

Kategori Modul yang Dibangun oleh \mathcal{U}_V

Fitriani^{1*}, Ahmad Faisol²

^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

Bandar Lampung, Lampung, Indonesia

e-mail: ¹fitriani.1984@fmipa.unila.ac.id, ²ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id

Diajukan: 22 Oktober 2019, Diperbaiki: 27 Januari 2020, Diterima: 23 Mei 2020

Abstrak

Misalkan \mathcal{U} keluarga modul atas R dan V merupakan submodul dari jumlah langsung beberapa elemen di dalam keluarga \mathcal{U} . Modul N atas R dibangun oleh \mathcal{U}_V jika terdapat epimorfisma dari V ke N . Modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V merupakan perumuman dari modul yang dibangun oleh \mathcal{U} . Perumuman ini dilakukan dengan menggunakan konsep barisan V -koeksak dari modul. Di dalam paper ini, dikonstruksi kategori dari modul-modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V beserta beberapa sifat-sifatnya. Selain itu, ditunjukkan bahwa kategori modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V merupakan kategori pre-aditif.

Kata Kunci: \mathcal{U}_V -generator, barisan V -koeksak, kategori pre-aditif, \mathcal{U} -generator.

Abstract

Let \mathcal{U} be a family of R -modules and V be a submodule of a direct sum of some elements in \mathcal{U} . An R -module N is generated by \mathcal{U}_V if there exists an epimorphism from V to N . The notion of the \mathcal{U}_V -generated module is a generalization of the \mathcal{U} -generated module. This generalization uses the concept of the V -coexact sequence of modules. In this paper, we construct a category of \mathcal{U}_V -generated modules. Furthermore, we investigate some properties of the category of \mathcal{U}_V -generated modules. We also prove that this category is a pre-additive category.

Keywords: \mathcal{U}_V -generator, V -coexact sequence, category pre-additive, \mathcal{U} -generator.

1 Pendahuluan

Barisan eksak merupakan salah satu konsep penting di dalam struktur aljabar. Misalkan K , L , M merupakan modul-modul atas ring R dan f , g merupakan homomorfisma modul atas R . Barisan homomorfisma modul atas ring R

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$$

dikatakan eksak jika $Im(f) = Ker(g)$ [1]. Barisan eksak ini diperumum oleh Davvaz dan Parnian-Garamaleky [2] yang dilakukan dengan cara mengganti submodul 0 dengan sebarang submodul U di M . Mereka memperumum beberapa konsep terkait dengan barisan eksak yang diperumum menjadi barisan U -eksak dan mendefinisikan barisan V -koeksak sebagai dual dari barisan U -eksak. Selain itu, di dalam [3] Davvaz dkk. memberikan perumuman beberapa konsep

dalam aljabar homologi menggunakan konsep barisan quasi eksak dan di dalam [4], Anvariye dkk. memperkenalkan barisan U -terpisah serta kaitan antara barisan U -terpisah dan modul proyektif.

Selanjutnya, di dalam [5] Davvaz dan Anvariye memberikan hasil lanjutan mengenai barisan quasi eksak dan menggunakannya untuk memperumum Lemma Schanuel dan Madanshekaf [6] menggunakan barisan U -eksak dalam mengembangkan konsep presentasi berhingga dari modul atas R dan funktor torsi dalam kategori R -MOD.

Selanjutnya, sebagai aplikasi dari barisan U -eksak, Aminizadeh [7] menggunakan konsep barisan U -eksak untuk memperkenalkan barisan U -eksak dari S -act. Selain itu, Elviyanti dkk. [8] mengkonstruksi kategori U -kompleks dengan menggunakan konsep barisan U -eksak. Pada tahun 2017, Mahatama dan Muchtadi-Alamsyah [9] mengkonstruksi U -resolusi proyektif yang merupakan perumuman dari resolusi proyektif suatu modul dengan menggunakan konsep barisan U -eksak.

Termotivasi dari pendefinisian barisan U -eksak dan barisan V -koeksak, Fitriani dkk. [10] mendefinisikan barisan X -sub-eksak sebagai perumuman barisan eksak. Konsep ini digunakan dalam perumuman dari keluarga modul bebas linear. Keluarga modul bebas linear ini merupakan perumuman dari himpunan bebas linear [1]. Selain itu, Fitriani dkk. [11] memperumum keluarga \mathcal{U} -generator dengan menggunakan konsep barisan V -koeksak. Selanjutnya, Fitriani dkk. [12] memperumum konsep basis dan modul bebas menggunakan konsep keluarga modul X -sub bebas linear dan keluarga \mathcal{U}_V -generator. Di dalam penelitian ini, dikonstruksi kategori yang obyeknya adalah modul-modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V dan akan diselidiki sifat-sifatnya. Hasil-hasil pada penelitian ini selanjutnya akan digunakan untuk mendefinisikan rank dari suatu modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V yang merupakan perumuman dari rank modul di dalam kategori modul atas R .

2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi kategori modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V yang selanjutnya dinotasikan dengan $\mu(\mathcal{U}_V)$;
2. Menyelidiki sifat-sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$;
3. Menyelidiki sifat pre-aditif pada kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diberikan hasil-hasil penelitian yang meliputi konstruksi kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$, pembuktian sifat-sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ dan uraian mengenai sifat pre-aditif pada kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$. Untuk selanjutnya, yang dimaksud dengan \mathcal{U} adalah keluarga modul atas ring R dan V merupakan submodul dari $\bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$, dengan $U_{\lambda} \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$.

3.1. Konstruksi Kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$

Misalkan $\mathcal{U} = \{U_{\lambda}\}_{\Lambda}$ keluarga modul atas ring R . Modul M dibangun oleh \mathcal{U} jika terdapat epimorfisma dari $\bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$ ke M [13]. Konsep \mathcal{U} -generator ini diperumum menjadi \mathcal{U}_V -generator. Hal ini dilakukan dengan cara mengganti $\bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$ dengan sebarang submodulnya. Misalkan V submodul $\bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$. Suatu modul N dikatakan dibangun oleh \mathcal{U}_V jika terdapat epimorfisma dari V ke N [11]. Jika diambil $V = \bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$, maka \mathcal{U}_V -generator merupakan \mathcal{U} -generator. Oleh karena itu, \mathcal{U} -generator merupakan kasus khusus dari \mathcal{U}_V -generator. Hal ini dijelaskan sebagai berikut. Diberikan modul M yang merupakan modul \mathcal{U} -generator. Hal ini berarti terdapat epimorfisma $f: \bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda} \rightarrow M$. Karena $\bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$ merupakan submodul dari dirinya sendiri, dapat diambil $V = \bigoplus_{\Lambda} U_{\lambda}$. Akibatnya, terdapat epimorfisma dari V ke M yang berarti M merupakan modul \mathcal{U}_V -generator. Oleh karena itu, setiap modul \mathcal{U} -generator merupakan modul \mathcal{U}_V -generator.

Hal ini tidak berlaku sebaliknya, yaitu setiap modul \mathcal{U}_V -generator belum tentu merupakan modul \mathcal{U} -generator. Sebagai contoh, jika $\mathcal{U} = \{\mathbb{Q}\}$ kelas modul atas bilangan bulat \mathbb{Z} , dengan \mathbb{Q} himpunan bilangan rasional dan $M = \mathbb{Z}$ sebagai modul atas \mathbb{Z} . Karena tidak terdapat epimorfisma dari \mathbb{Q} ke \mathbb{Z} , modul M bukan merupakan modul \mathcal{U} -generator. Jika diambil $V = \mathbb{Z}$ yang merupakan submodul \mathbb{Q} , maka jelas bahwa terdapat epimorfisma dari V ke M . Hal ini berakibat M merupakan modul $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ -generator. Hal ini menunjukkan bahwa \mathcal{U} -generator merupakan kasus khusus dari \mathcal{U}_V -generator.

Kelas modul-modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V dinotasikan dengan $\mu(\mathcal{U}_V)$. Dalam proposisi berikut dibuktikan bahwa $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan suatu kategori.

Proposisi 1. *Kelas modul-modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V , yaitu $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan suatu kategori.*

Bukti.

1. Obyek: kelas dari semua modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V , yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V)) = \{M \in R - \text{MOD} \mid M \text{ dibangun oleh } \mathcal{U}_V\},$$

dengan $R\text{-MOD}$ merupakan kategori modul atas ring R . Jika M termuat di dalam $\text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, maka M dibangun oleh \mathcal{U}_V yang artinya terdapat epimorfisma f dari V ke M .

2. Morfisma: morfisma di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ adalah morfisma modul atas R . Misalkan $K, L \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$. Morfisma $\text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(K, L)$ adalah himpunan

$$\text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(K, L) = \{f : K \rightarrow L \mid f \text{ homomorfisma modul atas } R\}.$$

3. Komposisi Morfisma: komposisi morfisma di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ adalah komposisi morfisma modul atas R yang memenuhi:
- Untuk setiap modul-modul atas R yaitu K, L, M, N yang termuat di dalam $\text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$ dan $f \in \text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(K, L)$, $g \in \text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(L, M)$, $h \in \text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(M, N)$, berlaku $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
 - Untuk setiap $M \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, terdapat morfisma $id_M \in \text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(M, M)$ yang memenuhi $f \circ id_M = id_N \circ f$, untuk setiap $f \in \text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(M, N)$, $N \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$.

Berdasarkan uraian tersebut, $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan suatu kategori. ■

Berdasarkan [13], suatu kategori \mathcal{D} merupakan subkategori \mathcal{C} jika memenuhi:

- $\text{Obj}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$,
- $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, untuk setiap $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$,
- Komposisi morfisma di \mathcal{D} merupakan pembatasan dari komposisi morfisma di \mathcal{C} .

Jika $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, maka \mathcal{D} dikatakan subkategori penuh dari \mathcal{C} [13]. Jika dibandingkan dengan kategori modul atas ring R , yaitu $R\text{-MOD}$, kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan subkategori penuh dari $R\text{-MOD}$ seperti diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2. *Kategori modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V , yaitu $\mu(\mathcal{U}_V)$ adalah subkategori penuh dari $R\text{-MOD}$ yang merupakan kategori modul atas ring R .*

Bukti. Pada konstruksi kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ terlihat bahwa $\text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V)) \subset \text{Obj}(R\text{-MOD})$ dan $\text{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_V)}(M, N) = \text{Mor}_{R\text{-MOD}}(M, N)$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $\mu(\mathcal{U}_V)$ adalah subkategori penuh dari $R\text{-MOD}$. ■

3. 2. Beberapa Sifat Kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$

Pada bagian ini diberikan beberapa sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$. Beberapa sifat modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V telah diberikan di dalam [11]. Berikut ini diberikan sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ yang menyatakan bahwa kategori ini tertutup terhadap *image* homomorfisma sebagai berikut.

Proposisi 3. Jika $M \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, maka $N \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, untuk setiap image homomorfisma N dari M .

Bukti. Diberikan sebarang $M \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$. Hal ini berarti modul M atas R dibangun oleh \mathcal{U}_V . Oleh karena itu, terdapat epimorfisma f dari V ke M . Misalkan N adalah image homomorfisma f dari M , yang berarti $\text{im}(f) = N$. Akibatnya, f merupakan suatu epimorfisma dari M ke N . Jadi, $g \circ f$ merupakan epimorfisma dari V ke N . Jadi, N merupakan modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V . Dengan kata lain, $N \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$ yang menunjukkan bahwa kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ tertutup terhadap image homomorfisma. ■

Misalkan M merupakan modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V . Karena terdapat pemetaan nol yang merupakan epimorfisma dari M ke modul 0, modul 0 merupakan image homomorfisma dari setiap modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V . Oleh karena itu, berdasarkan Proposisi 3 diperoleh bahwa $0 \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$. Demikian halnya dengan modul faktor dari modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V seperti diberikan dalam sifat berikut.

Akibat 4. Jika $M \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, maka $M/N \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, untuk setiap modul faktor M/N dari M .

Bukti. Diberikan sebarang modul faktor M/N dari M . Oleh karena itu, terdapat pemetaan proyeksi kanonik $p: M \rightarrow M/N$. Jadi, berdasarkan Proposisi 3 diperoleh $M/N \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, untuk setiap modul faktor M/N dari M . ■

Selanjutnya, dari [11, Proposisi 9] diperoleh bahwa jika N_α dibangun oleh \mathcal{U}_{V_α} , untuk setiap $\alpha \in A$, maka $\bigoplus_A N_\alpha$ dibangun oleh $\mathcal{U}_{\bigoplus_A V_\alpha}$. Akibatnya, diperoleh sifat berikut.

Akibat 5. Jika $M_\alpha \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{V_\alpha}))$, untuk setiap $\alpha \in A$, maka $\bigoplus_A M_\alpha \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\bigoplus_A V_\alpha}))$.

Bukti. Diberikan $M_\alpha \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{V_\alpha}))$, untuk setiap $\alpha \in A$. Hal ini berakibat terdapat epimorfisma $f_\alpha: V_\alpha \rightarrow M_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in A$. Oleh karena itu, dapat dibentuk $\bigoplus_A f_\alpha: \bigoplus_A V_\alpha \rightarrow \bigoplus_A M_\alpha$. Karena masing-masing f_α merupakan epimorfisma, diperoleh $\bigoplus_A f_\alpha$ epimorfisma. Oleh karena itu, berdasarkan [11, Proposisi 9], diperoleh $\bigoplus_A M_\alpha$ dibangun oleh $\mathcal{U}_{\bigoplus_A V_\alpha}$ dan akibatnya $\bigoplus_A M_\alpha \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\bigoplus_A V_\alpha}))$. ■

3. 3. Sifat Pre-Aditif pada Kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan kategori pre-aditif. Berdasarkan [14, Definisi 1.1], suatu kategori \mathcal{A} dikatakan aditif jika memenuhi kondisi berikut.

1. Untuk setiap pasangan obyek X dan Y , himpunan morfisma $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ merupakan grup komutatif dan komposisi morfisma

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

bilinear.

2. Kategori \mathcal{A} memuat obyek 0, yaitu untuk setiap obyek $X \in \mathcal{A}$, masing-masing himpunan morfisma $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, 0)$ dan $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(0, X)$ memiliki tepat satu elemen.
3. Untuk setiap pasangan obyek-obyek X, Y di \mathcal{A} , terdapat ko-hasil kali $X \oplus Y$ di \mathcal{A} .

Jika hanya terpenuhi kondisi 1 dan 2, maka kategori \mathcal{A} disebut kategori pre-aditif [14].

Pada teorema berikut ditunjukkan bahwa kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan kategori pre-aditif.

Teorema 6. *Kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan kategori pre-aditif.*

Bukti.

1. Diberikan sebarang $M, N \in \mu(\mathcal{U}_V)$. Didefinisikan operasi pada himpunan morfisma $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} +: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \\ (f, g) &\mapsto f + g, \end{aligned}$$

dengan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, untuk setiap $x \in M$. Dengan definisi ini dapat ditunjukkan bahwa $(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N), +)$ merupakan grup dengan elemen identitas adalah pemetaan nol dan invers dari $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ adalah $-f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$. Karena

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m) = g(m) + f(m) = (g + f)(m),$$

untuk setiap $m \in M$, $(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N), +)$ merupakan grup komutatif.

Selanjutnya, diberikan sebarang $K, L, M \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$. Akan ditunjukkan komposisi morfisma:

$$\begin{aligned} +: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, M) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g, \end{aligned}$$

bersifat bilinear, yaitu untuk setiap $k \in K$, berlaku

$$\begin{aligned} \text{a. } ((f + g) \circ h)(k) &= (f + g)(h(k)) \\ &= f(h(k)) + g(h(k)) \\ &= (f \circ h)(k) + (g \circ h)(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (f \circ (g + h))(k) &= f((g + h)(k)) \\ &= f(g(k) + h(k)) \\ &= (f \circ g)(k) + (f \circ h)(k). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, komposisi morfisma pada kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ bersifat bilinear.

2. Obyek 0 di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ adalah modul 0 dan pada Bagian 3.2 telah diuraikan bahwa modul 0 termuat di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan kategori pre-aditif. ■

Selanjutnya, berdasarkan [11, 2.2] diperoleh bahwa jika $M, N \in \text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$, maka belum tentu $M \oplus N$ termuat di dalam himpunan $\text{Obj}(\mu(\mathcal{U}_V))$. Oleh karena itu, kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ bukan merupakan kategori aditif.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh bahwa himpunan semua modul yang dibangun oleh \mathcal{U}_V membentuk suatu kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$. Kategori ini merupakan subkategori penuh dari kategori modul atas ring R , yaitu $R\text{-MOD}$. Selain itu, kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ tertutup terhadap *image* homomorfisma. Hasil ini berakibat modul 0 termuat di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ dan untuk setiap M yang termuat di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ berakibat modul faktor M , yaitu M/N juga termuat di dalam kategori tersebut. Selanjutnya, telah dibuktikan bahwa kategori $\mu(\mathcal{U}_V)$ merupakan kategori pre-aditif.

5 Daftar Pustaka

- [1] W. A. Adkins and S. H. Weintraub, *Algebra, An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [2] B. Davvaz and Y. A. Parnian-Garamaleky, "A Note on Exact Sequences," *Bull. Malaysian Math. Soc.*, vol. 22, pp. 53–56, 1999.
- [3] B. Davvaz and H. Shabani-Solt, "A generalization of homological algebra," *J. Korean Math. Soc.*, vol. 39, no. 6, pp. 881–898, 2002.
- [4] S. M. Anvariyeh and B. Davvaz, "U-Split Exact Sequences," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 4, no. 2, pp. 209–219, 2002.
- [5] B. Davvaz and S. M. Anvariyeh, "On Quasi Exact Sequences," *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 42, no. 1, pp. 149–155, 2005.
- [6] A. Madanshekaf, "Quasi-Exact Sequence and Finitely Presented Modules," *Iran. J. Math. Sci. Informatics*, vol. 3, no. 2, pp. 49–53, 2008.
- [7] R. Aminizadeh, H. Rasouli, and A. Tehranian, "Quasi-exact Sequences of S-Act," *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 2017.
- [8] G. Elfiyanti, I. Muchtadi, D. Nasution, and U. Amartiwi, "Abelian Property of the Category of U-Complexes Chain of U-Complexes," *Int. J. Math. Anal.*, vol. 10, no. 17, pp. 849–853, 2016.

- [9] Y. Mahatma and I. Muchtadi-alamisyah, "Construction of U -extension module," *AIP Conf. Proc.* 1867, vol. 020025, no. August, 2017.
- [10] Fitriani, B. Surodjo, and I. E. Wijayanti, "On Sub-Exact Sequences," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 100, no. 7, pp. 1055–1065, 2016.
- [11] Fitriani, I. E. Wijayanti, and B. Surodjo, "Generalization of U -Generator and M -Subgenerator Related to Category $\sigma [M]$," *J. Math. Res.*, vol. 10, no. 4, pp. 101–106, 2018.
- [12] Fitriani, I. E. Wijayanti, and B. Surodjo, "A Generalization of Basis and Free Modules Relatives to a Family of R -Modules," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1097, no. 1, 2018.
- [13] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*. Philadelphia, USA: Gordon and Breach Science, 1991.
- [14] R. R. T. Holm, P. Jorgensen, *Triangulated Categories*. USA: Cambridge University Press.