansi-kovariansi sampel yang nilainya ≥ 1 .
3. Melakukan interpretasi terhadap faktor yang terbentuk.

Permasalahan yang mendasari dalam analisis faktor adalah mengestimasi bobot faktor, l_{ij} . Bobot faktor menunjukkan tingkat korespondensi antara variabel dan faktor, dengan bobot faktor yang paling tinggi yang menetapkan variabel mewakili faktor yang terbentuk. Dalam mengestimasi nilai bobot faktor, metode yang digunakan adalah metode komponen utama. Metode ini mengekstraksi faktor sedemikian hingga jumlah variansi yang terkandung dalam kumpulan variabel menjadi maksimum. Menurut Johnson dan Wichern (1982:409), matriks bobot faktornya adalah

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \mathbf{e}_1 & \sqrt{\lambda_2} \mathbf{e}_2 & \dots & \sqrt{\lambda_m} \mathbf{e}_m \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

dengan \mathbf{e}_j merupakan matriks vektor eigen berukuran $px1$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Seringkali nilai estimasi dari bobot faktor sulit untuk diinterpretasikan karena faktor yang terbentuk kurang dapat menggambarkan perbedaan diantara faktor-faktor yang ada. Untuk mengatasi hal tersebut perlu dilakukan rotasi faktor. Rotasi faktor yang digunakan dalam penelitian ini adalah rotasi ortogonal. Metode rotasi ortogonal yang

digunakan adalah rotasi varimaks. Menurut Jolliffe (2002:154), prosedur varimaks adalah memilih matriks transformasi ortogonal \mathbf{T} yang memaksimumkan V , dengan V didefinisikan sebagai

$$V = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^p \tilde{l}_{ij}^{*4} - \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^p \tilde{l}_{ij}^{*2} \right)^2 \right]$$

dengan V adalah variansi dari kuadrat bobot faktor dan $\tilde{l}_{ij}^{*} = \frac{\hat{l}_{ij}^{*}}{\hat{h}_i}$ adalah koefisien

akhir setelah dirotasi yang dibagi dengan akar kuadrat komunalitas. Syarat minimal total variansi yang terjelaskan adalah 60% (Hair *et al.*, 1998:104).

Jika \mathbf{L} (pxm) adalah matriks bobot faktor sebelum dirotasi, maka matriks bobot faktor setelah dirotasi \mathbf{L}^* (pxm) didefinisikan sebagai $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}\mathbf{T}$ dengan $\mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$ dan \mathbf{T} adalah matriks transformasi ortogonal. Matriks estimasi kovariansi tidak berubah, karena $\mathbf{L}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{T}'\mathbf{L} + \boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}^*\mathbf{L}^* + \boldsymbol{\psi}$. Sedangkan variansi spesifik ψ_i dan komunalitas h_i^2 juga tidak berubah. Dengan diperoleh bobot faktor yang baru, variabel yang masuk kedalam faktor yang terbentuk semakin jelas.

2.3. Metode Penelitian

Data yang digunakan adalah data primer dengan penyebaran kuesioner terhadap 160 responden yang berusia 15-65 tahun di Surakarta yang dipilih secara random. Variabel yang digunakan dalam penelitian ini merupakan atribut jenis kartu telepon seluler yaitu fasilitas *SMS* (X_1), masa aktif (X_2), masa tenggang (X_3), jangkauan wilayah (X_4), *telebanking* (X_5), akses internet (X_6), *call waiting* (X_7), *call hold* (X_8), harga kartu perdana (X_9), biaya telepon (X_{10}), biaya *SMS* (X_{11}), harga pulsa (X_{12}), biaya *roaming* (X_{13}), galeri (X_{14}), letak galeri (X_{15}), iklan (X_{16}), cara isi pulsa (X_{17}), informasi pulsa (X_{18}), keramahan operator (X_{19}), ketepatan dan kecepatan operator (X_{20}) serta layanan *call center* (X_{21}) (Yunarwanto, 2002). Data yang diperoleh dicari validitas dengan menghitung koefisien korelasi *product-moment* dan reliabilitas dengan teknik alpha Cronbach kemudian dianalisis menggunakan analisis faktor.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dengan menghitung koefisien korelasi *product-moment*, diketahui bahwa variabel iklan (X_{16}) mempunyai koefisien korelasi < 0.1562 . Hal ini berarti variabel tersebut tidak valid sehingga harus dikeluarkan dari analisis. Sedangkan koefisien

reliabilitasnya adalah $\alpha = 0.809$ berarti data sudah reliabel karena nilai koefisien reliabilitasnya ≥ 0.60 .

Data input dalam analisis faktor adalah matriks data asli hasil penilaian pelanggan terhadap kartu telepon seluler. Analisis faktor pada penelitian ini digunakan untuk meringkas 20 variabel menjadi beberapa faktor sehingga keterkaitan antar variabel asli menjadi jelas. Dari data tersebut, dilakukan uji kelayakan variabel dengan menghitung nilai *MSA* pada persamaan (2.1) dan ditampilkan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Nilai *MSA*

| Variabel | nilai <i>MSA</i> | Variabel | nilai <i>MSA</i> |
|----------|------------------|----------|------------------|
| X_1 | 0.544 | X_{11} | 0.679 |
| X_2 | 0.534 | X_{12} | 0.779 |
| X_3 | 0.548 | X_{13} | 0.732 |
| X_4 | 0.803 | X_{14} | 0.693 |
| X_5 | 0.812 | X_{15} | 0.739 |
| X_6 | 0.836 | X_{17} | 0.737 |
| X_7 | 0.597 | X_{18} | 0.812 |
| X_8 | 0.594 | X_{19} | 0.671 |
| X_9 | 0.840 | X_{20} | 0.744 |
| X_{10} | 0.671 | X_{21} | 0.813 |

Tabel 3.1 menunjukkan bahwa nilai *MSA* masing-masing variabel > 0.50 sehingga variabel-variabel tersebut layak untuk dilakukan uji selanjutnya.

Kemudian dilakukan ekstraksi variabel untuk menentukan jumlah faktor yang terbentuk. Hasil ekstraksi variabel ditunjukkan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Hasil ekstraksi variabel

| Faktor | Ekstraksi Jumlah Bobot Kuadrat | | |
|--------|--------------------------------|--------------|------------------------|
| | Nilai Eigen | Variansi (%) | Variansi Kumulatif (%) |
| 1 | 4.475 | 22.375 | 22.375 |
| 2 | 2.195 | 10.977 | 33.352 |
| 3 | 1.971 | 9.854 | 43.206 |
| 4 | 1.735 | 8.676 | 51.882 |
| 5 | 1.388 | 6.938 | 58.820 |
| 6 | 1.077 | 5.386 | 64.207 |

Tabel 3.2 menunjukkan bahwa ekstraksi variabel menghasilkan 6 faktor dengan variansi kumulatif variabel yang dapat diterangkan oleh faktor adalah 64.207%.

Masuknya variabel menjadi anggota suatu faktor didasarkan pada nilai bobot faktor. Angka pembatas agar sebuah variabel dapat masuk ke dalam sebuah faktor untuk sampel 160 adalah 0.44 (Hair *et al.*, 1998:112). Dengan menggunakan persamaan (2.2) diperoleh matriks bobot faktor hasil ekstraksi variabel dan ditampilkan pada Tabel 3.3.

Berdasarkan Tabel 3.3 terlihat bahwa bobot faktor pada faktor yang terbentuk kurang jelas. Misal variabel X_6 mempunyai korelasi dengan faktor 1 sebesar 0.507 dan mempunyai korelasi dengan faktor 6 sebesar 0.443. Hal ini berarti X_6 berkorelasi sama kuat dengan faktor 1 dan 6. Untuk itu perlu dilakukan rotasi faktor agar memperjelas perbedaan sebuah variabel yang akan dimasukkan ke dalam faktor yang terbentuk. Metode rotasi yang digunakan adalah rotasi varimaks. Kriteria varimaks dilakukan agar diperoleh suatu struktur yang sederhana dalam kolom-kolom matriks bobot faktor. Nilai bobot faktor yang besar akan semakin membesar dan nilai bobot faktor yang kecil akan semakin mengecil, sehingga jumlah variansi bobot faktor dari matriks faktor menjadi maksimal.

Tabel 3.3. Matriks bobot faktor

| Variabel | Faktor | | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| X_1 | 0.288 | 0.090 | 0.475 | -0.190 | 0.319 | -0.184 |
| X_2 | 0.325 | 0.215 | 0.447 | 0.067 | 0.659 | 0.084 |
| X_3 | 0.280 | 0.266 | 0.494 | -0.084 | 0.381 | 0.128 |
| X_4 | 0.416 | 0.076 | -0.277 | 0.268 | 0.320 | 0.005 |
| X_5 | 0.471 | -0.324 | 0.099 | 0.279 | 0.034 | 0.303 |
| X_6 | 0.507 | -0.012 | 0.097 | 0.150 | -0.086 | 0.443 |
| X_7 | 0.435 | -0.279 | 0.610 | 0.120 | -0.406 | -0.200 |
| X_8 | 0.423 | -0.225 | 0.596 | 0.166 | -0.413 | -0.247 |
| X_9 | 0.430 | 0.360 | 0.074 | 0.076 | -0.133 | 0.275 |
| X_{10} | 0.428 | 0.690 | -0.216 | 0.029 | -0.138 | -0.109 |
| X_{11} | 0.504 | 0.707 | 0.003 | -0.083 | -0.221 | -0.030 |
| X_{12} | 0.616 | 0.429 | -0.114 | 0.016 | -0.279 | 0.043 |
| X_{13} | 0.404 | 0.086 | -0.418 | 0.430 | 0.075 | -0.125 |
| X_{14} | 0.572 | -0.328 | -0.226 | 0.455 | 0.113 | -0.178 |
| X_{15} | 0.612 | -0.359 | -0.152 | 0.410 | 0.135 | -0.11 |
| X_{17} | 0.301 | -0.334 | -0.185 | -0.187 | -0.161 | 0.504 |
| X_{18} | 0.546 | -0.109 | -0.093 | -0.441 | -0.045 | -0.108 |
| X_{19} | 0.560 | -0.359 | -0.058 | -0.536 | 0.064 | 0.210 |
| X_{20} | 0.623 | -0.139 | -0.203 | -0.501 | 0.020 | -0.112 |
| X_{21} | 0.479 | -0.162 | -0.276 | -0.365 | 0.166 | -0.398 |

Misal pada variabel X_1 , X_2 dan X_3 hasil rotasi varimaks ditampilkan pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4. Bobot faktor hasil rotasi varimaks

| Variabel | Faktor | | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| X_1 | 0.030 | 0.218 | -0.044 | 0.224 | 0.611 | -0.12 |
| X_2 | 0.054 | -0.023 | 0.172 | -0.036 | 0.872 | 0.051 |
| X_3 | 0.163 | 0.009 | -0.071 | 0.070 | 0.718 | 0.095 |

Tabel 3.4 menunjukkan bahwa perbedaan nilai bobot faktor antara faktor yang satu dengan yang lain lebih signifikan sehingga keanggotaan semua variabel terlihat jelas pada faktor yang terbentuk.

Selanjutnya dilakukan interpretasi terhadap faktor yang terbentuk. Faktor 1 terdiri dari empat variabel yaitu harga kartu perdana (X_9), biaya telepon (X_{10}), biaya SMS (X_{11}) dan harga pulsa (X_{12}) sehingga dinamakan faktor harga. Faktor 2 terdiri dari empat variabel yaitu informasi pulsa (X_{18}), keramahan operator (X_{19}), ketepatan dan kecepatan operator (X_{20}) dan layanan *call center* (X_{21}) sehingga dinamakan faktor pelayanan. Faktor 3 terdiri dari empat variabel yaitu jangkauan wilayah (X_4), biaya roaming (X_{13}), galeri (X_{14}) dan letak galeri (X_{15}) sehingga dinamakan faktor kelengkapan. Faktor 4 terdiri dari dua variabel yaitu *call waiting* (X_7) dan *call hold* (X_8) sehingga dinamakan faktor fitur. Faktor 5 terdiri dari tiga variabel yaitu fasilitas SMS (X_1), masa aktif (X_2) dan masa tenggang (X_3) sehingga dinamakan faktor produk. Faktor 6 terdiri dari tiga variabel yaitu *telebanking* (X_5), akses internet (X_6) dan cara isi pulsa (X_{17}) sehingga dinamakan faktor fasilitas.

4. KESIMPULAN

1. Faktor-faktor yang menjadi kebutuhan pelanggan dalam memilih kartu telepon seluler di Surakarta dapat dikelompokkan menjadi 6 faktor, yaitu faktor harga, faktor pelayanan, faktor kelengkapan, faktor fitur, faktor produk dan faktor fasilitas.
2. Dari pengelompokan tersebut dapat diketahui besarnya sumbangan variansi masing-masing faktor. Faktor harga mempunyai variansi sebesar 12.923%. Faktor pelayanan mempunyai variansi sebesar 12.385%. Faktor kelengkapan mempunyai variansi sebesar 12.017%. Faktor fitur mempunyai variansi sebesar 9.822%. Faktor produk mempunyai variansi sebesar 9.245%. Faktor fasilitas mempunyai variansi sebesar 7.816%.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Azwar, H. (1997). *Reliabilitas dan Validitas*. Edisi Ketiga. Pustaka Pelajar, Yogyakarta.
- [2] Ghozali, I. (2002). *Aplikasi Analisis Multivariat dengan Program SPSS*. Badan penerbit Universitas dionegoro, Semarang.
- [3] Hair, J. F., Anderson, R. E., Tatham, R. L., and Black, W. C. (1998). *Multivariate Data Analysis*. Fifth Edition. Prentice-Hall, Inc., New Jersey
- [4] Johnson, R. A. and Wichern, D.W. (1982). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Fourt edition, Prentice-Hall. Inc. Englewood Clifft, New Jersey.
- [5] Jollife, I. T. (2002). *Principal Component Analysis*. Springer- Verlag Inc, NewYork.
- [6] Singarimbun, M. Dan Effendi, S. (1989). *Metode Penelitian Survey*. Ed. Revisi. LP3ES, Jakarta.
- [7] Size, W.B. (2005). *Interpretation of Factor Analysis on Modal Data from The Red Hill Syenitic Complex*. The Journal of Mathematical Geology. University of Hawaii, Vol 5, No. 2, pp 191-197.
- [8] Yunarwanto, D. (2002). *Analisis Posisi Persaingan Operator Telepon Seluler berdasarkan Persepsi Pelanggan di Kota Malang*. PPSUB, Malang.

PENANGANAN OVERDISPERSI DENGAN MODEL REGRESI BINOMIAL NEGATIF I PADA FAKTOR-FAKTOR YANG MEMPENGARUHI ANGKA KEMATIAN YANG DISEBABKAN OLEH KANKER PARU-PARU

Devni Prima Sari, Dedi Rosadi, dan Adhitya Ronnie Effendi

Abstract. Poisson regression model is one of the regression models which are often used to analyze discrete data. Poisson regression has the assumption of equi-dispersion, a condition in which the value of the mean and variance of the response variable the same value. In fact, often found in data the variance of response variable greater than of the mean value (overdispersion). So used Negative Binomial I to handling overdispersion. In this paper used Negative Binomial I regression model to modelling the factors that affect mortality that caused by lung cancer.

Keywords: Poisson regression model, Negative Binomial, overdispersion

1. PENDAHULUAN

Rokok disinyalir sebagai penyebab kanker tertinggi di Indonesia. Menurut data Yayasan Kanker Indonesia (YKI), hampir 80 persen pengidap kanker paru-paru mempunyai kebiasaan merokok. Semakin banyak jumlah batang rokok yang diisap, risiko terkena kanker pun semakin tinggi. Hal ini akan menyebabkan resiko angka kematian juga akan semakin tinggi. Penggolongan resiko adalah proses dari pemodelan alternatif dengan menggolongkan resiko menurut *rating factors* dengan karakteristik-karakteristik yang dibentuk ke dalam *rating classes*. Model regresi Poisson secara luas telah banyak digunakan untuk memodelkan penggolongan resiko. Bagaimanapun, model regresi Poisson adalah suatu metode statistika yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel dependen yang dapat dihitung (data cacah/*count*) dengan satu atau lebih variabel independen, dimana mean dan variansinya sama. Pada prakteknya seringkali data cacah memperlihatkan variansi yang sangat besar, dimana variansi sampel lebih besar dari mean sample (*overdispersion*). Oleh karena itu, sasaran dari penelitian ini untuk menggunakan model regresi Negatif Binomial I sebagai satu alternatif jika terjadi kasus overdispersi. Selanjutnya, model regresi Poisson dan Negatif Binomial I dicoba, diuji dan dibandingkan pada data jumlah angka kematian yang disebabkan oleh kanker paru-paru.

2. MATERI DAN METODE

2.1 Model Regresi Poisson

Pada regresi Poisson diasumsikan bahwa variabel dependen Y_i yang menyatakan jumlah (cacah) kejadian berdistribusi Poisson, diberikan sejumlah variabel independen x_1, \dots, x_k . Y_i mengikuti distribusi Poisson, fungsi kepadatan peluang adalah,

$$Pr(Y_i|x_1, \dots, x_k) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!}, y_i = 0, 1, \dots \tag{2.1}$$

atau $Y_i \sim Poi(\lambda_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Selanjutnya, dalam regresi Poisson hubungan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$E[Y_i|x_i] = \lambda_i = \beta_0 + x_1\beta_1 + \dots + x_k\beta_k$$

atau dalam bentuk vektor ditulis sebagai

$$E[Y_i|x_i] = \lambda_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \tag{2.2}$$

Karena nilai $\lambda_i > 0$, maka digunakan fungsi link $\eta_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$ atau $\eta_i = \log \lambda_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ untuk menghubungkan $\lambda_i = E[Y_i|x_i]$ dengan fungsi linear $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$, sehingga hubungan antara $\lambda_i = E[Y_i|x_i]$ dan $\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$ menjadi tepat. Dengan demikian, model regresi dapat ditulis dalam bentuk:

$$E[Y_i|x_i] = \lambda_i = \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}), i = 1, 2, \dots, n \tag{2.3}$$

Untuk memasukkan covariates dan untuk menjamin non-negatif, mean atau *fitted value* diasumsikan sebagai perkalian, yaitu,

$$E(Y_i|x_i) = \lambda_i = e_i \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}), \tag{2.4}$$

di mana e_i menunjukkan ukuran paparan (*exposure*), x_i merupakan vektor $p \times 1$ dari variabel penjelas, dan $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor $p \times 1$ dari parameter regresi.

Untuk mengestimasi parameter-parameter dalam regresi Poisson dapat digunakan metode estimasi maksimum *likelihood* (MLE). Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan fungsi *likelihood* dari model regresi Poisson. Selanjutnya dari fungsi *likelihood* diambil nilai lognya sehingga diperoleh fungsi *log-likelihood* dari persamaan di atas sebagai berikut:

$$\log L(\boldsymbol{\beta}) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n y_i \log \lambda_i - \sum_{i=1}^n \log y_i! \tag{2.5}$$

Kemudian persamaan (2.5) diturunkan terhadap β_j dan disamakan dengan nol, yaitu:

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda_i) x_{ij} = 0, j = 1, 2, \dots, p \tag{2.6}$$

Sehingga persamaan (2.6) sama dengan *weighted least square* (WLS), estimasi *likelihood* maksimum, $\hat{\beta}$, dapat diestimasi dengan menggunakan *Iterative Weighted Least Squares* (IWLS).

2.2 Binomial Negatif I (NB I)

Diasumsi λ_i untuk berdistribusi gamma dengan mean $E(\lambda_i) = \mu_i$ dan varians $Var(\lambda_i) = \mu_i^2 v_i^{-1}$, dan $Y_i | \lambda_i$ menjadi berdistribusi Poisson dengan rataaan bersyarat $E(Y_i | \lambda_i) = \lambda_i$ dapat ditunjukkan bahwa distribusi marjinal Y_i mengikuti distribusi binomial negatif dengan fungsi kepadatan peluang,

$$Pr(Y_i = y_i) = \frac{\Gamma(y_i + v_i)}{\Gamma(y_i + 1)\Gamma(v_i)} \left(\frac{v_i}{v_i + \mu_i}\right)^{v_i} \left(\frac{\mu_i}{v_i + \mu_i}\right)^{y_i} \tag{2.7}$$

di mana mean $E(Y_i) = \mu_i$, dan variansi adalah $Var(Y_i) = \mu_i + \mu_i^2 v_i^{-1}$.

Parameter berbeda dapat menghasilkan berbagai jenis distribusi Binomial Negatif. Misalnya, dengan mengambil $v_i = a^{-1}$, Y_i mengikuti sebuah distribusi Binomial Negatif dengan mean $E(Y_i) = \mu_i$ dan variansi $Var(Y_i) = \mu_i (1 + a\mu_i)$, di mana a menunjukkan parameter dispersi (Lawless, 1987); (Cameron & Trivedi, 1986). Sehingga persamaan (2.7) menjadi,

$$Pr(Y_i = y_i) = \frac{\Gamma(y_i + a^{-1})}{y_i! \Gamma(a^{-1})} \left(\frac{a\mu_i}{1 + a\mu_i}\right)^{y_i} (1 + a\mu_i)^{-a^{-1}} \tag{2.8}$$

Jika a sama dengan nol, mean dan variansi akan sama, $E(Y_i) = Var(Y_i)$, akan menjadi distribusi Poisson. Jika $a > 0$, variansi akan melebihi mean, $Var(Y_i) > E(Y_i)$, dan distribusi memungkinkan overdispersi. Dalam tulisan ini, distribusi akan disebut sebagai Binomial Negatif I.

Untuk mengestimasi parameter β dan a dalam regresi binomial negatif I dapat digunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Jika diasumsikan bahwa mean atau *fitted value* adalah multiplikatif, yaitu, $E(Y_i | \mathbf{x}_i) = \mu_i = e_i \exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$, diperoleh fungsi *log-likelihood* untuk regresi Binomial Negatif I sebagai berikut:

$$l(\boldsymbol{\beta}, a) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\log \sum_{r=0}^{y_i-1} (1 + ar) \right] - y_i \log(a) - \log(y_i!) + y_i \log(a\mu_i) - (y_i + a^{-1}) \log(1 + a\mu_i) \right\} \tag{2.9}$$

Oleh karena itu, estimasi kemungkinan maksimum, $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{a})$, dapat diperoleh dengan memaksimalkan $l(\boldsymbol{\beta}, a)$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$ dan a . Persamaan terkait adalah,

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, a)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)x_{ij}}{1 + a\mu_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \tag{2.10}$$

dan,

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}, a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sum_{r=1}^{y_i-1} \left(\frac{r}{1+ar} \right) \right] + a^{-2} \log(1 + a\mu_i) - \frac{(y_i + a^{-1})\mu_i}{(1 + a\mu_i)} \right\} = 0 \tag{2.11}$$

Pendekatan yang lebih mudah untuk mengestimasi adalah dengan menggunakan perkiraan yang disarankan oleh (Breslow, 1984), yaitu dengan menyamakan *Pearson Chi-Square Statistic* dengan derajat bebas,

$$\sum_i \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\mu_i(1 + a\mu_i)} = n - p \tag{2.12}$$

di mana n menunjukkan jumlah *rating classes* dan p jumlah parameter regresi. Prosedur iterasi seperti yang disebutkan di atas juga dapat digunakan, kali ini menghasilkan MLE dari $\boldsymbol{\beta}$ dan estimasi moment dari a , $(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{a})$.

Dalam tulisan ini, ketika a diestimasi dengan MLE, model akan disebut sebagai Binomial Negatif I (MLE). Demikian juga, ketika diestimasi dengan metode moment, model akan disebut sebagai Binomial Negatif I (moment).

2.3 Evaluasi Model

2.3.1 Pearson Chi-Square

Ukuran lain yang bisa digunakan untuk uji *goodness of fit* yaitu statistik *Pearson Chi-Square* (McCullagh & Nelder, 1989) yang didefinisikan sebagai

$$X^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i)^2}{Var(Y_i)} \tag{2.13}$$

2.3.2 Deviance

Deviance yaitu logaritma dari uji rasio *likelihood*-nya (McCullagh & Nelder, 1989). Uji rasio *likelihood*nya membandingkan *current model*-nya dengan *saturated model*-nya. *Deviance* dituliskan sebagai berikut:

$$D = 2(l(\mathbf{y}; \mathbf{y}) - l(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{y})) \tag{2.14}$$

di mana $l(\mathbf{y}; \mathbf{y})$ dan $l(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{y})$ adalah model log *likelihood* yang dievaluasi masing-masing di bawah $\boldsymbol{\mu}$ dan \mathbf{y} . Untuk model yang memadai, D juga memiliki asimtotik distribusi *chi-*

square dengan $n - p$ derajat kebebasan. Oleh karena itu, jika nilai-nilai untuk kedua *Pearson Chi-Square* dan D adalah dekat dengan derajat kebebasan, model dapat dianggap memadai.

2.4 AIC dan BIC

Ketika beberapa model cocok, dapat membandingkan performa model-model alternatif berdasarkan beberapa kemungkinan langkah-langkah yang telah diusulkan dalam literatur statistik. Dua yang paling sering digunakan adalah ukuran *Akaike Information Criteria* (AIC) dan *Bayesian Schwartz Information Criteria* (BIC). AIC didefinisikan sebagai

$$AIC = -2l + 2p \quad (2.15)$$

dimana l menunjukkan *log-likelihood* dievaluasi di bawah μ dan p jumlah parameter.

Untuk ukuran ini, semakin kecil AIC, semakin baik model.

BIC didefinisikan sebagai (Schwarz, 1978),

$$BIC = -2l + p \log(n) \quad (2.16)$$

mana l menunjukkan *log-likelihood* dievaluasi di bawah μ , p jumlah parameter dan n jumlah *rating classes*. Untuk ukuran ini, semakin kecil BIC, semakin baik model.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Data

Data yang digunakan dalam tulisan ini adalah data kematian yang disebabkan oleh kanker paru-paru didasarkan pada usia dan status merokok, dimana usia dikelompokkan atas 9 kelas yaitu, 40-44, 45-49, 50-54, 55-59, 60-64, 65-69, 70-74, 75-79, dan 80+. Status merokok terdiri atas 4 kelas yaitu, *doesn't smoke*, *smokes cigars or pipe only*, *smokes cigarettes and cigar or pipe*, dan *smokes cigarettes only*. Data bisa diakses dari Internet dengan alamat website, <http://data.princeton.edu/wws509/datasets/#smoking>

Tabel 3.1 menunjukkan *rating factors* dan *rating classes* untuk *exposure* dan klaim yang dikeluarkan. Dalam hal ini, terdapat $9 \times 4 = 36$ perkalian *rating classes* yang diklasifikasikan menurut angka kematian.

3.2 Hasil Analisis Data

Data jumlah angka kematian dimodelkan dengan menggunakan model regresi Poisson untuk mengetahui hubungan antar variabel respon dengan *rating factors*.

Selanjutnya, untuk mengetahui pengaruh yang diberikan setiap *rating factors* tersebut, dilakukan analisis *Deviance*. Tabel 3.2 memberikan hasil analisis *deviance* model regresi Poisson yang memuat *rating factors*.

Tabel 3.1 *Rating factors* dan *rating classes*

| <i>Rating factors</i> | <i>Rating classes</i> |
|-----------------------|-----------------------|
| Usia | 45-59 |
| | 50-54 |
| | 55-59 |
| | 60-64 |
| | 65-69 |
| | 70-74 |
| | 75-79 |
| | 80+ |
| Status merokok | <i>No</i> |
| | <i>cigarPipeOnly</i> |
| | <i>cigarettePlus</i> |
| | <i>cigaretteOnly</i> |

Tabel 3.2 Analisis *deviance* model regresi Poisson untuk masing-masing *rating factors*

```

Df Deviance Resid. Df Resid. Dev P(>|Chi|)
NULL                35      8434.4
Age      8      3589.4      27      4845.0 < 2.2e-16 ***
Smoke    3      3584.1      24      1260.9 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
    
```

Berdasarkan analisis *deviance*, model terbaik adalah model yang semua *rating factors* signifikan.

Selanjutnya untuk mengetahui pengaruh yang diberikan setiap variabel penjelas dilakukan pengujian parameter. Hasil estimasi parameter untuk masing-masing *rating factors*, dapat dilihat pada tabel 3.3.

Nilai *p-value* untuk parameter *cigarPipeOnly* sama dengan 0.21, nilai ini mengidentifikasi bahwa estimasi parameter tidak signifikan. Dengan demikian nilai-nilai parameter yang tidak signifikan tersebut dikombinasikan dengan intercept. Kemudian dilakukan estimasi ulang sampai semua nilai signifikan. Jika model empat

faktor yang sama dicocokkan dengan model regresi binomial negatif I, estimasi parameter dan standar error akan bisa dibandingkan. Perbandingan dilihat pada Tabel 3.4.

Tabel 3.3 Estimasi Parameter untuk model regresi Poisson

```

=====
nilai estimasi beta tiap dummy
      beta nilai_beta standar.error varians pval
1      intercept      -2.764      0.044      0.002 0.00
2      age_45-59      -0.362      0.061      0.004 0.00
3      age_50-54       0.065      0.056      0.003 0.25
4      age_60-64       0.738      0.034      0.001 0.00
5      age_65-69       1.082      0.035      0.001 0.00
6      age_70-74       1.354      0.037      0.001 0.00
7      age_75-79       1.640      0.043      0.002 0.00
8      age_80          1.927      0.050      0.003 0.00
9      cigarPipeOnly   0.058      0.047      0.002 0.21
10     cigarettePlus   0.220      0.039      0.001 0.00
11     cigaretteOnly   0.414      0.040      0.002 0.00
=====

df = 25
Pearson's X^2= 543.0097
Deviance = 291.0791
log L = -411.0905
AIC = 844.1811
BIC = 861.5998
    
```

Tabel. 3.4 memperlihatkan perbandingan antara model regresi Poisson dengan model regresi binomial negatif I. Parameter regresi untuk semua model memberikan nilai-nilai yang mendekati. Nilai standar error untuk model regresi Binomial Negatif I (MLE) dan Binomial Negatif I (moment) lebih besar dari Poisson. Dalam kasus ini, model terbaik adalah model regresi binomial negatif I (MLE).

4. KESIMPULAN

Pertama, analisis regresi Poisson adalah analisis regresi dimana variabel dependennya diasumsikan berdistribusi Poisson dan nilai dari variabel dependennya adalah count (cacah) dan non negatif. Sedangkan nilai untuk variabel independennya dapat saja bernilai real, cacah atau kategorik. Asumsi pada regresi Poisson $E(Y) = Var(Y)$, pada kenyataannya sering ditemukan kasus dimana $E(Y) > Var(Y)$ maka dikatakan terjadi overdispersi, untuk mengetahui adanya overdispersi adalah dengan melihat nilai *deviance* yang dibagi dengan derajat bebasnya atau *Pearson Chi-Square* yang dibagi dengan derajat bebasnya. Model regresi Binomial Negatif I dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan overdispersi yang terjadi pada model regresi poisson.

Kedua, cara menguji model regresi Binomial Negatif I terbaik untuk penggolongan resiko pada jumlah klaim yaitu pengujian signifikansi parameter regresi menggunakan uji normalitas dengan melihat p -value nya. Ketiga, hasil dari beberapa contoh analisis data pada jenis data angka kematian yang disebabkan oleh kanker paru-paru menunjukkan bahwa model regresi Binomial Negatif I (MLE) merupakan model yang paling tepat digunakan untuk data yang bersifat overdispersi dibandingkan dengan model regresi Poisson.

Tabel 3.4 Poisson vs Binomial Negatif I

| Parameter | Poisson | | | Binomial Negatif I (MLE) | | | Binomial Negatif I (moment) | | |
|-----------------|---------|-----------|---------|--------------------------|-----------|---------|-----------------------------|-----------|---------|
| | est | std.error | p-value | est | std.error | p-value | est | std.error | p-value |
| a | | | | 0,025 | | | 0,098 | | |
| Intercept | -2,720 | 0,034 | 0,000 | -2,730 | 0,075 | 0,000 | -2,750 | 0,120 | 0,000 |
| 45-59 | -0,380 | 0,059 | 0,000 | -0,340 | 0,127 | 0,008 | -0,300 | 0,210 | 0,153 |
| 60-64 | 0,720 | 0,032 | 0,000 | 0,690 | 0,105 | 0,000 | 0,710 | 0,190 | 0,000 |
| 65-69 | 1,070 | 0,033 | 0,000 | 1,070 | 0,104 | 0,000 | 1,080 | 0,190 | 0,000 |
| 70-74 | 1,340 | 0,035 | 0,000 | 1,360 | 0,104 | 0,000 | 1,380 | 0,190 | 0,000 |
| 75-79 | 1,630 | 0,041 | 0,000 | 1,640 | 0,106 | 0,000 | 1,660 | 0,190 | 0,000 |
| 80+ | 1,920 | 0,048 | 0,000 | 1,900 | 0,110 | 0,000 | 1,920 | 0,190 | 0,000 |
| cigarettePlus | 0,190 | 0,029 | 0,000 | 0,200 | 0,076 | 0,010 | 0,210 | 0,140 | 0,128 |
| cigaretteOnly | 0,380 | 0,031 | 0,000 | 0,380 | 0,077 | 0,000 | 0,380 | 0,140 | 0,005 |
| df | 27 | | | 26 | | | 26 | | |
| Pearson's X^2 | 539 | | | 76 | | | 27 | | |
| Deviance | 293 | | | 92 | | | 33 | | |
| log L | -413 | | | -51321 | | | -37963 | | |

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Breslow, N. E. Extra-Poisson Variation in Log-Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society*, Blackwell Publishing for the Royal Statistical Society. 1984.
- [2] Cameron, A. C., & Trivedi, P. K. Econometric Models Based on Count Data: Comparisons and Applications of Some Estimators and Tests. *Journal of Applied Econometrics*, 29-53. 1986.
- [3] Lawless, J. F. Negative Binomial and Mixed Poisson Regression. *The Canadian Journal of Statistics*, 209-225. 1987.
- [4] McCullagh, P., & Nelder, J. *Generalized Linear Models* (2nd Edition ed.). London: Chapman and Hall. 1989.
- [5] Schwarz, G. Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 461-464. 1978.

PENDEKATAN METODE BAYESIAN UNTUK FAKTOR KREDIBILITAS

Setyo Wira Rizki, Dedi Rosadi, dan Adhitya Ronnie Effendie
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Gadjah Mada
Kampus MIPA UGM Sekip Utara Yogyakarta
riz_lembayung@yahoo.com
dedirosadi@ugm.ac.id
adhityaronnie@ugm.ac.id

ABSTRAK. Metode Bayesian adalah salah satu metode yang digunakan untuk perhitungan faktor kredibilitas. Pendekatan Bayesian didasarkan pada distribusi posterior dan statistik posterior dari faktor kredibilitas. Pendekatan secara tradisional dapat menghasilkan suatu nilai estimator yang negatif.

Kata kunci : Faktor Kredibilitas, Bayesian

1. PENDAHULUAN

Kredibilitas adalah salah satu contoh estimasi statistik yang diperoleh melalui penggunaan rumus-rumus atau model-model statistik yang didasarkan pada pendekatan-pendekatan atau paradigma-paradigma. Terdapat dua paradigma utama statistik yaitu paradigma frekuensi atau klasik dan paradigma Bayesian. Dalam paradigma frekuensi, peluang suatu kejadian didasarkan pada frekuensi relatif. Semua informasi prior dan/atau kolateral diabaikan. Pendukung-pendukung paradigma frekuensi melihatnya secara objektif. Beberapa kunci yang membangun paradigma frekuensi adalah Lemma Neyman-Pearson, uji hipotesis statistik, interval konfidensi dan estimasi tak bias.

Dalam paradigma Bayesian, peluang suatu kejadian diperlakukan sebagai suatu ukuran kepercayaan yang rasional. Maka paradigma Bayesian didasarkan pada peluang perorangan atau subyektif dan melibatkan penggunaan teorema Bayes. Informasi prior dan/atau kolateral digabungkan secara eksplisit ke dalam model melalui distribusi prior dan likelihood. Beberapa kunci yang membangun paradigma Bayesian dalam penjumlahan terhadap teorema Bayes sendiri adalah peluang bersyarat, distribusi-distribusi prior, distribusi prediktif dan distribusi posterior (Herzog, 1994)

2. MATERI DAN METODE

2.1 Faktor Kredibilitas

Jika aktuari mempunyai pengetahuan tentang prior yang cukup dan teknis substansiil dan komputasional sumber daya, lalu ia perlu mungkin membangun suatu distribusi yang bersifat prediksi untuk kumpulan pengamatan periode berikutnya, diberikan sejumlah kumpulan klaim prior. Suatu alternatif, pendekatan frekuensi yang tidak secara eksplisit menerima informasi prior untuk menghitung faktor kredibilitas Z , dan tidak menerima sebanyak sumber daya, telah diusulkan oleh Bühlmann (1967). Pendekatannya adalah untuk mencari suatu titik pengestimasi C dari bentuk

$$C = ZR + (1 - Z)H \quad (1.1)$$

dimana R adalah mean dari pengamatan sekarang, H mean prior dan faktor kredibilitas Z didefinisikan sebagai berikut

$$Z = \frac{n}{k + n}$$

dan memenuhi $0 \leq Z \leq 1$ dengan n adalah jumlah percobaan yang independent dan

$$k = \frac{\text{nilai ekspektasi proses variansi}}{\text{variansi dari mean} - \text{mean hipotesis}}$$

Bailey (1950) menunjukkan bahwa formula $ZR + (1 - Z)H$ dapat diturunkan dari aplikasi metodologi Bayesian dengan menggunakan suatu model Bernoulli-Beta untuk parameter θ yang tidak diketahui. Secara teknis posterior merupakan proporsi dari prior dan fungsi likelihood.

Misalkan total klaim dari suatu resiko dalam j periode merupakan suatu variabel random $X_j | (\theta = \theta)$ atau dapat ditulis $X_j | \theta$, $j = 1, \dots, n + 1$. Dengan $X_j | \theta$ menunjukkan ukuran klaim ke- j .

$$X \sim \text{Bernoulli}(1, P(x_j))$$

$$\sum_{j=1}^n X_j \sim \text{Binomial}(n, P(x_j))$$

$$f_X(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \quad (1.2)$$

2.1.1 Fungsi Likelihood Untuk Distribusi Binomial

Variabel random X_j merupakan variabel random yang berdistribusi Bernoulli dengan parameter θ , jika x_1, x_2, \dots, x_n adalah sampel random dari distribusi Bernoulli, maka fungsi likelihoodnya adalah

$$\begin{aligned} L(X_j, \theta) &= \prod_{j=1}^n f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ &= \binom{n}{x_1} \theta^{x_1} (1 - \theta)^{n-x_1} \cdot \binom{n}{x_2} \theta^{x_2} (1 - \theta)^{n-x_2} \dots \binom{n}{x_n} \theta^{x_n} (1 - \theta)^{n-x_n} \\ &= \left(\prod_{j=1}^n \binom{n}{x_j} \right) \theta^{\sum_{j=1}^n x_j} (1 - \theta)^{n - \sum_{j=1}^n x_j} \end{aligned} \quad (1.3)$$

2.1.2 Informasi Prior Untuk θ

Misalkan $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$ maka distribusi prior untuk θ adalah

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(a, \beta)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\text{dimana } B(a, \beta) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

sehingga dapat ditulis,

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1}$$

$$\theta \sim \text{beta}(a, b)$$

$$E[\theta] = \int_0^1 \theta \pi(\theta; a, b) d\theta = \int_0^1 \theta \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} d\theta = \frac{a}{a+b} \quad (1.4)$$

1.3. Distribusi Posterior

Posterior merupakan proporsi dari prior dan fungsi likelihood.

$$\text{Posterior} \propto \text{prior} \times \text{likelihood}$$

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &= \frac{L(\theta|x)\pi(\theta)}{\int L(\theta|x)\pi(\theta)d\theta} = \frac{L(\theta|x)\pi(\theta)}{\int_0^1 L(\theta|x)\pi(\theta)d\theta} \\ &= \frac{\left(\prod_{i=1}^n \binom{n}{x_i}\right) \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{\int_0^1 \left(\prod_{i=1}^n \binom{n}{x_i}\right) \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta}\end{aligned}$$

Misal $a' = \sum_{i=1}^n x_i + a$ dan $b' = n - \sum_{i=1}^n x_i + b$

$$= \frac{\theta^{a'-1} (1-\theta)^{b'-1}}{\int_0^1 \theta^{a'-1} (1-\theta)^{b'-1} d\theta}$$

distribusi posterior $\sim \text{Beta}(a', b')$

Dengan menggunakan moment pertama dan kedua diperoleh mean dan variansi dari distribusi posteriornya yaitu :

$$E[\theta|X_{n+1}] = \int_0^1 \theta \pi(\theta|x) d\theta = \int_0^1 \theta \frac{\theta^{a'-1} (1-\theta)^{b'-1}}{B(a', b')} d\theta = \frac{a'}{a' + b'}$$

$$E[\theta|X_{n+1}] = \frac{a'}{a' + b'} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + a}{\sum_{i=1}^n x_i + a + n - \sum_{i=1}^n x_i + b} = \frac{n}{a + b + n} \bar{X} + \frac{a + b}{a + b + n} E[\theta]$$

dengan,

$$Z = \frac{n}{a + b + n} \quad \text{misal } k = a + b$$

Maka

$$Z = \frac{n}{k + n}$$

Sehingga

diperoleh (1.5)

$$E[\theta|X_{n+1}] = Z\bar{X} + (1 - Z)E[\theta]$$

1. Pemodelan Kredibilitas Tradisional

Suatu rekaman klaim dalam j tahun yaitu $j = 1, \dots, n_i$ untuk i policyholder dengan $i = 1, \dots, r$. Data dapat dirangkum dalam bentuk berikut,

$$\begin{array}{c} X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1,n_1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_{r1}, X_{r2}, \dots, X_{r,n_r} \end{array}$$

dimana X_{ij} suatu *loss ratio* dari portofolio asuransi. Dalam suatu model komponen variansi, setiap sel terdiri dari sejumlah m_{ij} kontrak. Maka untuk i kontrak, $i = 1, \dots, r$ dalam $j = 1, \dots, n_i$ tahun. Pengalaman klaim dipaparkan dengan model,

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad , \text{ dengan } i = 1, \dots, r \text{ dan } j = 1, \dots, n_i$$

dengan μ adalah mean dan α_i adalah konstanta error dan ε_{ij} adalah error yang disebabkan oleh $\mu + \alpha_i$ pada kontrak ke- i . Dimana α_i dan ε_{ij} independen dengan $E(\alpha_i) = 0$, $Var(\alpha_i) = a$, dan $E(\varepsilon_{ij}) = 0$, $Var(\varepsilon_{ij}) = v/m_{ij}$. Parameter-parameter strukturalnya yaitu,

$$\mu = E[\mu(\theta_i)]$$

$$v = E[v(\theta_i)]$$

$$a = Var[\mu(\theta_i)]$$

Sehingga diperoleh faktor kredibilitas untuk setiap resiko i yaitu,

$$Z_i = \frac{m_i}{m_i + k} \tag{2.1}$$

dimana $k = \frac{v}{a}$ dan $m_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$, $i = 1 \dots r$.

Jika estimator-estimator dari μ , v , a ditunjukkan oleh $\hat{\mu}$, \hat{v} , \hat{a} maka menghasilkan premium kredibilitas sebagai berikut,

$$\hat{P}_i = \hat{Z}_i \bar{X}_i + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu} \tag{2.2}$$

$$\hat{Z}_i = \frac{m_i}{m_i + \hat{k}} \tag{2.3}$$

dengan $\hat{k} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}}$ dan $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} X_{ij}}{m_i}$, $i = 1 \dots r$

Salah satu metode yang digunakan untuk mencari $\hat{\mu}$, \hat{v} , \hat{a} adalah estimasi parameter Bayesian empiris. Kita diperbolehkan untuk menggunakan data yang ada untuk

mengestimasi parameter-parameter struktural dan menghasilkan estimator-estimator tak bias dari μ , v , dan a yaitu :

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i X_i}{m} \quad (2.4)$$

$$\hat{v} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)} \quad (2.5)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i (X_i - \bar{X})^2 - (r - 1) \hat{v}}{m - \frac{\sum_{i=1}^r m_i^2}{m}} \quad (2.6)$$

dimana $= \sum_{i=1}^r m_i$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Hasil

1. Hasil Penelitian Sebelumnya

Tabel 1. Perbandingan rata-rata premi dengan premi kredibilitas tradisional untuk penelitian sebelumnya

| Trial | \bar{X}_1 | \bar{P}_1 | Trial | \bar{X}_2 | \bar{P}_2 | Trial | \bar{X}_3 | Trial | \bar{X}_4 |
|-------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|
| 1 | 4473 | 3040 | 26 | 3667 | 2106 | 1 | 0.51 | 26 | 0.57 |
| 2 | 4597 | 4087 | 27 | 2542 | 5335 | 2 | 0 | 27 | 0.04 |
| 3 | 2624 | 1370 | 28 | 4201 | 1897 | 3 | 0.74 | 28 | 0.69 |
| 4 | 830 | 1286 | 29 | 3046 | 1150 | 4 | 0 | 29 | 0.77 |
| 5 | 1839 | 843 | 30 | 896 | 635 | 5 | 0.5 | 30 | 0.66 |
| 6 | 846 | 262 | 31 | 3636 | 3807 | 6 | 0.69 | 31 | 0.19 |
| 7 | 4321 | 3089 | 32 | 1015 | 1314 | 7 | 0.84 | 32 | 0.29 |
| 8 | 3881 | 1686 | 33 | 806 | 1142 | 8 | 0.42 | 33 | 0.64 |
| 9 | 1643 | 661 | 34 | 1008 | 1614 | 9 | 0.51 | 34 | 0 |
| 10 | 1873 | 302 | 35 | 3051 | 684 | 10 | 0.53 | 35 | 0 |
| 11 | 2472 | 2786 | 36 | 1634 | 911 | 11 | 0.28 | 36 | 0.61 |
| 12 | 2338 | 944 | 37 | 1566 | 1392 | 12 | 0.67 | 37 | 0 |
| 13 | 1601 | 330 | 38 | 2086 | 790 | 13 | 0 | 38 | 0.44 |
| 14 | 2346 | 1699 | 39 | 1559 | 1133 | 14 | 0.18 | 39 | 0.39 |
| 15 | 3352 | 1532 | 40 | 3206 | 1198 | 15 | 0.73 | 40 | 0.63 |
| 16 | 1150 | 745 | 41 | 1534 | 1428 | 16 | 0 | 41 | 0 |
| 17 | 5459 | 5191 | 42 | 3415 | 1674 | 17 | 0 | 42 | 0.8 |
| 18 | 4695 | 2727 | 43 | 1166 | 268 | 18 | 0.82 | 43 | 0.35 |
| 19 | 4648 | 2532 | 44 | 2252 | 1265 | 19 | 0.63 | 44 | 0.78 |
| 20 | 3827 | 2299 | 45 | 198 | 1106 | 20 | 0.81 | 45 | 0 |
| 21 | 3217 | 3821 | 46 | 4258 | 2290 | 21 | 0 | 46 | 0.55 |
| 22 | 3472 | 2958 | 47 | 2003 | 697 | 22 | 0.65 | 47 | 0.52 |
| 23 | 1938 | 618 | 48 | 8258 | 5856 | 23 | 0.38 | 48 | 0.59 |
| 24 | 711 | 251 | 49 | 1142 | 466 | 24 | 0.54 | 49 | 0 |
| 25 | 1958 | 160 | 50 | 1818 | 1340 | 25 | 0 | 50 | 0.23 |

Dari simulasi data penelitian sebelumnya nilai \bar{X}_i dan \hat{P}_i diperoleh yang berbeda dan tidak terpaut jauh nilainya. Nilai \bar{X}_i cenderung lebih besar dari nilai \hat{P}_i .

2. Hasil Penelitian dengan Menggunakan *Claim Severity* Sebagai *Original Premium*

tabel 2. perbandingan premi rata-rata dengan premium kredibilitas tradisional

| Bond | \hat{X}_i | \hat{P}_i | \hat{R}_i |
|------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.563576 | 15763.15 | 17124.48 |
| 2 | 0.496744 | 7771.166 | 13362.97 |
| 3 | 0.659793 | 12293.29 | 14534.96 |
| 4 | 0.630744 | 8853.119 | 12556.5 |
| 5 | 0.725756 | 15576.49 | 16483.12 |
| 6 | 0.636912 | 11439.53 | 14141.96 |
| 7 | 0.655561 | 11953.06 | 14339.81 |
| 8 | 0.657964 | 10855.13 | 13600.76 |
| 9 | 0.575006 | 13757.92 | 15935.8 |
| 10 | 0.454987 | 10601.27 | 15114.61 |
| 11 | 0.448261 | 9828.756 | 14824.02 |
| 12 | 0.521836 | 10918.05 | 14726.33 |
| 13 | 0.472461 | 10083.02 | 14725.05 |
| 14 | 0.571241 | 26674.68 | 23333.68 |
| 15 | 0.511513 | 13282.95 | 16018.22 |
| 16 | 0.688409 | 49834.26 | 40189.96 |
| 17 | 0.710852 | 53727.09 | 43651.82 |
| 18 | 0.60216 | 27705.91 | 24195.57 |
| 19 | 0.722427 | 16946.93 | 17484.17 |
| 20 | 0.701444 | 4510.426 | 8801.276 |

Dari simulasi data dengan menggunakan program **R** nilai \bar{X}_i dan \hat{P}_i diperoleh yang berbeda. \hat{P}_i cenderung lebih besar dari nilai \bar{X}_i .

3. Nilai-Nilai Parameter Dan Estimator Yang Diperoleh

Tabel 3. Nilai parameter dan estimator

| | |
|------------------|----------|
| $\hat{\mu}$ | 16980.86 |
| $\hat{\sigma}$ | 2.38E+08 |
| $\hat{\alpha}$ | 1.57E+08 |
| $\hat{\beta}$ | 1.518318 |
| $\hat{\gamma}$ | 18882.43 |
| $\hat{\delta}$ | 1.26E+13 |
| $\hat{\epsilon}$ | 1.38E+08 |
| $\hat{\zeta}$ | 91152.03 |

Nilai parameter dan estimator terpaut jauh hal ini disebabkan data yang digunakan adalah data sampel bukan populasi.

3.2 Pembahasan

Hasil penelitian sebelumnya dan penelitian saat ini menunjukkan adanya perbedaan nilai-nilai premi kredibilitas, hal tersebut disebabkan oleh adanya variasi nilai-nilai faktor kredibilitasnya untuk setiap kelompok resiko. Adakalanya estimator yang dihasilkan

bernilai negatif. Saran penelitian selanjutnya, jika ditemukan nilai estimator yang negatif dapat digunakan metode Bayesian dan teknik MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*). Untuk penelitian selanjutnya dapat juga digunakan data asuransi kendaraan bermotor dan data asuransi kerugian lainnya.

4. KESIMPULAN

1. Terdapat perbedaan pola hasil dari penelitian sebelumnya dan penelitian saat ini, untuk penelitian sebelumnya nilai \bar{X}_i cenderung lebih besar dari nilai \hat{P}_i , sedangkan untuk penelitian saat ini nilai \hat{P}_i lebih besar dari nilai \bar{X}_i .
2. Faktor kredibilitas yang dihasilkan mempunyai pengaruh terhadap premi kredibilitas yang dihasilkan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bailey, A, "*Credibility Procedures*", Proceeding of the Casualty Actuarial Society 37. (1950). pp.7-23, 94-115
- [2] Bolstad, William M, *Introduction to Bayesian Statistics*, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc, USA. 2007
- [3] Gau, Wu-Chyuan, At al, *Interval Estimation Of Credibility Factor*, Casualty Actuarial Estimation. (2008).Variance 2:1. pp. 71- 84.
- [4] Herzog, Thomas N, *Introduction to Credibility Theory*, Third Edition, ACTEX Publications, USA. 1994.
- [5] Klugmann, Stuart A. at al, *Loss Models From Data to Decisions*, John Wiley and Sons, Inc., USA. 2004.
- [6] Reasuransi Indonesia, *Asuransi Kebakaran Indonesia*, Badan Pengelola Pusat Data Asuransi Nasional, Jakarta. 2005

Lampiran 2. Tampilan Data dalam Program R

```

You are welcome to redistribute it under certain conditions.
Type 'license()' or 'licence()' for distribution details.

Natural language support but running in an English locale

R is a collaborative project with many contributors.
Type 'contributors()' for more information and
'citation()' on how to cite R or R packages in publications.

Type 'demo()' for some demos, 'help()' for on-line help, or
'help.start()' for an HTML browser interface to help.
Type 'q()' to quit R.

[Previously saved workspace restored]

> load("C:\\Documents and Settings\\Wira\\Desktop\\s2 wira\\data kredibilitas")
> objects()
[1] "claim.frequency"      "claim.severity"      "kredibilitas"
[4] "loss.ratio"          "number.of.policies" "original.premium"
> claim.severity
      F1      F2      F3      F4
1 15602.11 11223.60 20718.94 15361.05
2   8230.45  8383.41  8389.88  6563.36
3 10790.38 12047.41 16714.27 10192.05
4   9507.64 11533.11  9501.50  6189.86
5 15790.59 19289.25 19568.69 10242.26
6 13231.24 13869.14 11966.85  8152.60
7 10258.83 14240.47 13464.37 10611.87
8 14967.95 11131.74 11805.94  7446.57
9   7812.09 13391.05 21837.75 11987.27
10 17135.25  8405.43  7374.46  9428.81
11  5564.24 27638.79  8073.71  2428.26
12 12057.45 11571.51  9047.84 11109.35
13   6028.07  9377.55 17106.77  7595.13
14 17114.61 23302.37 41419.49 24112.52
15 18982.80  3302.65 16148.43 11610.40
16 44635.24 38561.44 59885.60 52959.65
17 136614.57 15859.45 46484.16  8506.07
18 12182.26 10363.79 23669.25 58129.59
19  4642.57  3767.96 11492.45 38212.43
20 3041.32 11563.67  9489.29  456.40

> original.premium
      F1      F2      F3      F4
1 24801.99 26409.00 28111.42 38386.60
2 21993.41 18495.34 20991.83 28492.03
3 40461.98 36573.60 42836.40 56907.25
4 35480.14 31868.73 38251.27 50100.94
5 52807.55 49057.83 58963.83 80394.37
6 35705.22 32633.59 41339.02 50216.64
7 37385.94 35407.79 41155.87 59537.14
8 36916.80 34437.24 44296.68 59695.31
9 27582.17 24662.98 30344.40 40737.04
10 18856.28 15724.10 19472.75 22042.37
11 17217.78 15113.32 20024.28 21701.21
12 23807.65 19202.37 24485.30 31981.77
13 19520.44 17100.41 21364.24 23650.23
14 28124.46 25309.52 30535.28 37473.70
15 24648.02 17892.30 27891.51 25016.86
16 52992.61 40011.56 55995.00 52386.64
17 58851.13 43307.96 59925.08 62006.96
18 31672.52 31221.62 36297.13 38773.79
19 46080.10 51096.85 65047.38 75013.02
20 59465.41 38069.92 32285.76 84336.39

> kredibilitas=function(claim.frequency,number.of.policies)
+ {
+   n=nrow(claim.frequency)
+   j=ncol(claim.frequency)
+   miu=mean(rowMeans(claim.frequency))
+   variansi=mean(diag(var(t(claim.frequency))))
+   a=var(rowMeans(claim.frequency))
+   k=variansi/a
+   m=rowSums(number.of.policies)
+   z=m/(m+k)
+   xbar=rowSums(claim.frequency*number.of.policies)/m
+   miu.topi=sum(m*xbar)/sum(m)
+   var.topi=sum(((claim.frequency-xbar)^2)*number.of.policies)/(3*n)
+   a.topi=(sum(((xbar-miu.topi)^2)*m)-((n-1)*var.topi))/(sum(m)-(sum(m^2)/sum(m)))
+   k.topi=var.topi/a.topi
+   z.topi=m/(m+k.topi)
+   p.topi=(z.topi*xbar)+((1-z.topi)*miu.topi)
+   teta=miu+rowMeans(claim.frequency-miu)

```



```

+ .=c("||")
+ print(data.frame(claim.frequency,..,number.of.policies))
+ print(data.frame(miu,m,z,z.topi,xbar,p.topi,teta))
+ cat("miu \t =",miu,"\n")
+ cat("v \t =",variansi,"\n")
+ cat("a \t =",a,"\n")
+ cat("k \t =",k,"\n")
+ cat("miu.topi =",miu.topi,"\n")
+ cat("var.topi =",var.topi,"\n")
+ cat("a.topi \t =",a.topi,"\n")
+ cat("k.topi \t =",k.topi,"\n")
+ )
> kredibilitas(claim.severity,original.premium)
      F1      F2      F3      F4 ..      F1.1      F2.1      F3.1      F4.1
1  15602.11 11223.60 20718.94 15361.05 || 24801.99 26409.00 28111.42 38386.60
2   8230.45  8383.41  8389.88  6563.36 || 21993.41 18495.34 20991.83 28492.03
3  10790.38 12047.41 16714.27 10192.05 || 40461.98 36573.60 42836.40 56907.25
4   9507.64 11533.11  9501.50  6189.86 || 35480.14 31868.73 38251.27 50100.94
5  15790.59 19289.25 19568.69 10242.26 || 52807.55 49057.83 58963.83 80394.37
6  13231.24 13869.14 11966.85  8152.60 || 35705.22 32633.59 41339.02 50216.64
7  10258.83 14240.47 13464.37 10611.87 || 37385.94 35407.79 41155.87 59537.14
8  14967.95 11131.74 11805.94  7446.57 || 36916.80 34437.24 44296.68 59695.31
9   7812.09 13391.05 21837.75 11987.27 || 27582.17 24662.98 30344.40 40737.04
10 17135.25  8405.43  7374.46  9428.81 || 18856.28 15724.10 19472.75 22042.37
11  5564.24 27638.79  8073.71  2428.26 || 17217.78 15113.32 20024.28 21701.21
12 12057.45 11571.51  9047.84 11109.35 || 23807.65 19202.37 24485.30 31981.77
13  6028.07  9377.55 17106.77  7595.13 || 19520.44 17100.41 21364.24 23650.23
14 17114.61 23302.37 41419.49 24112.52 || 28124.46 25309.52 30535.28 37473.70
15 18982.80  3302.65 16148.43 11610.40 || 24648.02 17892.30 27891.51 25016.86
16  44635.24 38561.44 59885.60 52959.65 || 52992.61 40011.56 55995.00 52386.64
17 136614.57 15859.45 46484.16  8506.07 || 58851.13 43307.96 59925.08 62006.96
18 12182.26 10363.79 23669.25 58129.59 || 31672.52 31221.62 36297.13 38773.79

      miu      m      z      z.topi      xbar      p.topi      teta
1 16980.86 117709.01 0.9999871 0.5635757 15763.150 17124.479 15726.425
2 16980.86  89972.61 0.9999831 0.4967442  7771.166 13362.974  7891.775
3 16980.86 176779.23 0.9999914 0.6597932 12293.288 14534.958 12436.028
4 16980.86 155701.08 0.9999902 0.6307438  8853.119 12556.504  9183.028
5 16980.86 241223.58 0.9999937 0.7257560 15576.487 16483.122 16222.698
6 16980.86 159894.47 0.9999905 0.6369118 11439.534 14141.961 11804.958
7 16980.86 173486.74 0.9999912 0.6555606 11953.062 14339.810 12143.885
8 16980.86 175346.03 0.9999913 0.6579636 10855.133 13600.760 11338.050
9 16980.86 123326.59 0.9999877 0.5750064 13757.916 15935.801 13757.040
10 16980.86  76095.50 0.9999800 0.4549873 10601.274 15114.609 10585.987
11 16980.86  74056.59 0.9999795 0.4482610  9828.756 14824.020 10926.250
12 16980.86  99477.09 0.9999847 0.5218357 10918.049 14726.331 10946.538
13 16980.86  81635.32 0.9999814 0.4724612 10083.016 14725.048 10026.880
14 16980.86 121442.96 0.9999875 0.5712409 26674.679 23333.681 26487.247
15 16980.86  95448.69 0.9999841 0.5115130 13282.951 16018.223 12511.070
16 16980.86 201385.81 0.9999925 0.6884094 49834.264 40189.964 49010.482
17 16980.86 224091.13 0.9999932 0.7108517 53727.092 43651.816 51866.063
18 16980.86 137965.06 0.9999890 0.6021596 27705.910 24195.573 26086.222
19 16980.86 237237.35 0.9999936 0.7224270 16946.929 17484.172 14528.853
20 16980.86 214157.48 0.9999929 0.7014439  4510.426  8801.276  6137.670

miu      = 16980.86
v        = 238190932
a        = 156878158
k        = 1.518318
miu.topi = 18882.43
var.topi = 1.255067e+13
a.topi   = 137689387
k.topi   = 91152.03
>

```

PENERAPAN MODEL REGRESI LOGISTIK *POLYTOMOUS* UNTUK MENENTUKAN POLA HUBUNGAN ANTARA TINGKAT KESEHATAN MASYARAKAT DAN INDEKS GINI*)

**Respatiwulan dan Hasih Pratiwi
Jurusan Matematika FMIPA UNS Surakarta**

ABSTRAK. Tujuan penelitian ini adalah untuk menerapkan model regresi logistik *polytomous* untuk menentukan hubungan antara tingkat kesehatan masyarakat dan indeks Gini. Indeks Gini merupakan ukuran ketaksamaan pendapatan yang dinyatakan oleh jarak antara pendapatan masyarakat terhadap garis egalitarian yaitu garis yang menunjukkan pendapatan masyarakat seluruhnya sama. Variabel respon yang dipertimbangkan adalah tingkat kesehatan individu. Tingkat kesehatan diklasifikasikan menjadi baik, sedang dan buruk. Variabel predictor yang dipertimbangkan adalah indeks Gini. Pendapatan dan indeks massa tubuh juga dipertimbangkan sebagai penentu tingkat kesehatan dan perhitungan indeks Gini. Data hasil survey yang dilaksanakan di Kota Surakarta pada Juli 2008 menunjukkan indeks Gini diantara 0,313 sampai 0,489. Estimasi parameter model regresi logistik *polytomous* menggunakan metode likelihood maksimum dan uji signifikansi menggunakan uji rasio likelihood serta interpretasi menggunakan nilai rasio odds. Hasil analisis data menunjukkan indeks Gini dan umur merupakan factor yang berpengaruh terhadap tingkat kesehatan seseorang. Nilai rasio odds menunjukkan tingkat kesehatan turun 92.27 kali bila indeks Gini naik sebesar 0.01 satuan, dan tingkat kesehatan turun sebesar 1.03 kali jika umur naik 1 satuan. Rasio odds untuk model yang hanya melibatkan variabel predictor indeks Gini saja adalah 51.66.

Kata kunci : indeks Gini, model regresi logistik *polytomous*, tingkat kesehatan masyarakat.

1. PENDAHULUAN

Tingkat kesehatan masyarakat mendapatkan perhatian yang sangat penting bagi pemerintah. Masalah gizi buruk yang muncul akhir-akhir ini juga menunjukkan kualitas kesehatan masyarakat secara umum yang kurang baik. Masalah kesehatan juga sangat berkaitan dengan kondisi ekonomi masyarakat.

Pendapatan masyarakat yang tidak mencukupi kebutuhan hidup menyebabkan kualitas kesehatan juga semakin rendah. Salah satu ukuran pemerataan pendapatan adalah indeks Gini. Teori tentang indeks Gini berkembang pesat sejak disampaikan Gini pada tahun 1914. Teori ini dikembangkan untuk menilai ketaksamaan ekonomi, Gastwirth (1975), Barret and Donald (2000) dan Zitikis (2000, 2002).

Perhitungan indeks Gini didasarkan pada kurva Lorenz, Zitikis (2000) yang secara matematik diformalkan dengan mengasumsikan variabel ekonomi berupa pendapatan seseorang atau keluarga $X \geq 0$ mempunyai fungsi probabilitas. Data pendapatan tersebut digunakan untuk menggambar kurva Lorenz, dan ukuran ketaksamaan ekonomi didefinisikan sebagai dua kali area antara garis diagonal dengan kurva Lorenz yang dikenal dengan indeks Gini, Zitikis (2002).

Pada penelitian ini dicari pola hubungan antara tingkat kesehatan masyarakat dengan indeks Gini. Pola hubungan dua variabel tersebut dinyatakan dalam model regresi logistik *polytomous*. Model regresi logistik *polytomous* digunakan untuk menjelaskan pola hubungan antara beberapa variabel, dengan variabel responnya merupakan kategori yang lebih dari dua, Hosmer and Lemeshow, (1989).

Variabel respon yang digunakan pada penelitian ini adalah tingkat kesehatan masyarakat yang digolongkan menjadi rendah, sedang, dan tinggi, Weich (2002). Sedangkan variabel prediktor yang diduga mempengaruhi tingkat kesehatan masyarakat adalah tingkat pemerataan pendapatan yang diukur dengan indeks Gini.

Model regresi *polytomous* yang dihasilkan diharapkan dapat menjelaskan hubungan atau pengaruh tingkat pemerataan pendapatan terhadap tingkat kesehatan masyarakat.

Penelitian ini diterapkan pada data primer/sekunder untuk masyarakat Kota Surakarta. Pemilihan sampel menggunakan sampling kelompok, dengan kecamatan sebagai kelompok, kemudian dipilih kelurahan sebagai unit samplingnya.

Masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana menurunkan dan menerapkan model regresi logistik *polytomous* untuk menjelaskan hubungan antara tingkat kesehatan masyarakat dengan tingkat pemerataan pendapatan yang diukur dengan indeks Gini.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Tingkat Kesehatan Masyarakat

Tingkat kesehatan masyarakat dapat dilihat dari beberapa indikator.-indikator mortalitas (kematian), Ketut Arsana Laga (2008). Indikator mortalitas dipengaruhi oleh indikator-indikator morbiditas (kesakitan) dan indikator-indikator status gizi.

Indikator morbiditas dan status gizi didasari oleh kesehatan individu. Banyak faktor yang mempengaruhi kesehatan individu, antara lain pola makan, lingkungan tempat tinggal, kebiasaan hidup dan kondisi fisik. Kesehatan individu dipengaruhi oleh

kondisi ekonomi dalam hal ini pendapatan. Secara tidak langsung kondisi pemerataan pendapatan masyarakat diindikasikan mempengaruhi tingkat kesehatan masyarakat.

Penelitian ini menggunakan variabel respon tingkat kesehatan masyarakat yang diukur dengan memperhatikan kondisi kesehatan individu masyarakat meliputi pola makan, lingkungan tempat tinggal, kebiasaan hidup dan kondisi fisik, Roeshadi (2006). Tingkat kesehatan tersebut diklasifikasikan menjadi tiga kategori rendah, sedang dan tinggi, Weich (2002). Sedangkan variabel prediktor yang dipertimbangkan tingkat pemerataan pendapatan masyarakat yang dinyatakan oleh indeks Gini.

2.2. Ukuran Pemerataan Pendapatan Masyarakat

Ukuran pemerataan pendapatan erat kaitannya dengan angka garis kemiskinan. Penetapan jumlah penduduk yang berada di bawah garis kemiskinan dan yang diatas dapat diketahui merata atau tidaknya pendapatan masyarakat.

Beberapa indikator lain untuk melihat pemerataan pendapatan adalah konsep pemerataan Bank Dunia, indeks Gini dan visualisasi kurva Lorenz, Kesejahteraan Rakyat, (2006). Kriteria Bank Dunia berdasarkan kontribusi pendapatan yang diterima oleh penduduk. Penduduk dikelompokkan dalam tiga kriteria strata pendapatan yaitu, 40% pendapatan rendah, 40% pendapatan menengah dan 20% pendapatan tinggi.

Indeks Gini menghitung jarak pendapatan masyarakat seluruhnya (dapat dari sampel) terhadap asumsi seluruh masyarakat punya pendapatan yang sama. Sedang kurva Lorenz merupakan gambaran secara visual dari indeks Gini. Pada penelitian ini digunakan indeks Gini untuk mengukur tingkat pemerataan pendapatan masyarakat.

2.3. Indeks Gini

Pada penelitian ini, indeks Gini diterapkan pada pendapatan per bulan masyarakat dalam hal ini keluarga di wilayah Kota Surakarta yang terdiri dari lima Kecamatan dengan 51 Kelurahan. Penurunan teori tentang indeks Gini mengacu pada Zitikis (2002).

Data pendapatan dari n unit sampel yang terpilih dicatat jumlah pendapatan per bulan x_1, x_2, \dots, x_n dengan nilai yang bias negatif bila seseorang dalam keadaan berhutang, dan non negatif. Data tersebut diurutkan dari yang terkecil ke yang terbesar

$x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{k:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ untuk $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Proporsi pendapatan yang dimiliki oleh individu adalah $\frac{k}{n} \times 100\%$. Secara matematik dapat dituliskan

$$l_{k:n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_{i:k} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n x_{i:n} \right)} \quad (1)$$

$l_{k:n}$ well defined bila penyebut dari persamaan (1) tidak nol, dan ekivalen dengan

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_n \neq 0 \quad (2)$$

Kemudian, persamaan (2) diasumsikan dapat dipenuhi. Sebagai catatan bila $k = 0$ maka

$$\sum_{i=1}^n x_{i:n} = 0 \text{ sehingga } l_{0:1} = 0 \text{ dan } l_{n:n} = 1.$$

Penggambaran persamaan (1) merupakan kurva Lorenz yang merupakan plot

$\left(\frac{k}{n}, l_{k:n} \right)$ di bidang real kemudian dihubungkan dengan suatu garis lurus. Hasil yang diperoleh adalah kurva L_n yang disebut kurva (empiris) Lorenz. Kurva Lorenz L_n well defined di interval $[0, 1]$ dengan $L_n(0) = 0$ dan $L_n(1) = 1$ dapat ditulis

$$L_n(t) = \begin{cases} \frac{C_n(t)}{n\bar{x}}, & 0 < t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Dengan $C_n(t) = \sum_{i=1}^{[t_n]} x_{i:n} + (t_n - [t_n])x_{[t_n]+1:n}$, dan $[t_n]$ bilangan bulat terbesar yang kurang

dari t_n . Hubungan persamaan (3) dan (1) adalah $L_n(k/n) = l_{k:n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Fungsi C_n konvek, akibatnya jika $\bar{x} > 0$ maka L_n konvek dan jika $\bar{x} < 0$ maka L_n konkav. Karena $L_n(0) = 0$ dan $L_n(1) = 1$ maka kurva Lorenz L_n selalu di bawah (jika $\bar{x} > 0$) atau di atas (jika $\bar{x} < 0$) diagonal,

$$I(t) = t, 0 \leq t \leq 1.$$

Diagonal I juga merupakan kurva Lorenz empiris dengan asumsi pendapatan semua individu sama yang disebut *egalitarian* kurva Lorenz.

Berdasar konsep di atas ketaksamaan pendapatan diukur dengan menggunakan konsep jarak, $d(I, L_n)$ yaitu jarak antara *egalitarian* kurva Lorenz dengan L_n . Jika sampel cukup besar maka $d(I, L_n)$ adalah ekuivalen dengan ketaksamaan ekonomi populasi. Secara fungsional jarak yang didefinisikan di atas mempunyai sifat,

$$D(L_n) = d(I, L_n)$$

$$1. D(L_n) \geq 0$$

$$2. D(L_n) = 0 \Leftrightarrow L_n = 1$$

$$3. D(L_n^*) \geq D(L_n^{**}), L_n^* \geq L_n^{**}$$

Bila dua kurva I dan L_n dibandingkan maka digunakan jarak maksimal dua kurva,

$$D_F(L_n) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |t - L_n(t)| w(t)$$

dengan $D_{F,w}(L_n)$ *well defined* dan berhingga untuk fungsi pembobot $w: (0,1) \rightarrow (0, \infty)$ dan memenuhi asumsi

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} t(1-t)w(t) < \infty.$$

Daerah antara I dan L_n dicari dengan

$$D_1(L_n) = \int_0^1 |t - L_n(t)| dt$$

Dan dapat dimodifikasi menjadi,

$$\left(\int_0^1 |t - L_n(t)|^p dt \right)^{1/p}, p > 0$$

atau

$$\int_0^1 |t - L_n(t)| w(t) dt.$$

Secara umum indeks ketaksamaan ekonomi adalah

$$D_{p,w}(L_n) = \left(\int_0^1 |t - L_n(t)|^p w(t) dt \right)^{1/p}$$

$0 < p < \infty$ tetap dan $w: (0,1) \rightarrow (0, \infty)$. Sehingga,

$$\int_0^1 t^p (1-t^p) w(t) dt < \infty.$$

Asumsikan $\bar{x} > 0$ sehingga kurva Lorenz di bawah diagonal I dalam interval $[0,1]$ bila $p = 1$ dan $w(t) = 2$ maka,

$$D_{p,w}(L_n) = 2 \int_0^1 (t - L_n(t)) dt = G_n$$

dengan G_n koefisien Gini yang dirumuskan,

$$G_n = \frac{1}{2\bar{x}n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|. \quad (4)$$

Indeks Gini G_n pada (4) dapat ditentukan dari data pendapatan masyarakat dan digunakan untuk ukuran pemerataan pendapatan. Penulisan nilai indeks Gini sebagai variabel bebas di model regresi logistik *polytomous* dinotasikan dengan z .

2.4. Regresi Logistik *Polytomous*

Menurut Hosmer dan Lemeshow, (1989) model regresi logistik adalah model regresi yang variabel responnya diskret yang mempunyai dua atau lebih kemungkinan hasil. Variabel respon dapat berupa kategori yang dinyatakan dalam variabel *dummy*. Variabel respon Y dalam penelitian ini merupakan kategori tingkat kesehatan masyarakat yaitu $Y=0$ untuk rendah, $Y=1$ untuk sedang dan $Y=2$ untuk tinggi. Model regresi logistik *polytomous* adalah

$$g_i(z_k) = \ln \left[\frac{P(Y = i|z)}{P(Y = 0|z)} \right] = \beta_{i0} + \beta_{i1}z_k \quad (5)$$

dengan $i=0,1,2$ banyak kategori tingkat kesehatan masyarakat, z variabel prediktor yaitu indeks Gini, β_{i0}, β_{i1} parameter model dan $k=1,2,\dots,n$ ukuran sampel pengamatan. Nilai probabilitas bersyarat untuk masing-masing kategori variabel respon pada (5) adalah

$$P(Y = 0|z) = \frac{1}{1 + \sum e^{g_i(z)}}$$

$$P(Y = i|z) = \frac{e^{g_i(z)}}{1 + \sum e^{g_i(z)}}$$

atau secara umum dapat ditulis menjadi,

$$\pi_i = \frac{e^{g_i(z)}}{\sum e^{g_i(z)}}. \quad (6)$$

Estimasi parameter yang digunakan untuk model regresi logistik polytomous (5) menggunakan metode likelihood maksimum. Fungsi likelihood untuk n sampel independen adalah,

$$l(\beta) = \prod (\pi_i(z_k)^{y_{ik}}),$$

Kemudian untuk memudahkan perhitungan, fungsi $l(\beta)$ di log likelihood kan menjadi

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \sum y_{ik} g_i(z_k) - \ln(1 + \sum e^{g_i(z)}) \\ &= \sum y_{ik} (\beta_{10} + \beta_{11} z_k) - \ln(1 + e^{\sum \beta_{10} + \beta_{11} z_k}). \end{aligned}$$

Fungsi $L(\beta)$ dideferensialkan terhadap β_{i0}, β_{i1} kemudian disamadengankan nol dan diperoleh estimasi parameter model.

Uji signifikansi parameter digunakan untuk mengetahui apakah parameter signifikan atau apakah variabel prediktor berpengaruh terhadap variabel respon. Uji signifikansi parameter menggunakan uji rasio likelihood G yang merupakan fungsi dari (L_0, L_1) yang berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas 2 sesuai dengan banyak parameter. Nilai G didefinisikan $G = -2(L_0, L_1)$ dengan L_0 adalah log likelihood model tanpa variabel prediktor dan L_1 likelihood model dengan variabel prediktor.

Interpretasi model diberikan oleh nilai rasio odds yaitu rasio probabilitas kejadian dengan kategori respon tertentu dibandingkan dengan probabilitas kejadian dengan kategori control dalam hal ini nilai respon adalah nol atau tingkat kesehatan rendah.

2.5. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang menggabungkan antara studi pustaka dan studi kasus. Studi pustaka berupa kajian dan penurunan ulang mengenai konsep dan teori indeks Gini dan regresi logistik *polytomous*. Sedangkan studi kasus dilaksanakan untuk menerapkan analisis metode indeks Gini dan regresi logistik *polytomous* pada data primer.

Data yang digunakan adalah data sampel yang diambil dari penduduk Kota Surakarta. Kota Surakarta terdiri dari lima kecamatan, dari lima kecamatan terdapat 51 kelurahan yang dianggap sebagai kelompok. Hal ini dilakukan dengan pertimbangan masing-masing kelurahan di Kota Surakarta relatif tidak jauh berbeda baik dari proporsi jumlah penduduk per luas wilayah, komposisi penduduk dan lingkungan.

Sebanyak sembilan kelurahan dipilih secara random dan yang terpilih adalah kelurahan : Purwosari, Serengan, Banyuwangi, Jebres, Mojosongo, Ketelan, Semanggi, Sangkrah dan Punggawan. Dari setiap kelurahan dipilih secara random acak sederhana 10 unit sampel sehingga diharapkan terdapat 90 unit sampel yang akan diteliti. Unit sampel dalam penelitian ini adalah individu anggota masyarakat dan dipilih menjadi responden.

Pengambilan data dilakukan dengan menyebarkan kuisioner pada unit sampel terpilih. Data yang diperlukan sebagai variabel prediktor adalah data tentang pendapatan. Selain itu dicatat pula data pengeluaran sebagai periksa ulang kekonsistenan jawaban responden. Sedangkan variabel respon yang digunakan adalah tingkat kesehatan seseorang menyangkut kondisi kesehatan individu masyarakat meliputi pola makan, lingkungan tempat tinggal, kebiasaan hidup dan kondisi fisik. Bila pola makan, lingkungan dan tempat tinggal masuk kategori baik maka tingkat kesehatan dikatakan baik, bila paling sedikit ada salah satu yang sedang tingkat kesehatan dikategorikan sedang dan bila paling sedikit ada satu yang rendah dikategorikan rendah.

Langkah-langkah operasional untuk menyelesaikan masalah pada penelitian ini adalah :

1. Mempelajari dan menurunkan ulang konsep perhitungan indeks Gini.
2. Mempelajari dan menurunkan ulang model regresi polytomous mulai dari mengkonstruksi model, estimasi parameter, uji signifikansi dan interpretasi.
3. Mempelajari lokasi dan perilaku populasi pengambilan sampel dari informasi data sekunder, BPS Surakarta (2007).
4. Menyusun kerangka sampel untuk pengambilan data primer.
5. Menyusun kuisioner.
6. Mengambil sampel dengan metode sampel kelompok digabung dengan sampel acak sederhana.
7. Mengolah data sampel.
8. Menentukan nilai indeks Gini untuk tiap kelurahan.
9. Menentukan klasifikasi tingkat kesehatan seseorang.
10. Mengkonstruksi model regresi logistik polytomous antara indeks Gini dan tingkat kesehatan seseorang,
11. Melakukan estimasi parameter dengan metode likelihood maksimum.
12. Melakukan uji signifikansi parameter dengan menggunakan uji rasio likelihood G.
13. Membuat kesimpulan dan interpretasi terhadap hasil pengolahan data.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Data yang dianalisis dalam penelitian ini adalah data primer hasil survey yang dilakukan pada masyarakat Kota Surakarta pada bulan Juli lokasi pengambilan sampel adalah kelurahan : Purwosari, Serengan, Banyuanyar, Jebres, Mojosongo, Ketelan, Semanggi, Sangkrah dan Punggawan. Dari setiap kelurahan dipilih secara random acak sederhana 10 unit sampel sehingga diharapkan terdapat 90 unit sampel yang akan diteliti, tetapi hasil yang diperoleh hanya terdapat 86 unit sampel yang memberikan data lengkap.

Data yang diperlukan sebagai variabel prediktor adalah data pendapatan. Dari data pendapatan tersebut dapat dihitung indeks Gini masyarakat di kelurahan terkait. Variabel prediktor lain yang dipertimbangkan dapat memberi informasi adalah umur dan indeks masa tubuh (imt) yang dihitung dengan,

$$\text{imt} = (\text{berat badan kg}) / (\text{tinggi badan cm})^2$$

Sedangkan umur responden yang terpilih antara 20 sampai 75 tahun.

Variabel respon yang digunakan adalah tingkat kesehatan seseorang menyangkut kondisi kesehatan individu masyarakat meliputi pola makan, lingkungan tempat tinggal, kebiasaan hidup (merokok/tidak) dan kondisi fisik (frekuensi sakit). Bila pola makan, lingkungan, kondisi fisik dan pola hidup masuk kategori baik maka tingkat kesehatan dikatakan baik, bila paling sedikit ada salah satu yang sedang tingkat kesehatan dikategorikan sedang dan bila paling sedikit ada satu yang rendah dikategorikan rendah.

Hasil survey menunjukkan kategori tingkat kesehatan masyarakat ditampilkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Data Tingkat Kesehatan Masyarakat Kota Surakarta

| Tingkat kesehatan | Kategori | Frekuensi | Persentase |
|-------------------|----------|-----------|------------|
| Kurang | 0 | 14 | 16.28% |
| Sedang | 1 | 40 | 46.51% |
| Baik | 2 | 32 | 37.2% |

Data pendapatan digunakan untuk menghitung indeks Gini setiap kelurahan dengan hasil ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2. menunjukkan kelurahan yang paling timpang adalah Kelurahan Semanggi dengan indeks Gini 0.489 dan yang paling merata Kelurahan Banyuanyar dengan indeks Gini 0.131. Nilai indeks Gini akan digunakan sebagai variabel prediktor pada regresi logistik *polytomous*.

Tabel 2. Nilai Indeks Gini Tiap Kelurahan

| Nama Kelurahan | Nilai Indeks Gini |
|----------------|-------------------|
| Ketelan | 0.249 |
| Banyuanyar | 0.131 |
| Mojosongo | 0.433 |
| Jebres | 0.271 |
| Purwosari | 0.187 |
| Punggawan | 0.348 |
| Sangkrah | 0.365 |
| Semanggi | 0.489 |
| Serengan | 0.386 |

Model regresi logistik *polytomous* digunakan untuk menunjukkan pola hubungan antara tingkat kesehatan masyarakat Kota Surakarta dengan umur, pendapatan, imt dan indeks Gini. Hasil pengolahan data menggunakan Minitab 14 ditampilkan pada output berikut.

Tabel 3. Hasil Estimasi Parameter I

| prediktor | koef | SE koef | Z | P-val | Rasio odd | IK 95% | |
|-----------|---------|----------|-------|--------------|-----------|--------|---------|
| | | | | | | bawah | atas |
| Konst1 | -5.7461 | 1.83044 | -3.14 | 0.002 | | | |
| Konst2 | -3.4214 | 1.75643 | -1.95 | 0.051 | | | |
| Gini | 4.3295 | 2.3421 | 2.13 | 0.033 | 75.91 | 1.41 | 4091.02 |
| Umur | 0.0341 | 0.01806 | 1.89 | 0.059* | 1.03 | 1.00 | 1.07 |
| Imt | 0.0454 | 0.06499 | 0.70 | 0.485 | 1.05 | 0.92 | 1.19 |
| Pdpt | 0.00007 | 0.000104 | 0.66 | 0.507 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

Hasil analisis yang ditampilkan pada Tabel 3. menunjukkan P-val indeks Gini yang merupakan ukuran pemerataan pendapatan $0.033 < \alpha$ signifikan berpengaruh pada tingkat kesehatan seseorang dengan tingkat signifikan 0.05. Sedangkan umur seseorang secara signifikan berpengaruh dengan tingkat signifikan 0,1.

Nilai rasio likelihood $G = 8.951 < \chi^2_{(0.05;4)} = 9.49$ artinya model tidak cocok, tetapi bila dibandingkan dengan $\chi^2_{(0.1;4)} = 7.78$ nilai G lebih besar sehingga model cocok untuk tingkat signifikansi $\alpha = 0,1$. Hal ini juga ditunjukkan P-val = 0.062 <

0.1. Sehingga analisis berikut diestimasi model yang hanya melibatkan umur dan indeks Gini saja. Hasil analisis diperoleh sebagai berikut.

Tabel 4. Hasil Estimasi Parameter II

| | | | | | | IK 95% | |
|-----------|---------|---------|-------|--------------|-----------|--------|---------|
| prediktor | koef | SE koef | Z | P-val | Rasio odd | bawah | atas |
| Konst1 | -4.5582 | 1.1548 | -3.95 | 0.000 | | | |
| Konst2 | -2.2523 | 1.0680 | -2.11 | 0.035 | | | |
| Gini | 4,52476 | 2.01143 | 2.25 | 0.024 | 92.27 | 1.79 | 4756.08 |
| Umur | 0.0329 | 0.01773 | 1.86 | 0.064* | 1.03 | 1.00 | 1.07 |

Hasil analisis pada Tabel 4. menunjukkan $P\text{-val} = 0.024 < \alpha = 0.05$ artinya indeks Gini signifikan berpengaruh pada tingkat kesehatan seseorang dengan tingkat signifikan 0.05. Sedangkan umur seseorang dengan $P\text{-val} = 0.064$ secara signifikan berpengaruh dengan tingkat signifikan 0,1. Nilai rasio likelihood $G = 7.984 < \chi^2_{(0.05;2)} = 5.99$ artinya model cocok. Model regresi logistik *polytomous* yang diperoleh adalah

$$g_1(x) = -4.55828 + 4.52476gini + 0.0329umur$$

$$g_2(x) = -2.25233 + 4.52476gini + 0.0329umur \quad (7)$$

Selanjutnya akan diestimasi model yang menunjukkan pola hubungan antara tingkat kesehatan dengan indeks Gini saja. Hasil analisis diberikan sebagai berikut

Tabel 5. Hasil Estimasi Parameter III

| | | | | | | IK 95% | |
|-----------|---------|---------|-------|--------------|-----------|--------|---------|
| prediktor | koef | SE koef | Z | P-val | Rasio odd | bawah | atas |
| Konst1 | -2.9405 | 0.73493 | -4.00 | 0.000 | | | |
| Konst2 | -0.6956 | 0.65649 | -1.06 | 0.289 | | | |
| Gini | 3.9447 | 1.94728 | 2.03 | 0.043 | 51.66 | 1.14 | 2348.12 |

Hasil analisis yang ditampilkan pada Tabel 5. menunjukkan P-val indeks Gini yang merupakan ukuran pemerataan pendapatan $0.043 < \alpha$ signifikan berpengaruh pada tingkat kesehatan seseorang dengan tingkat signifikan 0.05.

Nilai rasio likelihood $G = 4.259 > \chi^2_{(0.05;1)} = 3.84$ artinya model cocok.

Hal ini juga ditunjukkan $P\text{-val} = 0.039 < 0.05$. Jadi model regresi logistik *polytomous* yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned}g_1(x) &= -2.9405 + 3.9447 \text{ gini} \\g_2(x) &= -0.695659 + 3.9447 \text{ gini}\end{aligned}\tag{8}$$

Nilai rasio odds menunjukkan setiap kenaikan 0.01 satuan dari indeks Gini akan memiliki resiko penurunan tingkat kesehatan sebesar 92.27 kali, sedangkan setiap kenaikan 0.01 satuan umur seseorang akan resiko penurunan tingkat kesehatan sebesar 1.03 kali atau tidak terlalu berubah. Sedangkan nilai rasio odds untuk model (8) adalah 51.66.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Barret, G.F. and Donald S.G., 2000, *Statistical Inference with Generalized Gini Indices of Inequality and Poverty*, Unpublished Manuscript.
- [2] BPS Surakarta, 2006, Surakarta dalam Angka.
- [3] Gaswirth, J.L., 1975. The Estimation of A Family Measure of Economic Inequality, *Journal of Econometrics* 3, 61-70.
- [4] Hosmer Jr, D.W. and S. Lemeshow, 1989, *Applied Logistic Regression*, John Wiley and Sons, N.Y.
- [5] Roeshadi, R. H. 2006, *Upaya Menurunkan Angka Kesakitan dan Angka Kematian Ibu pada Penderita Preeklampsia dan Eklampsia*, USU Repository.
- [6] Weich, S., G. Lewis, and S.P.Jenkins, 2002, Income Inequality and Self Rated Health in Britain, Research Reports, *Journal Epidemic Commonly Health*, 56, 436-441.
- [7] Zitikis, R., 2000, *Asymptotic Estimation of The E-gini Index*. (Submitted for publication).
- [8] Anonim, 2006, *Indikator Sosial Ekonomi Kabupaten Kutai*.

PENGLASTERAN DENGAN MENGGUNAKAN DIAGRAM VORONOI DAN ALGORITMA K-MEANS

Alvida Mustikarukmi, S.Si, M.Si
Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Jl. Arif Rahman Hakim 1 Surabaya 60111
e-mail : alvida@matematika.its.ac.id

ABSTRAK. Teknik pengklasteran merupakan salah satu teknik dasar dan paling penting pada data mining. Makalah ini menyajikan teknik pengklasteran baru dengan menggunakan algoritma K-means dan diagram voronoi untuk menyingkap pola tersembunyi dalam sebuah himpunan data. Dalam fase pertama digunakan algoritma K-means untuk menciptakan himpunan klaster-klaster kecil dan dalam fase berikutnya menggunakan diagram voronoi untuk menciptakan klaster-klaster aktual. Hasil pengklasteran berdasarkan K-means dan diagram voronoi merupakan kualitas tinggi dan kokoh, juga dapat mengenali adanya *noise*. Algoritma ini diuji pada data set sintesis dan hasilnya akan disajikan.

Kata kunci : teknik pengklasteran, diagram Voronoi, Algoritma K-Means

1. PENDAHULUAN

Pengklasteran merupakan metoda pengelompokan data ke dalam himpunan-himpunan sehingga titik-titik data yang mempunyai kemiripan tinggi berada dalam satu himpunan sedangkan yang tidak mirip berada di himpunan yang lain. Pada [6] telah memaparkan hubungan antara analisis pengklasteran dengan geometri komputasional yang menggambarkan strategi pengklasteran dengan menggunakan diagram voronoi. Algoritma K-means adalah teknik pembagian yang mencoba untuk mendekomposisikan data set klaster terpisah. Pengklasteran dengan algoritma K-means mempunyai beberapa kekurangan, maka berbagai teknik peningkatan telah dikembangkan[1]. Makalah ini menyajikan teknik pengklasteran baru yang menggunakan K-means dan diagram voronoi untuk menemukan klaster aktual.

2. PENGLASTERAN

Berbagai teknik pengklasteran [4] telah menggunakan diagram Voronoi untuk pemilihan klaster singleton sehingga kepadatan informasi dapat diakses dengan pembuatan diagram voronoi terhadap data set input. Tanpa pengukuran jarak, klaster-klaster awal digabung bersama dengan sel-sel tetangga sepanjang nilai volume sel masih lebih kecil dari ambang batas yang ditetapkan, karena hanya sel tetangga yang berpeluang untuk

digabung dan diagram Voronoi telah menyediakan informasi ketetanggaan. Dengan kata lain, teknik ini memerlukan ambang batas volume untuk membatasi sel-sel mana saja yang bergabung dalam satu kluster.

3. DIAGRAM VORONOI DAN K-MEANS

3.1 Algoritma pengklasteran K-Means

Algoritma K-Means merupakan algoritma penyekatan (*partitional*) terhadap data set . Sedangkan pengklasteran dengan algoritma K-Means akan membentuk kluster-kluster (hasil dari penyekatan data set) sehingga elemen-elemen dari data set yang mempunyai kemiripan tinggi akan berada dalam kluster yang sama, sedangkan elemen yang tidak mempunyai kemiripan akan berada dalam kluster yang berbeda. K-Means menggunakan konsep centroid dimana sebuah centroid menyatakan pusat kluster dan didasarkan pada metoda minimasi kesalahan dari kuadrat., yaitu :

$$E = \sum_{i=1}^k \sum_{e \in c_i} |e - m_i|^2$$

dimana:

e adalah elemen dalam kluster c_i

m_i adalah centroid dari c_i

Langkah-langkah pengklasteran pada Algoritma K-Means adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : Pilihlah k titik-titik data secara random dari keseluruhan himpunan data sebagai centroid awal

Langkah 2 : Hitung jarak Euclidean masing-masing titik data terhadap masing-masing centroid dan menunjuk titik data yang jaraknya terdekat dengan centroid.

Langkah 3 : Hitung centroid baru sehingga error jarak kuadrat masing-masing kluster dapat diminimalkan

Langkah 4 : Ulangi langkah 2 dan 3 sampai centroid tidak berubah

Langkah 5 : Hentikan proses ini

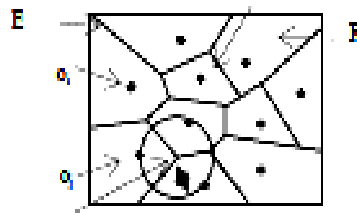
Kompleksitas waktu dari algoritma K-Means adalah $O(nkt)$ dimana n adalah jumlah obyek data, k adalah banyaknya kluster dan t adalah banyaknya iterasi

3.2 Diagram Voronoi

Dalam bidang geometri komputasi, diagram Voronoi merupakan salah satu teknik penting dan sering digunakan. Diberikan D yaitu himpunan n titik data $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ yang

berada pada bidang datar, maka diagram Voronoi ($Vor(D)$) adalah subdivisi bidang datar menjadi sel-sel Voronoi ($V(O_i)$) dimana O_i adalah titik data (Gambar 1). Sel-sel Voronoi adalah himpunan titik-titik u yang lebih dekat atau sangat dekat ke O_i daripada ke titik lain di D .

Misal : $V(O_i) = \{r \mid d(o, u_i) \leq d(o, u_j), \forall j \neq i\}$, dimana d adalah jarak Euclid. Diagram Voronoi membagi bidang datar menjadi n daerah polygon cembung (untuk setiap O_i), vertex (P di Gambar 1) diagram Voronoi dan sisi antara dua adjacent sel-sel Voronoi yang disebut sebagai edge Voronoi (E di Gambar 1) [2], [3]. Bahwa setiap vertex Voronoi adalah pusat lingkaran yang menyinggung tiga atau lebih titik-titik data dalam sel Voronoi adjacently



Gambar 1. Diagram Voronoi

3.3 Algoritma Pengklastran dan Diagram Voronoi

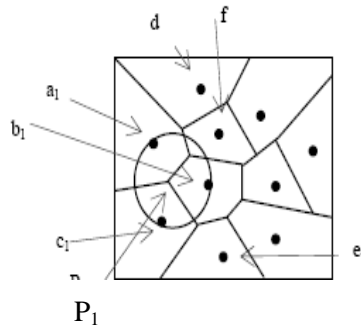
Algoritma pengklastran dengan diagram Voronoi dimulai dengan penerapan algoritma pengklastran K-Means pada data set untuk mengembalikan himpunan centroid (Q_m), $C < m < n$, dimana C adalah jumlah kluster aktual, n adalah jumlah titik data dan m adalah jumlah yang didefinisikan pemakai. (Langkah 1 dari tabel 1). Diagram Voronoi dibuat pada himpunan centroid untuk mendapatkan himpunan vertex (P) yang mana tandai sebagai vertex tak bertanda (langkah 2 dan 3 dari tabel 1). Beberapa vertex diurutkan sesuai dengan koordinat sumbu-x (langkah 4 dari tabel 1) dan peubah $id_subkluster$ c diset ke 1 (langkah 5 dari tabel 1). Langkah 6 dan 8, vertex-vertex dipilih satu persatu. Catatan bahwa setiap vertex merupakan pusat lingkaran yang menyinggung tiga atau lebih centroid yang terletak dalam sel Voronoi adjacently. Untuk setiap vertex, setiap lingkaran yang dibuat dan jika jari-jarinya lebih kecil dari ambang batas γ lalu memilih sebarang centroid yang ditandai dengan $id_subkluster$ terkecil, dalam lingkaran dan menandai centroid-centroid lainnya (baik yang sudah ditandai atau yang tidak) ke $id_subkluster$ ini. Pembaharuan array subkluster dilakukan untuk mencerminkan

perubahan tersebut. Jika tidak ada centroid bertanda yang ditemukan, centroid tidak bertanda dipasang dengan id_subklaster c . Langkah 6 sampai dengan 8 diulangi untuk semua vertex, yang bertujuan membuat himpunan subklster-subklaster dari centroid-centroid. Semua centroid tidak bertanda merupakan centroid noise. Titik-titik data ditunjuk ke centroid terdekat dan hal ini akhirnya membentuk klaster-klaster actual (untuk centroid bertanda) atau noise (untuk centroid tak bertanda). Langkah langkah algoritma pengklastran dengan diagram Voronoi ini adalah :

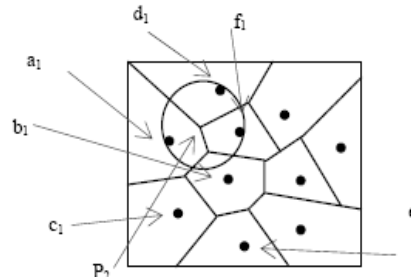
Tabel 1 : Algoritma pengklastran dengan diagram Voronoi

1. Terapkan algoritma K-Means terhadap data set (D), tinjau kembali himpunan centroid (Q)
2. Bangunkan diagram Voronoi pada himpunan centroid (Q), tinjau kembali himpunan vertex vertex (P)
3. Buatlah semua centroid (Q) sebagai vertex tidak bertanda
4. Urutkan vertex-vertex berdasarkan sumbu-x nya
5. Buatlah $c = 1$ // id_subklaster
6. Pilihlah vertex (P_i) satu per satu sesuai urutan naik berdasarkan sumbu-x
7. Bangunlah lingkaran sehingga circumference lingkaran menyinggung centroid (Q_k , $k \geq 3$), dimana P_i adalah pusat lingkaran
8. Jika jari-jari (R_i) kurang dari γ maka
 - Jika sebarang centroid (Q_k) siap ditunjuk sebagai id_subklaster (c)
 - Kemudian menunjuk centroid tidak bertanda sebagai id_subklaster (c) terkecil;
 - Perbaharui susunan larik subklaster s menjadi id_subklaster (c) lagi
 - Yang lainnya :
 - Tunjuk id_subklaster = c pada centroid tidak bertanda;
 - Buatlah centroid-centroid menjadi ditandai
9. Lanjutkan langkah 6 - 8 sampai semua vertex (P) diproses
10. Tinjau kembali himpunan id_subklaster
11. Semua centroid tidak bertanda adalah centroid noise
12. Tunjukkan titik-titik data pada centroid terdekat
13. Tinjau kembali klaster-klaster (C) dan noise (N)

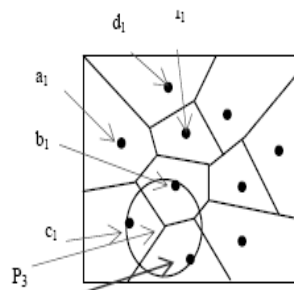
Ilustrasi dari cara kerja Algoritma pengklasteran dengan diagram Voronoi :



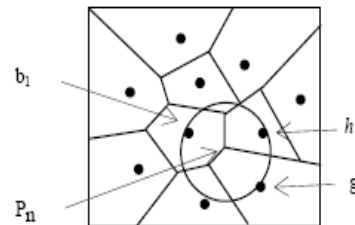
Gambar 2a. Pemilihan vertex P_1 sebagai id_subklaster satu



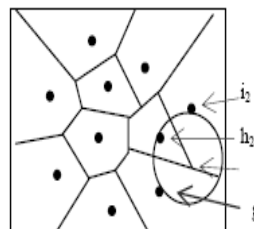
Gambar 2b. Pemilihan vertex P_2 id_subklaster satu yang lain



Gambar 2c. Pemilihan vertex b,c,e sebagai id_subklaster satu



Gambar 2d. Pemilihan vertex P_n sebagai id_subklaster satu

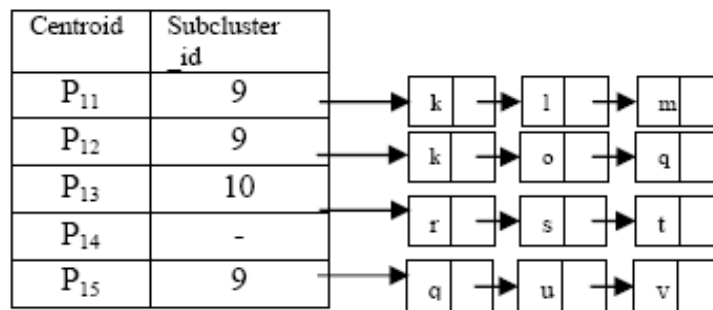


Gambar 2e. Pemilihan vertex g,h,i sebagai id_subklaster dua

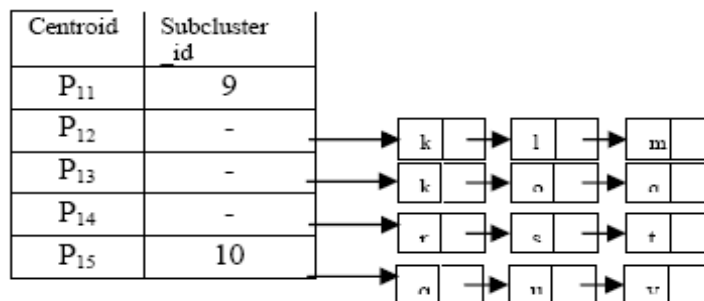
3.4 Penerapan Algoritma Pengklasteran dengan Diagram Voronoi

Gambar (2a) sampai Gambar (2e) menggambarkan cara kerja algoritma pengklasteran dengan diagram Voronoi. Dalam Gambar (2a) vertex P_1 dipilih dan lingkarannya (kurang dari γ dalam jari-jari) menyinggung centroid a,b,c, yang ditandai

sebagai $id_subklaster$ satu. Berikutnya P_2 dipilih dalam Gambar (2b) dan centroid a,d, f yang juga ditandai sebagai $id_subklaster$ satu yang lain, hal ini disebabkan oleh a. Begitu juga dalam gambar (2c) b,c,e juga ditandai dalam $id_subklaster$ satu (karena b sudah ditandai). Dalam Gambar (2d) P_n dipilih dan lingkarannya menyinggung b,h, g ,dimana b ditandai dengan $id_subklaster$ satu. Paling tidak, h dan g tersisa (tidak ditandai) karena jari-jari lingkarannya lebih besar γ . Selanjutnya h,g ditandai dengan $id_subklaster$ dua saat vertex P_f dipilih. Gambar (3a) dan (3b) menggambarkan penyesuaian $id_subklaster$, katakanlah vertex P_{11}, P_{15}, P_{12} dipilih setelah yang lainnya. Saat P_{11} dipilih k,l,m ditandai dengan $id_subklaster$ sepuluh (Gambar 3a). Saat P_{12} dipilih lingkarannya menyinggung k,o,q yang mana k dan q juga sudah ditandai dan k mempunyai $id_subklaster$ terkecil (sembilan). Oleh karena itu P_{12} ditandai oleh $id_subklaster$ sembilan sebagaimana yang ditunjukkan dalam Gambar (3b). Selanjutnya, vertex P_{15} juga disesuaikan ke $id_subklaster$ sembilan. Berikutnya saat P_{13} dipilih, juga ditandai dengan $id_subklaster$ sepuluh dan seterusnya.



Gambar 3a. Penyesuaian $id_subklaster$



Gambar 3b. Penyesuaian $id_subklaster$

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Algoritma pengklasteran dengan diagram Voronoi ditetapkan berdasarkan dataset sintesis. Hasil ini dibandingkan dengan algoritma K-Means (validitas terbaik untuk setiap dataset) dan disajikan dalam Tabel 2 Algoritma pengklasteran dengan diagram Voronoi dapat mengenali jumlah sesungguhnya klaster untuk semua dataset dan nilai validitas[5]yang diperoleh adalah minimum.

Tabel 2. Hasil Uji

| Dataset | Jumlah Klaster aktual | Hasil dengan Algoritma K Means | | Hasil dengan Algoritma DV dan K-Means | |
|-----------|-----------------------|--------------------------------|----------------|---------------------------------------|----------------|
| | | Validitas | Jumlah klaster | Validitas | Jumlah klaster |
| Dataset 1 | 3 | 1.88 | 3 | 0.98 | 3 |
| Dataset 2 | 2 | 4.78 | 3 | 3.77 | 2 |
| Dataset 3 | 3 | 5.23 | 3 | 5.00 | 3 |
| Dataset 4 | 4 | 1.89 | 3 | 1.01 | 4 |

5. KESIMPULAN

Dalam makalah ini diagram Voronoi berkonjungsi dengan algoritma K-Means telah digunakan untuk pengenalan pola tersembunyi dalam sebuah dataset dan membentuk klaster aktual. Bahkan algoritma pengklasteran dengan diagram Voronoi, juga mengenali titik data noise. Hasil dari Tabel 2 menunjukkan bahwa algoritma ini mempunyai performa yang cukup baik. Juga, parameter yang ditetapkan pemakai dalam algoritma ini hanya menggunakan dua parameter saja. Berikutnya diperlukan skalabilitas dan kekokohan dalam dataset yang sesungguhnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] P.S.Bishnu and V Bhattacharjee. 2008. A new Initialization Methods for K-Means Algorithm using Quad Tree, *NCM2C, JNU*, New Delhi
- [2] Jilin Qu. 2008. Outlier Detection using voronoi diagram, *International symposium on computational intelligence and design*, Vol 1, 495-498, IEEE.

- [3] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc Van Kreveld, Mark Overmars, *Computational Geometry Algorithms and Application* 3rd Edition Springer publication
- [4] Ben Kao, Sau Dan Lee, David W. Cheung, Wai- Shing Ho, K. F. Chan. 2006. Clustering Uncertain Data using Voronoi Diagrams”, *Eighth IEEE International Conference on Data Mining*, 333-342
- [5] Noha A. Yousri, Mohamed S. Kamel, Mohamed A. Ismail .2008. A novel validity measure for clusters of arbitrary shapes and density, *ICPR-08, 19th International conference on pattern recognition*, 1-4.
- [6] Dehne F., Noltemeier H. 1983. *A Computational Geometry Approach to Clustering Problems*. Univ. of Wuerzburg Am Hubland, Germany.

REDUKSI DIMENSI DATA PERSEN TRANSMITAN KURKUMIN DENGAN TRANSFORMASI WAVELET DISKRET MENGGUNAKAN OSS-R

Aniq Atiqi Rohmawati, Yanti Lina Mayasari, Elly Ana, dan Nur Chamidah
Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga
yanti_lina88@yahoo.com

ABSTRACT. *Curcuma xanthorrhiza* Roxb. is one of medicine plant which is used to basic substance on jamu industry and pharmacy that has curcuminoid. Determining concentration of curcuminoid with High Performance Liquid Chromatography (HPLC) method is more expensive than Fourier Transform Infrared (FTIR) method. Because of that, it needs a model which determine result relation between HPLC and FTIR. There are some problem in calibration model, such as, when the number of observations (n) less than the number of independent variables (p) and multicollinearity. Goals of this research are reducing dimension FTIR data using Discrete Wavelet Transform (DWT) with Open Source Software-R (OSS-R) so that $n > p$. A type of mother wavelet which is used is Haar Wavelet, with value of mother wavelet is 1 and -1 on interval $[0,1/2)$ and $[1/2,1)$. The result shows that resolution level on 0 and 4 have highest R^2 , 98,37%, it contains 17 wavelet coefficients and 1 smoothing coefficient.

Key Words: Reduction of dimension, discrete wavelet, curcu

1. PENDAHULUAN

Di Indonesia tanaman obat telah lama digunakan oleh masyarakat dan industri untuk pembuatan jamu. Penggunaan tanaman obat yang semakin meluas sudah selayaknya diikuti dengan usaha untuk menjamin kualitas tanaman obat tersebut. Temulawak (*Curcuma xanthorrhiza* Roxb.) merupakan salah satu tanaman obat yang banyak digunakan sebagai bahan baku dalam industri jamu dan farmasi. Hal ini untuk menjamin agar produksinya dapat bersaing dan diterima oleh masyarakat. Salah satu indikator kualitas tanaman obat adalah konsentrasi senyawa aktifnya (Mukid, 2009).

Proses penentuan konsentrasi senyawa aktif yang dikandung oleh suatu tanaman obat perlu dilakukan secara cepat dan akurat. Secara kuantitatif dan kualitatif suatu senyawa aktif dapat diketahui antara lain melalui metode *High Performance Liquid Chromatograph* (HPLC) dan *Fourier Transform Infrared* (FTIR). Proses penentuan konsentrasi senyawa aktif dengan HPLC memerlukan waktu dan biaya yang relatif mahal dibandingkan dengan FTIR. Oleh karena itu diperlukan metode yang handal tetapi relatif

mudah untuk digunakan. Salah satu metodenya adalah dengan membuat sebuah model yang menyatakan hubungan antara konsentrasi senyawa aktif hasil pengukuran HPLC dengan persen transmitan (absorban) yang diukur dengan menggunakan FTIR (Erfiani, 2005).

Beberapa permasalahan yang muncul dalam pembuatan model adalah ketika banyaknya pengamatan (n) jauh lebih kecil dari banyaknya peubah (p) dan antar peubah saling berkorelasi. Kasus-kasus ini membawa permasalahan pendugaan parameter model. Metode untuk mengatasi hal ini adalah dengan melakukan reduksi dimensi sehingga diperoleh peubah baru yang dimensinya lebih kecil dari p dan antar peubah tidak saling berkorelasi (Sunaryo, 2005).

Dalam penelitian ini metode yang digunakan untuk mereduksi dimensi adalah Transformasi *Wavelet* Diskret (TWD). Jenis *wavelet* yang digunakan adalah *wavelet* yang paling tua dan sederhana, *wavelet* Haar. Metode ini secara komputasi mudah dan sederhana dalam penerapannya serta mampu mengatasi data yang memiliki dimensi yang tinggi (Yinsheng Qu *et al* 2003, dalam Suprpti 2009). Selain itu metode ini dianggap paling mudah dalam implementasinya dibandingkan dengan yang lain. Penelitian sebelumnya tentang transformasi *wavelet* dilakukan oleh Sony dan Notodiputro (2004); Sunaryo (2005); Da Chen *et al* (2004) menggunakan TWD dengan *mother wavelet* yang digunakan adalah *wavelet* Haar. Berdasarkan uraian diatas rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana melakukan reduksi dimensi dengan TWD pada data persen transmitan kurkumin menggunakan OSS-R. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan metode alternatif penanganan pemodelan regresi pada data berdimensi tinggi dengan kasus multikolinearitas menggunakan OSS-R.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Transformasi *Wavelet* Diskret

Transformasi *wavelet* diskret (TWD) dari x untuk *mother wavelet* (ψ) didefinisikan (Vidacovic dan Meuller, 1991):

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (1)$$

Misalkan $x = (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})^T$ dan diasumsikan $p = 2^N$, N adalah bilangan bulat positif. Vektor data x dan dapat dihubungkan dengan suatu fungsi f pada selang $[0,1)$ (Sunaryo, 2005):

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^N-1} x_k I_{(k2^{-N} \leq t < (k+1)2^{-N})} \tag{2}$$

Sehingga diperoleh DWT (Kaist, 2005):

$$f(t) = c_{0,0}\varphi(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \tag{3}$$

Persamaan (3) disebut transformasi *wavelet* diskret, karena nilai j hanya diambil pada bilangan bulat bukan negatif saja. Bilangan j pada persamaan (3) disebut level resolusi, dan $f(t)$ dapat diperoleh secara tepat, jika diambil semua level resolusi untuk dekomposisi, yaitu semua $(N-1)$ level resolusi pertama. Koefisien $c_{0,0}$ disebut koefisien pemulusan atau bagian pendekatan dari suatu fungsi, sedang $d_{j,k}$ disebut koefisien *wavelet* atau juga disebut bagian detail suatu fungsi. $\psi(t)$ dan $\varphi(t)$ masing-masing disebut *mother* dan *father wavelet*.

Wavelet Haar yang dikenalkan oleh Alfred Harr pada tahun 1909. *Wavelet* Haar merupakan *mother wavelet* orthogonal yang sederhana dan banyak dipakai untuk kasus reduksi dimensi data (Sony dan Notodiputro 1992, dalam Suprapti 2009):

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \tag{4}$$

dengan mengambil nilai $\psi_{j,k}(t)$ dan $\varphi(t)$ untuk berbagai t , maka persamaan (4) dapat dituliskan dengan notasi matriks,

$$\underline{x} = W^T \underline{d} \tag{5}$$

karena W ortogonal maka

$$\underline{d} = W \underline{x} \tag{6}$$

dimana $\underline{d} = (c_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,1}, d_{1,0}, \dots, d_{N-1,2^j-1})^T$ dan W adalah matrik yang elemen-elemen barisnya adalah nilai dari $\varphi(t)$ dan $\psi_{j,k}(t)$ untuk berbagai $t \in [0, 1]$. Kemudian memilih level-level resolusi tertentu, sehingga:

$$D_{(n \times m)}^* = X_{(n \times p)} W_{(p \times m)}^{*T} \tag{7}$$

Persamaan (7) mereduksi pengamatan p variabel menjadi m koefisien *wavelet* terpilih, dimana $m < p$.

2.2. Software R

Pada penelitian ini program yang akan digunakan adalah *Open Source Software (OSS)-R*. Paket program *R* ini sudah dilengkapi dengan banyak kemampuan internal untuk menganalisa data dan menampilkan grafik sehingga *R* bisa dikategorikan sebagai paket pengolahan data (paket statistika) (Tirta, 2005). Selain itu, dalam rangka ikut berperan dalam mensukseskan program pemerintah melalui kementrian Ristek terkait *Indonesia Go Open Soource (IGOS)*. Untuk mengerjakan transformasi *wavelet* pada *R* diperlukan paket *wavethresh (wavethresh packages)*. *Wavethresh* merupakan salah satu paket yang tersedia pada program *R*. Paket ini berfungsi untuk melakukan perintah-perintah TWD. Beberapa perintah dan pengerjaan TWD yang terdapat pada paket ini seperti *GenW*, perintah ini dipakai untuk membangkitkan matrik *W* sesuai dengan input jumlah data (Nason, 2010).

2.3. Metode Penelitian

Pada metode ini mensyaratkan jumlah variabelnya 2^N . Sehingga dari 1866 titik persen transmitan FTIR beberapa titik harus dihilangkan agar jumlah variabelnya 2^N . Untuk memilih variabel yang akan dihilangkan, dapat diketahui dari bentuk plot spektra dari variabel tersebut. Mentransformasi variabel yang berukuran 2^N ke dalam interval [0,1) dengan persamaan

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^N-1} x_k I \left\{ \frac{k}{2^N} \leq t < \frac{k+1}{2^N} \right\} \tag{8}$$

Kemudian menghitung matriks *W* berukuran $p \times p$ dan mentransformasi variabel X_k menggunakan persamaan $D = X W^T$ untuk mendapatkan koefisien *wavelet*. Koefisien *wavelet* mempunyai (N-1) level resolusi yang selanjutnya dikombinasikan berdasarkan jumlah data dengan ukuran kombinasi misalkan $m < p < n$. Koefisien *wavelet* hasil

kombinasi level resolusi diregresikan dengan data konsentrasi HPLC untuk mendapatkan nilai R^2 . Memilih kombinasi level resolusi berdasarkan nilai R^2 yang paling besar, sehingga $D_{(nxm)}^* = X_{(npx)} W_{(pxm)}^{*T}$.

2.4. Variabel Penelitian

Data yang digunakan adalah persen transmitan kurkumin dari serbuk temulawak hasil pengukuran spektrometer FTIR dan data konsentrasi senyawa aktif kurkumin yang diukur dengan menggunakan HPLC. Temulawak yang dijadikan contoh diambil dari beberapa daerah sentra tanaman obat, yaitu Bogor, Sukabumi, Kulon Progo, Karanganyar, dan Cianjur dan Balitro. Data-data tersebut diperoleh dari Pusat Studi Biofarmaka Institut pertanian Bogor. Data tersebut diperoleh peneliti sebagai bagian dari Hibah Pekerti 2010 antara Unair selaku TPP dan IPB sebagai TPM.

Variabel prediktor dalam penelitian ini adalah data persen transmitan FTIR serbuk kurkumin yang diperoleh dari 1866 panjang gelombang pada 20 daerah pengamatan yang berbeda. Sedangkan variabel respon pada penelitian ini adalah konsentrasi HPLC dari 20 daerah pengamatan seperti yang terlihat pada Tabel 1.

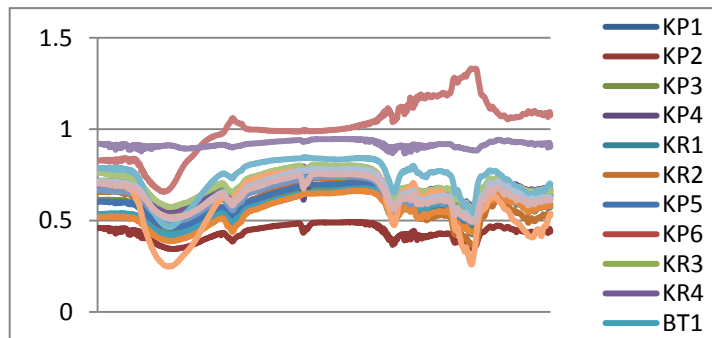
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Reduksi dimensi merupakan tahap pra-pemrosesan yang bertujuan untuk mengatasi permasalahan yang ada pada data persen transmitan kurkumin, yaitu memiliki dimensi yang sangat tinggi. Pada metode *wavelet* mensyaratkan jumlah titik yang akan direduksi harus 2^N , sedangkan pada variabel prediktor terdapat 1866 titik sehingga tidak memenuhi syarat tersebut. Variabel-variabel tersebut dimampatkan menjadi 1024 dengan memperhatikan plot spektra dari masing-masing panjang gelombang seperti yang terlihat pada Gambar 1.

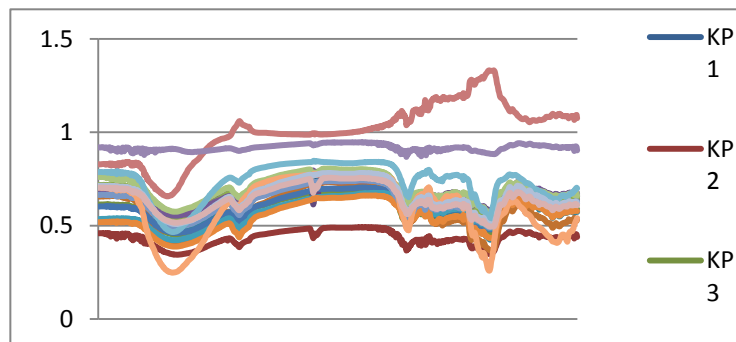
Kemudian memilih koefisien-koefisien pada level resolusi tertentu sehingga $n < p$. Pemilihan koefisien pada level resolusi dilakukan dengan metode coba-coba (*trial and error*), yaitu dengan mengkombinasikan level resolusi 0, 1, 2, 3 dan 4. Kombinasi level resolusi yang memiliki nilai R^2 tertinggi digunakan untuk memilih koefisien-koefisien *wavelet*.

Tabel 1. Data konsentrasi HPLC pada 20 daerah sentra tanaman obat

| No | Sampel | Konsentrasi HPLC | No | Sampel | Konsentrasi HPLC |
|----|---------------|------------------|----|------------|------------------|
| 1 | Kulon Progo 1 | 0.65 | 11 | Balitro 1 | 1.38 |
| 2 | Kulon Progo 2 | 0.63 | 12 | Balitro 2 | 1.57 |
| 3 | Kulon Progo 3 | 0.92 | 13 | Cianjur 1 | 1.57 |
| 4 | Kulon Progo 4 | 0.9 | 14 | Cianjur 2 | 1.74 |
| 5 | Karanganyar 1 | 1.61 | 15 | Bogor 1 | 0.13 |
| 6 | Karanganyar 2 | 1.66 | 16 | Bogor 2 | 0.12 |
| 7 | Kulon Progo 5 | 1.01 | 17 | Kuningan 1 | 1.11 |
| 8 | Kulon Progo 6 | 1.13 | 18 | Kuningan 2 | 0.97 |
| 9 | Karanganyar 3 | 0.47 | 19 | Sukabumi 1 | 1.3 |
| 10 | Karanganyar 4 | 0.5 | 20 | Sukabumi 2 | 1.24 |



Gambar 1. Plot spektra persen transmitan kurkumin pada 1866 panjang gelombang



Gambar 2. Plot spektra persen transmitan kurkumin pada 1024 panjang gelombang

Berdasarkan Tabel 2, level resolusi yang terpilih adalah nilai R^2 tertinggi yaitu 94,82% pada level resolusi 0 dan 4 dengan jumlah koefisien *wavelet* 17 serta 1 koefisien

pemulusan. Reduksi dimensi dengan TWD dalam pemodelan kalibrasi memberikan hasil yang relatif baik. Hal ini dapat diketahui dari ukuran kebaikan model seperti R^2 . Penerapan pada data persen transmitan kurkumin menunjukkan nilai R^2 sebesar 94,82% yang memberikan kecenderungan lebih baik dibandingkan transformasi Fourier atau *Princial Component Analysis* (PCA) sehingga data hasil reduksi $X_{m \times n}$ cukup mendekati peubah asal $X_{n \times p}$ (Lampiran)

Tabel 2. Nilai R^2 dan Kombinasi Level Resolusi Koefisien Wavelet

| No | Level Resolusi | R^2 | No | Level Resolusi | R^2 |
|----|---------------------|--------|----|---------------------------|--------|
| 1 | $C_{0,0}$ dan 0 | 17,48% | 10 | $C_{0,0}$, 1 dan 2 | 59,36% |
| 2 | $C_{0,0}$ dan 1 | 56,46% | 11 | $C_{0,0}$, 1 dan 3 | 82,72% |
| 3 | $C_{0,0}$ dan 2 | 58,79% | 13 | $C_{0,0}$, 2 dan 3 | 77,93% |
| 4 | $C_{0,0}$ dan 3 | 69,95% | 14 | $C_{0,0}$, 0, 1 dan 2 | 59,36% |
| 5 | $C_{0,0}$ dan 4 | 89,35% | 15 | $C_{0,0}$, 0, 1 dan 3 | 90,23% |
| 6 | $C_{0,0}$, 0 dan 1 | 56,96% | 16 | $C_{0,0}$, 0, 2 dan 3 | 81,83% |
| 7 | $C_{0,0}$, 0 dan 2 | 58,93% | 17 | $C_{0,0}$, 1 2 dan 3 | 92,27% |
| 8 | $C_{0,0}$, 0 dan 3 | 72,96% | 18 | $C_{0,0}$, 0, 1, 2 dan 3 | 87,78% |

Sedangkan kelemahannya, bahwa tidak ada jaminan secara matematis korelasi antara koefisien wavelet $D_{n \times m}$ menjadi relatif kecil. Reduksi dimensi dengan TWD masih dimungkinkan terjadi multikolinearitas antar peubah setelah direduksi, maka penerapannya pada model kalibrasi akan lebih baik jika digabungkan dengan metode lain yang dapat mengatasi multikolinearitas tersebut seperti metode PCA atau *Partial Least Squares* (PLS).

4. KESIMPULAN

Penerapan metode TWD menggunakan software R pada data kurkumin ternyata memberikan hasil yang relatif baik. Level resolusi yang terpilih adalah nilai R^2 tertinggi yaitu 98,37% pada level resolusi 0 dan 4 dengan jumlah koefisien *wavelet* 17 serta 1 koefisien pemulusan. Metode Transformasi *Wavelet* Diskret (TWD) mampu melakukan reduksi dimensi dengan baik, tetapi tidak ada jaminan, bahwa kasus multikolinearitas teratasi. Sehingga TWD sebaiknya digabung dengan metode lain yang mampu mengatasi multikolinearitas dalam pembuatan model kalibrasi peubah ganda.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Terima kasih disampaikan kepada Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Dirjen Dikti, LPPM Unair yang telah membiayai penelitian ini, Departemen Statistika IPB, Dr. Sony Sunaryo, dan Anggreini Suprapti serta seluruh pihak yang telah meluangkan waktu dalam penyelesaian penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Erfiani. 2005. Pengembangan Model Kalibrasi dengan Pendekatan Bayes (Kasus Tanaman Obat [Disertasi]. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- [2] Nason G. P, 2010. *Wavelet Methods in Statistics with R*. New York. Springer.
- [3] Mukid, A, 2009. *Regresi Proses Gaussian untuk Pemodelan Kalibrasi* [disertasi]. Bogor : Sekolah Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- [4] Sunaryo, S, 2005. *Model Kalibrasi dengan Transformasi Wavelet sebagai Metode Pra-pemrosesan* [disertasi]. Bogor : Sekolah Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- [5] Suprapti, A, 2009. *Pra-Pemrosesan Data Luaran GCM CSIRO-Mk3 dengan Metode Transformasi Wavelet Diskret* [Tugas Akhir]. Surabaya, Institut Teknologi Sepuluh November.
- [6] Tirta, I Made, 2005. *Situs R Indonesia*. <http://r.unej.ac.id/> [29 Juni 2010]
- [7] Vidacovic B, Meuller P. 1991. *Wavelets for Kids. A Tutorial Introduction*. AMS Subject Classification, Duke University.

A. Lampiran Hasil Reduksi Dimensi $X_{n \times m}$

| | [,1] | [,2] | [,3] | [,4] | [,5] | [,6] | [,7] | [,8] | [,9] | [,10] | [,11] | [,12] | [,13] | [,14] | [,15] | [,16] | [,17] | [,18] |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| KP1 | 0.71193 | 0.71191 | 0.70944 | 0.71187 | 0.70816 | 0.71018 | 0.70923 | 0.70797 | 0.70797 | 0.71193 | 0.71166 | 0.70907 | 0.70153 | 0.70368 | 0.70761 | 0.70802 | 0.70732 | 0.70788 |
| KP2 | 0.45965 | 0.45964 | 0.45588 | 0.45986 | 0.45271 | 0.45725 | 0.45561 | 0.45237 | 0.45349 | 0.46065 | 0.45994 | 0.45351 | 0.44096 | 0.44713 | 0.45495 | 0.45199 | 0.45388 | 0.45293 |
| KP3 | 0.61343 | 0.61336 | 0.61301 | 0.61426 | 0.61226 | 0.61356 | 0.61314 | 0.61240 | 0.61257 | 0.61472 | 0.61465 | 0.61317 | 0.60993 | 0.61066 | 0.61285 | 0.61281 | 0.61280 | 0.61285 |
| KP4 | 0.70015 | 0.70005 | 0.69651 | 0.70051 | 0.69444 | 0.69802 | 0.69650 | 0.69437 | 0.69448 | 0.70111 | 0.70090 | 0.69664 | 0.68410 | 0.68787 | 0.69450 | 0.69529 | 0.69442 | 0.69533 |
| KR1 | 0.69223 | 0.69204 | 0.68749 | 0.69106 | 0.68555 | 0.68819 | 0.68671 | 0.68510 | 0.68471 | 0.69063 | 0.69069 | 0.68720 | 0.67486 | 0.67720 | 0.68293 | 0.68522 | 0.68279 | 0.68436 |
| KR2 | 0.65594 | 0.65607 | 0.65902 | 0.65620 | 0.65999 | 0.65940 | 0.65935 | 0.66003 | 0.66063 | 0.65631 | 0.65586 | 0.65795 | 0.66745 | 0.66608 | 0.66193 | 0.65878 | 0.66125 | 0.65930 |
| KP5 | 0.60249 | 0.60244 | 0.60230 | 0.60390 | 0.60194 | 0.60325 | 0.60282 | 0.60228 | 0.60218 | 0.60462 | 0.60476 | 0.60370 | 0.59899 | 0.59995 | 0.60212 | 0.60333 | 0.60227 | 0.60330 |
| KP6 | 0.66764 | 0.66766 | 0.66749 | 0.66850 | 0.66673 | 0.66807 | 0.66776 | 0.66686 | 0.66735 | 0.66914 | 0.66876 | 0.66712 | 0.66422 | 0.66607 | 0.66815 | 0.66689 | 0.66775 | 0.66725 |
| KR3 | 0.71819 | 0.71821 | 0.71773 | 0.71848 | 0.71720 | 0.71813 | 0.71781 | 0.71730 | 0.71749 | 0.71882 | 0.71860 | 0.71761 | 0.71526 | 0.71621 | 0.71759 | 0.71726 | 0.71735 | 0.71729 |
| KR4 | 0.69082 | 0.69072 | 0.68876 | 0.69132 | 0.68776 | 0.68962 | 0.68885 | 0.68790 | 0.68761 | 0.69173 | 0.69191 | 0.68979 | 0.68150 | 0.68312 | 0.68699 | 0.68883 | 0.68725 | 0.68861 |
| BT1 | 0.53514 | 0.53517 | 0.53642 | 0.53747 | 0.53603 | 0.53740 | 0.53721 | 0.53647 | 0.53696 | 0.53879 | 0.53848 | 0.53705 | 0.53448 | 0.53642 | 0.53843 | 0.53720 | 0.53819 | 0.53785 |
| BT2 | 0.51835 | 0.51840 | 0.51971 | 0.52063 | 0.51907 | 0.52061 | 0.52037 | 0.51952 | 0.52017 | 0.52192 | 0.52149 | 0.51995 | 0.51763 | 0.51981 | 0.52176 | 0.52002 | 0.52137 | 0.52073 |
| CJ1 | 0.66498 | 0.66506 | 0.66508 | 0.66605 | 0.66407 | 0.66570 | 0.66533 | 0.66404 | 0.66488 | 0.66676 | 0.66611 | 0.66400 | 0.66129 | 0.66397 | 0.66635 | 0.66372 | 0.66559 | 0.66451 |
| CJ2 | 0.82817 | 0.82807 | 0.82804 | 0.83109 | 0.82821 | 0.82942 | 0.82895 | 0.82835 | 0.82790 | 0.83210 | 0.83356 | 0.83295 | 0.82356 | 0.82272 | 0.82587 | 0.82771 | 0.82783 | 0.83148 |
| BE1 | 0.76087 | 0.76068 | 0.75776 | 0.76029 | 0.75597 | 0.75846 | 0.75733 | 0.75572 | 0.75589 | 0.76024 | 0.75993 | 0.75690 | 0.74839 | 0.75105 | 0.75561 | 0.75520 | 0.75565 | 0.75565 |
| BE2 | 0.91943 | 0.91922 | 0.91503 | 0.91942 | 0.91334 | 0.91627 | 0.91484 | 0.91319 | 0.91254 | 0.91951 | 0.91998 | 0.91622 | 0.90172 | 0.90405 | 0.91075 | 0.91457 | 0.91130 | 0.91371 |
| KM1 | 0.78693 | 0.78703 | 0.78680 | 0.78704 | 0.78438 | 0.78774 | 0.78707 | 0.78473 | 0.78635 | 0.78793 | 0.78596 | 0.78315 | 0.78303 | 0.78761 | 0.78964 | 0.78327 | 0.78834 | 0.78602 |
| KM2 | 0.70409 | 0.70426 | 0.70356 | 0.70334 | 0.70006 | 0.70451 | 0.70371 | 0.70031 | 0.70278 | 0.70415 | 0.70117 | 0.69742 | 0.69914 | 0.70501 | 0.70714 | 0.69754 | 0.70515 | 0.70113 |
| SB1 | 0.71390 | 0.71387 | 0.71259 | 0.71398 | 0.71160 | 0.71310 | 0.71251 | 0.71170 | 0.71182 | 0.71426 | 0.71409 | 0.71241 | 0.70777 | 0.70927 | 0.71175 | 0.71177 | 0.71149 | 0.71166 |
| SB2 | 0.70317 | 0.70316 | 0.70184 | 0.70331 | 0.70083 | 0.70254 | 0.70189 | 0.70085 | 0.70111 | 0.70369 | 0.70334 | 0.70144 | 0.69676 | 0.69869 | 0.70144 | 0.70080 | 0.70101 | 0.70098 |

RELIABILITAS KONSISTENSI INTERNAL INSTRUMEN PENGUKUR TINGKAT KEPUASAN MAHASISWA SEBAGAI PELANGGAN INTERNAL

Gaguk Margono

Fakultas Teknik, Universitas Negeri Jakarta, Gedung L, Kompleks UNJ,
Jl. Rawamangun Muka, Rawamangun Jakarta 13220

email: g_margono@yahoo.com

ABSTRAK. Reliabilitas merupakan konsistensi setiap instrumen dalam penelitian pada suatu studi. Pengukuran reliabilitas konsistensi internal yang paling umum adalah *alpha* (α) Cronbach. Dua pengukuran konsistensi internal yang lain seperti *theta* (Θ) dan *omega* (Ω) jarang digunakan. Tiga pengukuran dan komputasi dideskripsikan menggunakan instrumen pengukur tingkat kepuasan mahasiswa. Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk menjawab manakah dari ketiga indeks reliabilitas konsistensi internal tersebut yang terbesar? Metode dalam penelitian ini digunakan *simple random sampling*. Instrumen ini telah diuji cobakan kepada 103 mahasiswa Program Studi Penelitian dan Evaluasi Pendidikan (PEP), Program Pasca Sarjana, Universitas Negeri Jakarta (PPs UNJ). Oleh karena α merupakan ambang batas bawah estimasi reliabilitas maka hasil penelitian menunjukkan bahwa susunannya adalah sebagai berikut $\alpha < \Theta < \Omega$ untuk instrumen ini. Dapat disimpulkan bahwa instrumen pengukur tingkat kepuasan mahasiswa memiliki ketepatan internal konsistensi. Uji coba selanjutnya masih diperlukan guna menstandarisasi instrumen ini.

Kata kunci: reliabilitas konsistensi internal, analisis faktor

1. PENDAHULUAN

Menurut Naga (1992) untuk pengukuran pendidikan dan psikologi mencakup beberapa hal. Pertama, mengukur ciri terpendam yang tak terlihat yang ada pada responden. Kedua, untuk mengukur ciri terpendam tersebut responden diberi stimulus berupa kuesioner atau alat ukur yang tepat. Ketiga, stimulus direspons oleh responden dengan harapan respons mencerminkan dengan benar ciri terpendam yang ingin diukur. Keempat, respons diskor dan dapat ditafsirkan secara memadai. Kemudian, perlu dipertanyakan sejauh manakah skor yang diperoleh dapat mencerminkan secara tepat ciri terpendam yang hendak diukur? Apakah instrumen yang dipakai sebagai stimulus itu mampu mengungkap secara benar ciri terpendam yang tak tampak itu? Kedua pertanyaan tersebut berkenaan dengan validitas. Sedang yang berkaitan dengan reliabilitas, apakah tanggapan yang diberikan oleh para peserta sudah dapat dipercaya untuk digunakan sebagai bahan penskoran bagi atribut psikologis itu?

Selanjutnya instrumen yang baik dan cara pengujiannya ditunjukkan oleh skema pada Gambar 1. Dari skema di atas terlihat bahwa reliabilitas konsistensi internal terdiri

dari banyak cara untuk mengukurnya. Seperti reliabilitas konsistensi internal *alpha*, *theta* dan *omega* misalnya. Manakah dari ketiga itu yang memiliki koefisien terbesar?

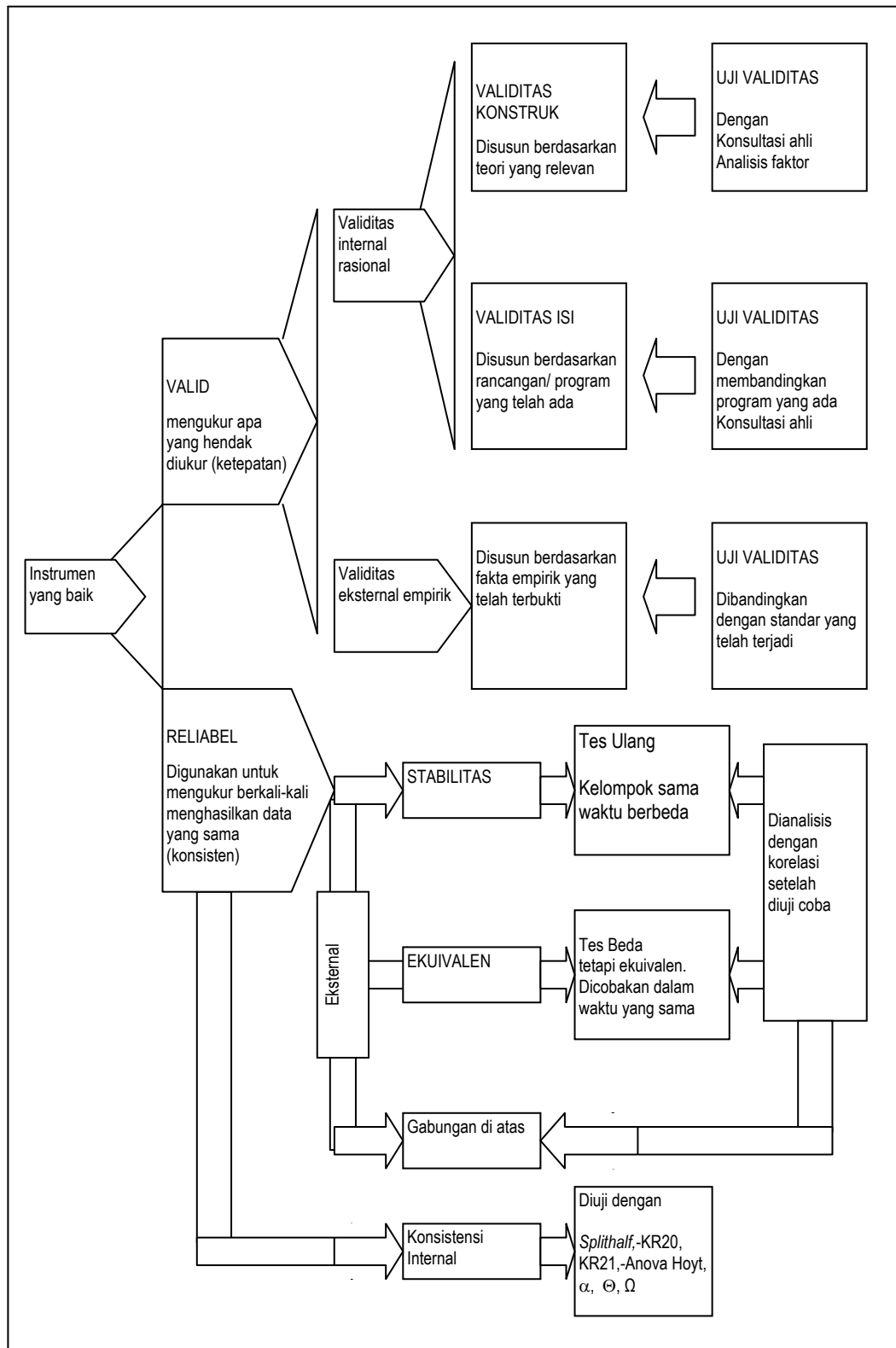
2. MATERI DAN METODE

Reliabilitas ialah konsistensi suatu instrumen mengukur sesuatu yang hendak diukur (Wirnsma, 1986). Reliabilitas menunjukkan sejauh mana hasil pengukuran dengan alat tersebut dapat dipercaya. Oleh karena itu reliabilitas merupakan indeks yang menunjukkan sejauh mana suatu alat pengukur dapat dipercaya atau dapat diandalkan. Bila suatu instrumen dipakai berulang-ulang untuk mengukur gejala yang sama dan hasil yang diperoleh relatif stabil atau konsisten, maka instrumen tersebut terpercaya. Dengan kata lain hasil pengukuran itu diharapkan sama apabila pengukuran diulang.

Makin tinggi koefisien reliabilitas, makin dekat nilai skor amatan dengan skor yang sesungguhnya, sehingga nilai skor amatan dapat digunakan sebagai pengganti komponen skor yang sesungguhnya. Ukuran tinggi atau rendahnya koefisien reliabilitas tidak hanya ditentukan oleh nilai koefisien. Tafsiran tinggi rendahnya nilai koefisien diperoleh melalui perhitungan, ditentukan juga oleh standar pada cabang ilmu yang terlibat di dalam pengukuran itu. Makin tinggi koefisien reliabilitas suatu instrumen, maka kemungkinan kesalahan yang terjadi akan makin kecil kalau orang membuat keputusan berdasarkan skor yang diperoleh dalam instrumen tersebut.

Pada umumnya pengukuran karakteristik afektif memberikan koefisien reliabilitas yang lebih rendah daripada pengukuran ranah kognitif, karena keterampilan kognitif cenderung lebih stabil daripada karakteristik afektif. Menurut Gable (1986) koefisien reliabilitas instrumen ranah kognitif biasanya kira-kira 0.90 atau lebih, sedangkan koefisien reliabilitas instrumen ranah afektif kurang dari 0.70. Koefisien reliabilitas pada taraf 0.70 atau lebih biasanya dapat diterima sebagai reliabilitas yang baik (Litwin, 1995). Sedangkan menurut Naga (1992) koefisien reliabilitas yang memadai sebaiknya terletak di atas 0.75.

Instrumen diberikan kepada sekelompok subjek satu kali lalu dengan cara tertentu dihitung estimasi reliabilitasnya, inilah yang dimaksud dengan reliabilitas konsistensi internal instrumen.



Gambar 1. Skema tentang Instrumen dan Cara-cara Pengujian Validitas dan Reliabilitas (Sugiyono, 2002)

Adapun rumus reliabilitas konsistensi internal *alpha* adalah sebagai berikut:

$$\alpha = \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[1 - \frac{\sum s_i^2}{s_x^2} \right]$$

Keterangan:

α = koefisien reliabilitas *alpha*

k = banyaknya butir dalam instrumen

$\sum s_i^2$ = jumlah variansi skor butir, dan

s_x^2 = variansi skor-skor pada semua butir soal/pertanyaan

Namun bila menggunakan pendekatan interkorelasi butir maka diperoleh rumus seperti ditulis oleh Carmines dan Zeller (1979) sebagai berikut:

$$\alpha = \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[1 - \frac{k}{2b} \right]$$

Keterangan:

α = koefisien reliabilitas *alpha*

k = banyaknya butir dalam instrumen

b = jumlah interkorelasi butir

Pendekatan interkorelasi butir yang lain yakni:

$$\alpha = \frac{k \bar{b}}{1 + (k-1)\bar{b}}$$

Keterangan:

α = koefisien reliabilitas *alpha*

k = banyaknya butir dalam instrumen

\bar{b} = rata-rata interkorelasi butir

Selain diukur dengan menggunakan rumus *alpha* di atas, di dalam penelitian ini, digunakan juga reliabilitas *theta* dengan alasan: (1) reliabilitas konsistensi internal *theta* relatif lebih tinggi dibandingkan dengan reliabilitas *alpha* maupun *omega* atau ($\alpha < \Omega < \Theta$), karena kedua reliabilitas yang disebut terakhir merupakan reliabilitas ambang batas bawah dan (2) reliabilitas *theta* merupakan kasus khusus yakni untuk memaksimalkan koefisien *alpha* (Smith, 1998).

Rumus Θ dikemukakan oleh Armor seperti disarikan oleh Yaffe (2000) telah menurunkan rumus reliabilitas *theta* sebagai analog dari rumus *alpha* sebagai berikut:

$$\Theta = \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[1 - \frac{1}{\lambda_1} \right]$$

Keterangan:

Θ = koefisien reliabilitas *theta*

k = banyaknya butir dalam instrumen

λ_1 = nilai akar karakteristik (*eigenvalue*) terbesar

Eigenvalue merupakan jumlah variansi yang dijelaskan oleh setiap faktor. Untuk koefisien Θ data diekstraksi menggunakan analisis faktor dengan metode *Principal Component Analysis (PCA)*. Analisis faktor merupakan kumpulan prosedur matematis yang kompleks guna menganalisis saling hubungan diantara variabel-variabel dan menjelaskan saling hubungan tersebut dalam bentuk kelompok variabel yang terbatas yang disebut faktor. Jadi fungsi dari analisis faktor adalah untuk menemukan variabel baru yang jumlahnya lebih sedikit dibandingkan dengan jumlah variabel asli, misalnya dari 10 (asli) diubah menjadi hanya 2 variabel atau 3 variabel baru yang tidak berkorelasi satu dengan lainnya (tidak terjadi *multicollinearities*). Variabel baru tersebut memuat sebanyak mungkin informasi yang terkandung dalam variabel asli.

Terakhir rumus Ω seperti dirumuskan oleh Carmines dan Zeller (1979) sebagai berikut:

$$\Omega = 1 - \frac{k - \sum h_i}{k + 2b}$$

Keterangan:

Ω = koefisien reliabilitas *omega*

k = banyaknya butir dalam instrumen

$\sum h_i$ = jumlah *communality* semua butir

b = jumlah interkorelasi butir

Communalities adalah jumlah variansi yang disumbangkan oleh suatu variabel dengan seluruh variabel lainnya dalam analisis. Dapat juga disebut proporsi atau bagian variansi yang dijelaskan oleh *common factor* atau besarnya sumbangan suatu faktor terhadap variansi seluruh variabel. Untuk koefisien Ω data diekstraksi menggunakan analisis faktor dengan metode *Common Factor Analysis (CFA)* atau dikenal sebagai metode *Principal Axis Factoring (PAF)*. Ternyata analisis faktor dengan berbagai

metodenya berguna untuk menghitung reliabilitas konsistensi internal terutama Θ dan Ω . Selanjutnya di sini dibahas serba singkat tentang analisis faktor.

Analisis faktor dapat digunakan untuk menguji hipotesis-hipotesis mengenai eksistensi konstruk-konstruk atau kalau tidak ada hipotesis yang dipersoalkan untuk mencari konstruk-konstruk dalam kelompok variabel-variabel. Menurut definisi yang komprehensif dari Reymond dan Joreskog seperti disarikan oleh Stapleton, analisis faktor adalah suatu istilah umum yang digunakan untuk menggambarkan sejumlah metode dan didesain untuk menganalisis interkorelasi dalam seperangkat variabel atau objek [sebagai hasil] konstruksi beberapa variabel hipotesis [atau objek] yang disebut faktor (Stapleton, 1997).

Suryanto (1988) mengemukakan bahwa analisis faktor merupakan kajian tentang kesaling-tergantungan antara variabel-variabel, dengan tujuan untuk menemukan himpunan variabel-variabel baru yang lebih sedikit jumlahnya daripada variabel semula dan yang menunjukkan mana di antara variabel-variabel semula itu sebagai faktor-faktor persekutuan. Metode tersebut dilakukan dengan bantuan komputer untuk menilai apakah butir-butir yang beragam dalam suatu survei memiliki kebersamaan dalam suatu faktor atau skala.

Analisis faktor menganalisis sejumlah variabel dari suatu pengukuran atau pengamatan yang didasarkan pada teori dan kenyataan sebenarnya dan menganalisis interkorelasi (hubungan) antar variabel tersebut untuk menetapkan apakah variasi-variasi yang tampak dalam variabel tersebut berdasarkan sejumlah faktor dasar yang jumlahnya lebih sedikit dari jumlah variansi yang ada pada variabel. Jadi pada prinsipnya analisis faktor digunakan untuk mereduksi data, yakni proses untuk meringkas sejumlah variabel menjadi lebih sedikit dan menamakannya sebagai faktor.

Sebagaimana pendekatan multivariat lainnya, analisis faktor berdasarkan asumsi tentang berperannya sejumlah besar variansi dalam suatu gejala. Selain itu berdasarkan kuadrat koefisien korelasi, analisis faktor dapat menggambarkan besarnya sumbangan variansi yang diselidiki dan secara tidak langsung memperlihatkan kemungkinan turut berperannya variansi yang belum diketahui atau yang tidak diselidiki. Dari beberapa teknik analisis faktor, ada teknik yang mengasumsikan sejumlah faktor umum yang membentuk matriks interkorelasi faktor, menunjuk variabel-variabel teramati yang membentuk hubungan dengan faktor umum sebagai pola faktor, dan akhirnya tiap-tiap variabel memiliki residu atau faktor unik atau juga biasa disebut faktor khusus.

Analisis faktor eksploratori digunakan untuk mengeksplorasi data dalam menentukan jumlah atau hakikat faktor yang terdiri dari kovariansi antara variabel ketika peneliti apriori, tidak mempunyai keadaan yang cukup untuk membentuk hipotesis tentang sejumlah faktor berdasarkan data (Stapleton, 1997). Pendekatan eksploratori digunakan untuk melihat berapa banyak faktor yang dibutuhkan untuk menjelaskan hubungan di antara seperangkat indikator dengan cara mengamati besarnya muatan faktor atau untuk mencari konstruk dalam kelompok variabel-variabel. Pendekatan ini mengasumsikan tidak adanya pengetahuan teoritis yang digunakan untuk prosedur dalam melakukan ekstraksi faktor. Oleh sebab itu prosedur ekstraksi yang dilakukan semata-mata hanya didasarkan pada data empirik dan kriteria matematik. Pendekatan ini dimanfaatkan sebagai alat untuk mencari hubungan empirik terhadap faktor teoretik.

Sementara itu analisis faktor konfirmatori merupakan model pengujian teori sebagai lawan metode pengujian umum seperti analisis faktor eksploratori. Pendekatan konfirmatori digunakan untuk menguji apakah jumlah faktor yang diperoleh secara empiris sesuai dengan jumlah faktor yang telah disusun secara teoretik atau menguji hipotesis-hipotesis mengenai eksistensi konstruk. Juga untuk menjawab pertanyaan apakah jumlah faktor yang telah berhasil diekstraksi dapat digunakan untuk menjelaskan hubungan antara indikator secara signifikan. Melalui pendekatan konfirmatori ini dapat diperoleh kesesuaian *goodness of fit test* yang signifikan dan dapat digunakan untuk mengestimasi parameter populasi melalui sampel statistik. Secara umum uji kesesuaian *goodness of fit* adalah uji χ^2 .

Penelitian ini difokuskan pada koefisien konsistensi internal terutama *alpha* (α), *theta* (Θ) dan *omega* (Ω). Berdasarkan ketiga rumus di atas, reliabilitas konsistensi internal manakah yang terbesar atau maksimum? Oleh karena koefisien reliabilitas konsisten internal karena α merupakan ambang batas bawah (Brennan, 2001; Knapp, 1991). maka pertanyaan berikutnya: Bagaimanakah reliabilitas konsistensi internal instrumen pengukur kepuasan mahasiswa sebagai pelanggan internal tersusun? Susunan $\alpha < \Omega < \Theta$ (Smith, 1998) atukah $\alpha < \Theta < \Omega$ (Greene dan Carmines, 1980)?

Metode yang dipergunakan dalam penelitian ini adalah metode survei. Survei digunakan di dalam pengumpulan data dan tidak dibuat perlakuan (*treatment*) atau pengkondisian terhadap variabel yang diteliti, namun hanya mengungkap fakta berdasarkan gejala yang ada pada siswa ataupun responden yang lainnya. Survei sampel di dalam penelitian ini merupakan survei sampel terhadap hal-hal yang tidak nyata

(*intangible*) yakni bila survei menyangkut pengukuran konstruk psikologis atau sosiologis dan membandingkan anggota-anggota populasi yang besar dimana variabelnya tidak dapat langsung diamati. Oleh karena penelitian ini mengukur konstruk psikologis secara tidak langsung dari sampel populasi, maka jelas penelitian ini disebut survei sampel terhadap hal-hal yang tidak nyata (*sample survey of intangibles*).

Instrumen dalam penelitian skala dibuat dua kolom dengan rincian, untuk kolom pertama ini merupakan kenyataan (realitas) atau fakta yang ada dan dipersepsi oleh mahasiswa terhadap kualitas pelayanan yang memuaskannya dengan lima alternatif jawaban mulai dari sangat tidak puas (STPs) nilai 1, tidak puas (TPs) nilai 2, netral (N) nilai 3, puas (Ps) nilai 4, dan sangat puas (SPs) nilai 5. Untuk kolom kedua, harapan mahasiswa terhadap institusi dengan skala lima alternatif berdasarkan tingkat kepentingan mahasiswa dengan jawaban mulai dari sangat tidak penting (STPt) nilai 1, tidak penting (TPt) nilai 2, Biasa-biasa (Bb) nilai 3, penting (Pt) nilai 4, dan sangat penting (SPt) nilai 5.

Populasi target adalah seluruh mahasiswa UNJ, sedangkan populasi terjangkau adalah seluruh mahasiswa PPs UNJ, namun yang dijadikan sampel dalam penelitian ini adalah mahasiswa Prodi PEP PPs UNJ. Sampel diambil dengan cara pengambilan sampel acak sederhana (*simple random sampling*) dan dari 200 instrumen yang disebar diperoleh atau yang kembali sebanyak 103.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Uji Coba Untuk Instrumen Kinerja

Di dalam penelitian ini data diolah menggunakan program SPSS *for Windows Version 17.0.0*. Berdasarkan analisis faktor, matriks korelasi dapat diproses selanjutnya bila telah memenuhi semua persyaratan, karena butir nomor 33 hanya memiliki *rotated loading* lebih kecil 0.300 (<0.300) maka butir tersebut tidak disertakan dalam proses. Jadi yang semula ada 33 butir maka hanya 32 butir atau item yang diproses serta bila menggunakan program ini langsung maka diperoleh indeks reliabilitas $\alpha = 0.951$.

Berdasarkan komputasi *software* SPSS, diperoleh jumlah interkorelasi butir $b = 188,437$ (Perhitungan tidak disertakan dalam makalah ini), dengan $k = 32$, koefisien α diperoleh koefisien sebesar 0.857 (Lihat perhitungan di bawah)

$$\text{Jadi } \alpha = \left[\frac{32}{32-1} \right] \left[1 - \frac{32}{2(188,437)} \right]$$

$$\alpha = 0,857$$

Berdasarkan komputasi *software* SPSS, diperoleh rata-rata interkorelasi butir $\bar{b} = 0,357$ (Perhitungan tidak disertakan dalam makalah ini), koefisien *alpha* diperoleh koefisien sebesar 0,947 (Lihat perhitungan di bawah)

$$\text{Jadi } \alpha = \frac{(32)(0,357)}{1 + (32 - 1)(0,357)}$$

$$\alpha = 0,947$$

Untuk koefisien reliabilitas konsistensi internal *theta*, berdasarkan Tabel 1 diperoleh $k = 32$ dan $\lambda_1 = 13,174$.

$$\text{Jadi } \Theta = \left[\frac{32}{32 - 1} \right] \left[1 - \frac{1}{13,174} \right]$$

$$\Theta = 0,954$$

Tabel 1. *Eigenvalue* berdasarkan *Principal Component Analysis (PCA)* Instrumen Kinerja

| Butir | <i>Eigenvalue</i> |
|-------|-------------------|
| 1 | 13,174 |
| 2 | 2,525 |
| 3 | 1,559 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 29 | 0,124 |
| 30 | 0,114 |
| 31 | 0,096 |
| 32 | 0,079 |

Extraction Method: Principal Component Analysis

Koefisien reliabilitas internal *omega* dihitung menggunakan analisis faktor metode *PAF*. Berdasarkan Tabel 2 diperoleh sebagai berikut: $k = 32$, $\sum h_i = 19,499$, b sebagai jumlah interkorelasi butir = 188,437

$$\text{Jadi } \Omega = 1 - \frac{32 - 19,499}{32 + 2(188,437)}$$

$$\Omega = 0,969$$

Tabel 2. *Communalities* Berdasarkan *Principal Axis Factoring (PAF)* Instrumen Kinerja

| Butir | <i>Communality</i> |
|-------|--------------------|
| 1 | 0,380 |
| 2 | 0,307 |
| 3 | 0,553 |
| 4 | 0,622 |
| 5 | 0,540 |
| 7 | 0,625 |
| 8 | 0,483 |
| 9 | 0,801 |
| 11 | 0,560 |
| 12 | 0,722 |
| 13 | 0,782 |
| 14 | 0,590 |
| 15 | 0,637 |
| 16 | 0,659 |
| 17 | 0,588 |
| 18 | 0,768 |
| 19 | 0,535 |
| 20 | 0,619 |
| 21 | 0,723 |
| 22 | 0,467 |
| 23 | 0,644 |
| 24 | 0,518 |
| 25 | 0,596 |
| 26 | 0,785 |
| 27 | 0,683 |
| 28 | 0,569 |
| 29 | 0,495 |
| 30 | 0,600 |
| 31 | 0,723 |
| 32 | 0,803 |

Jumlah *communality* = 19,499

Extraction Method: Principal Axis Factoring

Uji Coba Instrumen Harapan

Pada uji coba instrumen harapan ini hanya 32 butir atau item yang diproses serta bila menggunakan program ini langsung maka diperoleh indeks reliabilitas $\alpha = 0,974$.

Berdasarkan komputasi *software* SPSS, diperoleh jumlah interkorelasi butir $b = 268,676$ (Perhitungan tidak disertakan dalam makalah ini), dengan $k = 32$, koefisien α diperoleh koefisien sebesar 0,909 (Lihat perhitungan di bawah).

$$\text{Jadi } \alpha = \left[\frac{32}{32-1} \right] \left[1 - \frac{32}{2(268,676)} \right]$$

$$\alpha = 0,909$$

Tabel 3. *Eigenvalue* berdasarkan *Principal Component Analysis (PCA)* Instrumen Harapan

| Butir | <i>Eigenvalue</i> |
|-------|-------------------|
| 1 | 17,882 |
| 2 | 1,720 |
| 3 | 1,197 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 29 | 0,102 |
| 30 | 0,099 |
| 31 | 0,077 |
| 32 | 0,048 |

Extraction Method: Principal Component Analysis

Tabel 4. *Communalities* Berdasarkan *Principal Axis Factoring (PAF)* Instrumen Harapan

| Butir | <i>Communality</i> |
|-------|--------------------|
| 1 | 0,599 |
| 2 | 0,406 |
| 3 | 0,674 |
| 4 | 0,783 |
| 5 | 0,644 |
| 7 | 0,466 |
| 8 | 0,603 |
| 9 | 0,623 |
| 11 | 0,557 |
| 12 | 0,690 |
| 13 | 0,548 |
| 14 | 0,556 |
| 15 | 0,536 |
| 16 | 0,619 |
| 17 | 0,830 |
| 18 | 0,705 |
| 19 | 0,610 |
| 20 | 0,639 |
| 21 | 0,734 |
| 22 | 0,565 |
| 23 | 0,569 |
| 24 | 0,703 |
| 25 | 0,633 |
| 26 | 0,664 |
| 27 | 0,687 |
| 28 | 0,637 |
| 29 | 0,719 |
| 30 | 0,680 |
| 31 | 0,769 |
| 32 | 0,638 |

Jumlah *communality* = 20,475

Extraction Method: Principal Axis Factoring

Berdasarkan komputasi *software* SPSS, diperoleh rata-rata interkorelasi butir $\bar{b} = 0,509$ (Perhitungan tidak disertakan dalam makalah ini), koefisien *alpha* diperoleh koefisien sebesar 0,971 (Lihat perhitungan di bawah)

$$\text{Jadi } \alpha = \frac{(32)(0,509)}{1 + (32 - 1)(0,509)}$$

$$\alpha = 0,971$$

Untuk koefisien reliabilitas konsistensi internal *theta*, berdasarkan Tabel 3 diperoleh $k = 23$ dan $\lambda_1 = 17,882$.

$$\text{Jadi } \Theta = \left[\frac{32}{32 - 1} \right] \left[1 - \frac{1}{17,882} \right]$$

$$\Theta = 0,975$$

Koefisien reliabilitas internal *omega* dihitung menggunakan analisis faktor metode *PAF*. Berdasarkan Tabel 4 diperoleh sebagai berikut: $k = 32$, $\sum h_i = 20,475$, b sebagai jumlah interkorelasi butir = 268,676.

$$\text{Jadi } \Omega = 1 - \frac{32 - 20,475}{32 + 2(268,676)}$$

$$\Omega = 0,980$$

Dari semua dua uji coba tersebut dapat dirangkum sebagai berikut: (Tabel 5).

Tabel 5. Rangkuman Hasil Komputasi Reliabilitas Konsistensi Internal

| Reliabilitas | Alpha (α) | Alpha 1 (α) | Alpha 2 (α) | Theta (Θ) | Omega (Ω) |
|--------------|--------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|
| Kinerja | 0,951 | 0,857 | 0,947 | 0,954 | 0,969 |
| Harapan | 0,974 | 0,909 | 0,971 | 0,975 | 0,980 |

Interpretasi koefisien reliabilitas merupakan evaluasi kecermatan skor tes, bukan sekedar keajegannya saja. Juga dalam menginterpretasikan tingginya koefisien reliabilitas, paling tidak ada dua hal yang perlu dipahami, yakni: (1) reliabilitas yang diestimasi dengan menggunakan suatu kelompok subjek dalam situasi tertentu akan menghasilkan koefisien yang tidak sama dengan estimasi tes tersebut pada kelompok subjek lain, dan (2) koefisien reliabilitas hanyalah mengindikasikan besarnya inkonsistensi skor hasil pengukuran, bukan menyatakan langsung sebab-sebab inkonsistensi itu.

4. KESIMPULAN

Koefisien reliabilitas konsistensi internal dengan menggunakan rumus *omega* meningkat dan lebih tinggi bila dibandingkan dengan koefisien dari *alpha* Cronbach serta *theta* lebih tinggi bila dibandingkan dengan keduanya (*alpha* dan *theta*). Dengan kata lain didapat susunan koefisien reliabilitas konsistensi internal sebagai berikut $\alpha < \Theta < \Omega$ untuk instrumen pengukur tingkat kepuasan mahasiswa sebagai pelanggan internal.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Azwar, S. 1999. *Penyusunan Skala Psikologi*, Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- [2] Brennan, R. L. 2001. An Essay on the History and Future of Reliability from the Perspective of Replication, *Journal of Educational Measurement*, 38(4), 295-317.
- [3] Carmines, E. and R. Zeller. 1979. *Reliability and Validity Assessment*, London: Sage Publications.
- [3] Gable, R. K. 1986. *Instrument Development in the Affective Domain*, Amsterdam: Kluwer Nijhoff Publishing.
- [4] Greene, V. and E. Carmines. 1980. Assessing the Reliability of Linear Composites, in *Sociological Methodology 1980*, ed. K. Schuessler, San Francisco: Jossey-Bass, 160-175.
- [5] Isaac, S. and W. B. Michael. 1985. *Handbook in Research and Evaluation: For Education and the Behavioral Sciences*, San Diego: Edits Publishers.
- [6] Knapp, T. R. 1991. Coefficient Alpha: Conceptualizations and Anomalies." *Research in Nursing and Health*, 14, 457-460.
- [7] Litwin, M. S. 1995. *How to Measure Survey Reliability and Validity*, London: Sage Publications.
- [8] Naga, D. S. 1992. *Teori Sekor*, Jakarta: Gunadarma Press.
- [9] Smith, L. 31-Mar-1998. *Measurement Theory*, Available at <http://www.curtin.edu.au/psych/units/04686/mt2.htm>.
- [10] Sugiyono. 2002. *Statistika Untuk Penelitian*, Bandung: CV Alfabeta.
- [11] Suryanto. 1988. *Metode Statistika Multivariat*, Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- [12] Stapleton, C. D. January, 1997. *Basic Concepts and Procedures of Confirmatory Factor Analysis*, Available at <http://ericae.net/ft/tamu/Cfa.htm>, January.

- [13] Wiersma, W. 1986. *Research Methods in Education: An Introduction*, New York: Allyn and Bacon, Inc.
- [14] Yaffe, R. A. 6 December 2000. *Common Correlation and Reliability Analysis With SPSS for Windows*, Available at <http://www.nyu.edu/its/socsci/Docs/correlate.html>.

MATEMATIKA SEBAGAI AKTIFITAS MANUSIA

Agung Prabowo
Program Studi Matematika - Fakultas Sains dan Teknik
Universitas Jenderal Soedirman – Purwokerto
e-mail: agung_nghp@yahoo.com

ABSTRACT. This paper was based on literature review with a background research on how mathematics is transmitted as a civilization, developed, conserved and handed down through the horizontal and vertical transmission from generation to generation (between generations) by all civilized nations in the world so that today mathematics has become a global human activity. This indication can lead to new understanding (reconstruction) mathematics raised by Hans Freudenthal in his credo that very famous and down to earth in which mathematics as a human activities. Exploration of the meaning contained in the credo is presented in the next section and as a cover presented the conclusions of the paper throughout this paper.

Keywords: human activities, culture, mathematics, transmission, civilization, inheritance

1. PENDAHULUAN

Sebagaimana terungkap dalam sejarah perkembangan matematika, ternyata matematika merupakan hasil dari aktifitas manusia, yang antara lain pada awal mula perkembangannya bangsa Mesir menuliskannya dalam *papyrus* yang sekarang terkenal sebagai *the Moscow Papyrus* dan *the Rhind Papyrus* dan bangsa Babilonia dan Sumeria menuliskan matematika di atas tablet-tablet tanah liat dan tulang. Sementara itu, bangsa Yunani sudah menggunakan sarana berupa kertas untuk menuliskan matematikanya.

Menurut Freudenthal^[2], matematika adalah aktifitas manusia. Catatan sejarah di atas mendukung pendapat Freudenthal, sehingga tidak berlebihan jika dikatakan spesies manusia adalah *homo mathematicus*. Menurut Sumarmo^[1] setiap manusia dalam aktifitas hidupnya akan selalu memiliki keterlibatan dengan matematika, mulai dari bentuk yang sederhana dan rutin sampai pada bentuknya yang kompleks. Aktifitas sederhana dan rutin antara lain dapat dicontohkan berupa membilang dan menghitung. Namun demikian, terdapat aktifitas matematika yang hanya dapat dikerjakan oleh sekelompok orang tertentu saja, seperti *mathematical connection* dan *mathematical communication*. Gambaran ini menjelaskan bahwa setiap manusia melakukan aktifitas bermatematika atau dengan kata lain bermatematika adalah aktifitas normal dan keseharian dalam hidup manusia. Dengan demikian, karena aktifitas manusia selalu berubah dan tidak statis, maka aktifitas

bermatematika juga bersifat dinamis dan aktif dengan harapan selalu dapat dikonstruksi kebaruan-kebaruan dalam matematika yang kecepatan evolusinya semakin hari semakin cepat.

Oleh karena matematika adalah hasil akal budi (pikiran) manusia dalam aktifitasnya sehari-hari, maka matematika adalah produk budaya, sebagaimana diungkapkan oleh Sembiring^[10], "Matematika adalah konstruksi budaya manusia". Selain itu matematika juga perlu dilanggengkan dan perlu menjadi milik generasi yang akan datang. Bagaimana matematika yang sudah dikreasi pada ribuan tahun yang lalu dapat diawetkan dan diwariskan? Bagaimana matematika yang baru dikreasi dapat diawetkan dan diwariskan antar generasi dan sesama generasi sehingga matematika akan menjadi milik global? Jawabannya diberikan oleh Blackmore melalui pembelajaran kultural.

Menurut Blackmore^[7], terdapat tiga jenis pembelajaran yang dilakukan manusia yaitu pembelajaran individual, sosial, dan kultural. Dalam pembelajaran individual manusia belajar dengan cara langsung menyesuaikan diri dengan lingkungannya seperti belajar dengan pengkondisian yang dilakukan oleh Pavlov dan pengkondisian operan oleh Skinner. Dalam pembelajaran sosial, proses belajar dibantu orang lain, sedangkan dalam proses pembelajaran kultural diperlukan kemampuan meniru yang meliputi (1) peniruan perbuatan secara langsung, (2) pengajaran melalui kata-kata, dan (3) perlunya kerjasama antar pribadi. Melalui pembelajaran kultural inilah akan terjadi penularan *meme* dari satu otak ke otak lain, yang tentunya pada saat pembelajaran kultural tersebut berlangsung otak setiap individu yang belajar harus dalam keadaan aktif (*on*). Gagasan pembelajaran kultural menjelaskan bagaimana peran *meme* dalam penularan matematika antar generasi dan sesama generasi. Tidak hanya matematika, tetapi juga hasil-hasil budaya lainnya.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Manusia adalah makhluk yang bertanya, artinya manusia tidak mau menerima begitu saja, baik keadaan dirinya maupun lingkungannya. Apabila yang diketahuinya tidak sesuai dengan apa yang diinginkannya, ia akan berusaha keras mengubahnya, dan jika tidak mungkin manusia akan mengubah dirinya dan menyesuaikan diri. Inilah kunci peradaban, selalu berusaha menjadi lebih baik dan maju, yang terdiri dari proses transformasi (perubahan) dan adaptasi (penyesuaian). Jadi peradaban adalah proses perubahan dan penyesuaian diri.

Kata peradaban dapat disejajarkan dengan kata asing *civilization* yang dipakai untuk bagian-bagian dan unsur-unsur dari kebudayaan yang halus dan indah seperti

kesenian, ilmu pengetahuan, sopan santun dan sistem pergaulan. Istilah peradaban juga sering dipakai untuk menyebut suatu kebudayaan yang mempunyai sistem teknologi, seni bangunan, seni rupa, sistem kenegaraan, dan ilmu pengetahuan yang maju dan kompleks.

Kebudayaan berasal dari bahasa Sanskerta *buddhayah*, yang merupakan bentuk majemuk dari kata *budhi*, yang berarti budi atau akal. Jadi kebudayaan adalah hal-hal yang berkaitan dengan budi dan akal. Menurut Zoetmulder^[5] kata kebudayaan berkembang dari kata majemuk *budi-daya*, yang berarti daya dari budi, kekuatan dari akal. Kebudayaan dalam istilah Inggrisnya adalah *culture* yang berasal dari kata Latin *colere* yang berarti mengolah, mengerjakan terutama mengolah tanah atau bertani. Dari arti ini berkembang arti *culture* yaitu segala daya dan usaha manusia untuk merubah alam.

Sebagai sebuah konsep, kebudayaan dapat diartikan baik secara sempit maupun luas. Dalam arti yang sempit, konsep kebudayaan adalah pikiran, karya, dan hasil karya manusia yang memenuhi hasratnya akan keindahan, atau secara singkat kebudayaan adalah kesenian. Menurut Koentjaraningrat^[5], konsep kebudayaan adalah total dari seluruh pikiran, karya, dan hasil karya manusia yang tidak berakar kepada nalurinya dan yang karena itu hanya bisa dicetuskan oleh manusia sesudah suatu proses belajar. Konsep kebudayaan ini sangat luas dan meliputi hampir seluruh aktifitas manusia, sehingga karena luasnya cara untuk dapat menganalisa kebudayaan suatu bangsa adalah dengan memecahnya ke dalam berbagai unsur yang disebut unsur-unsur kebudayaan yang universal. Menurut Koentjaraningrat^[5] unsur-unsur universal ini merupakan isi dari seluruh kebudayaan yang ada di dunia, yaitu: (1) sistem religi dan upacara keagamaan (ritus), (2) sistem dan organisasi kemasyarakatan, (3) sistem pengetahuan termasuk matematika di dalamnya (4) bahasa, (5) kesenian dan sastra, (6) sistem mata pencaharian hidup, dan (7) sistem teknologi dan peralatan (artefak teknologi). Ketujuh unsur tersebut seringkali dinamakan Tujuh Semesta Kebudayaan. Seluruh unsur tersebut dapat dibagi lagi ke dalam sub-sub unsurnya. Urutan unsur-unsur Tujuh Semesta Kebudayaan di atas menggambarkan kekontinuan dari unsur-unsur yang paling sukar berubah ke unsur-unsur yang lebih mudah berubah.

Menurut sejarahnya, perkembangan matematika bersifat evolutif, akumulatif dan dikembangkan serta disumbang oleh berbagai bangsa di seluruh dunia. Seringkali, perkembangan matematika pada suatu bangsa akan menemui keruntuhan, tetapi sebelum keruntuhan itu benar-benar terjadi, telah ada bangsa lain yang siap untuk meneruskan perkembangannya. Hal ini menunjukkan bahwa perkembangan matematika terjadi secara

kontinu dan tersusun dari kepingan-kepingan yang dihimpun oleh banyak bangsa dan kebudayaan selama berabad-abad.

Memahami matematika yang dikembangkan oleh bangsa-bangsa beradab, tidak dapat terlepas dari konsep kebudayaan yang didefinisikan oleh Koentjaraningrat^[5]. Matematika adalah ilmu pengetahuan dan dalam konsep kebudayaan, ilmu pengetahuan merupakan sistem pengetahuan yang merupakan unsur-unsur kebudayaan yang universal. Selain itu, karena ilmu pengetahuan adalah bentuk halus dari kebudayaan yang disebut peradaban, maka matematika sebagai ilmu pengetahuan adalah juga suatu peradaban.

Dalam upayanya memahami kebudayaan, para ilmuwan mereduksi budaya sebagai gejala biologis berupa adaptasi manusia terhadap lingkungannya. Jika makhluk biologis lain menyesuaikan diri secara morfologis dan fisiologis melalui reproduksi genetik yang sangat lambat, berbeda halnya dengan manusia. Selain beradaptasi melalui reproduksi genetik, manusia juga beradaptasi melalui perubahan lingkungan, yang dikenal sebagai peradaban, yang berubah semakin lama semakin dipercepat. Ini berarti, selain menjalani adaptasi secara morfologis dan fisiologis, manusia juga menjalani adaptasi secara kultural sehingga adaptasi yang dilakukan manusia tidak saja merupakan reproduksi genetik tetapi juga reproduksi budaya.

Untuk memahami reproduksi budaya, banyak biolog yang mencoba mereduksi unit-unit budaya itu menjadi konfigurasi dari unit-unit perilaku hewani yang disebut naluri. Pendekatan ini disebut sebagai sosiobiologi, yang menerangkan unit-unit budaya sebagai konfigurasi dari unit-unit informasi pada sistem reproduksi biologis yang disebut gen. Dengan demikian, gen merupakan alat reproduksi genetik sekaligus alat reproduksi budaya, sehingga kebudayaan hanya dipandang sebagai fenomena permukaan dari fenomena biologis yang lebih dalam. Implikasinya, kebudayaan bukan lagi karya cipta bebas umat manusia. Konsep yang seperti ini tidak selaras dengan konsep kebudayaan yang dirumuskan oleh Koentjaraningrat.

Tidak semua biolog bersepakat dalam hal ini. Pendekatan sosiobiologi bukanlah satu-satunya. Setidaknya seorang biolog Inggris bernama Richard Dawkins sama sekali tidak setuju. Menurut Dawkins^[7], evolusi budaya adalah baru dalam evolusi manusia dan evolusi budaya manusia terlalu cepat untuk diterangkan dengan konsep gen (*gene*). Oleh karena itu, diperlukan konsep baru yaitu *meme* (baca: *mim*) yang merupakan analogi kultural bagi *gene* yang biologis. Jika disepakati, maka dalam bahasa Indonesia kata *meme* dapat ditulis dan dibaca mem. Istilah *meme* sengaja dicari agar bersajak dengan kata *gene*. Dalam konsep Dawkins, dengan adanya *mem* maka evolusi budaya terbebas dari

keterkungungannya dalam biogenetika, sehingga kebudayaan benar-benar merupakan karya bebas umat manusia.

Apakah itu *meme* (mem)? Menurut Dawkins^[7], istilah *meme* berasal dari bahasa Yunani *mimeme* yang berarti sesuatu yang menyerupai/menirukan. Mem adalah karakter budaya atau unit transmisi kultural yang berupa suatu unit dari informasi budaya yang dapat menjalani mutasi, *crossover* (persilangan), adaptasi, kombinasi dan seleksi oleh alam. Mem dapat diwariskan secara vertikal dari satu generasi ke generasi lainnya (dari orang tua/nenek moyang kepada anak/cucunya) atau secara horisontal melalui akuisisi budaya (melalui teman sebaya, media informasi, dan iklan) dengan alat nongenetik misalnya melalui proses imitasi atau peniruan.

Dengan demikian, mem adalah pasangan budaya dari gen, dan ide mengenai sebuah mem merupakan suatu ide yang menyerupai sebuah gen, yang bersifat dapat melakukan replikasi dan berkembang. Mem merupakan replikator yaitu makhluk yang dapat memperbanyak diri, dan diturunkan (diwariskan) dalam proses pembelajaran budaya melalui peniruan alias imitasi. Tempat hunian mem adalah otak manusia, yang meskipun beratnya hanya 2% dari berat tubuh namun menggunakan 20% dari seluruh energi yang dihasilkan tubuh. Mem meloncat dari satu otak ke otak manusia lain melalui proses peniruan. Bagaimana hal ini terjadi adalah mirip dengan bagaimana sebuah pesan *sms* yang dikirimkan sebuah *handphone* akan segera diterima oleh *handphone* lainnya, persis dengan hasil peniruan (*copy*) yang tepat sama.

Contoh-contoh yang diberikan Dawkins^[7] sebagai mem adalah unsur-unsur budaya seperti lagu, ide/gagasan, ucapan populer, mode busana, cara-cara membuat keramik dan membuat bangunan arsitektur. Semua unsur budaya ini terletak dalam otak manusia, seperti halnya gen yang terletak dalam sel organisme. Mem menyebar berupa ide-ide ke dalam benak individu sasaran, menyusup melalui lirik lagu-lagu, gosip, takhayul, kepercayaan dan lain-lain. Wujud-wujud dari mem dapat sangat beragam, antara lain berupa ideologi, hukum, filsafat, teknologi, artefak teknologi (mobil, tulisan, candi, senjata), tradisi termasuk di dalamnya agama, syair dan hasil-hasil kesusasteraan, cerita, musik, tarian, teori termasuk ilmu pendidikan, fiksi ilmiah, kedokteran dan aturan keselamatan seperti tidak boleh berenang setelah makan, konsep yang populer seperti kebebasan, aturan kepemilikan, ego (narsisme), sifat mementingkan orang lain (altruisme), kebiasaan, suasana hati dan perasaan, nilai-nilai/pandangan hidup dan perilaku/tindakan yang dapat ditransfer antar individu.

Di dalam gagasan sendiri terkandung mem sebab mem dapat terkandung pada sebuah kata ataupun terkandung sepanjang pembicaraan dari kata pertama yang diucapkan sampai kata yang terakhir. Gagasan yang demikian akan membentuk mem yang lebih besar yang disebut kumpulan mem atau *memepleks* (disebut juga *memekompleks*), misalnya kepercayaan dan doktrin-doktrin politik. *Memepleks* yang mengandung mem yang saling mendukung akan lebih sukses dalam menjalani evolusi. *Memepleks* juga berperan penting dalam menyaring mem-mem yang baru. Jika mem yang baru cocok dengan *memepleks* maka dapat bergabung, misalnya *memepleks* dari suatu kepercayaan membuat keseragaman cara beribadah.

Mem bereplikasi dengan sendirinya dalam bentuk peniruan/imitasi dan membentuk suatu budaya, dengan cara yang mirip seperti penyebaran virus, tetapi terjadi dalam ranah budaya sehingga mem sering disebut sebagai virus pikiran (*virus of the mind*). Keberadaan mem menyebabkan terjadinya evolusi budaya dan sebagai unit terkecil dari evolusi budaya.

Dawkins^[7], memakai istilah mem untuk mendefinisikan lahirnya budaya dengan anggapan terjadinya budaya sebagai bentukan dari banyak replikator. Hipotesisnya adalah manusia seharusnya melihat kelahiran budaya berasal dari banyaknya bentukan replikator, yang umumnya mereplikasi melalui hubungan dengan manusia, yang telah berevolusi sebagai peniru (*peng-copy*) informasi maupun perilaku yang efisien, walaupun tidak sempurna. Mem tidak selalu terkopi secara sempurna, bahkan dapat hilang, tercampur atau bahkan berubah dikarenakan pengaruh dari ide lainnya, sehingga menjadikan suatu mem yang baru. Mem yang baru tersebut dapat menjadi lebih baik (atau lebih buruk) sebagai replikator dibandingkan dengan *meme* sebelumnya.

Mem berkembang dengan cara seleksi alam, mirip prinsip evolusi Darwin, sehingga cara kerja mem mirip dengan cara kerja gen. Gen makhluk hidup akan menggandakan diri terus menerus untuk menjaga kelangsungan hidup spesiesnya. Demikian juga dengan mem, bekerja dengan prinsip yang sama namun pada tataran ide-ide dan nilai-nilai. Para mem juga saling bersaing untuk hidup abadi melalui proses seleksi yang ketat. Mem yang gagal melewati proses seleksi alam akan punah, sementara yang bertahan akan hidup panjang (atau abadi), menyebar, dan berkembang melalui proses variasi, mutasi, dan kompetisi.

Dengan mem sebagai unit terkecil dalam budaya muncul pertanyaan yang menarik bagaimana suatu gagasan tertular dari seseorang ke yang lain tanpa memperhatikan konten/isi gagasan tersebut, sehingga proses penularan tersebut dapat terjadi untuk

sembarang jenis budaya dan pengetahuan. Dalam jangka waktu tertentu, mem ditularkan melalui replikasi baik secara vertikal maupun horisontal. Mem yang ditularkan menyebabkan pembentukan kebiasaan (*habitual*) seseorang atau sekelompok orang dalam suatu masyarakat. Sebagai contoh adalah kebiasaan (mode) berpakaian yang ditularkan seorang artis pada akhirnya mempengaruhi banyak orang. Dengan demikian penularan mem pada akhirnya akan membentuk budaya dan pengetahuan tertentu, secara lebih global/luas. Saat ini, dengan piranti televisi dan internet, mem dengan sangat cepat membentuk suatu budaya global sehingga sepakbola menjadi budaya seluruh dunia.

Jika gen adalah molekul-molekul khusus yang menyimpan informasi biologis, maka menurut Blackmore^[7], penyimpanan informasi kultural oleh mem dilakukan di dalam konfigurasi jaringan sel-sel saraf di dalam otak yang bernama neuron. Neuron tidak bisa bekerja sendiri, tetapi membutuhkan media penyimpanan informasi di luar tubuh manusia seperti lukisan di dinding gua, lembaran *papyrus*, lembaran lontar, buku, pita rekaman, CD dan DVD. Neuron-neuron tersebut tidak hanya bekerja dalam tubuh manusia tetapi juga terjadi komunikasi antar neuron antar tubuh yang antara lain terjadi melalui penggunaan telegraf, telepon, radio, televisi, faksimili, dan internet. Akibatnya lalu lintas mem antar manusia semakin lama semakin cepat.

Semua produk matematika dapat dipandang sebagai budaya. Kebudayaan adalah hal-hal yang berkaitan dengan budi dan akal, sehingga kebudayaan merupakan total dari seluruh pikiran, karya, dan hasil karya manusia yang tidak berakar kepada nalurinya, tetapi hanya bisa dicetuskan oleh manusia sesudah suatu proses belajar. Ciri utama matematika^[6] adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan yang diperoleh merupakan akibat logis dari kebenaran sebelumnya. Dengan demikian belajar matematika berarti belajar bernalar secara deduktif. Oleh karena matematika diperoleh manusia melalui aktifitasnya dalam bermatematika secara deduktif dengan menggunakan akal budi setelah melewati proses belajar maka matematika adalah produk budaya. Selanjutnya, mem sebagai makhluk replikator yang memperbanyak diri, dengan melalui proses peniruan atau imitasi dalam pembelajaran budaya, bertindak untuk mengawetkan dan mewariskan matematika sebagai produk budaya, agar matematika tetap dapat dikonsumsi oleh generasi yang lahir kemudian.

Kredo dalam pendidikan matematika yang saat ini sedang menjadi isu aktual adalah *mathematics as a human activities* (matematika sebagai aktifitas manusia). Kredo ini pertama kali dimunculkan oleh Hans Freudenthal (1905-1990), sebagai penggagas pertama *Realistic Mathematics Education* (RME). Kredo tersebut merupakan satu dari dua

pandangan utama mengenai matematika dalam konteks RME yang dijadikan sebagai landasan filosofis RME, seperti yang dirumuskan oleh Freudenthal^[2] yaitu *mathematics must be connected to reality* (matematika harus terkait dengan realitas) dan *mathematics as a human activities* (matematika adalah aktifitas manusia). Kedua pandangan ini merupakan dasar, semangat dan ruh yang menjiwai RME.

Kemunculan credo matematika sebagai aktifitas manusia menandai lahirnya RME dan terjadinya pergeseran cara pandang terhadap matematika sebagai wujud dari dekonstruksi terhadap aliran formalisme dalam matematika. RME merupakan reaksi terhadap aliran formalisme yang menekankan pada formalisasi dan abstraksi sebagai hasil kerja dari Nicolas Bourbaki yang sangat dominan pada era 1950-1960^[3]. Bourbaki – sebagai penerus David Hilbert-- berhasil mengembangkan gaya formalisme dalam matematika antara lain dalam teori himpunan, aljabar, dan analisis. Pengaruh aliran formalisme dalam pendidikan matematika di sekolah dapat dirasakan dalam bentuk *the new math* yang mengemas matematika menggunakan teori himpunan dan lebih diperkenalkan/disajikan dalam bentuk kaidah-kaidah deduktif. Formalisme berharap agar setiap orang menjadi matematikawan atau setidaknya mampu berpikir seperti matematikawan, tanpa harus menjadi matematikawan, dan ini merupakan tuntutan yang cukup berlebihan.

Munculnya credo tersebut dimaksudkan untuk menawarkan cara pandang baru terhadap matematika, serta bagaimana manusia memandang dan memanfaatkan matematika. Melalui RME, anggapan bahwa matematika sulit hendak diminimalisir melalui penanaman kesungguhan untuk kerja keras dan serius dalam belajar matematika, sehingga dalam diri setiap siswa tumbuh semangat dan antusiasme untuk menghargai matematika. Oleh karena itu, penting bagi siswa untuk memiliki pandangan bahwa matematika adalah subyek yang penting untuk dipelajari serta bermanfaat dalam kehidupannya. Menurut Sabandar^[9] pentingnya hal ini mengisyaratkan bahwa kemampuan kognitif tidak akan berkembang optimal manakala aspek afektif tidak menyertai dalam pembelajaran matematika.

Pendekatan RME adalah pendekatan dalam matematika yang memandang penting budaya suatu masyarakat yang mempelajari matematika. Hal ini disebabkan RME memandang matematika sebagai salah satu produk budaya suatu masyarakat sehingga pengembangan matematika dapat berjalan sinergis dengan unsur-unsur budaya lokal masyarakat yang sedang intens mempelajari matematika. Ini berarti RME memfasilitasi untuk tumbuh dan berkembangnya *etnomathematics*. Dengan demikian, matematika perlu

diperkenalkan kepada siswa sebagai bagian dari aktifitas hidupnya dan agar matematika dikembangkan sesuai dengan konteks masyarakat sehingga matematika memiliki *human values*.

Budaya sebagai suatu jenis realitas fisik, dalam RME dapat diangkat sebagai permasalahan kontekstual (*contextual problems*) yang digunakan sebagai *starting point* dalam pembelajaran matematika. Dengan demikian, dalam RME masih banyak ruang bagi matematika untuk berkembang sesuai dengan tuntutan budaya setempat dan tuntutan jaman. Gagasan mengenai matematika yang dipraktekkan oleh suatu komunitas masyarakat tertentu yang diangkat sebagai permasalahan kontekstual serupa dengan gagasan *etnomathematics*. Melalui *etnomathematics*, banyak matematika yang dipraktekkan suatu komunitas masyarakat (matematika informal) dapat diangkat menjadi matematika formal, antara lain satuan hitung *kodi* dan *tumbak* dalam budaya Sunda serta *lusin* dan *ubin* pada budaya Jawa. Selain mengangkat ikon-ikon budaya lokal ke tataran matematika formal, ikon-ikon tersebut juga akan terus hidup dalam masyarakat pembentuk/penggunanya. Diharapkan, RME dapat berkontribusi dalam mengembangkan *etnomathematics* yang dengan menggunakan konteks sosiobudaya masyarakat setempat maka matematika informal yang telah dimiliki dan digunakan oleh anggota masyarakat secara turun temurun dapat diangkat menjadi matematika formal. Namun demikian, tidak semua produk budaya atau konteks nyata yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dapat diangkat menjadi *starting point* dalam pembelajaran matematika. Sebagai contoh adalah mata uang rupiah yang saat ini digunakan tidak dapat dipakai untuk membelajarkan siswa SD dalam operasi penjumlahan di bawah 10. Konteks yang sama masih dapat dilakukan di negara lain, seperti Singapura. Ini berarti harus dipilih konteks yang tepat sebagai pengetahuan informal matematika untuk mengkreasi dan mengarahkan siswa kepada tercapainya pengetahuan formal.

Menurut Freudenthal, pendidikan matematika sebaiknya dijiwai oleh semangat bahwa matematika adalah aktifitas manusia sehingga matematika tidak dapat disampaikan sebagai sesuatu yang sudah siap (*ready-made-system*) atau mengajarkannya dengan menerapkan aturan-aturan dan prinsip-prinsip matematika. Freudenthal^[4] menyebut seluruh aktifitas matematika yang dilakukan manusia dengan istilah matematisasi/pematematikaan (*mathematizing*) dan aktifitas ini merupakan cara untuk menemukan kembali matematika (*reinvention mathematics*).

Dengan demikian, Freudenthal tidak mengagungkan cara-cara pembelajaran matematika melalui metode deduktif, --yang menyembunyikan perjuangan dan

petualangan, yang mengutamakan prosedur pembuktian, yang menunjukkan kemutlakan kebenaran teorema matematika, dan yang mendewakan matematika sebagai kebenaran tidak terbantahkan dan dikeramatkan— tetapi lebih menekankan pada penggunaan metode induktif dalam menemukan kembali pengetahuan matematika. Sebelum menggunakan matematika, siswa dibimbing untuk menemukan sendiri matematika dengan cara menemukan kembali semua jenis matematika yang telah ditemukan sebelumnya. Dengan cara seperti ini siswa akan mengalami petualangan dan memperoleh pengalaman menyelesaikan tantangan matematika serta menjivai matematika (*amorfaty*). Menurut Mason^[8] pemberian tuntunan, tantangan, dan *scaffolding* harus merupakan upaya yang dilakukan secara sadar sebagai bentuk kepekaan terhadap situasi yang dihadapi dan dalam rangka memberikan respon yang tepat. Untuk itulah, Sabandar^[9] menekankan pentingnya para guru untuk melakukan *noticing* (pencermatan) guna menumbuhkan kepekaan (*sensitivity*) dan memberikan rasa percaya diri dan motivasi yang kuat kepada siswa untuk berhasil.

Belajar matematika harus dilakukan dengan mempraktekkan (*learning by doing*) matematika sebagai aktifitas normal manusia yang diawali dengan memberikan kerangka situasional yang relevan dengan masalah yang dihadapi siswa. Dengan demikian belajar matematika pertama-tama harus selalu terkait dengan konteks dan masalah yang beragam untuk membentuk dan mengembangkan kemampuan siswa dalam mengeksplorasi konsep matematika. Pengenalan geometri non-Euclid (geometri hiperbolik dan geometri eliptik) yang dimulai dengan hasil-hasil kongkrit dari geometri tersebut diyakini dapat merangsang siswa untuk terus beradaptasi dengan matematika. Hasil-hasil yang diperoleh Poincare dan Escher dalam geometri hiperbolik dapat dipakai untuk memberikan gambaran mengenai manfaat/kegunaan matematika, terutama dari sisi keindahan matematika.



Gambar 1

Tangan Menggambar Tangan
http://www.kerpoof.com/edu/.../Escher/MC_Escher_Relativity_Introduction.ppt



Gambar 2

Horsemen
<http://www.baermath.googlepages.com/tessellations.ppt>



Gambar 3

Devi's or Angles?
<http://nsfmli.rice.edu/presentations/Non-Euclidean%20Geometry%20by%20Ricardo%20Chapa%20&%20Daphne%20Hoard.pdf>

Hasil-hasil dari matematika yang mempunyai nilai seni ternyata juga mampu meningkatkan kesejahteraan manusia sekaligus mengangkat gengsi dan berkembang menjadi *style* berbusana. Misalnya penggunaan geometri fraktal untuk menciptakan batik fractal (kontemporer). Batik dan batik fraktal memiliki dimensi sosial dan budaya. Melalui batik dapat diketahui karakter, jiwa, kebudayaan, dan peradaban masyarakat yang mengembangkannya. Misalnya, batik Jogja dan Solo mempunyai dimensi 1,5 sementara batik Cirebon mempunyai dimensi 1,3. Ini berarti masyarakat Cirebon memiliki karakter yang lebih dinamis dibanding masyarakat Jogja dan Solo. Meskipun Jogja dan Solo dan Cirebon adalah ketiganya adalah keraton, tetapi perbedaan letak geografis lebih mewarnai karakter budaya masyarakatnya^[12].

Kata kunci dalam credo Freudenthal bahwa matematika adalah aktifitas manusia antara lain induktif, pengalaman dan realitas, konstruksi, aktif, aktifitas, manusia, budaya, kreatif, menemukan kembali, *invention/discovery*, dinamis dan pewarisan. Berikut ini, berdasarkan kata kunci yang telah diidentifikasi, akan dikupas makna yang terkandung di dalam credo tersebut.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti pandangan filosofis matematika sebagai *tool* yang *ready for use* sudah ditinggalkan. Guru tidak lagi mengajarkan matematika secara mekanistik dan membiarkan siswa bersikap pasif dan matematika tidak lagi diajarkan sebagai produk jadi yang siap pakai berupa rumus atau algoritma.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika dipahami tidak sebagai bentuk yang sudah jadi dan bisa langsung digunakan. Sebelum matematika digunakan, matematika harus diperoleh terlebih dahulu dengan suatu kegiatan yang disebut matematisasi. Kegiatan matematisasi ini dapat dilakukan oleh semua manusia yang berbudaya tanpa terkecuali, apapun budayanya. Hasil dari kegiatan matematisasi ini adalah matematika. Sungguhpun demikian, matematika yang diperoleh dengan cara matematisasi dalam pendekatan RME bukanlah suatu produk baru, tetapi produk lama yang telah diketemukan oleh para matematikawan dan para pengguna (*user*) matematika.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika harus dekat dengan pengalaman manusia yang mempelajarinya dan relevan terhadap masyarakat dimana manusia yang mempelajarinya berada. Dengan demikian, matematika adalah aktifitas kemanusiaan yang mengajarkan nilai-nilai kemanusiaan (*human values*).

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika mempunyai keterkaitan dengan pengalaman dalam kehidupan sehari-hari dan memberikan manfaat yang sangat besar bagi kesejahteraan umat manusia.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti pengalaman personal tiap individu manusia menjadi unsur penting dalam mengkonstruksi pengetahuan matematis dan menjadi *starting point* dalam pembelajaran matematika.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika adalah suatu konstruksi budaya manusia^[10]. Matematika perlu menjadi milik generasi yang akan datang. Matematika perlu dilanggengkan dan diwariskan. Proses pewarisan matematika menurut RME dilakukan tidak dengan cara menstransfer, tetapi dengan cara menemukannya kembali. Hal ini menunjukkan sangat berharganya aktifitas menemukan kembali (*reinvention/discovery*).

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika adalah hasil akal budi manusia, sehingga matematika merupakan produk budaya. Mungkin umur matematika setua usia umat manusia, sebab begitu manusia tercipta saat itu juga matematika menjadi aktifitas keseharian manusia. Matematika, dalam sejarahnya, sudah dikreasi selama ribuan tahun yang lalu oleh berbagai bangsa dengan latar belakang budaya yang berbeda-beda.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti belajar matematika dilakukan lewat aktifitas rekonstruktif yang berakar pada realitas dan konteks sosiokultural manusia yang mempelajarinya. Aktifitas rekonstruktif tersebut dimaksudkan untuk mendukung diperolehnya *mathematical reinvention* melalui proses pembimbingan dan pengarahan (*guided*).

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika dipelajari dan digunakan oleh setiap manusia di sudut-sudut kota, *super market*, galeri seni, museum, pelosok desa, pasar dan ladang-ladang pertanian. Matematika tidak hanya berhenti dipelajari dan digunakan di ruang kelas atau laboratorium. Setiap hari manusia selalu berkontak dengan matematika, hanya saja banyak yang menggunakan matematika dalam aktifitasnya sehari-hari namun tidak atau kurang menyadarinya. Mereka memahami matematika baru dalam taraf *knowing to know*.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti *Realistic Mathematics for all*. Matematika realistik adalah milik seluruh bangsa di dunia, matematika adalah milik seluruh manusia, tanpa terkecuali. Matematika adalah sahabat manusia dan bersahabat dengan matematika sungguh menyenangkan. Setiap individu dibebani tugas untuk memperkenalkan (mendakwahkah) matematika kepada seluruh umat manusia dengan cara yang menyenangkan, ramah dan bersahabat.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti setiap siswa tanpa memandang ras, budaya dan jenis kelamin mampu memahami dan mengerjakannya. Matematika bersifat lintas jender, bangsa, ras, suku, marga dan kasta.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti seluruh manusia, tanpa terkecuali diyakini mampu belajar matematika. Keyakinan ini tidak serta merta menyatakan bahwa seluruh manusia mampu dan sanggup belajar seluruh matematika, sebab pada dasarnya RME dalam implementasinya selalu mempertimbangkan tingkat kemampuan individu yang mempelajarinya.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika tidak hanya menjadi dominasi para ahli matematika. Semua orang dapat menjadikan matematika sebagai aktifitas hidup sehari-hari, sesuai kemampuannya. Mereka yang berkemampuan lebih dituntut untuk memahami matematika yang tinggi. Setiap manusia akan menggunakan matematika sepanjang hayat hidupnya. Matematika hendaknya dirasakan seperti kebutuhan hidup harian seperti beribadah, makan, minum dan buang hajat, sehingga sehari tanpa matematika terasa kosong. Namun demikian, RME tidak berpretensi semua orang harus menjadi matematikawan, pakar pendidikan matematika, atau guru matematika.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika bukan hanya aktifitas anak sekolah dasar. Pembelajaran RME berorientasi pada matematisasi pengalaman sehari-hari (*mathematize of everyday experience*) dan menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari (*everydaying mathematics*), sehingga siswa pada semua jenjang pendidikan belajar dengan bermakna dan mengutamakan tercapainya pengertian.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti di dalam matematika terkandung proses matematisasi (*mathematizing*). Konsep matematika muncul dari proses matematisasi, dimulai dari penyelesaian yang terkait dengan konteks, dan secara perlahan siswa mengembangkan alat dan pemahaman matematika ke tingkat yang lebih formal. Model-model yang muncul dari aktifitas matematik siswa dapat mendorong ke arah terjadinya interaksi di kelas, sehingga mengarah pada level berpikir matematik yang lebih tinggi^[1].

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti konsep-konsep matematika berawal dari aktifitas manusia yang selanjutnya disadari dan dikembangkan menjadi suatu pengetahuan yang digunakan untuk membantu manusia menyelesaikan masalah.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti setiap manusia berkepentingan dengan matematika. Setiap manusia membutuhkan dan menggunakan matematika. Matematika bukan hanya milik matematikawan, dosen, guru, mahasiswa dan murid.

Matematika adalah milik pengguna matematika dan pengguna matematika adalah seluruh manusia. Sebagai pengguna, maka seluruh manusia penggunanya akan memperlakukan matematika sebagai bagian dari aktifitas hidupnya.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti bahwa masih banyak pengetahuan matematika yang masih tersembunyi dan belum ditemukan. Maka menjadi tugas manusia untuk menemukannya, sebab aktifitas manusia dalam matematika tidak terbatas hanya pada proses penemuan kembali. Dengan demikian aktifitas matematika yang dilakukan oleh para peneliti di bidang matematika dan pendidikan matematika merupakan keberlanjutan langsung dari prinsip *guided reinvention* yang dikembangkan dalam RME.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti pengetahuan matematika hanya dapat dimiliki oleh manusia yang aktif, sebab pengetahuan selalu merupakan hasil dari aktifitas membangun (mengkonstruksi) sehingga tidak dapat ditransfer kepada penerima pasif. Setiap individu manusia harus secara aktif membangun pengetahuan matematikanya.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti siswa tidak boleh dipandang sebagai *passive receivers of ready-made mathematics* (penerima pasif matematika yang sudah jadi). Pendidikan harus mengarahkan siswa kepada penggunaan berbagai situasi dan kesempatan untuk menemukan kembali matematika dengan cara mereka sendiri.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti pembelajaran di kelas disarankan untuk memberlakukan pembelajaran aktif. Oleh karena itu, guru harus menghindari dominasi pembelajaran melalui ceramah, tetapi harus mampu menciptakan dan mengembangkan pengalaman belajar yang mendorong aktivitas. Bahkan di dalam RME diharapkan siswa tidak sekedar aktif sendiri, tetapi terjadi aktivitas bersama di antara mereka (interaktivitas).

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika diciptakan oleh manusia secara kreatif, bukan hanya oleh para matematikawan, tetapi juga oleh para pengguna (*user*) matematika.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika diciptakan oleh manusia dengan melibatkan unsur kreatifitas dalam penciptaan matematika tersebut, sebab pada dasarnya, matematika adalah pemecahan masalah. Oleh karena itu, matematika sebaiknya diajarkan melalui berbagai masalah yang ada disekitar siswa dengan memperhatikan usia dan pengalaman yang mungkin dimiliki siswa.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika ditemukan dan dikreasi sebagai bagian dari aktifitas manusia dalam kehidupannya. Matematika yang

ditemukan di banyak tempat oleh berbagai bangsa pada awalnya merupakan aktifitas bangsa-bangsa tersebut dalam upayanya menggunakan dan menerapkan matematika untuk mengatasi berbagai permasalahan yang dihadapinya. Bisa jadi hasil matematikanya berbeda-beda. Bangsa Mesir Kuno mengembangkan geometri untuk mengatasi masalah banjir tahunan Sungai Nil dan membangun piramida, sementara geometri yang berbeda dikembangkan bangsa Arab (Moor) untuk tujuan keindahan seperti ornamen-ornamen yang menghiasi berbagai masjid dan Istana Al Hambra di Granada, Spanyol.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti pengetahuan matematika dapat dibangun di kelas atau di luar ruang kelas melalui interaksi diantara siswa atau interaksi antara siswa dengan guru.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti siswa tidak dipandang sebagai kertas putih bersih yang belum tercoreng tinta. Sebaliknya siswa dipandang sebagai *human being* yang memiliki seperangkat pengetahuan dan pengalaman yang telah diperoleh sebelumnya melalui interaksi dengan lingkungan.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika adalah *the process of mathematizing reality and if possible even than of mathematizing mathematics*^[3].

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti telah terjadi perubahan dalam Pendidikan Matematika dengan meninggalkan *learning by transmission* dan beralih dengan mengadopsi *learning by construction*^[3].

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti kelas matematika bukanlah tempat memindahkan matematika dari guru kepada siswa. Kelas adalah tempat untuk menemukan kembali matematika, menemukan kembali ide dan konsep matematika melalui eksplorasi masalah-masalah nyata. Menurut Dolk^[3], kelas matematika adalah bengkel kerja/ruang kerja/sanggar kerja dimana matematika dilihat sebagai kegiatan/aktifitas manusia yang berakar pada pemecahan soal (*solving of problem*).

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika perlu menjadi milik generasi yang akan datang. Matematika perlu dilanggengkan. Dalam upaya melanggengkan/mengawetkan hasil-hasil matematika yang telah diperoleh maka matematika harus diwariskan. Proses pewarisan matematika dilakukan tidak dengan cara menstransfer, tetapi dengan cara menemukannya kembali. Hal ini menunjukkan sangat berharganya aktifitas menemukan kembali (*reinvention*) sebagai suatu strategi metakognitif sehingga dengan cara menemukan kembali maka pengahayatan siswa terhadap matematika semakin kuat. Siswa akan merasakan kedekatan dan merasa memiliki

matematika (*sense of belonging*) sehingga matematika akan selalu dirasakan hadir setiap saat, setiap waktu, mengalir dalam darah dan terbawa ke dalam tidur.

Matematika adalah aktifitas manusia. Ini berarti matematika dikembangkan sesuai tuntutan jaman dimana manusia pengembangnya hidup. Oleh karena itu matematika bersifat dinamis.

3. KESIMPULAN

Setiap manusia dalam aktifitas hidupnya akan selalu memiliki keterlibatan dengan matematika, mulai dari bentuk yang sederhana dan rutin sampai pada bentuknya yang kompleks, sehingga tidak berlebihan jika dikatakan spesies manusia adalah *homo mathematicus*. Matematika adalah hasil akal budi manusia, sehingga matematika merupakan produk budaya. Sebagai aktifitas manusia, maka melalui proses matematisasi, matematika diciptakan atau ditemukan kembali oleh manusia yang berbudaya sehingga matematika merupakan konstruksi budaya. Oleh karena itu, sebagai hasil budaya, maka matematika perlu menjadi milik generasi yang akan datang. Matematika perlu ditularkan, dilanggengkan dan diwariskan. Proses penularan matematika menurut RME dilakukan tidak dengan cara menstransfer, tetapi dengan cara menemukannya kembali dan secara kultural pewarisan matematika terjadi sebagai akibat kerja dari unit transmisi kultural (karakter budaya) yang berupa unit-unit dari informasi budaya yang disebut mem.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Barnes, H., *The Theory of Realistic Mathematics Education as a Theoretical Framework for Teaching Low Attainers in Mathematics*, Pythagoras. (2005). **61**, 42-57.
- [2] Benson, N., *Teaching and Learning Realistic Mathematics Education*. 2004. [Online]. Tersedia: <http://www.mmu.ac.uk>. [18 September 2005].
- [3] Dolk, M., *Realistic Mathematics Education*. 2006. Makalah pada Konferensi Nasional Matematika XIII dan Kongres Himpunan Matematika Indonesia, Jurusan Matematika FMIPA UNNES, 24-27 Juni 2006.
- [4] Gravemeijer, K.P.E., *Developing Realistic Mathematics Education*, CD- β Press/Freudenthal Institute, Utrecht. 1994
- [5] Koentjaraningrat, *Kebudayaan, Mentalitet, dan Pembangunan*, Penerbit P.T. Gramedia, Jakarta. 1974

-
- [6] Kusumah, Y.S., *Pengembangan Bahan Ajar Matematika Interaktif Berbasis Teknologi Komputer Tipe Tutorial untuk Meningkatkan Kemampuan Berfikir Kritis Siswa SMA*. 2005. Makalah pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta. 18 November 2005.
- [7] Mahzar, A., *Melacak Mutasi-Mutasi Meme*. 2009. [Online]. Tersedia: <http://www.integralinstitute.org> [1 Mei 2009]
- [8] Mason, J., *Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing*, Routledge Falmer, London. 2002.
- [9] Sabandar, J., *Pembelajaran Matematika Sekolah dan Permasalahan Ketuntasan Belajar Matematika*. 2008. Makalah pada Pidato Pengukuhan Dr. Jozua Sabandar, M.Sc., sebagai Guru Besar dalam Bidang Pendidikan Matematika pada Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, 22 Oktober 2008.
- [10] Sembiring, R.K., *Apa dan Mengapa PMRI?*, Majalah PMRI. (2008). **VI (4)**, 60-61.
- [11] Sumarmo, U., *Berpikir Matematik, Apa, Mengapa, dan Bagaimana Cara Mempelajarinya*. 2008. Makalah pada Kuliah Analisis Hasil-Hasil Penelitian Internasional: Tidak Diterbitkan.
- [12] Tn, *Batik Fraktal*, 2008. Kompas, 31 Oktober 2008.

PEMANFAATAN INTERNET DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA POKOK BAHASAN PERSAMAAN GARIS LURUS UNTUK KELAS VII SMP

Yuni Yamasari, M.Kom, Ika Kurniasari, M.Pd, dan Alfath Famela Rokhim, S.Pd
FMIPA Unesa
*yamasari2000@yahoo.com, ika.kurniasari@gmail.com,
dan famela12pa2@yahoo.com*

ABSTRAK. Internet dapat dimanfaatkan untuk menunjang proses belajar mengajar bidang matematika supaya belajar matematika dapat menjadi sesuatu yang menarik. Banyak tersedia website di internet yang dirancang dan dibuat untuk proses belajar mengajar matematika. Dengan website yang ada memungkinkan penyampaian materi lebih menarik karena materi tervisualisasi secara interaktif. Website-website tersebut dapat memberikan tambahan wawasan dalam proses belajar mengajar matematika yang sudah biasa berlangsung di kelas, misalnya bentuk ceramah yang didominasi oleh guru, menjadi suasana kelas yang lebih hidup dan menarik. Hal ini disebabkan siswa dapat mempergunakan media pembelajaran di website tersebut untuk membantu memahami suatu materi. Salah satu kompetensi dasar dari pokok bahasan persamaan garis lurus adalah menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus. Kompetensi dasar ini menuntut guru untuk menyajikan gambar grafik dari suatu persamaan. Selain itu juga, guru perlu menunjukkan kepada siswa pengaruh perubahan gradien dan konstanta terhadap grafik yang terbentuk. Jika guru perlu menunjukkan perubahan-perubahan yang terjadi pada suatu grafik dari persamaan garis lurus tertentu maka diperlukan waktu yang cukup lama dan cara yang cukup rumit. Di sinilah perlu suatu media yang mampu membantu guru untuk mencapai tujuan pembelajaran tersebut. Makalah ini akan memaparkan mengenai ulasan website-website yang mendukung pembelajaran pada materi menggambar grafik persamaan garis lurus.

Kata Kunci: Internet, persamaan garis lurus.

1. PENDAHULUAN

Salah satu teknologi yang dapat dikembangkan dan dimanfaatkan lebih luas adalah internet. Namun yang terjadi saat ini, internet memiliki kesan negatif di benak masyarakat luas, meskipun masih banyak manfaat yang dapat diperoleh dari internet. Untuk menepis anggapan negatif tersebut, dalam makalah ini akan disajikan beberapa manfaat yang dapat diambil. Salah satu manfaatnya adalah pembelajaran inovatif yaitu penggunaan teknologi

yang mengkolaborasikan pemanfaatan internet dalam proses pembelajaran di kelas. Pemanfaatan internet diperlukan sebagai media interaktif yang dapat menarik minat belajar siswa untuk meningkatkan pemahaman materi ajar.

Salah satu materi ajar untuk tingkat satuan pendidikan sekolah menengah pertama (SMP) adalah persamaan garis lurus dengan kompetensi dasar menggambar grafik garis lurus. Sebagai alternatif pembelajaran yang menggunakan teknologi, maka untuk menjelaskan materi persamaan garis lurus dengan kompetensi dasar menggambar grafik menggunakan website-website yang telah disediakan pada saat mengakses internet. Adapun alamat website yang digunakan/dipilih telah disesuaikan dengan materi yang wajib diterima oleh siswa.

Pengertian persamaan garis lurus adalah persamaan yang berbentuk $y = mx + c$ dengan m , c bilangan riil dan/atau disajikan dalam bentuk grafik akan berupa garis lurus. Persamaan garis lurus yang telah diajarkan kepada siswa mayoritas menggambar grafik dengan cara demonstrasi di depan kelas lalu siswa menirukan apa yang dilakukan oleh guru. Jika hal tersebut dilakukan terus menerus, maka siswa akan terbiasa tetapi belum tentu paham. Oleh karena itu diperlukan media pembelajaran (website-website) yang dapat membantu siswa tidak hanya memahami materi menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus tetapi juga mampu menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Sesuai dengan kurikulum 2006 persamaan garis lurus diberikan pada kelas VIII semester 1 dengan kompetensi dasar yang akan dipilih dalam pembahasan makalah ini adalah menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus. Prasyarat sebelum menerima materi persamaan garis lurus siswa telah menerima materi persamaan linear, relasi dan fungsi.

2. MATERI DAN METODE

Adapun materi yang dipilih dalam makalah ini adalah materi menggambar persamaan garis lurus. Pemilihan materi ini didasarkan atas perlunya menyajikan tampilan suatu grafik dengan perubahan-perubahan yang ditampilkannya akibat perubahan nilai gradien dan konstanta tertentu dari suatu persamaan garis lurus secara cepat dengan bantuan website yang dapat berfungsi sebagai *tool* penyajian grafik.

Metode yang digunakan dalam makalah ini adalah menelaah kurikulum yang berlaku di sekolah saat ini mengenai materi menggambar persamaan garis lurus, mencermati website-website yang relevan, dan mengidentifikasi website-website yang mendukung materi menggambar persamaan garis lurus. Proses mengidentifikasi bermula dari memilah dan memilih website-website yang telah dikumpulkan dari *searching* melalui *google*. Kemudian menilai website-website tersebut apakah sesuai dengan tujuan materi yang dipilih, yaitu mengenai materi menggambar grafik persamaan garis lurus, mengujicobakan dan mendiskusikan website pilihan dengan teman sejawat untuk mengecek keterbacaan website tersebut, mengetahui kelebihan website, serta kekurangan website tersebut. Adapun kriteria pemilihan beberapa website dari website yg dikumpulkan adalah karena website yg dipilih dikhususkan pada manfaatnya sebagai *tool*/alat sebagai pembuat grafik. Sedangkan dalam penemuan peneliti terdapat website yang dapat dikategorikan menjadi sumber berupa materi ajar yg didominasi teks, ada yang menyediakan aktivitas *hands on activity* utk membangun konsep, ada yg dapat dimanfaatkan sebagai alat evaluasi karena dapat memberikan umpan balik dari jawaban yang di *input* oleh *user*, dan ada yang berfungsi sebagai *tool* untuk menghitung atau menggambar grafik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Website yang tersedia sangatlah banyak di internet. Beberapa hasil *website* yang telah penulis temukan akan dirangkum pada Tabel 1. Pada tabel tersebut telah pula dicantumkan standar kompetensi dan kompetensi dasar yang sesuai dengan kurikulum 2006. Tetapi tidak semua *website* yang kami temukan akan kami gunakan. *Website* yang terpilih disesuaikan dengan tujuan pembelajaran yang akan diberikan pada saat kegiatan pembelajaran berlangsung.

Hasil setelah meninjau dan menyesuaikan dengan tujuan yang diperlukan, maka beberapa website dipilih oleh penulis untuk digunakan dalam mendukung pembelajaran di kelas. Berikut adalah deskripsi website yang telah dipilih.

Pemanfaatan Internet Untuk Pembelajaran Materi Persamaan Linear

I. Website-website Penyedia Media Pembelajaran Persamaan Garis Lurus

Berikut adalah beberapa website yang mendukung pembelajaran persamaan garis lurus.

Tabel 1. Kumpulan Website Pembelajaran

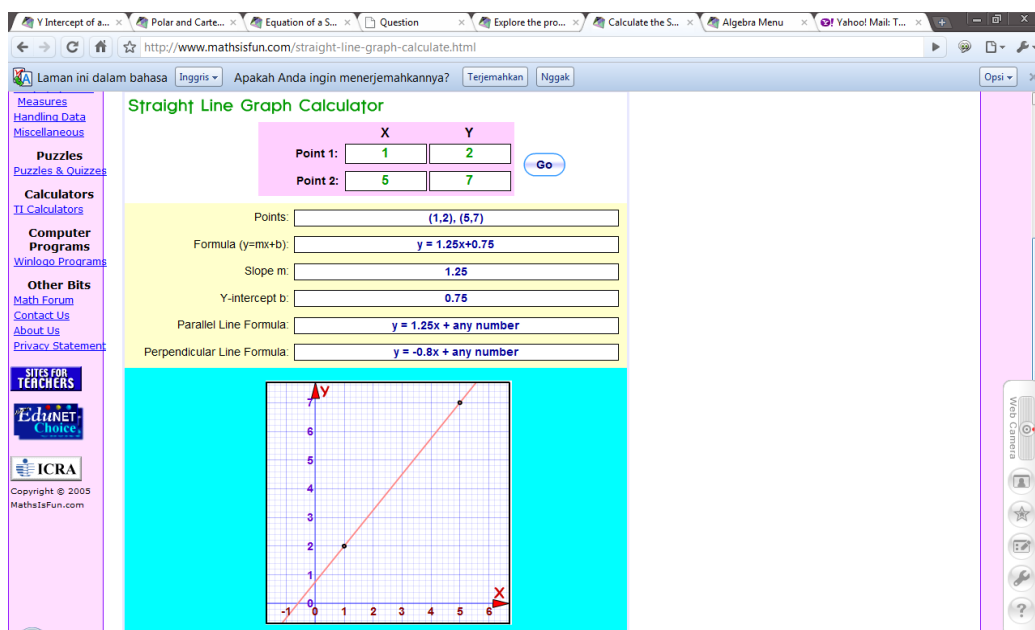
| Smt | Standar kompetensi SK | Kompetensi dasar KD | Website | Isi |
|-----|--|--|---|--|
| 1 | Aljabar 1. Memahami bentuk aljabar, relasi, fungsi, dan persamaan garis lurus | 1.6 Menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus | http://id.mind.net/~zona/mmts/functionInstitute/linearFunctions/lpsf.html | program that will help you visualize how changing the values for the point, (x_1, y_1) , and for the slope, m , will affect the graph of the equation $y = m(x - x_1) + y_1$ |
| | | | http://www.purplemath.com/modules/slope.htm | Slope of a Straight Line |
| | | | http://www.sites4teachers.com/links/redirect.php?url=http://www.math.com/students/worksheet/algebra_sp.htm | Algebra worksheet generator |
| | | | http://mathforum.org/cgraph/cslope/pointsfirst.html | Graphing Points First |
| | | | http://www.webgraphing.com/plottimg_advanced.jsp# | Plotting by online |
| | | | http://www.ixl.com/math/practice/graph-5-graph-linear-functions | Graphing linear functions |
| | | | http://www.mathsisfun.com/data/straight_line_graph.html | Explore the properties of a straight line graph |
| | | | http://www.mathsisfun.com/quiz/linear_equation_test.html | Linear equation test |
| | | | http://www.mathsisfun.com/straight-line-graph-calculate.html | Straight line graph calculate (membuat graph dengan dua titik diketahui) |

A. <http://www.mathsisfun.com>

Website ini menyediakan 2 path fasilitas pembelajaran matematika materi ini. Kedua path fasilitas ini yaitu:

1. <http://www.mathsisfun.com/straight-line-graph-calculate.html>

Tampilan awal dari media pembelajaran yang terdapat di path website ini terlihat pada Gambar 1. Media ini merupakan kalkulator grafik garis lurus. Gambar tersebut memperlihatkan penggambaran grafik persamaan garis lurus membutuhkan data masukan 2 titik koordinat (x,y) . Keluaran dari media ini adalah grafik persamaan garis lurus dan beberapa informasi yang lainnya terkait dengan propertis garis lurus tersebut. Informasi lainnya ini disajikan dalam 6 *textbox* seperti terlihat pada Gambar 1.



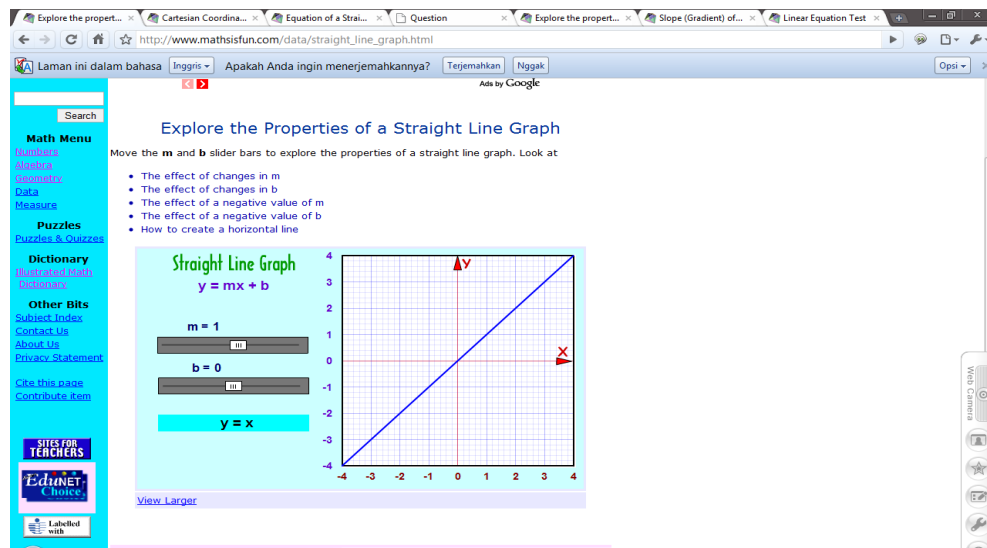
Gambar 1. Tampilan Media Pembelajaran dari path website
(<http://www.mathsisfun.com/straight-line-graph-calculate.html>)

2. http://www.mathsisfun.com/data/straight_line_graph.html

Tampilan awal dari media pembelajaran yang terdapat di *path website* ini terlihat pada Gambar 2. Media ini menggali propertis grafik garis lurus. Gambar tersebut

memperlihatkan pengguna dapat menggali pengaruh propertis dari garis lurus yaitu gradien dan konstanta dari persamaan garis lurus. Pengaruh 2 propertis ini ditunjukkan dengan grafik persamaan garis lurus.

Data masukan gradien dan konstanta ini tidak dimasukkan oleh pengguna dengan mengisi komponen *textbox* namun media menggunakan *scrollbar* horizontal. Keluaran dari media ini adalah grafik garis lurus dan persamaannya.

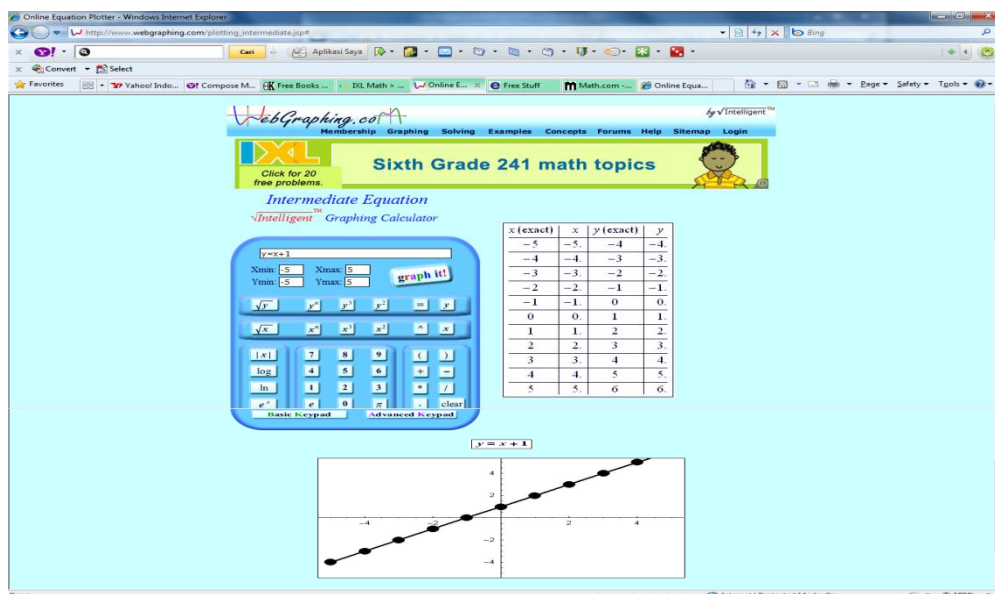


Gambar 2. Tampilan Media Pembelajaran dari path website (http://www.mathsisfun.com/data/straight_line_graph.html)

B. <http://www.webgraphing.com>

Website ini menyediakan media pembelajaran matematika khusus grafik misalnya grafik garis lurus, grafik statistik dan lain sebagainya. Tampilan dari media yang tersedia diwebsite ini terlihat pada Gambar 3. *Website* ini menyediakan beberapa fasilitas untuk belajar grafik, namun fasilitas yang kita gunakan untuk materi ini tersedia pada path http://www.webgraphing.com/plotting_advanced.jsp#. Tampilan dari media terlihat mirip kalkulator. Sehingga data yang diinputkan disajikan dalam kotak inputan yang mirip komponen *textbox*. Gambar memperlihatkan komponen data masukan sama dengan yang terdapat pada kalkulator

pada umumnya. Data masukan media ini berupa persamaan linear dan interval sumbu koordinat x dan y dari bidang kartesiusnya. Keluaran media berupa grafik persamaan garis lurus.



Gambar 3. Tampilan Media Pembelajaran dari path website

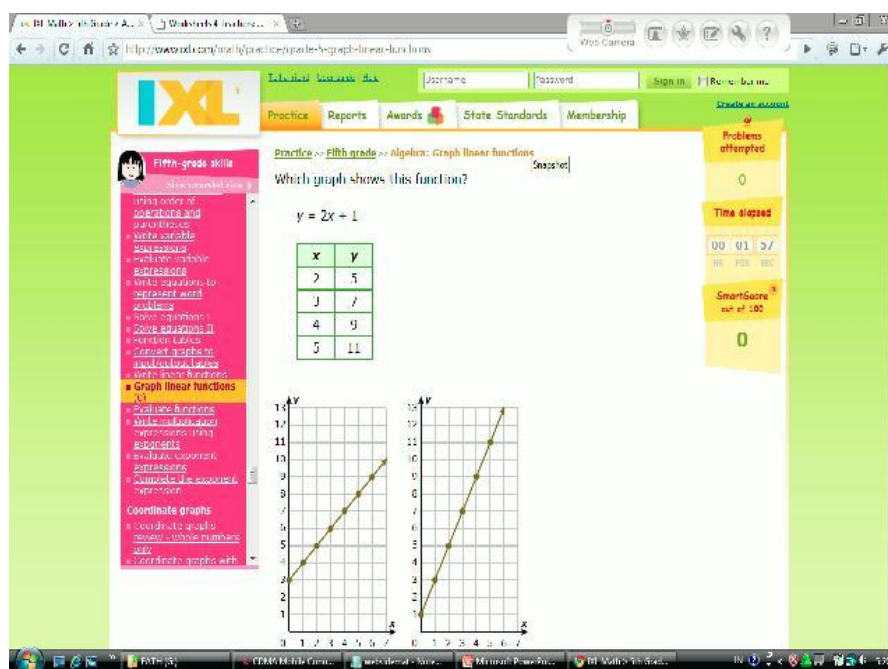
http://www.webgraphing.com/plotting_advanced.jsp#

C. <http://www.ixl.com>

Website ini menyediakan latihan soal bagi siswa setelah siswa mendapatkan materi persamaan garis lurus. Path website dari latihan soal tersedia pada <http://www.ixl.com/math/practice/grade-5-graph-linear-functions>. Tampilan dari fasilitas latihan soal diwebsite ini terlihat pada Gambar 4. Siswa dapat mencoba latihan soal dengan jumlah soal tertentu sampai ia benar-benar paham. Latihan soal di path website ini menghitung skor yang diperoleh siswa dan banyaknya waktu yang dibutuhkan siswa untuk mengerjakan latihan tiap soal. Skor tiap soal dipengaruhi lamanya waktu mengerjakan.

D. http://www.mathsisfun.com/quiz/linear_equation_test.html

Website ini menyediakan tes setelah siswa mendapatkan materi persamaan garis lurus. Path website dari latihan soal tersedia pada <http://www.ixl.com/math/practice/grade-5-graph-linear-functions>. Tampilan dari fasilitas latihan soal diwebsite ini terlihat pada gambar 4. Siswa dapat mencoba latihan soal dengan jumlah soal tertentu sampai ia benar-benar paham. Latihan soal di path website ini menghitung skor yang diperoleh siswa dan banyaknya waktu yang dibutuhkan siswa untuk mengerjakan latihan tiap soal. Skor tiap soal dipengaruhi lamanya waktu mengerjakan.



Gambar 4. Tampilan Latihan soal dari path website

http://www.webgraphing.com/plotting_advanced.jsp#

II. Langkah-Langkah Pembelajaran Materi Pokok Garis Lurus dengan Media Pembelajaran dari Website.

Langkah-langkah pembelajaran yang akan digunakan akan disajikan dengan contoh RPP sebagai berikut:

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN
(RPP)

| | |
|------------------|------------------------------------|
| Sekolah | : SMP RSBI |
| Mata Pelajaran | : Matematika |
| Kelas / Semester | : VIII / 1 |
| Materi | : Persamaan dan Grafik Garis Lurus |
| Alokasi Waktu | : 2 x 40 Menit |

Standar Kompetensi : 1. Memahami bentuk aljabar, relasi, fungsi, dan persamaan garis lurus

Kompetensi Dasar : 1.6 Menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus

Indikator :

1. Menggambar grafik garis lurus melalui dua titik.
2. Menggambar grafik garis lurus melalui satu titik dengan gradien tertentu.
3. Menggambar grafik garis lurus yang persamaannya diketahui.

Tujuan Pembelajaran :

A. Tujuan Kognitif

1. Siswa dapat menggambar grafik garis lurus melalui dua titik.
2. Siswa dapat menggambar grafik garis lurus melalui satu titik dengan gradien tertentu.
3. Siswa dapat menggambar grafik garis lurus yang persamaannya diketahui.

B. Tujuan Afektif

Dalam pembelajaran di kelas, siswa dapat bekerjasama dengan kelompok untuk mempelajari keterampilan menggambar grafik

Alat/Bahan : Komputer yang terkoneksi dengan internet, dan alat tulis

Sumber Belajar :

1. Website
2. Student Book
3. Worksheet
4. Answer key of worksheet
5. Mathematics vocabulary list

6. Kisi-kisi evaluation sheet
7. Evaluation Sheet
8. Answer Key of Evaluation Sheet
9. Silabus

Model Pembelajaran: pembelajaran kooperatif

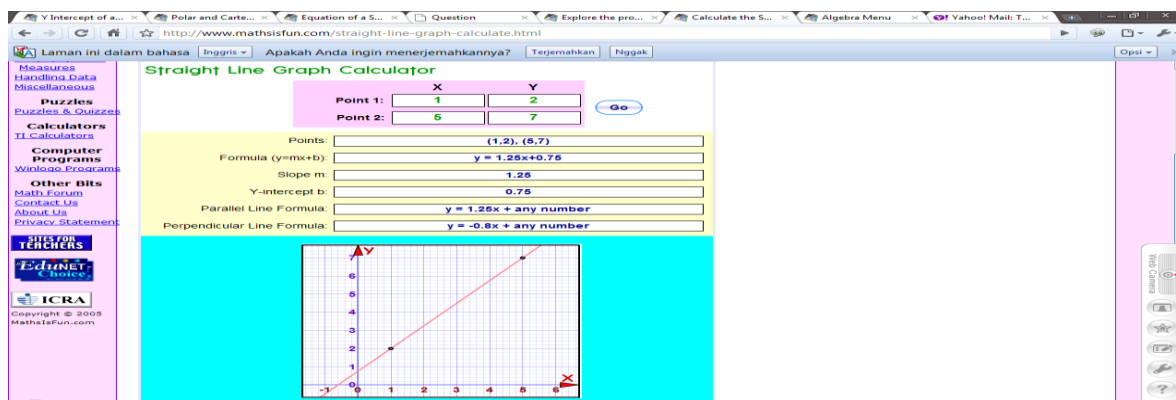
Kegiatan Pembelajaran

Pendahuluan (10 menit)

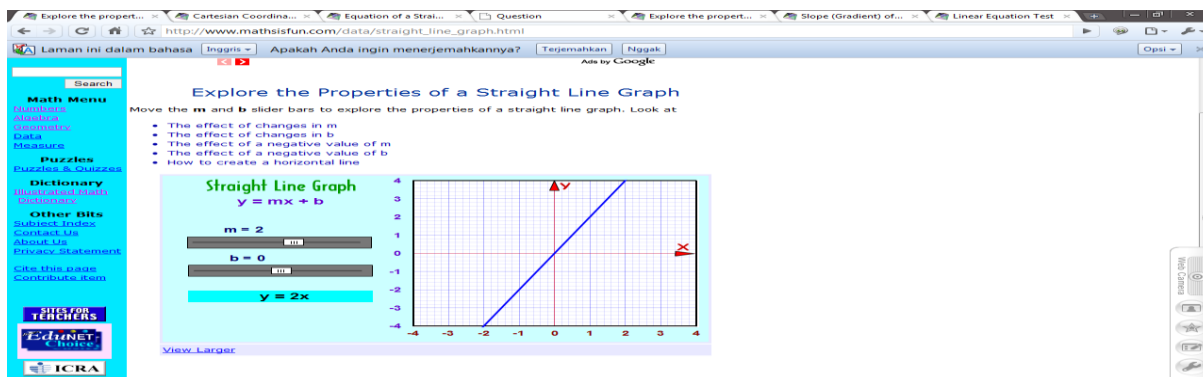
- Apresepsi : - Dengan tanya jawab siswa diminta mengingat kembali tentang persamaan garis lurus dan cara menentukan letak titik pada bidang kartesius
- Motivasi : - Menjelaskan bahwa dalam kehidupan sehari-hari banyak hal yang berhubungan dengan persamaan garis lurus
- Menyampaikan tujuan pembelajaran

Kegiatan Inti (60 menit)

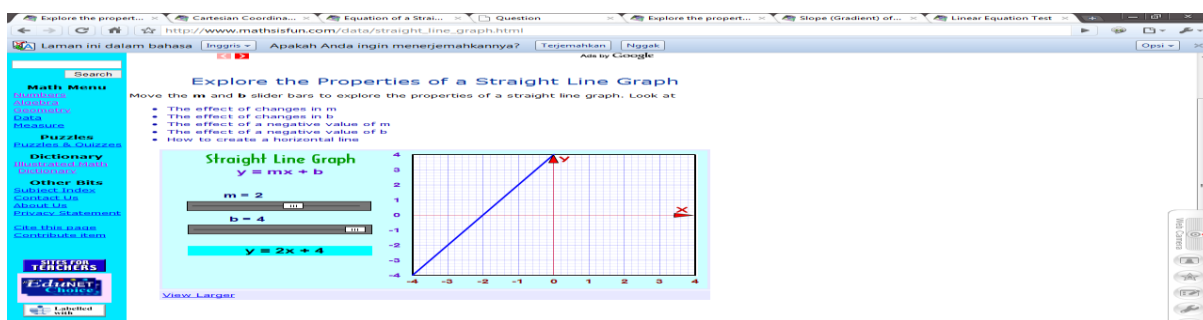
1. Dengan tanya jawab dan menggunakan contoh, dibahas tentang cara menggambar garis lurus yang melalui dua titik (website: <http://www.mathsisfun.com/straight-line-graph-calculate.html>) dan melalui satu titik dengan gradien tertentu (website: http://www.mathsisfun.com/data/straight_line_graph.html)



Gambar 1. Tampilan website yang menyajikan grafik linear dari dua titik



Gambar 2. Tampilan website yang menyajikan grafik linear dengan satu titik (0,0) dengan gradien tertentu ($m = 2$)



Gambar 3. Tampilan website yang menyajikan grafik linear dengan satu titik (0,0) dengan gradien tertentu ($m = 2$) dan konstanta tertentu ($b = 4$)

2. Guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk bertanya kalau masih belum memahami.
3. Secara individu siswa diminta untuk mengerjakan beberapa soal tentang materi yang baru diterangkan, dan guru berkeliling sambil memberikan bimbingan.
4. Guru menunjuk satu atau dua siswa untuk mempresentasikan jawabannya pada papan tulis dan siswa lain diminta untuk menanggapi. Guru sebagai fasilitator.
5. Dengan tanya jawab dan menggunakan beberapa contoh, dibahas tentang cara menggambar garis lurus yang persamaan garisnya diketahui
6. Guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk bertanya kalau masih belum memahami.

7. Dengan teman sebangku, siswa diminta untuk mengerjakan beberapa soal tentang materi yang baru diterangkan, dan guru berkeliling sambil memberikan bimbingan
8. Beberapa siswa/wakil kelompok diminta untuk menuliskan jawabannya di papan tulis, dan siswa lain diminta untuk menanggapi. Guru sebagai fasilitator dan sekaligus memberikan pemantapan pemahaman

Penutup (10 menit)

1. Dengan bimbingan guru siswa diminta untuk membuat rangkuman
2. Siswa dan guru melakukan refleksi
3. Guru memberitahukan rencana ulangan untuk KD 1.6

4. KESIMPULAN

4.1. Simpulan. Kegiatan pembelajaran dari materi pokok garis lurus dengan kompetensi dasar yaitu menentukan gradien, persamaan garis lurus akan lebih menarik dan tidak membosankan dengan menggunakan website www.mathisfun.com dan www.webgraph.com. Hal ini disebabkan adanya media di website yang digunakan untuk kegiatan pembelajaran lebih interaktif dan siswa dapat berinteraksi dengan video interaktif tersebut sehingga suasana kelas menjadi hidup.

4.2. Saran. Kegiatan pembelajaran langkah kedua tentang menemukan cara menentukan persamaan garis melalui satu titik dengan gradien tertentu, website yang tersedia kurang sesuai dengan yang diharapkan. Oleh karena itu perlu dicari lagi website yang berkaitan dengan menemukan cara menentukan persamaan garis melalui satu titik dengan gradien tertentu.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ucapkan terima kasih kepada pihak yang turut mendukung penelitian ini,
Kepada Yth:

1. Bapak/Ibu Departemen Pendidikan Tinggi DP3M, selaku pemberi dana hibah penelitian Strategi Nasional 2010 dengan judul penelitian “Pemanfaatan Internet untuk Pengembangan Profesi Guru-guru Matematika SMP RSBI/SBI Jawa Timur”.

2. Ibu Sitti Maesuri Patahuddin, S.Pd., M.Pd., Ph.D, selaku Ketua Peneliti
3. Bapak Dr. Agung Lukito, M.S., Ibu Yuni Yamasari, S.Kom., M.Kom, dan Ibu Ika Kurniasari, S.Pd., M.Pd, selaku anggota peneliti
4. Ibu Siti Rokhmah, S.Pd., Ibu Agustin Ernawati, S.Pd., dan Ibu Alfath Famela Rokhim, S.Pd., selaku assistance research.
5. Ibu Dra. Sukwati, Ibu Dra. Sulasih. Ibu Dra. Setya Rini Dwi Astuti dan Ibu Rini Hastuti, selaku Guru-guru SMP RSBI/SBI Gresik/Lamongan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Effendy. (2009). Eksperimen dengan Program S1 MIPA Sekolah Menengah Bertaraf Internasional (SBI). Unpublished power point presentation. Universitas Negeri Malang.
- [2] Kurikulum 2006 Matematika RSBI.
- [3] Sekretaris *Negara* Republik Indonesia. (2003). *Undang-undang Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional*. Retrieved. from <http://www.dikti.go.id/Archive2007/UUno20th2003-Sisdiknas.htm>.
- [3] http://www.mathsisfun.com/data/straight_line_graph.html, diakses tanggal 22 April 2010
- [4] http://www.webgraphing.com/plotting_advanced.jsp#, diakses tanggal 22 April 2010
- [5] <http://www.mathisfun.com>
- [6] <http://www.mathsisfun.com/straight-line-graph-calculate.html>
- [7] <http://www.webgraphing.com>
- [8] <http://www.ixl.com>
- [9] <http://www.ixl.com/math/practice/grade-5-graph-linear-functions>
- [10] http://www.mathsisfun.com/quiz/linear_equation_test.html
- [11] <http://www.ixl.com/math/practice/grade-5-graph-linear-functions>

PENGETAHUAN KONTEN PEDAGOGIK GURU MATEMATIKA

Trusti Hapsari, S.Si
Mahasiswa Sekolah Pasca Sarjana Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Pendidikan Indonesia
trusti_sari@yahoo.com

ABSTRAK. Guru memegang peran penting dalam proses pengajaran. Siswa akan mau belajar dengan baik jika guru mereka menguasai matematika. Namun, pengetahuan matematika yang baik tidak cukup untuk mengajar matematika dengan baik. Pengetahuan pedagogik sama diperlukannya seperti pengetahuan matematika. Pengetahuan matematika dan pengetahuan pedagogik beramalgesi menghasilkan pengetahuan konten pedagogik. Guru yang efektif adalah guru yang mempunyai pengetahuan konten pedagogik tinggi. Pengetahuan konten pedagogik tinggi dimiliki oleh guru yang pengetahuan matematika dan pedagogik tinggi. Pengetahuan matematika adalah pengetahuan tentang konsep-konsep matematika dan penguasaan materi matematika. Pengetahuan pedagogik adalah pengetahuan tentang cara mengajar. Pengetahuan konten pedagogik merupakan integrasi antara pengetahuan matematika dan pengetahuan pedagogik, yaitu berupa cara merepresentasikan dan memformulasikan materi pelajaran sehingga materi tersebut dapat komprehensif.

Kata Kunci: pengetahuan konten pedagogik, pengetahuan matematika, pengetahuan pedagogik

1. PENDAHULUAN

Kurikulum, sarana prasarana, kebijakan pemerintah, kemampuan siswa, kemampuan guru dapat mempengaruhi pengajaran matematika. Guru memegang peran penting dalam proses pengajaran. Kepercayaan yang umum dalam masyarakat adalah bahwa guru matematika yang memiliki pengetahuan matematika yang baik, maka dia adalah orang terbaik dalam mengajar matematika. Namun bagaimana dengan mengetahui cara mengajar? Fennema dan Franke (Turnuklu dan Yesilder, 2007) menentukan komponen pengetahuan guru matematika sebagai berikut: pengetahuan tentang matematika, pengetahuan tentang representasi matematika, pengetahuan tentang murid, dan pengetahuan tentang mengajar dan pembuatan keputusan.

Pemahaman materi pelajaran yang oleh Shulman (Turnuklu dan Yesilder, 2007) disebut sebagai pengetahuan konten pedagogik perlu dikuasai dengan baik sesuai kaidah keilmuan dan benar dipergunakan dalam praktek kehidupan. Selanjutnya, penyajian materi kepada peserta didik perlu dikemas sedemikian rupa sesuai dengan metode pembelajaran yang sesuai dengan memperhatikan bagaimana seharusnya siswa belajar,

seperti: konsepsi awal siswa terhadap materi pelajaran, kesalahan konsep, dan strategi pemecahan masalah untuk mata pelajaran tertentu. Pentingnya hal tersebut didukung pula dari pendapat beberapa ahli dari sejumlah penelitian mengamati aspek-aspek yang berbeda dari pengetahuan tentang konten dan pengetahuan konten pedagogik.

Berdasarkan Kahan, Cooper, dan Bethea's (2003), para peneliti secara berkelanjutan menyimpulkan bahwa murid akan mau belajar lebih tentang matematika jika guru mereka mengetahui tentang matematika, namun pengetahuan tentang materi tidak cukup untuk mengajar matematika dengan baik. Para peneliti merangkum bahwa isi dari pengetahuan konten pedagogik adalah konten yang spesifik dan berbeda jalur dengan pengetahuan sederhana tentang matematika, sehingga seorang matematikawan dimungkinkan tidak mempunyai pengetahuan tentang konten pedagogik. Berdasarkan Shulman (Turnuklu dan Yesildere, 2007), pengetahuan konten matematika dan pengetahuan konten pedagogik bagian terintegrasi dari instruksi matematika yang efektif.

Untuk membangun konsep matematika dalam pikiran siswa, pengetahuan pedagogik sama diperlukannya dengan pengetahuan tentang matematika. Cara guru dalam menghubungkan materi-materi (apa yang mereka ketahui tentang apa yang mereka ajarkan) dengan pengetahuan pedagogik (pengetahuan tentang apa yang mereka ketahui tentang mengajar) dan bagaimana suatu pengetahuan materi dapat menjadi suatu bagian dari proses berfikir pedagogik dilihat sebagai suatu bagian yang diintegrasikan dalam pengetahuan konten pedagogik (Cochran, DeRuiter & King, 1993). Kebanyakan peneliti menunjuk pada pentingnya pengetahuan matematika sama halnya dengan pengetahuan pedagogik.

Sementara itu, kondisi guru di Indonesia, menurut Inoegroho (2008: [http:// www.scribd.com](http://www.scribd.com)) hampir separuh dari kurang lebih 2,6 juta guru tidak layak mengajar. Kualifikasi dan kompetensinya tidak mencukupi untuk mengajar di sekolah. Yang tidak layak mengajar atau menjadi guru berjumlah 912.505, terdiri dari 605.217 guru SD, 167.643 SMP, 75.684 guru SMA, dan 63.961 guru SMK. Satria Dharma (Antara news, 2010) menyatakan sekitar 1,3 juta atau 50 persen dari 2,7 juta guru di tanah air belum layak mengajar karena kurang memenuhi standar kualifikasi maupun sertifikasi yang telah ditentukan pemerintah. Mulyasa (Pikiran Rakyat, 2010) mengatakan salah satu indikator rendahnya kualitas guru di Indonesia adalah banyak guru yang ketika dites soal ujian nasional mereka tidak lulus. Menurut Mulyasa, hal itu disebabkan guru kurang membaca dan mempersiapkan diri untuk memberikan pengajaran. Mereka juga

cenderung kurang mengevaluasi hasil pembelajaran yang dilakukan selama ini. Padahal, rendahnya kualitas guru akan mengakibatkan rendahnya kualitas pendidikan yang selanjutnya akan memproduksi sumber daya manusia kurang bermutu. Untuk itu akan dibahas tentang pengetahuan matematika, pengetahuan pedagogik, dan pengetahuan konten pedagogik guru matematika. Diharapkan melalui pemahaman yang diperoleh dapat menjadi pertimbangan guru untuk meningkatkan kemampuan pengetahuan matematika, pengetahuan pedagogik, dan pengetahuan konten pedagogik, sehingga akan berpengaruh pada peningkatan kemampuan siswa.

2. PEMBAHASAN

2.1 Pengetahuan Matematika

Berdasarkan etimologis perkataan matematika berarti ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan bernalar. Matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran (Ruseffendi, 1980:148). Matematika mencakup bahasa, bahasa khusus yang disebut bahasa matematika. Dengan matematika kita dapat berlatih berfikir secara logis, dan dengan matematika ilmu pengetahuan lainnya dapat berkembang dengan cepat.

Matematika berasal dari bahasa latin *mathanein* atau *mathema* yang berarti belajar atau hal yang dipelajari. Matematika dalam bahasa Belanda disebut *wiskunde* atau ilmu pasti, yang kesemuanya berkaitan dengan penalaran. Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya sehingga kaitan antar konsep atau pernyataan dalam matematika bersifat konsisten. Namun demikian, pembelajaran dan pemahaman konsep dapat diawali secara induktif melalui pengalaman peristiwa nyata atau intuisi. Proses induktif-deduktif dapat digunakan untuk mempelajari konsep matematika. Kegiatan dapat dimulai dengan beberapa contoh atau fakta yang teramati, membuat daftar sifat yang muncul, memperkirakan hasil baru yang diharapkan, yang kemudian dibuktikan secara deduktif. Dengan demikian, cara belajar induktif dan deduktif dapat digunakan dan sama-sama berperan penting dalam mempelajari matematika. Penerapan cara kerja matematika seperti ini diharapkan dapat membentuk sikap kritis, kreatif, jujur, dan komunikatif pada siswa (Depdiknas, 2004).

Matematika merupakan ilmu yang abstrak, hirarkis dan konsisten yang melandasi disiplin ilmu lainnya dan mengembangkan daya pikir manusia. Dari definisi-definisi

matematika, tergambar pengertian tentang matematika itu, dengan menggabungkan pengertian definisi-definisi tersebut. Semua definisi dapat diterima, karena memang matematika dapat ditinjau dari segala sudut, dan matematika bisa memasuki seluruh segi kehidupan manusia, dari yang paling sederhana sampai yang kompleks. Perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi saat ini juga dilandasi oleh perkembangan matematika. Oleh karena itu, di Indonesia mata pelajaran matematika diberikan dari tingkat Sekolah Dasar sampai Perguruan Tinggi.

Pada Standar Isi, Mata Pelajaran Matematika untuk semua jenjang pendidikan dasar dan menengah dinyatakan bahwa tujuan mata pelajaran matematika di sekolah adalah agar siswa mampu:

1. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah.
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika.
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan solusi yang diperoleh.
4. Mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah.
5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Tugas seorang guru adalah mewujudkan tujuan tersebut di atas. Guru paham dan menghayati tujuan pembelajaran matematika. Konsep adalah ide (abstrak) yang dapat digunakan atau memungkinkan seseorang untuk mengelompokkan /menggolongkan sesuatu objek. Suatu konsep biasa dibatasi dalam suatu ungkapan yang disebut definisi. Penalaran adalah suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau proses berpikir dalam rangka membuat suatu pernyataan baru yang benar berdasar pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya (Fadjar Shadiq, 2003). Penugasan dalam pelajaran matematika digolongkan menjadi dua yaitu latihan dan problem/ masalah. Latihan adalah tugas yang langkah penyelesaiannya sudah diketahui siswa, bisa dikerjakan dengan menerapkan langsung

satu atau lebih algoritma. Problem/ masalah lebih kompleks dari latihan, cara mengerjakannya perlu menggunakan kreativitas tidak bisa dikerjakan dengan menerapkan langsung beberapa algoritma. Pemecahan masalah adalah proses menerapkan pengetahuan yang telah diperoleh sebelumnya ke dalam situasi baru yang belum dikenal. Ciri penugasan pemecahan masalah, soal menantang, tidak cukup dengan prosedur rutin dalam menyelesaikan soal tersebut. Guru harus mampu membuat siswa mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah. Matematika adalah bahasa yang praktis. Untuk pencapaian tujuan kelima lebih banyak ditentukan oleh bagaimana cara guru mengelola pembelajaran.

Pengetahuan matematika disini berarti pengetahuan tentang konsep matematika dan penguasaan materi matematika. Seorang guru harus menguasai hal tersebut. Sangatlah tidak mungkin guru akan bisa mengajar dengan baik kalau gurunya sendiri tidak menguasai materi yang akan disampaikan. Pengajaran adalah proses mentransfer ilmu kepada siswa. Jadi guru harus menguasai apa yang akan disampaikan. Guru harus terbuka, selalu mengupgrade diri, banyak membaca, belajar dan terus belajar. *To give students a cup of water, a teacher should first have a bucket of water.* Metafora ini menggambarkan pentingnya pengetahuan guru dalam mengajar. Penguasaan konsep dan materi matematika mutlak diperlukan oleh seorang guru. Berakibat fatal apabila guru tidak menguasai materi, ketika siswa mengalami miskonsepsi guru tidak bisa meluruskan, guru tidak bisa membuat langkah kreatif untuk memahami siswa, tidak bisa mengevaluasi dengan adil.

2.2 Pengetahuan Pedagogik

Pedagogik adalah ilmu pendidikan atau ilmu mendidik, yang berarti ilmu pengetahuan yang menyelidiki, merenungkan tentang gejala-gejala perbuatan mendidik. Menurut Hoogveld (Yusuf, 2009: 9) pedagogik adalah ilmu yang mempelajari masalah membimbing anak ke arah tujuan tertentu, yaitu mampu secara mandiri menyelesaikan tugas hidupnya. Langeveld (Yusuf, 2009: 9) mengemukakan bahwa pedagogik adalah suatu ilmu yang bukan saja menelaah objeknya untuk mengetahui betapa keadaan atau hakiki objek itu, melainkan mempelajari pula bagaimana seharusnya bertindak.

Kompetensi pedagogik adalah satu dari empat kompetensi guru sebagai agen pembelajaran sebagaimana terdapat pada PP No.19/2005. Kompetensi pedagogik

merupakan kemampuan yang berkenaan dengan pemahaman peserta didik dan pengelola pembelajaran yang mendidik. Tim Direktorat Profesi Pendidik Dirjen Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan (2006) merumuskan secara substantif kompetensi pedagogik yang mencakup kemampuan pemahaman terhadap peserta didik, perancangan dan pelaksanaan pembelajaran, evaluasi hasil belajar, dan pengembangan peserta didik untuk mengaktualisasikan berbagai potensi yang dimilikinya.

Dari uraian tersebut di atas terlihat dengan jelas bahwa kompetensi pedagogik berurusan dengan tugas utama guru sebagai pengajar; yang intinya adalah bagaimana seorang guru dapat melaksanakan pengajaran dengan baik. Kompetensi pedagogik memang penting dan memiliki posisi yang sangat strategis untuk mensukseskan pendidikan. Dengan tanpa mengesampingkan penting dan strategisnya kompetensi lainnya, kompetensi pedagogik memang harus dimiliki, dikuasai dan sekaligus dipraktekkan oleh setiap guru dalam menjalankan tugas utamanya sebagai pengajar. Sebagai pembanding, di Amerika Serikat (AS), mengenai pengajaran memang sangat menonjol dalam formulasi kompetensi pendidik. Supriyoko (2007: <http://journal.amikom.ac.id>) dalam publikasi Direktorat Pendidikan Luar Biasa Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah Depdiknas (2006), *“Pengadaan dan Pembinaan Tenaga Kependidikan Dalam Pendidikan Inklusif”* disebutkan 15 kompetensi yang perlu dikembangkan oleh guru di AS, yaitu:

1. Dapat mendiagnosis kebutuhan intelektual, emosi, sosial, dan fisik siswa.
2. Dapat merumuskan tujuan-tujuan instruksional yang didasarkan atas kebutuhan siswa.
3. Dapat merancang pengajaran sesuai dengan tujuan.
4. Dapat melaksanakan pengajaran sesuai dengan rancangan /desain.
5. Dapat melakukan evaluasi untuk menilai hasil belajar siswa dan efektivitas pengajaran.
6. Mampu mengintegrasikan pengajaran sesuai dengan latar belakang siswa.
7. Mampu melaksanakan model-model pengajaran, dan bisa mengajar keterampilan menurut tujuan tertentu bagi siswa tertentu.
8. Memperlihatkan komunikasi yang lebih efektif dalam kelas.
9. Mampu menggunakan sumber-sumber yang sesuai untuk mencapai tujuan pengajaran.

10. Mampu memonitor proses dan hasil belajar serta mampu mengadakan perbaikan pengajaran.
11. Menguasai bidang studi yang akan diajarkannya.
12. Memiliki keterampilan dalam pengelolaan kelas / manajemen dan organisasi dalam mendorong siswa tumbuh secara menyeluruh (sosial, emosi, fisik, intelek).
13. Sensitif atau peka terhadap kebutuhan dan perasaan diri sendiri dan kebutuhan serta perasaan orang lain.
14. Mampu bekerja secara efektif dalam kelompok profesional.
15. Mampu menganalisis efektivitas keprofesionalannya dan terus berusaha memperluas efektivitas tersebut.

Apabila diperhatikan ke-15 kompetensi guru di AS tersebut dapat dikatakan bahwa pengajaran menjadi sentral isu bagi guru sebagai penyanggah kompetensi pedagogik. Hal ini relevan dengan begitu penting dan strategisnya kompetensi pedagogik bagi guru Indonesia.

Dengan pemahaman terhadap peserta didik, seorang guru bisa melakukan pendekatan yang tepat. Dalam mengajar memposisikan pada posisi siswa, mencoba memahami apa yang diinginkan oleh siswa dan berusaha mengajar dengan cara yang menyenangkan dan siswa bisa mengerti. Tidak ada satu cara pun yang paling efektif untuk mengajar, masing-masing mempunyai kekurangan dan kelebihan. Guru hendaknya menguasai berbagai macam teknik, metode, pendekatan sehingga bisa menggunakan dengan bervariasi dan disesuaikan dengan situasi kondisi. Cara mengajar akan menentukan keberhasilan tujuan pembelajaran, baik pembelajaran jangka pendek maupun pembelajaran jangka panjang. Pembelajaran jangka pendek adalah siswa diharapkan dapat memahami materi matematika yang dipelajarinya dan dapat menggunakannya pada pelajaran lain atau pada kehidupan nyata dan bekal untuk jenjang pendidikan selanjutnya. Pembelajaran jangka panjang yaitu siswa dapat mengambil nilai-nilai matematika dan mengaplikasikan untuk kehidupan. Nilai-nilai matematika itu meliputi kejujuran, keuletan, penalaran, kebertanggungjawaban, kecermatan, dsb.

2.3 Pengetahuan Konten Pedagogik

Dahar dan Siregar (Farida, 2009) menyatakan pengetahuan konten pedagogik adalah hasil amalgasi materi subjek dengan pedagogik umum. Pengetahuan konten pedagogik merupakan bentuk representasi dari materi subjek. Calon guru atau guru

dituntut untuk mampu mengorganisasi struktur pengetahuan materi subjeknya dan dapat mengintegrasikan kemampuan tersebut dengan pengetahuan konten pedagogik. Interaksi antara pengetahuan konten materi subjek dengan pedagogik nampak dari cara guru menggunakan representasi dalam memberikan penjelasan.

Shulman (Baker dan Chick, 2007) mendefinisikan pengetahuan konten pedagogik sebagai pencampuran dari materi dan pedagogik menjadi pemahaman tentang bagaimana topik tertentu, masalah, atau isu-isu yang terorganisir, yang diwakili, dan disesuaikan dengan berbagai kepentingan dan kemampuan peserta didik, dan disajikan untuk instruksi. Definisi ini menekankan tiga aspek: konten, pedagogik, dan siswa, dan pentingnya hubungan di antara ketiga aspek tersebut. Menurut Shulman (Turnuklu dan Yesildere, 2007), pengetahuan konten pedagogik terdiri dari: cara merepresentasikan dan memformulasikan materi sehingga materi tersebut dapat komprehensif, suatu pemahaman tentang apa yang membuat pembelajaran atas suatu topik khusus mudah atau sulit, rancangan dan pra rancangan yang pelajar dengan umur dan latar belakang yang berbeda-beda.

Berdasarkan gagasan Shulman tentang pengetahuan konten pedagogik, guru-guru yang efektif memiliki suatu pengetahuan yang dalam tentang bagaimana menyajikan suatu materi kepada pelajar (Parker & Heywood, 2000). Shulman juga menyatakan bahwa pengetahuan konten pedagogik harus mencakup pengetahuan tentang pelajar dan karakteristiknya, pengetahuan konteks pendidikan, tujuan, nilai, dasar filosofi, dan sejarah. Sebagai tambahan, pengetahuan konten pedagogik merujuk pada kemampuan dari guru menyajikan isi kedalam bentuk yang *powerful* secara pedagogik dan juga *adaptif* terhadap variasi kemampuan dan latar belakang siswa (An, Kulm dan Wu, 2004).

Berdasarkan An, Kulm, dan Wu (2004) pengetahuan konten pedagogik memiliki 3 komponen: pengetahuan tentang isi, pengetahuan tentang kurikulum, pengetahuan tentang mengajar. An, Kulm, dan Wu (2004) mengemukakan pentingnya pengetahuan dalam mengajar dan menurut mereka itu komponen inti dari pengetahuan konten pedagogik. Sebagai tambahan, Grouws and Shultz (Turnuklu dan Yesildere, 2007) menyatakan cakupan pengetahuan konten pedagogik: representasi yang berguna, gabungan ide-ide, contoh-contoh yang telah diklarifikasi, analogi yang membantu, hubungan-hubungan yang penting dan hubungan antar ide.

Pengetahuan konten pedagogik matematika adalah integrasi dari pengetahuan matematika dan pengetahuan pedagogik. Pengetahuan matematika dan pengetahuan

pedagogik digunakan bersama-sama untuk pengajaran yang efektif, pengajaran yang menyampaikan materi secara powerfull, materi tersampaikan dengan baik dengan menggunakan cara pengajaran yang tepat. Pengetahuan matematika yang baik tanpa disertai pengetahuan pedagogik yang baik tidak akan menghasilkan pembelajaran yang efektif, dan sebaliknya pengetahuan pedagogik yang baik tanpa disertai pengetahuan matematika yang baik pembelajaran pun akan kurang bermakna. Seorang guru harus mempunyai penguasaan yang baik dari segi matematika dan pedagogik. Pengetahuan matematika dan pedagogik yang baik akan membentuk pengetahuan konten pedagogik yang baik. Indikator pengetahuan konten pedagogik bisa berupa mengerti proses penalaran siswa, mengerti alasan dari penalaran yang dimiliki siswa, mampu membuat solusi untuk mengurangi penalaran yang salah dari siswa, mampu memberi pertanyaan yang sesuai untuk dapat mengerti pemikiran siswa, membentuk kriteria yang cocok untuk menilai jawaban siswa berdasarkan kriteria yang ada.

3. KESIMPULAN DAN SARAN

3.1 Kesimpulan

Dari uraian di atas dapat disimpulkan:

Mempunyai pemahaman pengetahuan matematika yang mendalam adalah perlu tetapi belum cukup untuk mengajar matematika. Tidak mungkin mengajar matematika tanpa mempunyai pengetahuan matematika. Guru harus mempunyai pemahaman yang baik dari aspek pengetahuan matematika maupun aspek pedagogik. Pengetahuan konten pedagogik adalah integrasi dari pengetahuan matematika dan pengetahuan pedagogik, yaitu berupa cara mempresentasikan materi matematika secara komprehensif dan *powerfull*.

3.2 Saran

Untuk mendapat informasi tentang tingkat pemahaman pengetahuan matematika, pengetahuan pedagogik, dan pengetahuan konten pedagogik guru perlu dilakukan penelitian yang mengarah untuk mengevaluasi dan memperbaiki mutu guru.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] An, S., Kulm, G. & Wu, Z. *The Pedagogical Content Knowledge of Middle School Mathematics Teachers in China and the U.S.*, Journal of Mathematics Teacher Education.(2004)

- [2] Cochran, K., DeRuiter, J. & King, R. *Pedagogical Content Knowing: An Integrative Model for Teacher Preparation*, Journal of Teacher Education. (1993)
- [3] Darma, Satria. 10 Maret 2010. 1,3 Juta Guru Belum Layak Mengajar. *Antara News*
- [4] Depdiknas, *Undang-undang No 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen*, (2005)
- [5] Depdiknas, *Pendekatan Expertise dalam Bantek*. Tersedia: <http://www.puskur.net>. (2009)
- [6] Ida Farida, *Peranan Pedagogi Materi Subyek dalam Mengembangkan Pengetahuan Konten Guru Sains*. Tersedia: <http://cheminterconnected.spaces.live.com>
- [7] Kahan, Cooper, dan Bethea, K, *The Role of Mathematics Teachers' Content Knowledge in Their Teaching: A framework for Research Applied to a Study of Student Teachers*, Journal of Mathematics Teacher Education. (2003)
- [8] McDuffy, *Mathematics Teaching as a Deliberate Practice: An Investigation of Elementary Pre-Service Teachers' Reflective Thinking during Student Teaching*, Journal of Mathematics Teacher Education. (2004)
- [9] Mulyasa. 25 Februari 2010. Kualitas Guru di Indonesia Rendah. *Kompas*.
- [10] Russeffendi, E.T, *Pengantar kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*, Tarsito, Bandung. 1991
- [11] Supriyoko, *Mengembangkan Kompetensi Pedagogik Guru Indonesi*,tersedia : <http://journal.amikom.ac.id>
- [12] Turnuklu, Elif B and Yesildere, Sibel. *The Pedagogical Knowledge in Mathematics: Pre Service Primary Mathematics teachers' Perspectives in Turkey*. Journal IUMPST. (2007)
- [13] Yusuf, Syamsu, *Pedagogik Pendidikan Dasar*, UPI. 2007

PERANCANGAN MODEL PETA PROFIL DOSEN PERGURUAN TINGGI DI INDONESIA

Ngarap Im Manik
Jurs.Matematika FST-Binus University
Kampus Syahdan, Jl.KH Syahdan 9 Palmerah Jakarta Barat 11480, Indonesia
manik@binus.edu

ABSTRACT. To realize one of missions of a university, to produce qualified and virtuous graduates, so the role of discipline lecturers with high commitment and competence in a learning process becomes a primary goal. To achieve this goal, the information of lecturers' profile becomes very important as material to carry out the construction, development, lecturers' performance evaluation, and decision making refers to the University Tri Dharma. In connection with this matter, it is necessary to design a model plan of profile map of university lecturers. The study result obtained is to find out the lecturers' commitment, by measuring commitment components, such as: lecturing presence, delay of examination scores delivery, department meeting attendance, seminar attendance, training/workshop attendance, contribution of community service activities, and contribution of department's supporting activities (activities committee, department promotion, etc.). Meanwhile, the competency components consist of formal education, non formal education, scientific paper, research quantity, academic hierarchy, module quantity of lecture/book material, and lecturers' IKADQ. For the value distribution of those each component, it is set as variable in accordance with the interest of user department. From the two components, then it is continued with the lecturers' commitment and competency data plot at the cross of XY axis which forms nine lecturers' profile map, so that it can provide typology information about specialization of lecturers' competence, relationship between academic education, lecturer's competence, and lecturing relevance in a form of relevance table, as well as minimum standard of lecturers' profile map model, can be used at universities in Indonesia.

Keywords: *Map, lecturers' profile, commitment and competence components*

1. PENDAHULUAN

Dalam rangka pencapaian visi dan misi Perguruan Tinggi di Indonesia yang dipusatkan pada optimalisasi kontribusi terhadap upaya peningkatan kualitas bangsa Indonesia, pengembangan IPTEKS, budaya dan identitas bangsa secara keseluruhan maka perguruan tinggi harus tampil sebagai *leader* dalam pengembangan kemajuan dan peradaban bangsa, sehingga menjadi andalan seluruh bangsa. Disamping itu perguruan tinggi mempunyai misi yang bersifat nasional dan merupakan infrastruktur untuk melahirkan lulusan atau calon pemimpin bangsa yang berkualitas dan berbudi luhur. Salah satu komponen yang penting dalam proses pembelajaran adalah Sumber Daya Manusia (SDM) yang dalam hal ini adalah dosen pengasuh matakuliah dan dibantu komponen lainnya yaitu sarana, prasarana dan infra struktur lainnya.

Dengan alasan tersebut data atau informasi tentang profil dosen menjadi penting sebagai bahan untuk melaksanakan pembinaan, pengembangan dosen serta pengambilan keputusan dalam rangka mewujudkan visi, misi perguruan tinggi dan juga dapat

digunakan sebagai penilaian kinerja dosen yang mengacu pada Tri Dharma Perguruan Tinggi. Penilaian seperti ini dapat menimbulkan motivasi dosen untuk mencapai kinerja yang diinginkan. Data profil dosen merupakan bagian penting bagi Jurusan atau Fakultas untuk melakukan atau melaksanakan kebijakan yang tepat terhadap dosen dalam usaha membina dan mengembangkan kompetensi dosen untuk pencapaian sasaran Jurusan atau Fakultas.

Secara umum, permasalahan penelitian ini adalah analisis dan pemetaan data dosen yang berkaitan dengan kompetensi dan komitmen dosen dalam proses pembelajaran. Secara khusus, permasalahan penelitian ini adalah: Sampai sejauh mana bobot nilai kegiatan dosen terhadap komponen yang terkait dengan kompetensi dan komitmen tersebut ? dan apakah dapat diperoleh informasi peta kekuatan dosen di suatu jurusan secara lengkap?.

Tujuan dari penelitian ini adalah:

- a. Mencoba mencari gambaran deskriptif tentang kompetensi (pendidikan formal & non formal, penelitian, karya tulis ilmiah) dan komitmen dosen.
- b. Mencoba mencari tipologi tentang spesialisasi keahlian dosen.
- c. Mencoba melihat hubungan antara pendidikan akademik dan keahlian dosen dengan relevansi mengajar matakuliah.
- d. Mencoba mencari model pemetaan profil dosen yang terbaik atau standard.

Manfaat dari hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan data dan informasi tentang profil dosen, sehingga dari informasi tersebut pihak pengelola Jurusan/Universitas dapat melaksanakan langkah-langkah yang tepat untuk pembinaan dan pengembangan dosen dan juga dapat memberikan informasi tentang peta atau matrik kekuatan dosen yang meliputi : data pribadi, data pendidikan (formal/non formal), data spesialisasi/keahlian, data pengalaman kerja/mengajar, data kegiatan penelitian, data publikasi ilmiah dan data minat mengajar kelompok bidang ilmu dosen. Output/keluaran dari hasil penelitian berupa tabel data dan peta profil dosen yang diharapkan dengan perubahan beberapa format dapat pula digunakan oleh Jurusan/Fakultas lain di seluruh Perguruan Tinggi.

2. MATERI DAN METODE

Untuk membuat peta profil dosen , terlebih dahulu dilakukan kajian teori yang relevan untuk pembuatannya, yang dalam hal ini digunakan teori statistika tentang penyebaran

data melalui metoda Persentil dan Kwantil, kemudian untuk membuat diagram peta profil dosen Perguruan Tinggi ini dikembangkan dari gambar peta yang dipakai dalam *The Ohio State Leadership Quadrants* menurut Universitas Ohio, yang dalam konsep tersebut dibagi menjadi 4 kuadran (Miller, 2004 & Bass,2000). Dalam penelitian ini konsep kuadran tersebut di atas, kemudian dikembangkan dan disesuaikan dengan data, kebutuhan dan metoda Kuantil sehingga terbentuklah peta profil dosen dengan 9 (sembilan) daerah peta seperti pada gambar.1 (John,2007).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rendah - □ Sedang - □ Tinggi | Tinggi Kompetensi Rendah Komitmen P7 | Tinggi Kompetensi Sedang Komitmen P4 | Tinggi Kompetensi Tinggi Komitmen P1 |
| | Sedang Kompetensi Rendah Komitmen P8 | Sedang Kompetensi Sedang Komitmen P5 | Sedang Kompetensi Tinggi Komitmen P2 |
| | Rendah Kompetensi Rendah Komitmen P9 | Rendah Kompetensi Sedang Komitmen P6 | Rendah Kompetensi Tinggi Komitmen P3 |
| | Komitmen Q(0,30) Q(0,70) | | |
| | Rendah ----→ Sedang -----→ Tinggi | | |

Gambar 1.Peta profil dosen

Berbagai ukuran lokasi (letak) dalam statistika antara lain median, kuartil dan persentil. Kuantil juga merupakan suatu ukuran lokasi (letak) seperti halnya ukuran lokasi lainnya. Jika media membagi rentangan nilai urutan atas dua bagian yang sama, maka kuartil membagi rentangan nilai urutan atas empat bagian yang sama sehingga ada 3 nilai kuartil yaitu kuartil bawah, kuartil median, kuartil atas. Setiap bagian yang dibatasi oleh kuartil akan terdapat 25% nilai urutan sehingga tidak dapat digunakan sebagai batas jika menginginkan proporsi bagian yang lainnya.

Ukuran lokasi yang mudah digunakan untuk menentukan letak dengan proporsi nilai yang diinginkan adalah persentil. Persentil membagi urutan atas seratus bagian, sehingga dapat dipilih lokasi/letak yang diinginkan dari 99 lokasi yang tersedia.

Kuantil sebagai ukuran lokasi yang hampir sama dengan persentil, perbedaannya adalah pada persentil rentang urutan nilai dari 0 sampai dengan 100 sedangkan kuantil rentang nilai dari 0 sampai dengan 1. Kuantil yang dikembangkan dalam penelitian ini

adalah $Q(p) =$ kuantil ke p samadengan persentil ke $100p$. Untuk kuantil $Q(0,25) = P_{25} = Q_1$. $Q(0,25) =$ kuantil ke 25 , $P_{25} =$ persentil ke 25 dan $Q_1 =$ kuartil 1.

Untuk menentukan nilai urutan yang akan masuk pada posisi tertentu di bawah atau di atas $Q(p)$, untuk banyaknya besar sampel= n , dan bila np bulat maka dapat digunakan urutan $X(np)$ dimasukkan pada kelompok di bawah $Q(p)$. Penyekatan urutan pada setiap sumbu atas tiga kelompok yaitu kurang, sedang dan tinggi dengan lokasi penyeekat $Q(0,30)$ dan $Q(0,70)$ untuk data yang berdistribusi normal dengan variabel normal baku, maka $Q(0,30)$ setara dengan $Z = -0,5244$ untuk batas kurang dan sedang serta $Z=0,5244$ untuk batas sedang dengan tinggi. (Chambers,1993; Gnadesikan, 1997)

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini lebih kepada metode penelitian deskriptif,. Penelitian ini menggunakan metoda survei, instrumen yang digunakan observasi, kuesioner dan dokumen. Pelaksanaan penelitian ini meliputi beberapa tahap kegiatan yaitu :

- a. **Persiapan & analisis kebutuhan** : kegiatan ini merupakan kegiatan awal untuk melihat kembali kebutuhan-kebutuhan yang diperlukan serta persiapan peralatan yang akan digunakan.
- b. **Rancangan Pengembangan Model** : kegiatan ini meliputi penyusunan rancangan pengembangan komponen komitmen dan kompetensi dosen perguruan tinggi dan nantinya diharapkan dari pengembangan model ini didapat model standard minimum komponen komitmen dan kompetensi dosen perguruan tinggi.
- c. **Pengumpulan Data Komitmen & Kompetensi**: Dari rancangan yang telah dibuat sebelumnya, kemudian dilakukan kegiatan pemutakhiran rancangan model komponen komitmen dan kompetensi dengan cara memberikan model tersebut ke beberapa perguruan tinggi swasta maupun perguruan tinggi negeri (15 perguruan tinggi) sebagai sampel untuk memberikan komentar atau masukan terhadap model yang telah dibuat. Kegiatan ini dilakukan dengan dua cara yaitu secara langsung (survey) atau tidak langsung (pengiriman Kuesioner/isian) ke masing-masing sampel perguruan tinggi. Kemudian dari masukan yang ada diolah sehingga didapat model peta profil dosen perguruan tinggi.
- d. **Analisis Data & Penyusunan Bobot** : kegiatan ini dilakukan untuk menyempurnakan rancangan model yang telah dikembangkan setelah adanya masukan/inputan dari beberapa data yang masuk, sehingga didapat model yang lebih lengkap.

- e. Penulisan Laporan :** Akhir dari kegiatan penelitian ini, secara keseluruhan dituliskan dalam bentuk laporan penelitian.

Hasil dari penelitian ini dapat digunakan oleh perguruan tinggi di seluruh Indonesia yang ingin mengetahui peta profil dosennya baik kompetensi dan komitmennya. Disamping itu model peta profil dosen yang diperoleh akan dibuat lebih fleksibel, sehingga variabel-variabel inputnya dapat dirubah sesuai dengan kebutuhan dari perguruan tinggi pengguna. Output/keluaran dari penelitian ini berupa tabel data dan peta profil dosen perguruan tinggi di Indoensia.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil rancangan komponen untuk komitmen dan kompetensi seorang dosen yang telah dikembangkan berdasarkan usulan/saran dari sampel perguruan tinggi adalah seperti berikut:

A. Komitmen

1. Kehadiran Mengajar → **nilai Maks 20**
hadir $\leq 90\%$ = 15 ; hadir $> 90\%$ = 20
2. Keterlambatan penyerahan soal & nilai UTS+UAS → **nilai Maks 20**
terlambat 0 hari = 25 ; terlambat 1-2 hari = 10
terlambat 3-7 hari = 5 ; terlambat ≥ 7 hari = 0
3. Kehadiran rapat2 jurusan → **nilai Maks 10**
hadir 10-50% = 5 ; hadir 51-80% = 10 ; hadir $> 80\%$ = 15
4. Kehadiran Seminar di jurusan/fakultas/universitas → **nilai Maks 15**
hadir 1-30% = 5; hadir 31-75% = 10 ; hadir $> 75\%$ = 15
5. Kehadiran Pelatihan/workshop di Jurusan/fakultas → **nilai Maks 15**
hadir 1-30% = 5; hadir 31-75% = 10 ; hadir $> 75\%$ = 15
6. Kontribusi terhadap kegiatan jurusan (panitia kegiatan jurs, promosi, dll)
→ **nilai Maks 10.**
 ≤ 2 kegiatan/sm = 5 ; > 2 kegiatan/sm = 10
7. Melaksanakan kegiatan Pengabdian pd Masyarakat (PKM) → **nilai Maks 5**
 ≥ 1 kegiatan = 5
8. Membimbing tugas akhir mahasiswa tepat waktu → **nilai Maks 5**
tepat waktu = 5

B. Kompetensi

Sedangkan untuk komponen yang terkait dengan kompetensi antara lain:

1. Pendidikan Formal (akhir) → **nilai Maks 20**
 - S1-Sesuai bidang studi jurusan/program studi = 10 ; Non(else) = 5
 - S2-Sesuai bidang studi jurusan/program studi = 15 ; Non(else) = 10
 - S3- Sesuai bidang studi jurusan/program studi = 20 ; Non(else) = 15
2. Pendidikan NonFormal (Kursus, Pelatihan Jangka panjang ≥ 3 bln, dll) → **Maks 10**
 - Sesuai bidang studi/jurusan (1-4 topik) = 5 ; Non(else) = 2
3. Karya Tulis Ilmiah yg dipublikasikan (journal/proceedings) → **nilai Maks 15**
 - 1-2 tulisan/tahun = 5 ; 3-4 tulisan/tahun = 10
 - >4 tulisan/tahun = 15
4. Jumlah Penelitian internal/eksternal dlm setahun → **nilai Maks 15**
 - 1 topik/tahun = 10 ; >1 topik/tahun = 15
5. IKADQ (Indeks Kinerja Akademik Dosen Questioner) → **nilai Maks 15**
 - IKADQ 2.0-2,55 = 5 ; IKADQ 2.6-3.0 = 10 ; IKADQ >3.0 = 15
 - (Khusus untuk pengukuran ini, mahasiswa akan diberi angket di pertengahan semester perkuliahan agar mengisi pertanyaan/kuesioner, kemudian dihitung IKADQ dosen yang bersangkutan, sehingga setiap dosen akan memiliki nilai IKADQ untuk masing-masing matakuliah yang diampu pada setiap semesternya) → score penilaian berkisar antara 1 s/d 4.
6. Jenjang Jabatan Akademik → **nilai Maks 15**
 - Asst = 5 ; Lektor - Lektor Kepala = 10 ; Guru Besar = 15
7. Jlh terbitan buku/modul materi kuliah → **nilai Maks 5**
 - ≥ 1 buku = 5
8. Ikut sebagai anggota assosiasi profesi → **nilai maks 5**
 - ≥ 1 sebagai anggota = 5

Pembahasan

Dari 15 sampel perguruan tinggi PTN & PTS yang meliputi wilayah Indonesia bagian Barat dan Indonesia bagian Timur, telah diperoleh beberapa masukan dan saran yang dirangkum seperti pada tabel 1.

Tabel 1. Rangkuman Saran/masukan/tanggapan/ Penelitian Pengembangan Model Peta Profil Dosen Perguruan Tinggi.

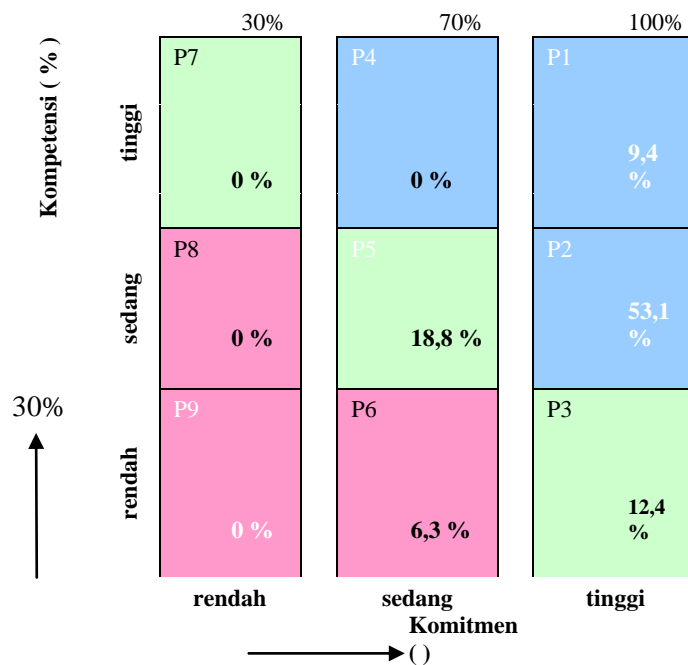
| No | Saran untuk KOMITMEN | Saran untuk KOMPETENSI |
|----|--|---|
| 1. | Perlu diperhatikan penjiwaan sebagai “pendidik” | Tambahkan latar belakang pendidikan non formal yang bersertifikat |
| 2. | Perlu diperhatikan tentang kompensasi terhadap dosen | Tambahkan proses pemutakhiran data |
| 3. | Wujudkan atmosfir akademik yang jujur dan disiplin | Interelasi aktif dengan komunitas bidang keilmuan & asosiasi profesi |
| 4. | Tambahkan kegiatan pengabdian pada masyarakat | Kemampuan berbahasa inggris dosen perlu dipertimbangkan |
| 5. | Perlu penjelasan lebih lanjut tentang seminar yg di tingkat fakultas/universitas | Penilaian karya tulis tidak hanya kuantitatif tetapi perlu diperhatikan jurnal akreditasi? Nasional atau Internasional? |
| 6. | Pengumpulan soal ujian uts/uas tepat waktu | Kegiatan di luar kampus yg sesuai dgn bidang keahlian (sebagai konsultan) |
| 7. | Bimbingan tugas akhir tepat waktu | Tambahkan track record dosen pada tahun sebelumnya |
| 8. | Kontribusi kegiatan pendukung jurusan (panitia seminar, promosi jurs, dan lain-lain) | Tambahkan hasil karya dosen tentang penerbitan buku pengajaran matakuliah. |

Langkah berikutnya, dari komponen yang telah di ukur seperti contoh di atas (nilai maksimum komponen masih dapat dirubah sesuai kebutuhan), lalu diplotkan pada peta seperti gambar 2, sehingga akhirnya untuk setiap dosen diketahui terletak pada kelompok posisi yang mana dosen tersebut berada. Analisis pengelompokan data dibuat sesuai dengan metode kuantil yang dikelompokkan menjadi sembilan kelompok yang dalam hal ini disebut sebagai kelompok Peta1, Peta2, dan Peta9.

Penentuan 9 kelompok lebih didasari pada prosedur metoda kuantil dalam ilmu Statistika dan untuk menghindari tertumpuknya data dalam satu kelompok agar supaya penyebaran data lebih terdistribusi (Aunuddin, 1989). Dalam penetapan kelompok tersebut analisis ditekankan kepada kedua aspek komitmen dan kompetensi, dengan asumsi bahwa dosen yang memiliki komitmen & kompetensi yang di atas rata-rata baik, diharapkan dengan pembinaan yang baik dan berkesinambungan dapat meningkatkan ke level yang lebih baik (memuaskan) yang akan berdampak kepada peningkatan kualitas proses pembelajaran sehingga tercipta mahasiswa dan lulusan yang berkualitas.

Pemetaan Peta Profil Dosen Perguruan Tinggi ini dibuat dalam Koordinat Kartesius X,Y, dengan $X=$ Komitmen dan $Y=$ Kompetensi, yang diberikan dalam prosentase(%) bobot, dan nilai komponen yang terkait. Untuk menggambarkan peta kuadran profil dosen, sebelumnya ditetapkan komponen-komponen yang terkait dengan kedua variabel X dan Y tersebut di atas. Setelah dilakukan analisis maka nantinya akan diperoleh komponen-komponen yang terkait, yang dapat membentuk Diagram peta profil dosen seperti contoh (Gambar 2).

Untuk mencari gambaran deskriptif tentang kompetensi (pendidikan formal & non formal, penelitian, karya tulis ilmiah dll) dengan komitmen dosen di Jurusan dapat dilihat pada contoh seperti pada Tabel 2. Dari hasil pengumpulan dan olahan data untuk masing -masing komponen, diperoleh hasil pada Tabel 2. :



Gambar 2. Contoh Diagram Pemetaan Profil Dosen

Tabel 2. Contoh Hasil rangkuman data Kompetensi dan Komitmen Dosen
Jurusan Matematika-UBINUS Tahun 2010

| No | Unsur Komponen | bobot nilai (Matematika) |
|-----------|---|-----------------------------|
| I | KOMPETENSI | |
| 1 | Pendidikan Formal S1 S2 S3 | 15,6 62,6 21,8 |
| | Bidang Keahlian : • Sesuai jurs/prodi • Tidak sesuai jurs/prodi | 53,1 46,9 |
| 2 | Pendidikan Non Formal | 0 |
| 3 | Karya Tulis Ilmiah | 40,6 |
| 4 | Karya Penelitian | 18,8 |
| 5 | Rata-rata IKADQ • IKADQ > 3 • IKADQ 2,6 – 3 • IKADQ ≤ 2,55 | 78,1 18,8 3,1 |
| 6 | Jenjang jabatan Akademik • Belum ada JJA • Asisten • Lektor-kepala • Guru Besar | 9,4 37,5 50 3,1 |
| 7 | Terbitan Buku/Modul | 25 |
| | | |
| | | |
| II | KOMITMEN | |
| 1 | Kehadiran Mengajar • Hadir ≤ 90% • Hadir > 90% | 3,1 96,9 |
| 2 | Telat penyerahan nilai • 0 hari • 1-2 hari • > 2 hari | 75 21,9 3,1 |
| 3 | Kehadiran Rapat Jurusan • hadir 10-50% • hadir 51-80% • hadir > 80% | 18,7 43,8 37,5 |
| 4 | Kehadiran Seminar Jurs • hadir 1-30% • hadir 31-75% • hadir > 75% | 31,3 37,4 31,3 |
| 5 | Kehadiran Pelatihan/WShop • hadir 1-30% | 3,1 31,3 |

| | | |
|---|--|-------|
| | <ul style="list-style-type: none"> • hadir 31-75% • hadir > 75% | 65,6 |
| 6 | Kontribusi thdp materi kuliah | 40,6 |
| 7 | Keg. Peng Masyarakat (PKM) | 18,75 |

4. KESIMPULAN

Dari hasil rancangan model peta profil dosen ini telah dapat menggambarkan secara deskriptif tentang kompetensi dan komitmen dosen serta tipologi tentang spesialisasi keahlian dan komitmen dosen, hubungan antara pendidikan akademik dan keahlian dosen dengan relevansi mengajar matakuliah di suatu jurusan serta model pemetaan profil dosen yang terbaik. Komponen komitmen terkait pada : Kehadiran Mengajar , Keterlambatan penyerahan nilai UTS+UAS, Kehadiran rapat, Kehadiran Seminar ,Kehadiran Pelatihan/workshop, Kontribusi pembuatan/ pengembangan materi kuliah dan Kegiatan pengabdian pada masyarakat. Sedangkan komponen Kompetensi terkait pada: Pendidikan Formal (akhir), Pendidikan Non Formal (Kursus,Pelatihan Jangka panjang ≥ 3 bln,dll), Karya Tulis Ilmiah yg dipublikasikan(Journal/proceeding), Jumlah Penelitian Internal/ Eksternal dalam setahun, IKADQ (Indeks Kinerja Akademik Dosen), Jenjang Jabatan Akademik dan Jumlah terbitan buku pendukung materi kuliah.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]The *Ohio State Leadership Quadrants*,
<http://www.appliedinnovation.com.au/pdf/resources/>13 mei 2007
- [2] Aunuddin, *Analisis Data*, Bogor, APU-IPB. 1989.
- [3] Andre Iskandar, *Analisa Faktor Dosen dalam Pengajaran pada Jenjang Pendidikan Tertentu*, Majalah ilmiah SCEINTIA, Vol 2 no.1 Okt 2002, p 39
- [4] Bass B, The Future of Leadership in Learning Organization, *Journal of Leadership Studies*, vol 7 Juni 2000, p 18-40.
- [5] Chambers, J.M, Clevelend, W.S, *Graphical Mehtods for Data Analysis*, Boston, MA, Duxbury Press. 1993.
- [6] Depasquale, F.J, *Principal Leadership Behavior and Faculty Trust : Is there a connection?*,ProQuest file: Dissertation Abstracts International Item:57/04,1996
- [7] Gnanadesikan, R, *Method for Statistical Data Analysis of Multivariate Observation*, Newyork, John Wiley & Sons. 1997.

- [8] John M. Charan & Wesley Taylor V J, *Leadership Style, School Climate and the Institutional Commitment of Teachers*, <http://www.alias.edu/academics/sgs/info>
Akses: Juni 2007
- [9] Miller RL, Butler J, Followership Effectiveness: An extension of Fieldlers Contingency Model, *Leadership and Organization Development Journal*, vol 25 April 2004, p 362-368. 2004.

STRATEGI PEMBELAJARAN PENINGKATAN KEMAMPUAN BERPIKIR (SUATU UPAYA MENINGKATKAN KUALITAS PEMBELAJARAN MATEMATIKA)

Mulin Nu'man
Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
mulin_numan@yahoo.com

ABSTAK. Pembelajaran matematika beracuan behaviorisme selama ini dipandang kurang berhasil. Oleh karena itu perlu dicari alternatif "penggantinya". Dalam tulisan ini, ditawarkan pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme, yang salah satu caranya dengan menggunakan strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir. Kegiatan yang melibatkan siswa belajar menggunakan strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir perlu dirancang dan dilaksanakan oleh guru. Penggunaan strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir dapat dikondisikan terutama dalam proses memahami suatu konsep dan aplikasinya dalam pemecahan masalah. Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir sangat cocok dipakai dalam pembelajaran matematika karena karakteristik matematika yang lebih banyak menekankan pada aspek kognitif. Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir dilaksanakan dalam 6 tahap yaitu: 1) tahap orientasi, 2) tahap pelacakan, 3) tahap konfrontasi, 4) tahap inkuiri, 5) tahap akomodasi, dan 6) tahap transfer. Dalam menerapkan strategi ini, dibutuhkan juga strategi yang lain untuk meminimalkan kelemahan, misalnya strategi kooperatif.

Kata Kunci: pembelajaran, matematika, peningkatan kemampuan berpikir.

1. PENDAHULUAN

Dalam pembelajaran matematika, seorang guru harus mampu membuat hubungan antara apa yang ada di benak siswa dengan konsep-konsep matematika yang diajarkan sehingga permasalahan dan pertanyaan yang diberikan kepada siswa dapat mudah dimengerti dan berguna bagi mereka (Herbs, 2006). Kondisi sebaliknya dikemukakan oleh Kusaeri, *et all* (2008) bahwa pembelajaran matematika selama ini lebih banyak dilaksanakan melalui kegiatan menjawab soal yang diberikan guru dan atau buku teks. Dengan demikian, pembelajaran matematika terasa kering, membosankan, dan jauh dari kerangka pikir siswa. Fakta ini dapat menyebabkan kesulitan siswa dalam belajar matematika.

Dewasa ini pembelajaran matematika konstruktivis menjadi perhatian para pemerhati pendidikan untuk menggeser pembelajaran matematika tradisional yang hasilnya dipandang kurang optimal. Pembelajaran matematika tradisional berpusat pada guru dengan metode ceramah sebagai metode pembelajaran utama. Pada kelas matematika tradisional, siswa lebih banyak sebagai pendengar dan menghafal aturan-aturan atau rumus-rumus matematika yang seringkali siswa kurang memahaminya (Suwarsono, 1999; Ratumanan, 2003; Jaeng, 2004). Marpaung (dalam Ratumanan, 2003) berpendapat bahwa matematika tidak ada artinya kalau hanya dihafal.

Pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme berpusat pada siswa. Guru berperan sebagai fasilitator terciptanya suasana pembelajaran yang aktif, kreatif, efisien dan menyenangkan. Guru menerapkan berbagai metode yang dipandang sesuai dengan bahasan materi matematika yang sedang dipelajari. Siswa terlibat membangun ide-ide, konsep-konsep, prinsip-prinsip dan struktur-struktur matematika berdasar pengalaman siswa sendiri. Slavin (2000) menyatakan "*Students must construct knowledge in their own mind.*"

Menurut Clark (2000) penerapan konstruktivisme di sekolah terbagi menjadi dua yaitu konstruktivisme kognitif dan konstruktivisme sosial. Piaget dipandang sebagai ahli pendidikan pertama yang menekankan proses perubahan konsep sebagai interaksi antara struktur kognitif yang dimiliki dan pengalaman baru. Selama tahun 1930 sampai 1940, konstruktivisme menjadi sorotan para pendidik di beberapa sekolah negeri di Amerika. Pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme menekankan pada kegiatan siswa dari pada guru. Guru sebagai fasilitator atau pelatih yang membantu siswa mengkonstruksi konsep-konsep dan pemecahan masalah secara mandiri. Pandangan konstruktivisme radikal yang dikemukakan von Glasersfeld berdasar pandangan Piaget. Glasersfeld (1984) menyatakan banyak ide yang diambil dari Piaget dan mempengaruhi pandangannya sejak tahun 1970.

Pada tahun 1930 Lev Vygotsky, ahli filsafat dan psikolog Rusia, mengaitkan dengan konstruktivisme sosial. Ia menyatakan adanya pengaruh konteks sosial dan budaya dalam pembelajaran dan juga mendukung suatu model pembelajaran penemuan (Murphy, 1997). Model pembelajaran beracuan konstruktivisme sosial menuntut guru berperan aktif dan kecakapan siswa berkembang secara alami melalui berbagai jalur penemuan dalam aktivitas sosial.

Meskipun pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme yang mengacu pada psikologi kognitif Piaget (atau mengacu Glasersfeld) tergolong dalam konstruktivisme

individu, namun menurut Slavin (2000: 256) dan Copeland (1974: 32), Piaget tidak mengabaikan pentingnya interaksi sosial dalam mengkonstruksi matematika. Interaksi sosial yang terjadi di kelas dipandang sebagai aktivitas yang mendukung belajar siswa dalam mengkonstruksi matematika. Interaksi sosial ini dapat berbentuk saling tukar pendapat atau diskusi antar siswa, atau kegiatan belajar lainnya yang menjadikan terjadinya komunikasi lisan maupun tertulis antar siswa atau antara guru dan siswa.

Dalam interaksi sosial ini kemungkinan terjadi siswa yang mengalami kesulitan dalam belajar terbantu oleh teman atau gurunya. Forman dan McPhail (dalam Salvin, 2000: 46) menyatakan tutor oleh teman yang lebih pandai paling efektif dalam meningkatkan perkembangan ZPD (*Zone of Proximal Development*). Konsep ZPD Vygotsky berdasar pada ide bahwa perkembangan pengetahuan siswa ditentukan oleh keduanya yaitu apa yang dapat dilakukan oleh siswa sendiri dan apa yang dilakukan oleh siswa ketika mendapat bantuan orang yang lebih dewasa atau teman sebaya yang lebih kompeten (Daniels dan Wertsch dalam Slavin 2000: 47). Slavin (2000) menyatakan bahwa pendekatan pembelajaran Vygotsky menekankan pada scaffolding. Wood, Bruner, dan Ross (dalam Slavin: 2000: 47) menyatakan: *Scaffolding is a tactic for helping the child in his or her zone of proximal development in which the adult provide hint and prompt at different level.*

Fakta di lapangan menunjukkan bahwa guru matematika sekolah kebanyakan mengajar dengan cara tradisional dengan pola: informasi-contoh soal-latihan sesuai contoh. Paradigma pembelajaran matematika seperti itu yang bertahun-tahun digunakan di Indonesia mengacu pada paradigma mengajar dan banyak dipengaruhi oleh psikologi tingkah laku (*behaviorisme*), bukan paradigma belajar (Marpaung, 2003). Menurut Ratumanan (2003) pembelajaran matematika di Indonesia beracuan behaviorisme dengan penekanan pada transfer pengetahuan dan hukum latihan. Guru mendominasi kelas dan menjadi sumber utama pengetahuan, kurang memperhatikan aktivitas aktif siswa, interaksi siswa, negosiasi makna, dan konstruksi pengetahuan. Pembelajaran matematika beracuan behaviorisme berorientasi pada hasil dan latihan yang diberikan berbasis tujuan. Perancang pembelajaran matematika beracuan behaviorisme mendefinisikan pembelajaran dalam tujuan-tujuan yang berupa tingkah laku dan ukuran penampilan tingkah laku (Wilson, Teslow, dan Taylor, 1993).

Pembelajaran matematika beracuan behaviorisme berpusat pada upaya siswa mengumpulkan pengetahuan matematika dan guru berupaya mentransfernya. Dalam mentransfer pengetahuan ini, menjadikan siswa bersifat pasif, guru mengarahkan dan

mengontrol kegiatan, dan guru mendominasi kelas. Pembelajaran matematika beracuan behaviorisme dipandang kurang berhasil dan menjadikan siswa bersifat menghafal matematika (Hudoyo, 2005; Marpaung, 2003).

Padahal, ketidaktepatan guru dalam merancang dan melaksanakan pembelajaran menjadi salah satu faktor penyebab kesulitan siswa dalam belajar matematika. Kesulitan siswa dalam mempelajari matematika akan berdampak pada prestasi mereka dalam matematika rendah. Suwarsono (1999) menyatakan bahwa kesulitan siswa dalam mempelajari matematika di sekolah rupanya juga tidak terlepas dari strategi pembelajaran yang selama ini digunakan, yaitu strategi pembelajaran yang menggunakan sistem klasikal, dengan metode ceramah sebagai metode utama. Selama ini, seringkali hanya penyebab kesulitan yang bersumber dari "diri siswa" yang mendapat sorotan tajam. Seolah-olah tidak ada penyebab kesulitan yang bersumber justru dari "luar diri siswa", misalnya dari "cara menyajikan pelajaran" atau "suasana pembelajaran" yang dilaksanakan (Soedjadi, 2003).

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika beracuan behaviorisme selama ini kurang berhasil. Oleh karena itu perlu dicari alternatif "penggantinya." Dalam tulisan ini, ditawarkan strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir. Dalam tulisan ini akan diuraikan penerapan strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir dalam pembelajaran matematika.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Tinjauan Filsafat Konstruktivisme

Sekitar tahun 1985 orang jarang mendengar kata konstruktivisme (Davis, Maher dan Nodding, 1990). Istilah konstruktivisme dikenal mengacu pada teori perkembangan struktur kognitif dari Piaget (English dan Halford, 1995: 11). Dalam perkembangannya konstruktivisme memiliki arti bermacam-macam. Berikut ini disajikan beberapa pendapat tentang pengertian konstruktivisme yang dikemukakan oleh filosof, psikolog, dan pendidik.

Konstruktivisme menurut Piaget adalah pengetahuan konseptual tidak dapat ditransfer dari seseorang ke orang lainnya, melainkan harus dikonstruksi oleh setiap orang berdasarkan pengalaman mereka sendiri (Nik Pa dalam English dan Halford, 1995: 11). Menurut von Glasersfeld (von Glasersfeld, 1984) konstruktivisme pengetahuan secara aktif diterima orang melalui indera atau melalui komunikasi atau pengalaman.

Orang menginterpretasi dan mengkonstruksi realitas berbasis pengalaman dan interaksinya dengan lingkungannya.

Fosnot (dalam Doolittle dan Camp, 1999: 5) menyatakan bahwa siswa membangun pengetahuan mengacu pada pengalaman yang dinamakan konstruktivisme. Nodding (1990:7) menyatakan konstruktivisme dapat dikarakteristikan sebagai posisi kognitif dan perspektif metodologis. Slavin (2000: 256) menyatakan konstruktivisme memandang siswa secara konstan memeriksa informasi baru terhadap aturan-aturan lama dan merevisi aturan-aturan itu bila mereka bekerja dalam waktu relatif singkat. Menurut Doolittle dan Camp (1999) inti dari konstruktivisme adalah aktif memahami dan membangun pengetahuan sendiri berdasar pengalamannya.

Konstruktivisme menurut pandangan Vygotsky menekankan pada pengaruh budaya. Vygotsky berpendapat fungsi mental yang lebih tinggi bergerak antara inter-psikologi (*interpsychological*) melalui interaksi sosial dan intra-psikologi (*intrapsychological*) dalam benaknya. Internalisasi dipandang sebagai transformasi dari kegiatan eksternal ke internal. Ini terjadi pada individu bergerak antara inter-psikologi (antar orang) dan intra-psikologi (dalam diri individu). Vygotsky menekankan pada pentingnya hubungan antara individu dan lingkungan sosial dalam pembentukan pengetahuan.

Berdasarkan beberapa pendapat tentang pengertian konstruktivisme yang dikemukakan para ahli tersebut dapat disimpulkan bahwa konstruktivisme dapat diartikan sebagai suatu pandangan dalam memperoleh pemahaman terhadap suatu pengetahuan yang dilakukan dengan cara aktif mengkonstruksi pengetahuan sendiri berdasar pengalaman orang itu sendiri. Dalam mengkonstruksi pengetahuan tersebut dapat dilakukan secara individu atau melalui interaksi sosial.

Berkaitan dengan pembelajaran matematika, pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme adalah pembelajaran yang melibatkan siswa aktif belajar memahami dan membangun pengetahuan matematika berdasar pengalaman siswa sendiri. Dalam proses membangun pengetahuan matematika, siswa berinteraksi dengan lingkungan dan dihadapkan dengan informasi baru. Informasi baru tersebut oleh kognisi siswa diserap melalui adaptasi. Dengan demikian, aturan-aturan lama dapat dimodifikasi atau siswa membentuk aturan-aturan baru dalam benaknya.

2.2 Psikologi Kognitif dan Konstruktivisme

Menurut Slavin, salah satu prinsip dalam psikologi pendidikan adalah guru tidak mudah menyampaikan pengetahuan kepada siswa, siswa harus mengkonstruksi

pengetahuan dalam benaknya (Slavin, 2000: 255). Dalam pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme, guru dapat memfasilitasi proses pembelajaran sehingga siswa melakukan aktivitas mengkonstruksi pengetahuan matematika berdasarkan pada pengalaman siswa sendiri. Di samping itu, pembelajaran matematika yang memberi kesempatan kepada siswa menemukan kembali atau menerapkan ide, dan mendorong siswa menyadari dan berani menggunakan strategi belajar sendiri.

Berkaitan dengan siswa mengkonstruksi pengetahuan matematika terdapat kesamaan pendapat antara Piaget dan Vygotsky yaitu perubahan struktur kognitif terjadi jika konsepsi baru masuk ke benak seseorang. Vygotsky menekankan pada interaksi sosial dalam mengkonstruksi pengetahuan matematis dan maknanya, sedangkan Piaget lebih menekankan pada kerja individu dalam mengkonstruksi pengetahuan matematika dan maknanya berdasar pada pengalaman siswa sendiri. Meskipun demikian Piaget tidak mengabaikan pentingnya interaksi sosial dalam pembelajaran matematika beracuan konstruktivisme (Slavin 2000: 256; Copeland, 1974: 32). Interaksi sosial menurut Piaget adalah kecenderungan bawaan sejak lahir. Interaksi sosial dalam pembelajaran beracuan konstruktivisme Piaget terjadi ketika siswa berdiskusi dalam kelompok.

2.2.1 Konstruktivisme Menurut Piaget

Jean Piaget lahir di Switzerland tahun 1896. Awalnya sebagai seorang ahli biologi yang kemudian menekuni psikologi dan kemudian lebih dikenal sebagai psikolog. Hasil pemikiran dan kerja Piaget tentang apa dan bagaimana proses terjadinya perubahan struktur mental dalam benak siswa sampai saat ini masih sangat berpengaruh di bidang pendidikan matematika. Ia meyakini bahwa "obyek" adalah bukan benda itu sendiri tetapi sesuatu yang dikognisi subyek yang telah dikonstruksi dengan cara membuat perbedaan dan koordinasi dalam persepsinya (Piaget dalam von Glasersfeld, 2006).

Teori perkembangan kognitif Piaget menyatakan bahwa kecakapan kognitif atau intelektual anak dan orang dewasa mengalami kemajuan melalui empat tahap (dalam Hudojo, 2003), yaitu *sensori-motor* (lahir sampai 2 tahun); *pra-operasional* (2 sampai 7 tahun); *operasi konkret* (7 sampai 11 atau 12 tahun), dan *operasi formal* (lebih dari 11 atau 12 tahun). Dalam pandangan Piaget, pengetahuan didapat dari pengalaman dan perkembangan mental siswa bergantung pada keaktifannya berinteraksi dengan lingkungan (Slavin, 2000).

Pada tahap pra-operasional karakteristiknya merupakan gerakan-gerakan sebagai akibat langsung. Pada tahap operasi konkret siswa dalam berpikirnya tidak didasarkan pada keputusan yang logis melainkan didasarkan kepada keputusan yang dapat dilihat

seketika. Pada tahap operasi konkret ditandai dengan siswa mulai berpikir matematis logis berdasar pada manipulasi fisik dari obyek-obyek. Pada tahap operasi formal siswa dapat memberikan alasan-alasan dengan menggunakan simbol-simbol atau ide daripada obyek-obyek yang berkaitan dengan benda-benda di dalam cara berpikirnya (Hudojo, 2003).

Piaget meyakini bahwa kecenderungan siswa berinteraksi dengan lingkungan adalah bawaan sejak lahir. Siswa memproses dan mengatur informasi dalam benaknya dalam bentuk skema (*scheme*). Hudojo (2003: 59) menyatakan skema adalah pola tingkah laku yang dapat berulang kembali. Slavin (2000: 30) menyatakan siswa mendemonstrasikan pola tingkah laku dan pemikiran yang disebut skema. Jadi mengacu pada kedua pendapat Hudojo dan Slavin, skema adalah pola tingkah laku dan pemikiran yang dapat berulang kembali. Dengan demikian, skema adalah struktur kognitif yang digunakan oleh siswa untuk menyesuaikan dengan lingkungan dan mengorganisasikannya. Penguasaan terhadap suatu skema baru mengindikasikan adanya perubahan di dalam struktur mental siswa.

Adaptasi berkaitan dengan penyesuaian skema yang sudah dimiliki siswa ketika berinteraksi dengan lingkungan. Menurut Piaget adaptasi adalah suatu proses penyesuaian skema dalam merespon lingkungan melalui *asimilasi* atau *akomodasi*. *Asimilasi* adalah proses menyerap pengalaman baru berdasar pada skema yang sudah dimiliki dan *akomodasi* adalah proses menyerap pengalaman baru dengan cara memodifikasi skema yang sudah ada atau bahkan membentuk skema yang benar-benar baru (Hudojo, 2003: 60).

Perkembangan struktur mental siswa bergantung pada proses asimilasi dan akomodasi. Masuknya skema baru dalam struktur mental siswa tergantung pada proses akomodasi dalam menyerap pengalaman-pengalaman baru dengan cara siswa sendiri. Melalui adaptasi ini siswa memperoleh pengalaman-pengalaman matematika yang baru berdasarkan pengalaman-pengalaman matematika yang telah dimilikinya.

Menurut Slavin (2000), psikologi kognitif yang dikemukakan Piaget merepresentasikan konstruktivisme individu, yang memandang perkembangan kognitif sebagai suatu proses yang melibatkan siswa secara individu aktif mengkonstruksi struktur mental dan makna melalui pengalaman dan interaksi sosial. Konstruksi pengetahuan matematika menekankan pada konstruksi makna yang dilakukan secara aktif oleh individu berdasar pengalaman siswa sendiri. Mathew dalam (Sa'dijah, 2006) mengemukakan bahwa konstruktivisme Piaget termasuk konstruktivisme personal. Piaget

lebih menekankan pada keaktifan individu dalam membentuk pengetahuan. Pengetahuan dibentuk sendiri oleh siswa yang sedang belajar.

2.2.2 Konstruktivisme Menurut Von Glasersfeld

Ernst von Glasersfeld lahir di Munich, 1917, orang tuanya berasal dari Austria, dan besar di Northern Italy dan Switzerland. Belajar matematika di Zürich dan Vienna, dan selama perang dunia kedua hidup sebagai petani di Irlandia. Dari tahun 1970, ia mengajar psikologi kognitif di Universitas Georgia, USA. Mendapat gelar guru besar emeritus tahun 1987. Pada tahun 1970, ia mulai merumuskan epistemologi yang dikenal dengan konstruktivisme radikal, mengacu epistemologi konstruktivisme Piaget .

Pendapat dan pandangan psikolog Glasersfeld dipengaruhi teori Piaget. Glasersfeld (dalam Murphy, 1997) memandang konstruktivisme radikal berdasar konsepsi-konsepsi pengetahuan. Glasersfeld (1984) menyatakan: *“Some of the many ideas I have taken over from Piaget. Piaget’s work has greatly influenced and encouraged me during the 1970s”*; yang artinya banyak ide yang saya ambil dari Piaget. Kerja Piaget mendorong dan berpengaruh sangat besar selama tahun 1970; dan Glasersfeld sependapat dengan apa yang dikemukakan Piaget: *“Intelligence organizes the world by organizing itself”*.

Berkaitan dengan pemerolehan pengetahuan pendapat, Glasersfeld berbeda secara radikal dengan konsepsi pemerolehan pengetahuan tradisional terutama dalam kaitan antara pengetahuan dan realitas. Glasersfeld berpendapat bahwa pengetahuan dan realitas tidak memiliki nilai mutlak dan pengetahuan diperoleh secara aktif serta dikonstruksi melalui indera atau melalui komunikasi.

Berkaitan dengan pembelajaran, Glasersfeld (dalam Yackel, Cobb, Wood, dan Merkel; 2002) menyatakan pandangannya sebagai berikut. Jika mempercayai bahwa pengetahuan harus dikonstruksi oleh setiap individu yang belajar, maka pembelajaran menjadi sangat berbeda dengan pembelajaran tradisional yang meyakini pengetahuan ada di kepala guru dan guru harus mencari cara untuk mentransfer pengetahuan tersebut kepada siswa. Pembelajaran menurut konstruktivisme radikal memandang bahwa pengetahuan harus dikonstruksi oleh individu. Jadi berdasar informasi yang masuk ke diri siswa, siswa aktif belajar mengkonstruksi pengetahuan berdasar pengalaman sendiri. Hal ini, pada awal penyerapan pengetahuan, dimungkinkan terjadinya perbedaan konsepsi antar siswa terhadap hasil pengamatan.

Apa yang disampaikan guru belum tentu diterima siswa sebagaimana apa yang diharapkan guru. Tugas guru utamanya bukan mentransfer pengetahuan tetapi memfasilitasi kegiatan pembelajaran sehingga siswa memiliki kesempatan aktif belajar

dengan cara mengkonstruksi pengetahuan berdasar pengalaman siswa sendiri. Dalam kegiatan pembelajaran, guru perlu mempertimbangkan adanya perbedaan tingkat konsepsi siswa terhadap apa yang diamati. Dalam memahami suatu konsep, sering terjadi konflik kognitif disebabkan oleh adanya problematika perbedaan tingkat konsepsi akibat beragamnya pengalaman siswa. Dalam hal seperti ini, guru perlu membuat kesepakatan-kesepakatan konseptual melalui diskusi kelas.

2.2.3 Konstruktivisme Menurut Vygotsky

Psikolog Rusia Lev Semionovich Vygotsky (meninggal tahun 1934), berkaitan dengan perkembangan intelektual siswa mengemukakan dua ide. *Pertama*, perkembangan intelektual siswa dapat dipahami hanya dalam konteks budaya dan sejarah pengalaman siswa (van der Veer dan Valsiner dalam Slavin, 2000). *Kedua*, mempercayai bahwa perkembangan intelektual bergantung pada sistem tanda (*sign system*) yang individu berkembang dengannya (Ratner dalam Slavin, 2000: 43). Sistem tanda adalah simbol-simbol yang secara budaya diciptakan untuk membantu orang berpikir, berkomunikasi, dan memecahkan masalah seperti budaya bahasa, sistem tulisan, dan sistem perhitungan.

Berkaitan dengan pembelajaran, Vygotsky mengemukakan empat prinsip (Moll, 1993: 155), yakni: (1) pembelajaran sosial (*social leaning*). Pendekatan pembelajaran yang dipandang sesuai dengan konteks ini adalah pembelajaran kooperatif. Vygotsky menyatakan bahwa siswa belajar melalui interaksi bersama dengan orang dewasa atau teman yang lebih cakap; (2) Bahwa siswa akan dapat mempelajari konsep dengan baik jika berada dalam ZPD (*zone of proximal development*). Siswa bekerja dalam ZPD jika siswa tidak dapat memecahkan masalah sendiri, tetapi dapat memecahkan masalah itu setelah mendapat bantuan orang dewasa atau temannya (*peer*); (3) Masa magang kognitif (*cognitif apprenticeship*), yakni suatu proses yang menjadikan siswa sedikit demi sedikit memperoleh kecakapan intelektual melalui interaksi dengan orang yang lebih ahli, orang dewasa, atau teman yang lebih pandai; dan (4) Pembelajaran termediasi (*mediated learning*). Vygostky menekankan pada *scaffolding*. Siswa diberi masalah yang kompleks, sulit, dan realistik, dan kemudian diberi bantuan secukupnya dalam memecahkannya.

Vygotsky menekankan pentingnya memanfaatkan lingkungan dalam pembelajaran. Lingkungan sekitar siswa meliputi orang-orang, kebudayaan, termasuk pengalaman dalam lingkungan tersebut. Orang lain merupakan bagian dari lingkungan (Taylor, 1993), pemerolehan pengetahuan siswa bermula dari lingkup sosial, antar orang, dan kemudian pada lingkup individu sebagai peristiwa internalisasi (Taylor, 1993). Banyak pemerhati pendidikan yang mengembangkan model pembelajaran berdasar teori pembelajaran

Vygotsky, seperti model pembelajaran kooperatif, model pembelajaran *peer interaction*, model pembelajaran kelompok, dan model pembelajaran *problem posing*.

2.3 Penerapan Strategi Pembelajaran Peningkatan Kemampuan Berpikir Dalam Pembelajaran Matematika Mengacu Konstruktivisme

Dalam rangka merancang pembelajaran matematika yang bermakna guru perlu memikirkan kegiatan yang melibatkan siswa untuk meningkatkan kemampuan berpikir siswa. Hal ini untuk membiasakan siswa berpikir dalam belajarnya. Hal ini dikarenakan matematika merupakan ilmu yang bersifat abstrak dan penalarannya deduktif (Hudojo, 2005). Guru dapat mendesain kegiatan pembelajaran yang mampu mengungkap penggunaan pola pikir deduktif. Namun bagi siswa SMP/MTs penggunaan pola pikir deduktif ini sering dipandang berat, misalnya pembuktian dengan pola pikir deduktif. Di SMP/MTs, penggunaan pola pikir deduktif dapat diperkenalkan melalui penggunaan definisi atau teorema dalam pemecahan masalah (Soedjadi, 2000).

Polya (1973) menyatakan pemecahan masalah sebagai usaha jalan keluar dari suatu kesulitan, mencapai suatu tujuan yang tidak segera dapat dicapai. Terdiri dari masalah untuk menemukan (*problem to find*) dan masalah untuk membuktikan (*problem to prove*). Hudojo (2003: 148) menyatakan suatu pertanyaan akan merupakan masalah hanya jika seseorang tidak mempunyai aturan/hukum tertentu yang segera dapat dipergunakan untuk menemukan jawaban pertanyaan tersebut. Pertanyaan itu dapat juga terselinap dalam suatu situasi sedemikian hingga situasi itu sendiri perlu mendapat penyelesaian. Disinyalir dalam pemecahan masalah siswa sulit memisahkan dalam menggunakan pola pikir induktif atau deduktif.

Menurut Miyazaki (2000) bahwa dalam matematika di sekolah menengah rendah pembuktian memuat penalaran logika misalnya penalaran induktif, deduktif dan analogi. Oleh karena itu isi pembuktian memerlukan penalaran logika berdasar pada asumsi-asumsi benar bagi siswa sendiri. Kegiatan deduktif termuat dalam pemecahan masalah sebagaimana tersinyalir dari pada pendapat Soedjadi (2000) yang menyatakan bahwa pola pikir deduktif dapat diperkenalkan melalui penggunaan definisi atau teorema dalam pemecahan masalah.

Menurut penelitian yang dilakukan Recio dan Godino (2002) dapat disinyalir bahwa masih banyak mahasiswa di tingkat pertama perguruan tinggi yang berpikir sebagaimana pada tahap operasi konkret dengan penalaran induktif. Masih banyak mahasiswa yang kurang mampu belajar matematika dengan proses deduktif. Berkaitan

dengan pembelajaran matematika di sekolah, Recio dan Godino menyarankan untuk melakukan penelitian tentang pembelajaran berkaitan dengan pemecahan masalah.

Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir adalah model pembelajaran yang bertumpu kepada pengembangan kemampuan berpikir siswa dengan menelaah fakta-fakta atau pengalaman anak sebagai bahan untuk memecahkan masalah yang diajukan (Sanjaya, 2006:226-227). Dalam strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir, pengetahuan tidak dipandang sebagai hasil transfer dari guru kepada siswa akan tetapi pengetahuan diperoleh dari interaksi siswa dengan obyek, pengalaman, dan lingkungan. Jadi dalam strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir, guru memandang pengalaman siswa sebagai titik tolak berpikir.

Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir diarahkan untuk mengembangkan kemampuan berpikir siswa. Berikut akan disajikan karakteristik strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir:

- 1) Proses pembelajaran melalui strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir menekankan pada mental siswa secara maksimal. Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir bukan hanya menuntut siswa untuk sekedar mendengar dan mencatat, akan tetapi menghendaki aktivitas siswa dalam proses berpikir.
- 2) Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir dibangun dalam suasana dialogis secara terus menerus. Hal ini diarahkan untuk memperbaiki dan meningkatkan kemampuan berpikir siswa yang nantinya kemampuan berpikir itu dapat membantu siswa untuk memperoleh pengetahuan yang mereka konstruksi sendiri.
- 3) Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir adalah model pembelajaran yang menyandarkan kepada dua sisi, yaitu sisi proses dan hasil belajar. Proses belajar diarahkan untuk meningkatkan kemampuan berpikir, sedangkan sisi hasil belajar diarahkan untuk membangun pengetahuan atau penguasaan materi pelajaran baru.

Sanjaya (2006:234-236) menyebutkan enam tahap dalam strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir. Keenam tahap itu dijelaskan di bawah ini:

- (1) **tahap orientasi**, pada tahap ini guru mengkondisikan siswa pada posisi siap untuk melakukan pembelajaran. Tahap orientasi dilakukan dengan, *pertama*, penjelasan tujuan yang harus dicapai baik tujuan yang berhubungan dengan penguasaan materi pelajaran yang harus dicapai, maupun tujuan yang berhubungan dengan proses pembelajaran atau kemampuan berpikir kritis yang harus dimiliki siswa. *Kedua*,

penjelasan proses pembelajaran yang harus dilakukan siswa, yaitu penjelasan tentang apa yang harus dilakukan siswa dalam setiap tahapan proses pembelajaran;

- (2) **tahap pelacakan**, adalah tahapan penjajakan untuk memahami pengalaman dan kemampuan dasar siswa sesuai dengan tema atau pokok persoalan yang akan dibicarakan. Melalui tahapan inilah guru mengembangkan dialog dan tanya jawab untuk mengungkap pengalaman apa saja yang telah dimiliki siswa yang dianggap relevan dengan tema yang akan dikaji. Dengan bekal pengalaman itulah selanjutnya guru menentukan bagaimana ia harus mengembangkan dialog dan tanya jawab pada tahapan selanjutnya;
- (3) **tahap konfrontasi**, adalah tahapan penyajian persoalan yang harus dipecahkan sesuai dengan tingkat kemampuan dan pengalaman dasar siswa. Untuk merangsang peningkatan kemampuan siswa pada tahapan ini guru dapat memberikan persoalan-persoalan yang dilematis yang memerlukan jawaban atau jalan keluar. Persoalan yang diberikan sesuai dengan tema, atau topik itu tentu saja persoalan yang sesuai dengan kemampuan dasar atau pengalaman siswa seperti yang diperoleh pada tahap kedua. Pada tahap ini guru harus dapat mengembangkan dialog agar siswa benar-benar memahami persoalan yang harus dipecahkan. Oleh sebab itu, keberhasilan pembelajaran pada tahap selanjutnya akan ditentukan oleh tahapan ini;
- (4) **tahap inkuiri**, adalah tahapan terpenting dalam strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir. Pada tahapan ini guru harus memberikan ruang dan kesempatan kepada siswa untuk mengembangkan gagasan dalam upaya pemecahan persoalan. Melalui berbagai teknik bertanya, guru harus dapat menumbuhkan keberanian siswa agar mereka dapat menjelaskan, mengungkap fakta sesuai dengan pengalamannya, memberikan argumentasi yang meyakinkan, mengembangkan gagasan, dan lain sebagainya;
- (5) **tahap akomodasi**, adalah tahapan pembentukan pengetahuan baru melalui proses penyimpulan. Pada tahap ini siswa dituntut untuk dapat menemukan kata-kata kunci sesuai dengan topik atau tema pembelajaran. Pada tahap ini melalui dialog, guru membimbing agar siswa dapat menyimpulkan apa yang mereka temukan dan mereka pahami sekitar topik yang dipermasalahkan. Tahap akomodasi bisa juga dikatakan sebagai tahap pemantapan hasil belajar, sebab pada tahap ini siswa diarahkan untuk mampu mengungkap kembali pembahasan yang dianggap penting dalam proses pembelajaran; dan

(6) tahap transfer, adalah tahapan penyajian masalah baru yang sepadan dengan masalah yang disajikan. Tahap transfer dimaksudkan sebagai tahapan agar siswa mampu mentransfer kemampuan berpikir setiap siswa untuk memecahkan masalah-masalah baru. Pada tahap ini guru dapat memberikan tugas-tugas yang sesuai dengan topik pembahasan.

Berikut diberikan contoh rancangan pembelajaran materi persegi dan persegi panjang dengan strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir

Tabel 1. Contoh Rancangan Pembelajaran Materi Persegi dan Persegi Panjang

| Tahap | Kegiatan Guru | Kegiatan Siswa |
|--------------|--|--|
| Orientasi | Guru menjelaskan: 1) tujuan pembelajaran persegi dan persegi panjang 2) manfaat materi persegi dan persegi panjang dipelajari 3) cara-cara mempelajari materi persegi dan persegi panjang | Siswa menyimak penjelasan guru Siswa bertanya hal-hal yang belum jelas |
| Pelacakan | Guru melakukan apersepsi dengan bertanya: apa sudut siku-siku? apa yang dimaksud garis, sisi, titik dsb | Siswa mengungkapkan pengalaman sesuai dengan pertanyaan guru |
| Konfrontasi | Guru bertanya: a) apa yang dimaksud segiempat? b) apa yang dimaksud persegi? c) apa yang dimaksud persegi panjang? d) apakah persegi juga persegipanjang? | Siswa menjawab semua pertanyaan guru dengan pengetahuan yang diketahui |
| Inkuiri | Guru membimbing siswa dalam mengerjakan LKS tentang pengertian, sifat-sifat, keliling dan luas persegi dan persegi panjang Guru membantu siswa yang mengalami kesulitan | Siswa secara berkelompok menjawab pertanyaan guru untuk memahami persoalan Siswa mencari informasi, menjelaskan, mengungkap fakta sesuai dengan pengalamannya |

Lanjutan Tabel 1.

| | | |
|-----------|---|---|
| Akomodasi | Guru meminta siswa memperbaiki jawaban pada tahap konfrontasi Guru meminta siswa membuat kesimpulan Guru memberikan penguatan | Siswa berusaha memperbaiki jawaban Siswa membuat kesimpulan Siswa mendengar penjelasan guru |
| Transfer | Guru memberikan masalah untuk diselesaikan dengan konsep yang sudah ada | Siswa menyelesaikan masalah yang diberikan |

Strategi ini sangat membutuhkan kreativitas guru dalam menentukan pertanyaan-pertanyaan yang mampu mengarahkan siswa pada suatu konsep. Guru juga dituntut untuk sebisa mungkin mengefektifkan waktu, karena strategi ini membutuhkan waktu yang cukup banyak terutama saat tahap inkuiri.

3. KESIMPULAN

Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir sangat cocok dipakai dalam pembelajaran matematika karena karakteristik matematika yang lebih banyak menekankan pada aspek kognitif. Strategi pembelajaran peningkatan kemampuan berpikir dilaksanakan dalam 6 tahap yaitu: 1) tahap orientasi, 2) tahap pelacakan, 3) tahap konfrontasi, 4) tahap inkuiri, 5) tahap akomodasi, dan 6) tahap transfer. Dalam menerapkan strategi ini, dibutuhkan juga strategi yang lain untuk meminimalkan kelemahan, misalnya strategi kooperatif. Karena tidak ada strategi yang cocok untuk segala keadaan. Selamat Mencoba

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Copeland, R.W. 1974. *How Children Learn Mathematics: Teaching Implications of Peaget's Theory*. New York: Macmillan Publishing Co. Inc.
- [2] Davis, R.B. 1990. *Discovery Learning and Constructivism. Constructivist View on the Teaching and Learning of Mathematics*.
- [3] Doolittle, P.E dan Camp, W.G. 1999. *Constructivism: The Career and Technical Education Perspective*. Kirk Swortsel (Ed.): *Journal of Vocational and Technical Education*. Volume 16, Number 1.

- [4] Doolittle, P.E. 2001. Integrating Constructivism and Cognitivim. {Comment & Suggestions Welcome}. Blackburgs: Virginia Polytechnic Institute & State University.
- [5] Dimiyati dan Mudjiono. 2006. *Belajar Pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta.
- [6] English, L.D dan Halford, G.S. 1995. *Mathematics Educations Model and Process*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- [7] Hamalik, Oemar. 2005. *Proses Belajar Mengajar*. Jakarta: Bumi Aksara.
- [8] Heibert, J. 2003. What Research Says About the NCTM Standards?
- [9] Herbs, Patricio G., 2006. *Teaching Geometry with Problems: Negotiating Instructional Situations and Mathematical Task*. Journal for Research in Mathematics Education (JRME), Vol. 39 No. 3, 2006.
- [10] Hudojo, H. 2003. *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*. JICA. Jakarta: IMSTEP.
- [11] Hudojo, H. 2005. *Kapita Selektta Pembelajaran Matematika*. Malang: Penerbit Universitas Negeri Malang (UM Press).
- [12] Kusaeri & Mustangin, 2008. *Analisis Kecerdasan Majemuk Siswa Madrasah Tsanawiyah sebagai Dasar Pengembangan Model Pembelajaran Matematika*. Jurnal NIZAMIA Fakultas Tarbiyah IAIN Sunan Ampel Surabaya (terakreditasi), Vol. 11 Nomor 1, Juni 2008.
- [13] Marpaung, Y. 2003. *Perubahan Paradigma Pembelajaran Matematika di Sekolah*. Makalah disajikan dalam Seminar Nasional Pendidikan Matematika di Universitas Sanata Darma. Tanggal 27-28 Maret 2003. Yogyakarta: Universitas Sanata Darma.
- [14] Miyazaki, M. 2000. Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 41: 47 - 68, 2000. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- [15] Moll, Luis C., 1993. *Vygotsky and Education (Instructional Implications and Applications of Sociohistorical Psychlogy*. USA: Cambridge University Press.
- [16] Murphy, E. 1997. *Constructivist Epistemology*. Constructivism: Philosophical & Epistemological Foundation. Download. 24 Agustus 2006.
- [17] Polya, G. 1973. *How To Solve It*. Princeton: Princeton University Press.
- [18] Ratumanan, T.G. 2003. *Pengembangan Model Pembelajaran Interaktif dengan Setting Kooperatif (Model PISK) dan Pengaruhnya Terhadap Hasil Belajar Matematika Siswa SLTP di Kota Ambon*. Disertasi. Tidak dipublikasikan. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

- [19] Sanjaya, Wina. 2006. *Strategi Pembelajaran Berorientasi Standar Proses Pendidikan*. Jakarta: Kencana Prenada Media.
- [20] Slavin, R.E. 2000. *Educational Psychology: Theory and Practice*. Boston: Allyn & Bacon.
- [21] Soedjadi, R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia: Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan*. Jakarta: Depdiknas.
- [22] Soedjadi, R. 2000b. Rancangan Pembelajaran Nilai dalam Matematika Sekolah. Makalah Disajikan dalam Seminar Nasional Matematika, Pengajaran dan Problematikanya Memasuki Milenium III, di FMIPA UNNES Semarang, 12 Agustus 2000.
- [23] Soedjadi, R. 2003. *Pemanfaatan Realitas dan Lingkungan dalam Pembelajaran Matematika*.
- [24] Suwarsono. 1999. *Problematika Pendidikan Matematika di Indonesia*. Tulisan dimaksudkan sebagai sebuah pengantar untuk matakuliah "Penelitian Lanjut" pada Program S3 Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya, September 1999.
- [25] Von. Glassersfeld, E. 1984. *An Introduction to Radical Constructivism*. Author's translation in P. Watzlawick (Ed), *The Invented Reality*. Newyork: Norton, 1984. Originally published P. Watzlawick (Ed), *Die Erfundene Wirklichkeit*. Munich: Piper, 1981. Erns von Glasersfeld, on line paper, html. Download, 24 Agustus 2008.
- [26] Von Glaserfeld, E. 2006. *An Exposition of Constructivism: Why Some Like it Radical*. Internet on line. Massachusetts: Scientific Reasoning Research InstituteUniversity of Massachusetts
- [27] Yackel, E. Cobb, P. Wood, T. Merkel, G. 2002. *Experience, Problem Solving, and Discourse as central Aspect of Constructivism*. Cambers, D (Eds). *Putting research into Practice in the Elementary Grades*. Reading from Journals of the National Council of Teacher
- [28] Yamin, Martinis. *Profesionalisasi Guru dalam Implementasi KTSP*. Jakarta: Gaung Persada Press.

PENENTUAN JURUSAN DI SMA N 8 SURAKARTA DENGAN FUZZY INFERENCE SYSTEM (FIS) MAMDANI

Mohammad Glesung Gautama, Titin Sri Martini, dan Sri Kuntari
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, UNS

ABSTRAK. Penentuan jurusan siswa SMA berpengaruh terhadap kegiatan akademik siswa. Dengan adanya penjurusan, diharapkan setiap siswa dapat lebih fokus pada bakat yang dimiliki. Keputusan penentuan jurusan dibuat oleh pihak yang berkompeten di sekolah. Salah satu aplikasi logika *fuzzy* adalah pendukung keputusan dengan *Fuzzy Inference System (FIS) Mamdani*. Dalam FIS Mamdani untuk memperoleh *output* diperlukan empat tahap, yaitu pembentukan himpunan *fuzzy*, pembentukan *rules*, aplikasi fungsi implikasi dan inferensi aturan serta defuzifikasi.

Tujuan dari penelitian ini adalah membangun FIS Mamdani penentuan jurusan di SMA N 8 Surakarta. Variabel inputnya adalah NIPA, NIPS, IQ, Minat dan kapasitas kelas. Variabel outputnya adalah IPA dan IPS. Dalam penelitian ini, dibangun dua FIS dengan fungsi derajat keanggotaan yang berbeda. Dari pengujian data output diperoleh nilai output IPA dan IPS untuk kedua FIS yang tidak beda secara signifikan. Dari percobaan yang dilakukan terhadap data siswa kelas X tahun ajaran 2008/2009 didapat kedua FIS memberikan keputusan yang sama. FIS 1 lebih direkomendasikan untuk digunakan karena fungsinya lebih sederhana.

Kata kunci: Logika *fuzzy*, FIS Mamdani

1. PENDAHULUAN

Lofti A. Zadeh memodifikasi teori himpunan yang setiap anggotanya memiliki derajat keanggotaan bernilai kontinyu antara 0 sampai 1 dan digunakan untuk menangani kekaburan. Himpunan ini disebut dengan himpunan kabur (*fuzzy set*) (Zimmermann [6]). Logika *fuzzy* adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang input ke dalam suatu ruang output (Kusumadewi dan Purnomo [1]). FIS adalah suatu kerangka komputasi yang didasarkan pada teori himpunan *fuzzy*, aturan *fuzzy* dan penalaran *fuzzy* (Kusumadewi dan Hartati [3]). FIS dapat dilakukan dengan tiga metode, yaitu dengan metode Mamdani, metode Sugeno dan metode Tsukamoto (Kusumadewi dan Purnomo [2]). Metode Mamdani lebih sering digunakan karena dapat mendeskripsikan pendapat pakar secara lebih "*human-manner*" daripada metode yang lain (Vrusias [5]).

Penentuan jurusan (IPA atau IPS) siswa SMA berpengaruh terhadap kegiatan akademik siswa. Dengan adanya penjurusan, diharapkan setiap siswa dapat lebih fokus pada bakat yang dimiliki. Penentuan jurusan diukur dengan beberapa variabel yaitu nilai akademik, nilai IQ, minat siswa dan kapasitas kelas yang dimiliki sekolah. Keputusan seorang siswa masuk kelas IPA atau IPS dilakukan pihak yang berkompeten di sekolah. Oleh karena itu, pada penelitian ini dibangun FIS Mamdani sebagai pendukung keputusan penentuan jurusan di SMA N 8 Surakarta.

2. DESKRIPSI MASALAH

FIS penentuan jurusan mempunyai 5 variabel input dan 2 variabel output. Variabel input terdiri atas NIPA, NIPS, IQ, Minat IPA dan Kapasitas. Variabel output terdiri atas IPA dan IPS.

Variabel NIPA adalah nilai-nilai dari mata pelajaran eksak. Mata pelajaran yang termasuk dalam variabel ini adalah fisika, kimia dan biologi. Variabel NIPS adalah nilai-nilai dari mata pelajaran noneksak. Mata pelajaran yang termasuk dalam variabel ini adalah ekonomi, geografi dan sosiologi. Nilai matematika digunakan sebagai pertimbangan dari variabel NIPA dan variabel NIPS. Variabel IQ adalah nilai dari tes IQ yang diadakan oleh pihak sekolah. Klasifikasi Wechsler (WISC [4]) digunakan penulis sebagai acuan untuk fuzzifikasi nilai variabel IQ. Variabel Minat IPA adalah nilai dari angket yang disebar ke semua siswa kelas X oleh BK. Variabel Kapasitas adalah kapasitas kelas IPA dan IPS yang ada di SMA N 8 Surakarta. Siswa yang masuk ke kelas IPA adalah \pm 40% dari keseluruhan siswa kelas X. Variabel IPA dan IPS adalah daerah output *fuzzy*.

Sebelum dibangun FIS, data nilai yang ada di transformasikan ke dalam satu nilai. Untuk itu digunakan rumus

$$\text{NIPA} : \frac{\text{nilai matematika} + 2 \times \text{nilai fisika} + 2 \times \text{nilai kimia} + 2 \times \text{nilai biologi}}{7}, \text{ dan}$$

$$\text{NIPS} : \frac{\text{nilai matematika} + 2 \times \text{nilai ekonomi} + 2 \times \text{nilai geografi} + 2 \times \text{nilai sosiologi}}{7}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut Kusumadewi dan Purnomo [2] untuk mendapatkan *output* dalam FIS Mamdani diperlukan 4 tahap, yaitu pembentukan himpunan *fuzzy*, pembentukan *rules*, aplikasi fungsi implikasi dan inferensi aturan serta penegasan (defuzifikasi). Dalam

penelitian ini akan dibangun dua FIS, yaitu FIS 1 dan FIS 2. Perbedaan diantara kedua FIS tersebut terletak di fungsi keanggotaannya.

3.1 FIS Mamdani

Himpunan *fuzzy* yang dibuat untuk tiap-tiap variabel input dan output terlihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Himpunan input *fuzzy*

| Variabel <i>Fuzzy</i> | | Himpunan <i>Fuzzy</i> | | Domain |
|-----------------------|----------|-----------------------|-----------|-----------|
| Nama | Notasi | Nama | Notasi | |
| NIPA | <i>a</i> | Rendah | <i>r</i> | [55,70] |
| | | Normal | <i>n</i> | [65,85] |
| | | Tinggi | <i>t</i> | [75,100] |
| NIPS | <i>b</i> | Rendah | <i>r</i> | [55,70] |
| | | Normal | <i>n</i> | [65,85] |
| | | Tinggi | <i>t</i> | [75,100] |
| IQ | <i>c</i> | Biasa | <i>b</i> | [90,110] |
| | | Cerdas | <i>c</i> | [98,120] |
| | | Sangat Cerdas | <i>sc</i> | [115,130] |
| Minat | <i>d</i> | Tidak Minat | <i>tm</i> | [0,50] |
| | | Biasa | <i>b</i> | [10,90] |
| | | Minat | <i>m</i> | [50,100] |
| Kapasitas | <i>e</i> | IPA | <i>a</i> | [0,160] |
| | | IPS | <i>s</i> | [128,400] |
| IPA | <i>f</i> | Rendah | <i>r</i> | [0,0.4] |
| | | Sedang | <i>s</i> | [0.1,0.9] |
| | | Tinggi | <i>t</i> | [0.6,1] |
| IPS | <i>g</i> | Rendah | <i>r</i> | [0,0.4] |
| | | Sedang | <i>s</i> | [0.1,0.9] |
| | | Tinggi | <i>t</i> | [0.6,1] |

3.1.1. Fungsi Derajat Keanggotaan FIS 1

Menurut Zimmermann [6] jika X adalah kumpulan objek yang dinotasikan x maka himpunan *fuzzy* A dalam X adalah himpunan pasangan berurutan :

$$A = \{ x, \mu_A(x) \mid x \in X \}$$

dengan $\mu_A(x)$ adalah derajat keanggotaan dari x . Fungsi derajat keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input ke dalam derajat keanggotaan yang memiliki interval antara 0 sampai 1.

Fungsi derajat keanggotaan variabel NIPA didefinisikan persamaan (1). Fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel NIPA, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel NIPS, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel IQ, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel Minat, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel Kapasitas, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel IPA dan fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel IPS direpresentasikan Gambar 1.

$$\begin{aligned} \mu_r(a) &= \begin{cases} 1 & ; 55 \leq a \leq 60 \\ \frac{70-a}{10} & ; 60 < a < 70 \\ 0 & ; a \geq 70 \end{cases} \\ \mu_n(a) &= \begin{cases} \frac{a-60}{12} & ; 60 \leq a \leq 72 \\ \frac{85-a}{13} & ; 72 \leq a \leq 85 \\ 0 & ; a \leq 60 \text{ atau } a \geq 85 \end{cases} \\ \mu_t(a) &= \begin{cases} 0 & ; a \leq 75 \\ \frac{a-75}{10} & ; 75 < a < 85 \\ 1 & ; 85 \leq a \leq 100 \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

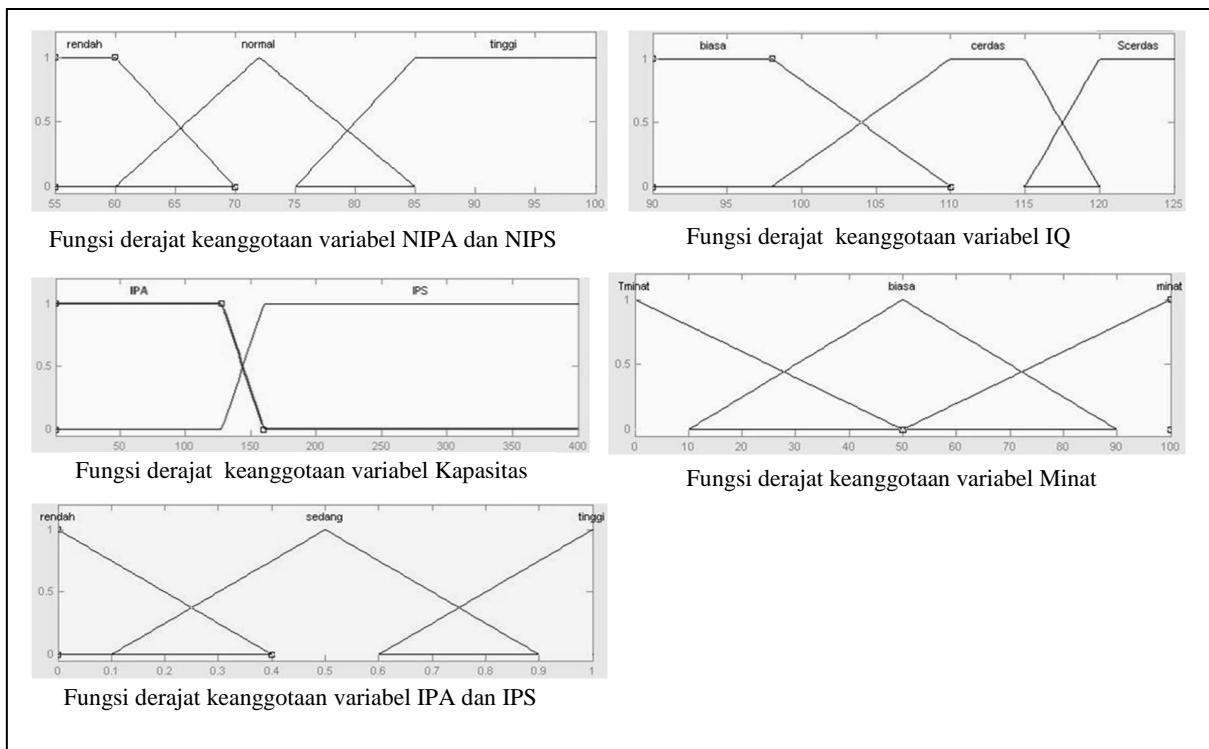
3.1.2. Fungsi Keanggotaan FIS 2

Fungsi derajat keanggotaan variabel NIPA didefinisikan persamaan (2). Fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel NIPA, himpunan *fuzzy* dari variabel NIPS, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel IQ, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel Minat, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel Kapasitas, fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel IPA dan fungsi derajat keanggotaan himpunan *fuzzy* dari variabel IPS direpresentasikan Gambar 2.

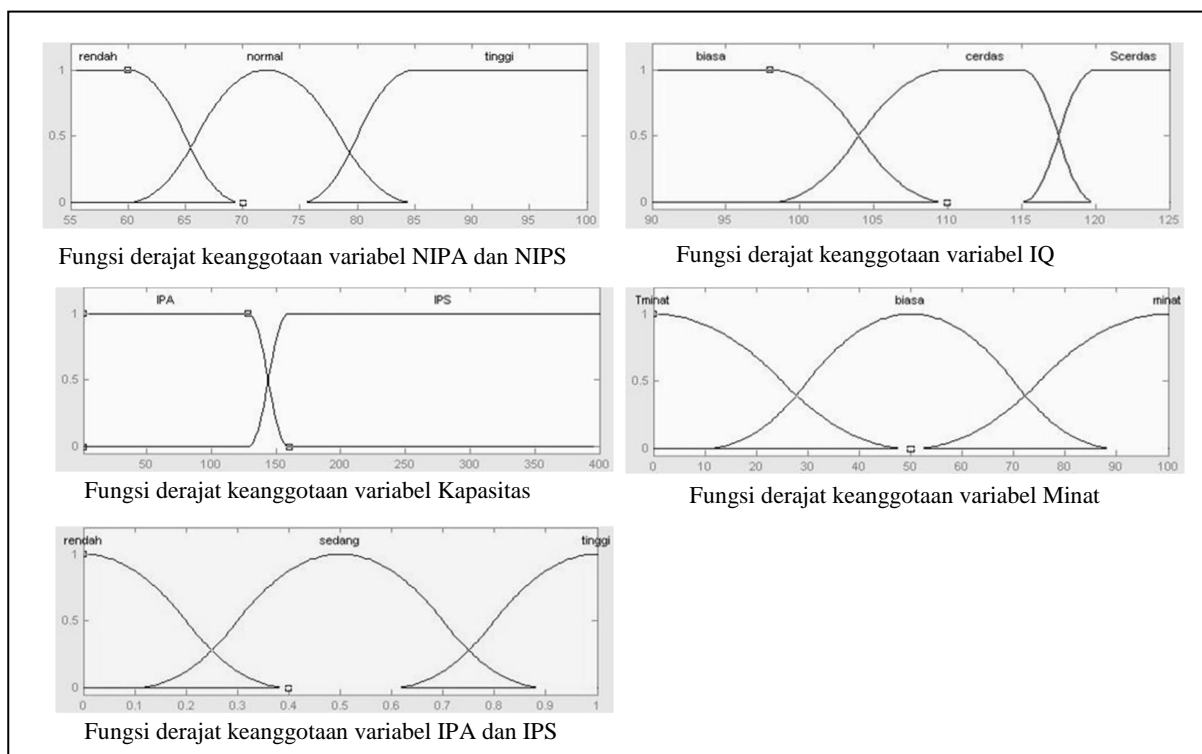
$$\delta_r(a) = \begin{cases} 1 & ; a \leq 60 \\ 1 - 2 \frac{a-60}{10}^2 & ; 60 \leq a \leq 65 \\ 2 \frac{70-a}{10}^2 & ; 65 \leq a \leq 70 \\ 0 & ; a \geq 70 \end{cases}$$

$$\delta_n(a) = \begin{cases} 2 \frac{a-60}{12}^2 & ; 60 \leq a \leq 66 \\ 1 - 2 \frac{72-a}{12}^2 & ; 66 \leq a \leq 72 \\ 1 - 2 \frac{a-72}{13}^2 & ; 72 \leq a \leq 78.5 \\ 2 \frac{85-a}{13}^2 & ; 78.5 \leq a \leq 85 \\ 0 & ; a \geq 85 \text{ atau } a \leq 60 \end{cases} \quad (2)$$

$$\delta_t(a) = \begin{cases} 0 & ; a \leq 75 \\ 2 \frac{a-75}{10}^2 & ; 75 \leq a \leq 80 \\ 1 - 2 \frac{85-a}{10}^2 & ; 80 \leq a \leq 85 \\ 1 & ; a \geq 85 \end{cases}$$



Gambar 1. Representasi fungsi derajat keanggotaan FIS 1



Gambar 2. Representasi fungsi derajat keanggotaan FIS 2

3.2. Pembentukan Rules, Aplikasi Fungsi Implikasi dan Inferensi Aturan

Rules pada FIS Mamdani penentuan jurusan diperoleh dari data penjurusan tahun ajaran 2008/2009. Berdasarkan kombinasi variabel input yang ada dapat dibentuk 162 rules.

Metode minimum digunakan untuk mengkombinasikan setiap derajat keanggotaan dari setiap *if then rules* yang dibuat dan dinyatakan dalam suatu nilai yang disimbolkan dengan α .

Metode maksimum dalam FIS penentuan jurusan digunakan untuk mengevaluasi hasil dari rules yang telah dibuat. Solusi output himpunan fuzzy diperoleh dengan cara mengambil nilai maksimum dari rule yang sesuai, kemudian menggunakannya untuk memodifikasi daerah fuzzy dan mengaplikasikannya ke output.

3.3. Defuzifikasi

Metode Centroid (*composite moment*) digunakan untuk defuzifikasi. Solusi crisp diperoleh dengan cara mengambil titik pusat (d^*) daerah output fuzzy. Nilai d^* secara umum dirumuskan

$$d^* = \frac{\int x\mu(x)dx}{D}$$

d^* adalah titik pusat daerah output *fuzzy*, $\mu(x)$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan output *fuzzy*, D luas daerah *fuzzy* output.

3.4. Program

Program dibuat dengan bantuan dari Matlab 7 (M-file). Algoritma program diberikan sebagai berikut:

1. masukkan nilai fisika, nilai biologi, nilai kimia, nilai matematika, nilai sosiologi, nilai geografi, nilai ekonomi, nilai IQ, minat masuk IPA, kapasitas kelas IPA,
2. dicari NIPA dan NIPS,
3. dicari nilai masing-masing α dari 162 *rules*,
4. dicari derajat kebenaran dari α untuk masing-masing himpunan output *fuzzy*,
5. dihitung defuzifikasi,
6. dari hasil defuzifikasi dibandingkan nilai IPA dan IPS. Output adalah masuk IPA atau masuk IPS atau verifikasi.

3.5. Kasus

Seorang siswa memiliki nilai fisika 80, nilai biologi 66, nilai kimia 88, nilai matematika 65, nilai sosiologi 68, nilai geografi 79, nilai ekonomi 67, nilai IQ 116 dan nilai minat masuk IPA adalah 0. Jika kapasitas kelas IPA yang sudah terisi adalah 23 maka nilai masuk IPA dan IPS siswa tersebut dapat ditentukan dengan FIS 1 dan FIS 2.

Dengan bantuan program yang dibuat, untuk FIS 1, nilai IPA adalah 0.307 dan nilai IPS adalah 0.515. Untuk FIS 2, nilai IPA adalah 0.205 dan nilai IPS adalah 0.51. Dari nilai yang diperoleh FIS 1 dan FIS 2, nilai IPS lebih besar dari nilai IPA oleh karena itu siswa dalam kasus ini dijuruskan ke IPS.

3.6 Perbandingan FIS 1 dan FIS 2

Percobaan dilakukan dengan data seluruh siswa kelas X tahun ajaran 2008/2009 SMA N 8 Surakarta. Dengan bantuan SPSS11 didapat hasil Tabel 2.

Tabel 2. Uji Mann-Whitney

| Hipotesis 1 | | Hipotesis 2 | |
|----------------|--|----------------|--|
| H_0 | Kedua FIS mempunyai output sama untuk nilai <i>crisp</i> IPA | H_0 | Kedua FIS mempunyai output sama untuk untuk nilai <i>crisp</i> IPS |
| H_1 | Output berbeda | H_1 | Output berbeda |
| A | 0.05 | α | 0.05 |
| Daerah kritis | H_0 ditolak jika Asymp Sig (2 tailed) $< \alpha$ | Daerah kritis | H_0 ditolak jika Asymp Sig (2 tailed) $< \alpha$ |
| sig (2-tailed) | 0.482 | sig (2-tailed) | 0.318 |

4. KESIMPULAN

Berdasar pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. *Fuzzy inference system* (FIS) Mamdani dapat digunakan untuk membangun sistem pendukung keputusan penentuan jurusan di SMA N 8 Surakarta.
2. Berdasar pengujian yang dilakukan, nilai IPA dan IPS antara FIS 1 dengan FIS 2 mempunyai nilai output yang tidak beda secara signifikan. Berdasar percobaan data seluruh siswa kelas X tahun ajaran 2008/2009, FIS 1 dan FIS 2 memberikan keputusan yang sama. FIS 1 lebih direkomendasikan untuk digunakan karena fungsinya lebih sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kusumadewi, S. dan H. Purnomo, *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2004.
- [2] Kusumadewi, S. dan S. Hartati, *Neuro-Fuzzy: Integrasi Sistem Fuzzy dan Jaringan Syaraf*, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2006.
- [3] WISC. <http://www.kesimpulan.com/2009/04/wechsler>. September 2009.
- [4] Vrusias, B. L, 2005. *Fuzzy*. <http://www.2dix.com/ppt/fuzzy.php>. Juni 2008.
- [5] Zimmermann, H.-J., *Fuzzy Set Theory and Its Application*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.

PERANCANGAN PIRANTI LUNAK KOMPUTER PENGUJIAN STRUKTUR ALJABAR *GROUP, RING & FIELD*

Ngarap Im Manik
Jurusan Matematika FST BINUS University
manik@binus.edu

ABSTRAK. The rapid development of science & technology, especially information communication in the field of computers is also accompanied by the rapid development of computer technology that ultimately make things faster and efisien. This case there is an idea to do research about the use of computer in the field of mathematics, especially abstract algebra through the design , creation and implementation of computer software for testing algebraic structure of groups, rings and fields. Designed computer software developed using Delphi 7.0 programming language that is run by using the Microsoft Windows operating system in 2000. The results achieved that with this computer software, can help students to be more interested in the field of mathematics, anticipating the use of licensed software packages existing Mathematics (Maple, Matlab) and as a tool in the learning of abstract algebra. This application has not been able to solve problems in a variety of input elements such as permutation group or matrix form and testing is still using the Cayley table.

Keywords : Group, ring, field

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar adalah salah satu materi Matematika yang mempelajari tentang set, proposisi, kuantor, relasi, fungsi, bilangan, grupoid, grup, ring hingga field. Secara khusus struktur aljabar adalah himpunan tak kosong dengan satu komposisi biner atau lebih dan bersifat tertutup. Banyak hal yang tercakup di dalam struktur Aljabar, namun dalam tulisan ini yang dibahas hanya *grup, ring* dan *field*.

Berbicara tentang *grup, ring* dan *field* adalah bagaimana kita dapat melakukan pengujian terhadap suatu himpunan tertentu sebagai input sehingga dapat diuji apakah merupakan suatu grup, ring dan field dengan hanya memasukkan data input yang sesuai atau simulasi data maka hasil hitungannya sudah diperoleh.

Makalah ini membahas perancangan Piranti lunak komputer dengan menggunakan bahasa pemrograman *Delphi 7.0*. dijalankan dengan menggunakan sistem operasi *Microsoft Windows 2000* yang dalam tulisan ini dimaksud berbasis komputer. Hal lain yang ingin dicapai bahwa dengan adanya piranti lunak komputer ini, dapat bermanfaat membantu para mahasiswa untuk lebih meminati bidang ilmu matematika dan juga untuk

antisipasi penggunaan lisensi paket software yang telah ada (Mapple, Matlab) yang bila digunakan harus memiliki lisensi dari pembuatnya.

2. MATERI DAN METODE

2.1. Group

Group adalah suatu sistem atau struktur aljabar yang sederhana. Jika suatu himpunan $G \neq \emptyset$ dengan suatu operasi \circ yang didefinisikan bagi elemen-elemen G bersifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemen G mempunyai invers terhadap operasi biner tersebut, maka himpunan G terhadap operasi biner itu membentuk suatu group. Selanjutnya keempat sifat tersebut dinamakan aksioma-aksioma suatu group. (Rowland, 2006) Suatu himpunan G yang tidak kosong dan suatu operasi biner \circ yang didefinisikan pada G membentuk suatu group bila dan hanya bila memenuhi sifat – sifat berikut ini:

1. Tertutup, $\forall a, b \in G$ berlaku $(a \circ b) \in G$.
2. Operasi \circ pada G bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c, \in G$ maka

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$
3. G terhadap operasi biner \circ mempunyai elemen identitas, yaitu ada $e \in G$ sedemikian sehingga $a \circ e = e \circ a = a$ utk setiap $a \in G$.
4. Setiap elemen G mempunyai invers terhadap operasi biner \circ dalam G , yaitu untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ adalah elemen identitas dari G . Jika himpunan G terhadap operasi biner \circ membentuk suatu grup, maka group G ini dinyatakan dengan notasi (G, \circ) . Tidak setiap group memiliki sifat komutatif terhadap binernya. Operasi biner \circ pada G bersifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in G$ maka $a \circ b = b \circ a$. Sehingga group (G, \circ) disebut group abelian atau komutatif. (DogFrey, 1999)

2.2. Ring

Ring adalah suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner yaitu $+$ dan $*$. Terhadap operasi $+$, struktur aljabar itu merupakan grup abelian, terhadap $*$ struktur aljabar itu semi grup, dan operasi $*$ bersifat distribusi kiri dan distribusi kanan terhadap $+$. Himpunan yang tidak kosong R terhadap dua operasi yang disajikan dengan tanda $+$ dan $*$ merupakan suatu *ring* bila dan hanya bila memenuhi sifat-sifat berikut ini.

1. Sifat tertutup terhadap operasi $+$; Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $(a + b) \in R$.
2. Sifat asosiatif terhadap operasi $+$ Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku
 $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Ada elemen identitas terhadap operasi $+$
 Ada $0 \in R$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Setiap elemen R mempunyai invers terhadap operasi $+$ untuk setiap elemen $a \in R$ dapat
 ditemukan $a^{-1} \in R$ shg $a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0$.
5. Sifat komutatif terhadap operasi $+$; Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.
6. Sifat tertutup terhadap operasi $*$; Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $(a * b) \in R$.
7. Sifat asosiatif terhadap $*$ untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
8. Sifat distributif operasi $*$ terhadap $+$ setiap $a, b, c \in R$ berlaku
 $a * (b + c) = a * b + a * c$ dan $(a + b) * c = a * c + b * c$. (Sukriman, 1999;
 Nowicki, 1994)

2.3. Field

Field adalah suatu struktur aljabar dengan dua operasi biner yaitu “+” dan “ \times ”. Terhadap operasi $+$ struktur aljabar itu merupakan grup abelian. Terhadap operasi \times struktur aljabar juga merupakan grup *abelian* tetapi dengan mengecualikan angka unkes aditif, dan terhadap operasi \times bersifat distributif kiri dan distributif kanan terhadap $+$. Himpunan yang tidak kosong R terhadap dua operasi yang disajikan dengan tanda $+$ dan \times merupakan suatu ring bila dan hanya bila memenuhi sifat-sifat berikut ini.

1. Sifat tertutup terhadap operasi $+$; Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $(a + b) \in R$.
2. Sifat asosiatif terhadap operasi $+$; Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku
 $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Ada elemen identitas terhadap operasi $+$
 Ada $0 \in R$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$.
- a. Setiap elemen R mempunyai invers terhadap operasi $+$
 Untuk setiap elemen $a \in R$ dapat ditemukan $(-a) \in R$ sedemikian
 $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- b. Sifat komutatif terhadap operasi $+$; Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.

c. Sifat tertutup terhadap operasi \times :

Untuk setiap $a, b \in (R - \{0\})$ berlaku $(a + b) \in (R - \{0\})$.

d. Sifat asosiatif terhadap \times

Untuk setiap $a, b, c \in (R - \{0\})$ berlaku $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

e. Ada elemen identitas terhadap operasi \times ada $1 \in (R - \{0\})$ sedemikian hingga

untuk setiap $a \in (R - \{0\})$ berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.

f. Setiap elemen R mempunyai invers terhadap operasi \times

Untuk setiap elemen $a \in (R - \{0\})$ dapat ditemukan $(a^{-1}) \in (R - \{0\}) \rightarrow$

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$$

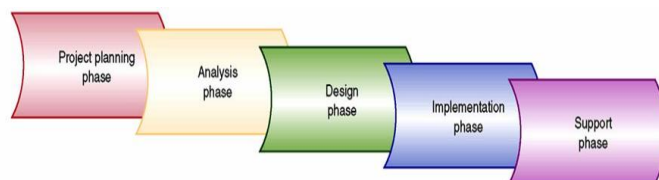
g. Sifat komutatif terhadap operasi \times ; Untuk setiap $a, b \in (R - \{0\})$ berlaku $a \times b = b \times a$.

h. Sifat distributif \times terhadap $+$ Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$$\text{dan } a \times (b + c) = a \times b + a \times c. \text{ (Malik, 1997)}$$

Metode penelitian yang dimaksud dalam makalah ini adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam proses pembuatan piranti lunak komputer. Dalam rancangan pembuatan piranti lunak komputer ini diawali dengan studi kepustakaan sesuai dengan topik bahasan grup, ring dan field. Selanjutnya dari teori yang telah ada dilanjutkan dengan perancangan dan pengembangan piranti lunak komputer (software). Kegiatan dalam perancangan piranti lunak Komputer (software) dilakukan sesuai dengan prosedur siklus pengembangan software yang lebih dikenal dengan istilah SDLC (System Development Life Cycle) meliputi langkah-langkah sbb: Planning, Analisis, Perancangan, Implementasi dan Perawatan/perbaikan seperti yang ditunjukkan dalam tahapan berikut: (Pressman, 2005)



Untuk merancang piranti lunak komputer pengujian *grup*, *ring* dan *field*, digunakan *Borland Delphi 7.0* yang dioperasikan pada *Microsoft Windows 2000*.

Sesuai tahapan di atas kemudian dilakukan kegiatan :

1. Perancangan Layar

a. Perancangan Layar Pembukaan

Layar menu utama ini berfungsi sebagai layar utama ketika *user* menjalankan program. Pada layar pembukaan ini akan terdapat nama program, identitas penulis, dan sebuah tombol “Masuk Form Utama”. Tombol ini berfungsi untuk melanjutkan ke layar *input*.

b. Perancangan Layar *Input*

Pada layar *input* unsur terdapat sebuah *EditBox* , sebuah *ListBox*, dan empat tombol. *EditBox* berfungsi untuk memasukkan data

unsur oleh *user*. *ListBox* berfungsi untuk menampilkan data unsur yang dimasukkan oleh *user*.

Tombol “Masukkan Ke List >>” berfungsi untuk memindahkan data unsur dari *EditBox* ke *ListBox*. Tombol “Hapus Dari List <<” berfungsi untuk menghapus data *unsur* yang diinginkan dari *ListBox*. Tombol “Bersihkan Semua Isi List” berfungsi untuk menghapus semua data unsur dari *ListBox*. Tombol “NEXT>>” berfungsi untuk melanjutkan ke layar *Cayley*.

c. Perancangan Layar *Cayley*

Pada layar *Cayley* terdapat dua *StringGrid*, dua *EditBox*, tombol “<< BACK” dan tombol “NEXT >>”. *StringGrid1* berfungsi untuk memasukkan hasil operasi unsur dari operasi1. *StringGrid2* berfungsi untuk memasukkan hasil operasi unsur dari operasi2.

EditBox1 dan *EditBox2* berfungsi untuk memasukkan nama operasi pertama dan kedua. *EditBox* ini bersifat optional, yang berarti boleh diisi atau pun tidak. Tombol “Bersihkan Semua Isi Tabel Cayley Operasi 1” berfungsi untuk menghapus semua hasil operasi unsur pada operasi1. Tombol “Bersihkan Semua Isi Tabel Cayley Operasi 2” berfungsi untuk menghapus semua hasil operasi unsur pada operasi2. Tombol “<< BACK” berfungsi untuk kembali ke layar *input*. Tombol “NEXT >>” berfungsi untuk melanjutkan ke layar hasil *ring*. Hal ini dilakukan juga untuk lainnya.

2. Perancangan Modul

Untuk melakukan pengujiannya dilakukan dengan menyusun beberapa modul antara lain,

a. Modul *Masuk_Menu_Utama_click*

Fungsi: perpindahan dari Layar Pembukaan ke Layar *Input*

Begin

Aktifkan Layar *Input*

Nonaktifkan Layar Pembukaan

End

b. Modul Masukkan_Ke_List_click

Fungsi: memindahkan unsur dari EditBox ke ListBox

var

flag : boolean;

i : integer;

Begin

if edit1 kosong then

Begin

flag := True;

for i := 0 to ListBox1.Items.Count - 1 do

If edit1 = ListBox1 ke-i then flag := False

if flag then tampilkan unsur pada ListBox1

else

Tampilkan pesan 'Unsur sudah ada di dalam list.'

End

else

Begin

Tampilkan pesan 'Unsur yang akan dimasukkan ke dalam list tidak boleh kosong.'

End

End

c. Modul Hapus_Dari_List_click

Fungsi: menghapus data unsur yang diinginkan pada ListBox1.

Begin

Hapus unsur ListBox1 yang dipilih

End

d. Modul Next_click

Fungsi: mengecek ListBox dan melanjutkan ke Layar *Cayley*

var

i : integer;

Begin

if ListBox1.Count lebih besar dari 0 then

Begin

Aktifkan Layar Cayley

Nonaktifkan Layar *Input*;

form2.StringGridOperasi1.ColCount := ListBox1.Items.Count + 1

form2.StringGridOperasi1.RowCount := ListBox1.Items.Count + 1

Form2.StringGridOperasi1.Cells[0,0] := '+';

for i := 0 to ListBox1.Items.Count - 1 do

Begin

Form2.StringGridOperasi1.Cells[i+1,0] := ListBox1.Items[i];

Form2.StringGridOperasi1.Cells[0,i+1] := ListBox1.Items[i];

End

form2.StringGridOperasi2.ColCount:=ListBox1.Items.Count + 1

form2.StringGridOperasi2.RowCount := ListBox1.Items.Count + 1

Form2.StringGridOperasi2.Cells[0,0] := '*';

for i := 0 to ListBox1.Items.Count - 1 do

Begin

```

Form2.StringGridOperasi2.Cells[i+1,0] := ListBox1.Items[i];
      Form2.StringGridOperasi2.Cells[0,i+1] := ListBox1.Items[i];
      End
    End
  else
  Begin
    Tampilkan pesan 'Belum ada unsur yang akan dioperasikan.'
  End
End

```

e. Modul Bersihkan_Semua_Isi_List_click
 Fungsi: menghapus semua unsur dalam ListBox1.
 Begin
 Hapus semua unsur pada ListBox1
 End

3. Perancangan Algoritma

Disamping modul-modul yang telah diuraikan di atas maka untuk melakukan proses pembuktian dan perhitungan yang menyangkut tentang teori Group, Ring dan Field dituliskan dalam bentuk algoritma seperti yang ditampilkan berikut (**Mackiw,1996**):

- a. Aktifkan layar pembuka, berfungsi untuk perpindahan dari layar pembuka ke layar input.
- b. Aktifkan layar Input, berfungsi memindahkan unsur Editbox ke Listbox
- c. Aktifkan layar Caylay, dalam algoritma ini akan dilakukan proses dan perhitungan tabel cayley.
- d. Cek dan menguji tabel Cayley
- e. Test tertutup, jika ya tampilkan hasil test dan jika tidak lanjutkan ke langkah berikutnya
- f. Test asosiatif, jika ya tampilkan hasil test dan jika tidak lanjutkan ke langkah berikutnya
- g. Test unsur kanan dan kiri, jika ya tampilkan hasil test dan jika tidak lanjutkan ke langkah
 Berikutnya
- h. Test Invers, jika ya tampilkan hasil test dan jika tidak lanjutkan ke langkah
 berikutnya
- i. Tampilkan ke layar hasil rangkuman test
- j. Kembali ke b untuk data berikutnya
- k. Selesai kemudian kembali ke menu utama dan pilih back untuk proses selanjutnya.

4. Implementasi

Setelah rancangan program selesai kemudian dilakukan pembuatan program/koding dan testing modul program dan kemudian diintegrasikan. Adapun Spesifikasi perangkat keras yang dipakai dalam mengoperasikan program ini adalah: Processor: Pentium 4(1,7GHz); Memory 256 MB Harddisk :40 GB VGA Card:64MB Standard VGA Monitor :SVGA 15"; Mouse dan Keyboard. Di samping kebutuhan perangkat keras tersebut di atas, dibutuhkan perangkat lunak dengan spesifikasi Operating System Windows2000 dan Compiler Borland Delphi 7.0.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk menguji piranti lunak komputer yang telah dikembangkan, serta melihat hasil yang diperoleh maka dilakukan uji coba program dengan membuat satu contoh kasus berikut.

Contoh

Tunjukkan bahwa untuk $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dengan operasi $+_5$ dan \times_5 pada tabel berikut apakah merupakan Ring ?

| $+_5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| \times_5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Hasil :

$(A, +_5)$ ~ Tertutup

~ $+_5$ asosiatif

~ unsur kesatuan = 0

~ $0^{-1} = 0$; $1^{-1} = 4$; $2^{-1} = 3$

$\rightarrow 3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 1$

~ $+_5$ komutatif

(A, \times_5) ~ Tertutup

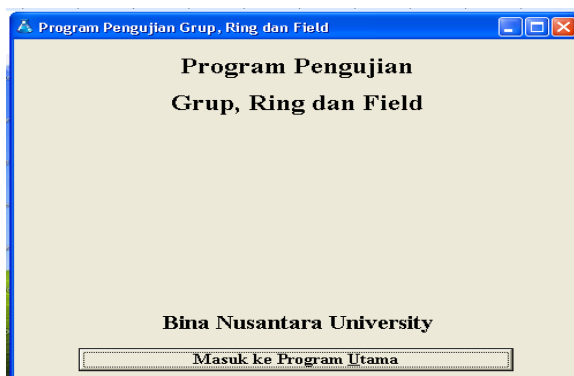
~ \times_5 asosiatif

~ \times_5 distributif terhadap

~ $a \times_5 (b +_5 c) = (a \times_5 b) +_5 (a \times_5 c)$

Maka $(A, +_5, \times_5)$ adalah sebuah Ring

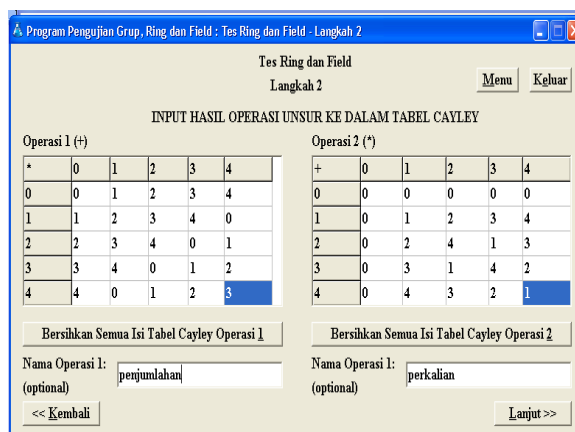
Berikutnya bila contoh di atas diselesaikan dengan menggunakan program Komputer yang telah dikembangkan, diperoleh hasil berikut :



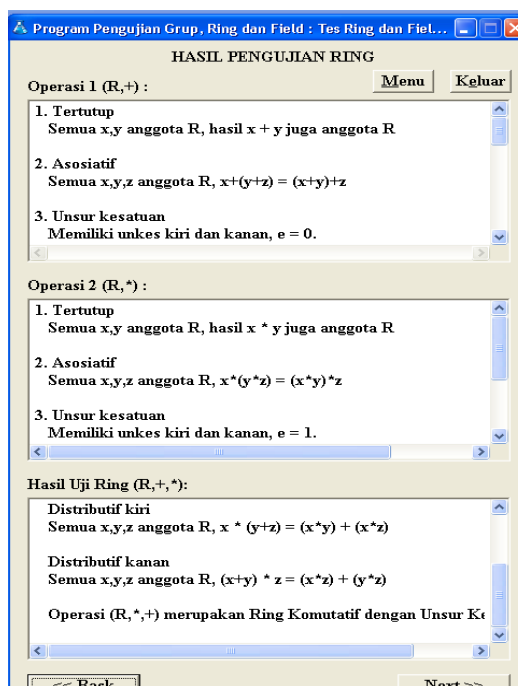
Gambar 1. Menu program utama



Gambar 2. Menu pilihan



Gambar 3. Input data Contoh

Gambar 4. Hasil Akhir Uji Ring $(R,+,*)$

Pembahasan :

Berdasarkan hal yang dapat diperoleh dari hasil run program tersebut sebagai berikut.

1. Program yang dibuat telah dapat menguji suatu sistem terbatas apakah merupakan *group*, *ring* atau *field* sesuai dengan pengujian secara manual dan program sejenis belum ada yang mengembangkan.
2. Jika dibandingkan dengan cara pengerjaan manual maka dengan program aplikasi ini waktu yang diperlukan untuk pengujian lebih singkat sekitar 50% dari waktu manual.
3. Kelemahan program ini adalah tidak dapat memberikan hasil pengujian $(F-\{0\},*)$ jika hasil yang ada sudah bukan merupakan *ring* dan inputan masih merupakan alfanumerik terbatas.

4. KESIMPULAN

Program aplikasi pengujian *Group*, *Ring* dan *Field* yang telah dibuat dapat menjadi alat bantu untuk memudahkan pengujian dan lebih efisien sekitar 50% dari waktu proses manual. Demikian pula bahwa hasil pengujian yang dilakukan program komputer tersebut sama dengan bila diselesaikan secara manual, seperti yang ditampilkan sebelumnya. Program aplikasi ini belum dapat menyelesaikan masalah berbagai inputan

dalam unsur seperti grup permutasi atau bilangan terbatas dan pengujian masih menggunakan tabel *Cayley*.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada Sri Martuti yang telah membantu penulis dalam menyusun program komputer yang diperlukan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nowicki, A. Rings and Field of Constants for derivations in Characteristic Zero, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1994, Vol 96, no.1, 47-55.
- [2] Dogfrey, A. *Finite Groups and Cayley Tables*. 1998. <http://members.tripod.com/~dogschoo/cayley.html>
- [3] Mackiw, G. Computing in Abstract Algebra, *The College Mathematics Journal*, 1996. Vol 27, 136-142
- [4] Malik, D.S, John N.Mordeson, M.K.Sen. *Fundamentals of Abstract Algebra*. McGraw-Hill International Editions. Singapura. 1997.
- [5] Pressman, Roger S. *Software Engineering A Practitioners Approach* 6th Edition, McGraw Hill, Singapore. 2005.
- [6] Rowland, Todd. *Group*. <http://mathworld.wolfram.com/Group.html> . 2006
- [7] Sukirman. *Aljabar Abstrak* Universitas Terbuka. Jakarta. 1999.
- [8] W.Edwin Clark. *Elementary Abstract Algebra*, University of South Florida http://shell.cas.usf.edu/~wclark/Elem_abs_alg.pdf. 2001