

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI.....	1
DAFTAR GAMBAR	3
DAFTAR TABEL.....	8
TINJAUAN UMUM MATAKULIAH DASAR SISTEM KENDALI UNTUK MAHASISWA TEKNIK ELEKTRO	9
A. Tinjauan Matakuliah	9
B. Kegunaan Matakuliah	9
C. Tujuan Instruksional Umum.....	9
D. Urutan Bahan Ajar	10
E. Petunjuk Bagi Mahasiswa untuk mempelajari Buku Ajar ini	10
I. PENGANTAR SISTEM KENDALI.....	11
1.1. Pendahuluan	11
1.2. Sistem dan Model.....	11
1.3. Sistem Kalang-Terbuka dan Kalang-Tertutup	12
1.4. Elemen-elemen Dasar dari Sistem Kalang Terbuka.....	13
1.5. Elemen-elemen Dasar dari Sistem Kalang Tertutup	14
1.6. Keunggulan dan Kelemahan Sistem Kendali Kalang-Tertutup dibandingkan dengan Sistem Kendali Kalang-Terbuka.....	15
II. PEMODELAN SISTEM.....	17
2.1 Pendahuluan	17
2.2 Pembuatan blok bangun dan model sistem mekanik.....	17
2.3 Pembuatan blok bangun dan model sistem elektrik	19
2.4 Analogi Elektrik dan Mekanik	24
2.5 Pembuatan Blok Bangun dan Model Sistem Zalir	26
2.6 Pembuatan Blok Bangun dan Model Sistem Termal	32
III. TANGGAPAN-TANGGAPAN SISTEM	36
3.1 Pendahuluan	36
3.2 Sistem Orde-1	37
3.3 Sistem Orde-2.....	42
IV. ALIH-RAGAM LAPLACE DAN MODEL SISTEM DINAMIK	47
4.1 Pendahuluan	47
4.2 Alihragam Laplace	48
4.3 Fungsi alih untuk elemen-elemen dinamik	53
4.4 Elemen-elemen orde-1 dan orde-2	55
4.5 Tanggapan sistem terhadap masukan undak	56
4.6 Tanggapan sistem terhadap masukan tanjak/lereng	59
4.7 Tanggapan sistem terhadap masukan impuls	61
V. DIAGRAM KOTAK dan GALAT SISTEM KONDISI TUNAK.....	66
5.1 Pendahuluan	66
5.2 Prosedur menggambarkan diagram kotak	66
5.3 Prosedur mereduksi diagram kotak	67
5.4 Galat sistem dalam kondisi tunak.....	72
5.5 Galat sistem dalam kondisi tunak untuk berbagai fungsi masukan.....	77
VI. ANALISIS KESTABILAN SISTEM	80

6.1	Definisi Kestabilan Sistem	80
6.2	Kutub dan Nol	81
6.3	Penggambaran nol-kutub.....	83
6.4	Stabilitas dan Kutub-kutub.....	84
6.5	Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	89
6.6	Kestabilan Relatif	92
6.7	Analisis Tempat Kedudukan Akar (<i>Root Locus Analysis</i>).....	94
VII.	TANGGAPAN FREKUENSI.....	101
7.1	Pendahuluan	101
7.2	Tanggapan frekuensi	101
7.3	Plot Bode	101
7.4	Diagram Nyquist	113
7.5	Kriteria kestabilan Nyquist.....	119
VIII.	JENIS-JENIS PENGENDALI DAN PERANGKAT KERAS SISTEM KENDALI.....	121
8.1	Pendahuluan	121
8.2	Kendali proporsional (P)	121
8.3	Kendali integral (I)	124
8.4	Kendali proporsional+integral (PI)	130
8.5	Kendali derivatif (D)	134
8.6	Kendali proporsional+derivatif (PD).....	135
8.7	Kendali proporsional-integral-derivatif (PID).....	138
8.8	Pengaturan penguatan pengendali	142
8.9	Umpanbalik kecepatan	145
8.10	Perangkat keras sistem kendali	147
IX.	KENDALI PROSES-PROSES DISKRET	152
9.1	Pendahuluan	152
9.2	Proses-proses diskret	152
9.3	Pengendali logika terprogram (<i>PLC</i>)	155
9.4	Pemrograman kendali logika terprogram	158
9.4.1	Pewaktu (<i>Timer</i>).....	159
9.4.2	Pencacah (<i>counter</i>).....	160
9.4.3	Pengunci (<i>Latch</i>)	161
X.	KENDALI DIGITAL LANGSUNG.....	169
10.1	Komputer-komputer Pada Kendali	169
10.2	Jenis-jenis Kendali Digital Langsung	170
10.3	Contoh-contoh Kendali Digital Langsung.....	172
XI.	ALIHHRAGAM-Z	174
11.1	Pendahuluan.....	174
11.2	Sistem data-cuplik.....	174
11.3	Alihragam-Z.....	178
11.4	Penggunaan alihragam-Z.....	181
11.5	Inversi alihragam-Z.....	184

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Representasi sistem dengan sebuah kotak.....	12
Gambar 1.2 Contoh sistem kendali	13
Gambar 1.3 Subsistem-subsistem pada sebuah sistem kendali kalang-terbuka....	14
Gambar 1.4 Subsistem-subsistem pada sistem kendali kalang-tertutup.	15
Gambar 2.1 Blok sistem mekanik pegas.....	17
Gambar 2.2 Soal contoh 1.....	18
Gambar 2.3 (a) analisis simpul, (b) analisis jaring.....	21
Gambar 2.4 Soal contoh 2.....	24
Gambar 2.5 Soal contoh 3.....	25
Gambar 2.6 Jawab contoh 3.....	26
Gambar 2.7 Blok bangun sistem zalir.....	26
Gambar 2.8 Resistansi hidrolis.....	27
Gambar 2.9 Kapasitansi hidrolis.....	28
Gambar 2.10 Kelembaman hidrolis.....	29
Gambar 2.11 Soal contoh 4.....	30
Gambar 2.12 Sebuah sistem termal soal contoh 5.....	33
Gambar 2.13 Kesetaraan sistem termal dan elektrik soal contoh 5	34
Gambar 2.14 Soal nomor 1.....	34
Gambar 2.15 Sistem hidrolis tabung U untuk soal nomor 2.....	35
Gambar 2.16 Sistem termal untuk soal nomor 3.....	35
Gambar 3.1 Tanggapan peralihan dan keadaan tunak pada sistem pegas.....	37
Gambar 3.2 Sistem pegas.....	37
Gambar 3.3 (a) Tangki air terkendali-pelampung, (b) variasi ketinggian air terhadap waktu, (c) diagram kotak sistem (a).....	38
Gambar 3.4 Isyarat-isyarat masukan: (a) undak, (b) impuls, (c) lereng, dan (d) sinusoidal.....	39
Gambar 3.5 (a) Masukan undak untuk sistem orde-1 dan (b) hasil keluaran.....	41
Gambar 3.6 (a) Rangkaian RC seri, dan (b) beda tegangan kapasitor terhadap waktu.....	42
Gambar 3.7 Sistem pegas orde-2.....	43
Gambar 3.8 Jenis-jenis keluaran bervariasi terhadap waktu.....	43
Gambar 3.9 Tanggapan sistem orde-2 untuk masukan undak.....	46
Gambar 4.1 Alihragam logaritme.....	47
Gambar 4.2 Alihragam Laplace.....	48
Gambar 4.3 Fungsi undak dengan ketinggian 1.....	49
Gambar 4.4 Fungsi undak dengan ketinggian a.....	49
Gambar 4.5 (a) Fungsi undak, (b) fungsi undak tertunda, (c) fungsi tanjak, (d) fungsi tanjak tertunda, (e) impuls tertunda, (f) fungsi sinusoidal.....	52
Gambar 4.6 Grafik contoh soal nomor 2.....	53
Gambar 4.7 Representasi diagram kotak.....	54

Gambar 4.8 $\theta_o = G[1 - e^{-t/\tau}]$ untuk masukan undak.....	57
Gambar 4.9 $\theta_o = G[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]$ untuk masukan tanjak.....	60
Gambar 4.10 Tanggapan kondisi tunak dari sistem orde-dua untuk masukan tanjak.....	61
Gambar 4.11 Tanggapan kondisi tunak dan transien dari sistem orde-dua untuk masukan tanjak.....	61
Gambar 4.12 $\theta_o = G(1/\tau)e^{-t/\tau}$ untuk satuan impuls pada $t = 0$	62
Gambar 4.13 Tanggapan sistem orde-dua untuk satuan impuls pada $t = 0$	63
Gambar 5.1 Bagian-bagian dari diagram kotak.....	66
Gambar 5.2 Lintasan isyarat.....	67
Gambar 5.3 Sistem dengan elemen yang disusun secara seri.....	67
Gambar 5.4 Sistem kendali dengan kalang umpan balik.....	68
Gambar 5.5 Sistem kendali dengan kalang umpan maju.....	68
Gambar 5.6 Diagram kotak sistem kendali dengan kalang umpan maju dan umpan balik.....	69
Gambar 5.7 Sistem kendali kalang terbuka.....	72
Gambar 5.8 Sistem kendali kalang tertutup sederhana.....	73
Gambar 5.9 (a) Sistem kendali kalang tertutup, (b) diberi elemen umpan balik satu satuan, (c) sistem ekuivalen dengan umpan balik satu satuan.....	74
Gambar 5.10 Soal contoh no. 1.....	76
Gambar 5.11 Galat kondisi tunak: (a) masukan undak, (b) masukan tanjak, (c) masukan parabolis.....	77
Gambar 6.1 Soal contoh 1.....	81
Gambar 6.2 Penyelesaian contoh soal no. 4.....	84
Gambar 6.3 Plot kutub-nol dan stabilitas, daerah stabil terarsir.....	87
Gambar 6.4 Keluaran untuk posisi kutub berlainan dengan masukan impuls.....	88
Gambar 6.5 Keluaran untuk posisi kutub berlainan dengan masukan undak.....	89
Gambar 6.6 Pergeseran sumbu.....	93
Gambar 6.7 Akar loci pada sumbu real.....	95
Gambar 6.8 Asimtot-asimtot dengan $n = 3$, dan $m = 0$	96
Gambar 6.9 Titik pecah $G_o(s) = K/s(\sigma + 1)$	97
Gambar 6.10 Sudut datang.....	98
Gambar 6.11 Akar Kedudukan Sistem $G(s)$	99
Gambar 7.1 Plot Bode untuk penguatan tetap.....	103
Gambar 7.2 Plot Bode untuk kutu pada sumber (asal).....	104
Gambar 7.3 Plot Bode untuk nol pada sumber (asal).....	105
Gambar 7.4 Galat asimtotik untuk kutub real dan nol real.....	106
Gambar 7.5 Plot Bode untuk sebuah kutub real.....	106
Gambar 7.6 Plot Bode untuk sebuah nol real.....	108
Gambar 7.7 Plot Bode untuk sepasang kutub kompleks.....	110
Gambar 7.8 Plot Bode hasil contoh 1.....	112

Gambar 7.9 Plot Bode system $G(s)$ pada contoh 1	113
Gambar 7.10 Penggambaran sebuah titik pada diagram Nyquist	114
Gambar 7.11 Diagram Nyquist untuk $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$	114
Gambar 7.12 Plot Nyquist untuk $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	116
Gambar 7.13 Diagram Nyquist dan kesetaraannya dengan diagram kedudukan akar:	116
Gambar 7.14 Contoh soal nomor 2	118
Gambar 7.15 Diagram Nyquist dari system $G(s)$	118
Gambar 7.16 Plot Nyquist stabil dan tidak stabil.....	119
Gambar 8.1 Kendali proporsional.	122
Gambar 8.2 Sistem dengan kendali proporsional.	123
Gambar 8.3 Sistem kendali proporsional.	123
Gambar 8.4 Galat kendali integral.	125
Gambar 8.5 Kendali integral.	125
Gambar 8.6 Contoh 2.	127
Gambar 8.7 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional	128
Gambar 8.8 Respon Sistem dengan Kendali Integral	130
Gambar 8.9 Kendali proporsional plus integral.	130
Gambar 8.10 Kendali proporsional plus integral.	130
Gambar 8.11 Contoh 3.	132
Gambar 8.12 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional plus Integral	133
Gambar 8.13 Keluaran pengendali derivatif dengan masukan galat tanjak.....	134
Gambar 8.14 Kendali derivatif kalang tertutup.....	135
Gambar 8.15 Kendali proporsional plus derivatif.....	135
Gambar 8.16 Contoh 4.	137
Gambar 8.17 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional plus Derivatif	138
Gambar 8.18 Kendali PID.....	139
Gambar 8.19 Contoh 5.	141
Gambar 8.20 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional plus Integral plus Derivatif	142
Gambar 8.21 Kurva proses reaksi.	143
Gambar 8.22 Contoh 6.	144
Gambar 8.23 Sistem dengan umpanbalik kecepatan dan posisi.	145
Gambar 8.24 Efek umpanbalik kecepatan:	146
Gambar 8.25 Potensiometer.	147
Gambar 8.26 LVDT.	147
Gambar 8.27 Strain gauge.	147
Gambar 8.28 Tachometer: (a) <i>dc</i> , (b) <i>ac</i>	147
Gambar 8.29 Incremental encoder.....	148

Gambar 8.30 <i>Absolute encoder</i>	148
Gambar 8.31 <i>Synchro error detector</i>	148
Gambar 8.32 Rangkaian <i>RTD</i> : (a) jembatan, (b) arus tetap.	148
Gambar 8.33 Tabung venturi.	149
Gambar 8.34 (a) nosel venturi, (b) nosel aliran.	149
Gambar 8.35 Meter aliran Dall: (a) tabung, (b) <i>orifice</i>	149
Gambar 8.36 Meter aliran <i>orifice</i>	149
Gambar 8.37 Motor <i>dc</i>	150
Gambar 8.38 Motor <i>ac</i>	150
Gambar 8.39 Motor langkah.	150
Gambar 8.40 Rele.	150
Gambar 8.41 Katup solenoid.	151
Gambar 9.1 Diagram waktu.	153
Gambar 9.2 Diagram tangga.	153
Gambar 9.3 Diagram alir.	154
Gambar 9.4 Diagram fungsi.	154
Gambar 9.5 (a) Pencampuran zalir, (b) Diagram waktu.	155
Gambar 9.6 Sistem tata letak dan hubungan PLC.	157
Gambar 9.7 Diagram balok fungsi komponen CPU PLC.	158
Gambar 9.8 Pewaktu <i>On-Delay</i>	159
Gambar 9.9 Pewaktu <i>Off-Delay</i>	160
Gambar 9.10 Pencacah-naik.	161
Gambar 9.11 Pencacah naik/turun.	162
Gambar 9.12 Rangkaian pengunci.	162
Gambar 9.13 Pengunci menggunakan kumparan <i>set</i> dan <i>reset</i>	163
Gambar 9.14 Beberapa keluaran.	163
Gambar 9.15 Beberapa Kontak Masukan.	164
Gambar 9.16 <i>Typical Sequencer Function</i>	164
Gambar 9.17 Logika Diagram Tangga untuk Rele Masukan.	165
Gambar 9.18 Diagram pengkabelan.	166
Gambar 9.19 Diagram tangga.	166
Gambar 9.20 Soal nomor 1.	167
Gambar 9.21 Soal nomor 2.	167
Gambar 9.22 Soal nomor 3.	168
Gambar 10.1 Kendali digital langsung.	169
Gambar 10.2 Kendali kaskade.	170
Gambar 10.3 Kendali umpan maju.	170
Gambar 10.4 Kendali penguatan terjadwal.	171
Gambar 10.5 Kendali swatala.	171
Gambar 10.6 Kendali model acuan.	172
Gambar 10.7 Kendali kecepatan motor d.c.	173
Gambar 11.1 Sistem Data-cuplik.	175

Gambar 11.2 Proses cuplik.	175
Gambar 11.3 Unit impuls pada (a) $t = 0$, dan (b) $t = 2T$	176
Gambar 11.4 Unit undak.	177
Gambar 11.5 Tanjak.	177
Gambar 11.6 Contoh 1	178
Gambar 11.7 Fungsi undak unit step.	179
Gambar 11.8 Soal contoh 8.	185
Gambar 11.9 Soal no. 1.	187
Gambar 11.10 Soal no. 2.	187

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Karakteristik blok bangun sistem mekanik.....	18
Tabel 2.2 Karakteristik blok bangun sistem elektrik.	20
Tabel 2.3 Kesetaraan mekanik dan elektrik.	24
Tabel 2.4 Kesetaraan blok bangun zalir dan elektrik.....	29
Tabel 2.5 Kesetaraan blok bangun termal dan elektrik.....	32
Tabel 3.1 Bentuk penyelesaian coba-coba berdasar isyarat masukan.....	40
Tabel 3.2 Penyelesaian persamaan beda orde-2 untuk berbagai macam sistem peredaman.	45
Tabel 4.1 Alihragam Laplace.....	50
Tabel 5.1 Aljabar grafik aliran isyarat.	71
Tabel 5.2 Daftar galat kondisi tunak.	77
Tabel 7.1 Galat magnitude asimtotik dalam dB untuk pasangan kutub dan nol.	110
Tabel 7.2 Galat fase asimtotik untuk pasangan kompleks kutub dan nol.....	110
Tabel 8.1 Kriteria kurve reaksi proses Ziegler dan Nichols.....	143
Tabel 8.2 Kriteria siklus akhir Ziegler dan Nichols.....	143
Tabel 11.1 Alihragam-Z untuk fungsi cuplik.....	179
Tabel 11.2 Alihragam-Z untuk fungsi sekuensial.....	180

TINJAUAN UMUM MATAKULIAH DASAR SISTEM KENDALI UNTUK MAHASISWA TEKNIK ELEKTRO

BUKU AJAR

A. Tinjauan Matakuliah

Mata kuliah Dasar Sistem Kendali ini dirancang untuk memberikan pemahaman tentang berbagai konsep sistem kendali; model- model sistem; tanggapan-tanggapan sistem; alihragam Laplace; model- model sistem dinamik; model- model diagram kotak; galat kondisi- tunak; kutub, nol, dan stabilitas, analisis Root-Locus; pengendali-pengendali; tanggapan frekuensi; perangkat keras sistem kendali; proses-proses diskret kendali; kendali digital langsung, alihragam z.

B. Kegunaan Matakuliah

Setelah mahasiswa mempelajari, mengetahui, dan memahami semua materi dalam Dasar Sistem Kendali ini, diharapkan mahasiswa mampu:

- a. Menggunakan teknik-teknik analisis bentuk-bentuk model sistem rekayasa dan proses;
- b. Menerapkan transformasi Laplace untuk menentukan parameter-parameter sistem;
- c. Menerapkan persamaan orde-1 dan orde-2 standar untuk menentukan parameter-parameter sistem;
- d. Mengaplikasikan keahlian untuk menyelesaikan masalah-masalah di dalam rekayasakendali;
- e. Menguji kendali-kendali proses dengan menggunakan filosofi- filosofi kendali.

C. Tujuan Instruksional Umum

Mahasiswa mampu menjelaskan konsep dasar sistem kendali dan menganalisis suatu sistem kendali

D. Urutan Bahan Ajar

Untuk mempermudah mahasiswa dalam mempelajari bahan ajar ini, penulis akan menyajikan buku ajar ini dengan cara penelusuran bab per bab agar terjalin rangkaian yang baik sehingga mudah untuk dipelajari. Urutannya diawali dengan Tinjauan Umum Matakuliah yang berisikan Tinjauan Matakuliah, Kegunaan, Tujuan Instruksional Umum, dan Urutan Bahan Ajar matakuliah Dasar Sistem Kendali. Secara rinci urutan dari bab ke bab adalah sebagai berikut:

BAB I	Pengantar Sistem Kendali
BAB II	Pemodelan Sistem
BAB III	Tanggapan-tanggapan Sistem
BAB IV	Alihragam Laplace dan Model Sistem Dinamik
BAB V	Diagram Kotak dan Galat Sistem Kondisi Tunak
BAB VI	Analisis Kestabilan Sistem
BAB VII	Tanggapan Frekuensi
BAB VIII	Jenis-jenis Pengendali dan Perangkat Keras Sistem Kendali
BAB IX	Kendali Proses-proses Diskret
BAB X	Kendali Digital Langsung
BAB XI	Alihragam Z

E. Petunjuk Bagi Mahasiswa untuk mempelajari Buku Ajar ini

Bagi mahasiswa yang ingin mempelajari buku ajar ini diharapkan untuk membaca buku acuan yang dianjurkan pada setiap bab terlebih dahulu. Usahakan dapat memahami istilah- istilah yang digunakan dalam setiap bahasan pada materi pembelajaran, serta mengerjakan soal-soal untuk setiap materi pembelajaran pada matakuliah ini.

I. PENGANTAR SISTEM KENDALI

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

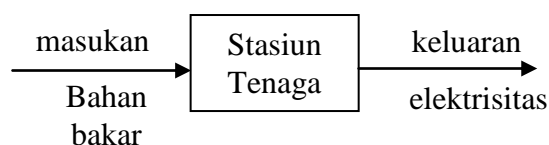
- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan istilah dalam bidang teknik sistem kendali,
- 2) Mahasiswa dapat memberikan contoh tentang aplikasi sistem kendali,
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan sistem kendali kalang terbuka dan tertutup, dan
- 4) Mahasiswa dapat menjelaskan konsep dasar perancangan sistem kendali.

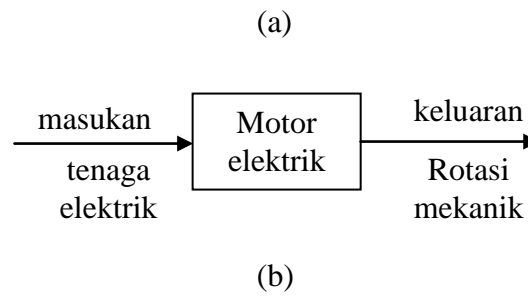
1.1. Pendahuluan

Sebelum mempelajari lebih jauh tentang pengendalian perlu dipahami pengertian tentang “sistem” dan “sistem kendali”. Sebuah **sistem** dapat digambarkan sebagai sebuah “kotak-hitam” yang mempunyai sebuah masukan dan sebuah keluaran. Di dalam kotak-hitam tersebut tidak diperhatikan apa yang ada di dalamnya tetapi bagaimanakah hubungan antara masukan dan keluaran. Jika keluaran dikendalikan dengan cara menetapkan nilai tertentu atau berubah menjadi nilai tertentu, maka hal tersebut dinamakan **sistem kendali**.

1.2. Sistem dan Model

Sistem digunakan untuk menggambarkan sekumpulan interaksi komponen di sekitar batasan khayal sehingga hanya memperhatikan masukan atau masukan-masukan dan keluaran atau keluaran-keluaran sistem tanpa melihat interaksi yang terjadi di antara komponen-komponen yang dipilih. Aspek paling penting pada sebuah sistem adalah hubungan antara masukan-masukan dengan keluaran-keluaran. Kumpulan komponen yang lengkap dan interaksinya di dalam sistem secara efektif adalah mempertimbangkan semua komponen yang diletakkan di dalam sebuah kotak dengan mempertimbangkan masukan-masukan dan keluaran-keluaran dari kotak tersebut. Gambar 1.1 memperlihatkan cara untuk merepresentasikan sebuah sistem dengan sebuah kotak yang mempunyai masukan-masukan dan keluaran-keluaran sistem dengan arah yang ditunjukkan oleh anak panah.





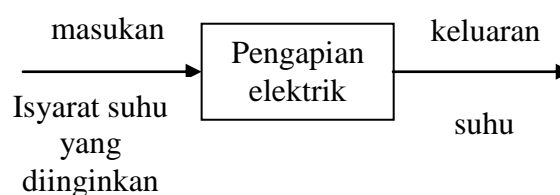
Gambar I.1 Representasi sistem dengan sebuah kotak
(a) sebuah stasiun tenaga, dan
(b) sebuah motor elektrik.

Sistem kendali adalah suatu sistem yang keluarannya dikendalikan pada suatu nilai tertentu atau untuk mengubah beberapa ketentuan yang telah ditetapkan oleh masukan ke sistem. Sebagai contoh adalah sebuah kendali-suhu pada sistem pusat pemanasan di sebuah rumah, mempunyai masukan dari termostat atau panel kendali yang telah ditentukan suhunya dan menghasilkan keluaran berupa suhu aktual. Suhu ini diatur dengan sistem kendali sehingga sesuai dengan nilai yang ditentukan oleh masukan pada sistem.

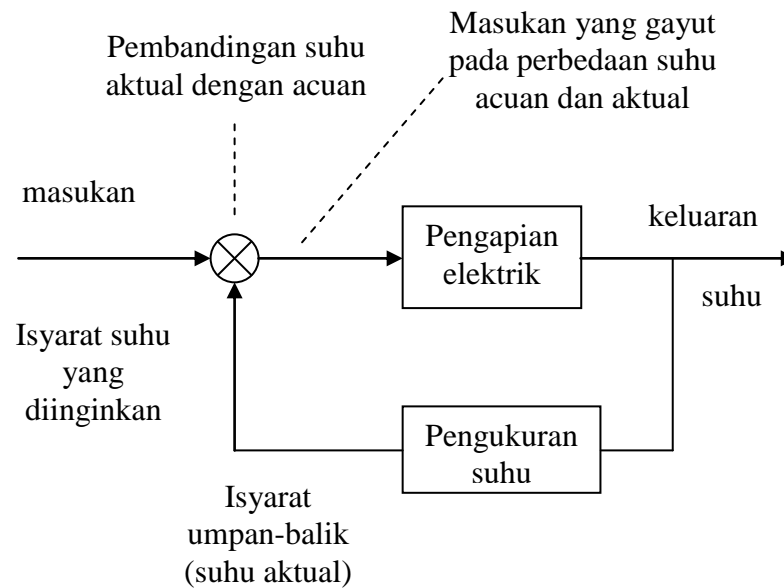
Sebuah model adalah sesuatu yang berfungsi untuk mengubah beberapa hubungan dari *setting* aktual menjadi bentuk lain, dengan catatan peralihan hanya pada hubungan yang sesuai. Sebagai contoh adalah peta hanya menggunakan alih-hubungan termasuk jarak dan lokasi, bukan alih-hubungan polusi udara atau kebisingan sebuah negara.

1.3. Sistem Kalang-Terbuka dan Kalang-Tertutup

Bentuk dasar sistem kendali dibagi menjadi dua bentuk yaitu sistem kendali kalang-terbuka dan sistem kendali kalang-tertutup. Pada sistem kalang-terbuka, masukan sistem berbasis pengalaman untuk memberikan nilai keluaran yang diinginkan, dalam hal ini keluaran tidak dapat dimodifikasi untuk mengatasi perubahan kondisi. Sedangkan pada sistem kalang-tertutup sebuah isyarat dari keluaran diumpun-balikan ke masukan dan digunakan untuk mengubah masukan sehingga keluaran dipertahankan pada kondisi ajeg dengan mengabaikan pada beberapa perubahan kondisi. Secara diagram kotak, perbedaan antara sistem kalang-terbuka dan sistem kalang-tertutup dapat dilihat pada Gambar 1.2.



(a)



(b)

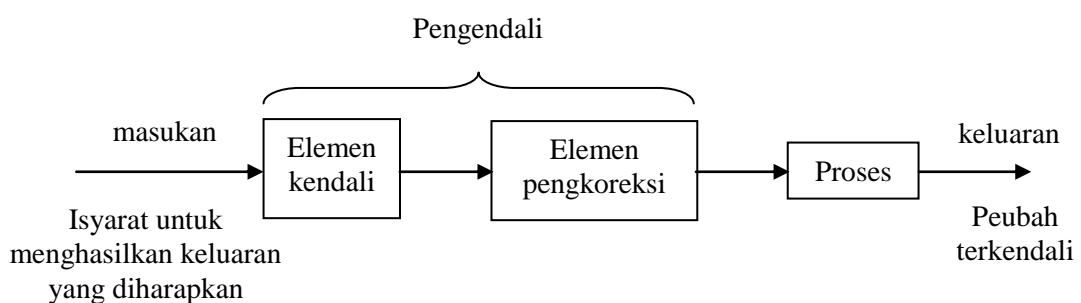
Gambar I.2 Contoh sistem kendali**(a) Sistem kendali kalang-terbuka,****(b) Sistem kendali kalang-tertutup.**

1.4. Elemen-elemen Dasar dari Sistem Kalang Terbuka

Sebuah sistem kalang-terbuka terdiri atas sejumlah subsistem dasar yang disusun seperti pada Gambar 1.3, subsistem-subsistem tersebut adalah:

- 1) *Elemen kendali*, elemen ini menentukan aksi yang akan dilakukan sebagai masukan sistem kendali,
- 2) *Elemen pengoreksi*, elemen ini menanggapi masukan dari elemen kendali dan memulai aksi untuk mengubah peubah yang dikendalikan untuk nilai acuan,
- 3) *Proses*, proses atau *plant* adalah sistem dengan suatu peubah yang dikendalikan.

Dua yang pertama dari subsistem tersebut di atas seringkali dikombina-sikan ke dalam satu elemen yang disebut “pengendali”.



Gambar I.3 Subsistem-subsistem pada sebuah sistem kendali kalang-terbuka.

Sistem kendali kalang-terbuka menggunakan elemen kendali yang mengirimkan sebuah isyarat untuk mengawali aksi setelah selang waktu atau rentetan isyarat untuk memulai rentetan aksi pada saat yang berbeda. Pengendali di beberapa sistem diperlukan piranti saklar operasi-detak.

Contoh 1:

Identifikasikan subsistem-subsistem pada pengendalian kalang-terbuka kecepatan motor.

Penyelesaian:

Peubah yang dikendalikan	- kecepatan motor
Elemen pengendali	- manusia yang membuat keputusan berdasar pada pengalaman kecepatan yang dihasilkan oleh penyetelan motor
Elemen koreksi	- saklar
Proses	- motor

1.5. Elemen-elemen Dasar dari Sistem Kalang Tertutup

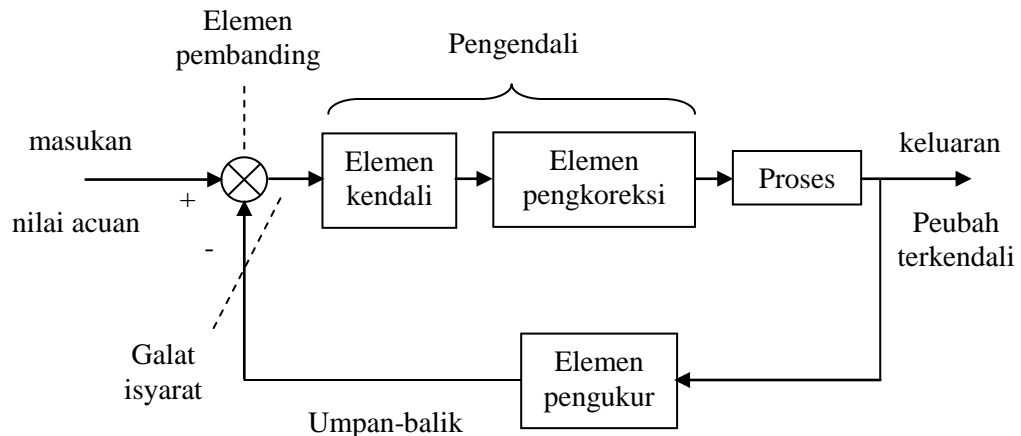
Sistem kalang-tertutup terdiri atas sejumlah subsistem-subsistem yang dirangkai seperti pada Gambar 1.4. Masukan keseluruhan dari sistem kendali adalah nilai peubah yang diberikan dan hasilnya adalah nilai aktual peubah.

- 1) *Elemen pembanding*, elemen ini membandingkan nilai peubah acuan yang dikendalikan dengan nilai yang dicapai dan menghasilkan sebuah galat isyarat yang mengindikasikan besar selisih antara nilai yang dicapai dengan nilai acuan.

$$\text{Isyarat galat} = \text{isyarat nilai acuan} - \text{isyarat nilai terukur}$$

- 2) *Elemen kendali* adalah elemen yang menentukan aksi yang harus dilakukan untuk mengatasi galat yang terjadi. Bagian pengendali seringkali menggunakan sebuah elemen yang merupakan gabungan antara elemen kendali dengan unit koreksi.
- 3) *Elemen koreksi*, elemen ini berfungsi untuk menghasilkan sebuah perubahan di dalam proses untuk menghilangkan galat dan sering pula disebut sebagai aktuator.
- 4) *Elemen proses*. proses atau *plant* adalah sistem dengan suatu peubah yang dikendalikan.

- 5) *Elemen pengukuran*, elemen ini menghasilkan sebuah isyarat yang berhubungan dengan kondisi peubah yang dikendalikan dan memberikan isyarat umpan-balik ke elemen pembanding untuk menentukan aksi jika terjadi sebuah galat.



Gambar I.4 Subsistem-subsistem pada sistem kendali kalang-tertutup.

Contoh 2:

Identifikasi subsistem-subsistem suatu sistem kendali kalang-tertutup pada kendali kecepatan poros otomatis

Penyelesaian:

Peubah yang dikendalikan	- kecepatan rotasi dari poros
Nilai acuan	- <i>setting</i> tegangan untuk acuan kecepatan
Elemen pembanding	- penguat diferensial
Isyarat galat	- perbedaan antara tegangan acuan dengan tegangan umpan-balik
Elemen kendali	- penguat
Unit koreksi	- motor
Proses	- perputaran poros
Piranti pengukur	- tacho-generator
Umpan-balik	- negatif

1.6. Keunggulan dan Kelemahan Sistem Kendali Kalang-Tertutup dibandingkan dengan Sistem Kendali Kalang-Terbuka

Keunggulan suatu sistem kendali yang mempunyai bagian umpan-balik adalah:

- 1) Lebih akurat pada pencocokan antara nilai aktual terhadap nilai peubah acuan.
- 2) Sedikit sensitif terhadap gangguan.
- 3) Sedikit sensitif terhadap perubahan karakteristik komponen.

- 4) Peningkatan kecepatan tanggapan sehingga lebar-pita, yaitu kelebihan rentang frekuensi akan segera ditanggapi.

Kelemahannya adalah:

- 1) Rugi-rugi penguatan pada fungsi alih sistem kalang-terbuka direduksi dari G ke $G/(1+GH)$ dengan kalang umpan-balik menggunakan fungsi alih H .
- 2) Lebih besar kesempatan terjadi ketakstabilan.
- 3) Sistem lebih kompleks, mahal, dan juga sering terjadi gangguan.

Sumber Kepustakaan :

- 1) Auslander, David M., Yasundo Takahshi, Michael J. Rabins. 1974. *Introducing Systems and Control*. McGraw-Hill, Inc.
- 2) Bolton, W., 1999. *Control Engineering*, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing.
- 3) Ogata, K. 1997. *Modern Control Engineering*, 3rd, Prentice Hall Inc.
- 4) Pakpahan, Sahat. 1988. *Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan*. Erlangga. Jakarta.
- 5) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. *Dasar Sistem Pengaturan*, Satya Wacana. Semarang.

Soal-soal Bab I:

- 1) Jelaskan apakah yang dimaksud dengan sistem dan sistem kendali?
- 2) Jelaskan perbedaan antara sistem kendali kalang-terbuka dengan sistem kendali kalang-tertutup!
- 3) Sistem-sistem berikut ini termasuk sistem kendali kalang-terbuka atau kalang-tertutup, jelaskan alasannya:
 - a. Sebuah ketel elektrik yang mempunyai karakteristik saklar akan mati saat air telah mendidih.
 - b. Sebuah refrigerator
 - c. Sebuah *hotplate* tanpa termostat
- 4) Identifikasikan dan jelaskan cara kerja sistem kendali kalang-tertutup berikut ini:
 - a. Sebuah kamera otomatis
 - b. Sebuah oven yang dikendalikan dengan termostat
 - c. Sebuah lampu otomatis yang akan menyala saat kondisi gelap dan mati saat kondisi terang.

II. PEMODELAN SISTEM

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan dan membuat model matematika sistem,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan dan membuat fungsi alih sistem, dan
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan dan membuat sistem mekanik, listrik, arus-zalir dan sistem termal.

2.1 Pendahuluan

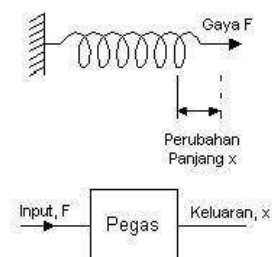
Model matematika diperlukan untuk menganalisis sistem kendali. Basis untuk beberapa model matematika diberikan dengan dasar fisik perilaku elemen sistem. Pada bab ini akan dibahas tentang pemodelan matematika sistem mekanik, elektrik, termal, dan zalir.

2.2 Pembuatan blok bangun dan model sistem mekanik

Bentuk dasar dari blok penyusun sistem mekanik adalah, pegas, *dashpot*, dan massa. Pegas menggambarkan kekakuan sistem, *dashpot* merupakan kekuatan gerak melawan, yaitu efek-efek friksi atau peredaman, dan massa adalah kelembaman atau hambatan akselerasi. Kekakuan sebuah pegas dapat digambarkan dengan hubungan antara gaya F yang digunakan untuk memanjangkan atau memendekkan sebuah pegas dan menghasilkan perubahan panjang sebesar x (Gambar 2.1):

$$F = kx \quad (2.1)$$

dengan k adalah tetapan pegas.



Gambar II.1 Blok sistem mekanik pegas.

Tabel 2.1 menunjukkan karakteristik blok bangun sistem mekanik yang menyatakan penyimpanan energi, dan energi yang hilang.

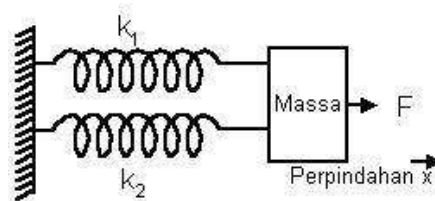
Tabel II.1 Karakteristik blok bangun sistem mekanik.

Blok Bangun	Persamaan Gerak	Energi tersimpan/daya yang hilang
Penyimpanan Energi		
Pegas translasi	$F = kx$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$
Pegas torsi	$T = k\theta$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$
Massa	$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$	$E = \frac{1}{2} mv^2$
Momen kelembaman	$T = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$	$E = \frac{1}{2} I\omega^2$
Energi yang hilang		
<i>Dashpot</i> translasi	$F = c \frac{dx}{dt}$	$P = cv^2$
Peredam rotasi	$T = c \frac{d\theta}{dt}$	$P = c\omega^2$

Contoh 1:

Soal:

Turunkan persamaan diferensial yang menggambarkan hubungan antara masukan gaya F dan keluaran dari perpindahan x untuk sistem yang terlihat pada Gambar 2.2!



Gambar II.2 Soal contoh 1.

Jawab:

$$\text{Daya bersih} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - k_1 x - k_2 x$$

sehingga

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = F$$

2.3 Pembuatan blok bangun dan model sistem elektrik

Blok penyusun dasar dari sistem elektrik pasif adalah induktor, kapasitor, dan resistor. Untuk sebuah induktor perbedaan tegangan v gayut pada laju perubahan arus (di/dt):

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (2.2)$$

dalam hal ini L adalah induktansi. Arah dari beda tegangan berlawanan dengan arah beda tegangan yang digunakan untuk menggerakkan arus melalui induktor. Persamaan dapat diubah menjadi:

$$i = \frac{1}{L} \int v dt \quad (2.3)$$

Untuk sebuah kapasitor, beda tegangan gayut pada pengisian q pada keping-keping kapasitor:

$$v = \frac{q}{C} \quad (2.4)$$

dalam hal ini C adalah kapasitansi. Arus i ke atau dari kapasitor adalah laju pada gerakan pengisian ke atau dari keping-keping kapasitor, yaitu

$$i = \frac{dq}{dt}$$

maka pengisian total q pada keping-keping yang diberikan oleh:

$$q = \int i dt$$

sehingga persamaan (2.4) menjadi:

$$v = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.5)$$

Jika $v = q/C$, maka

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}$$

dan juga, bila $i = dq/dt$, maka

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (2.6)$$

untuk sebuah resistor, beda tegangan v gayut pada arus i ,

$$v = Ri \quad (2.7)$$

dalam hal ini R adalah resistansi.

Induktor dan kapasitor menyimpan energi yang dapat dilepaskan pada waktu kemudian. Sebuah resistor tidak dapat menyimpan energi tetapi hanya menyisip. Energi yang disimpan oleh sebuah induktor sebesar

$$E = \frac{1}{2} Li^2 \quad (2.8)$$

Energi yang disimpan oleh sebuah kapasitor sebesar

$$E = \frac{1}{2} Cv^2 \quad (2.9)$$

Penyimpanan daya P oleh resistor adalah

$$P = \frac{1}{R} v^2 \quad (2.10)$$

Tabel 2.2 merupakan ringkasan persamaan sistem elektrik, dalam hal ini (a) masukan berupa arus dan keluaran beda tegangan dan (b) masukan berupa beda tegangan dan keluaran berupa arus.

Tabel II.2 Karakteristik blok bangun sistem elektrik.

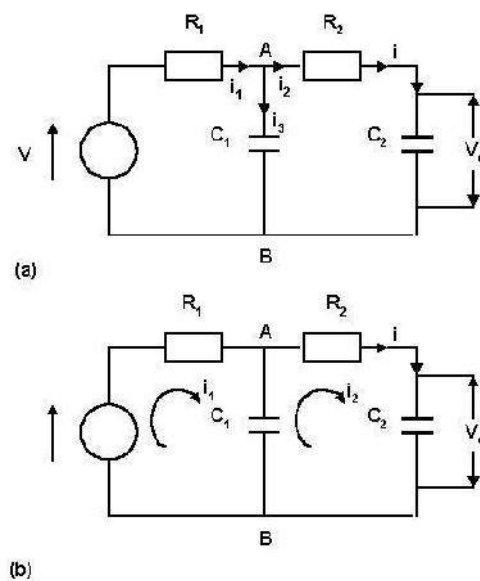
Blok bangun	Persamaan Umum		Energi/daya yang disimpan/hilang
	(a)	(b)	
Penyimpanan energi			
Induktor	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt$	$E = \frac{1}{2} Li^2$
Kapasitor	$v = \frac{1}{C} \int i dt$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Cv^2$
Energi yang			

hilang

Resistor	$v = Ri$	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$
----------	----------	-------------------	----------------------

Gambar 2.3 memperlihatkan rangkaian elektrik yang terdiri dari dua kalang. Pertama kita akan menerapkan analisis simpul untuk masalah menentukan hubungan antara beda potensial V_C antara kapasitor dan tegangan masukan v . Titik A dalam gambar 2.3 (a) diambil sebagai simpul dengan daya relatif V_A ke simpul B. Untuk simpul A

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (2.11)$$



Gambar II.3 (a) analisis simpul, (b) analisis jaring.

Beda potensial antara R_1 adalah $(v-v_A)$, dengan demikian

$$i_1 R_1 = v - v_A$$

Beda potensial antara C_1 adalah v_A , dengan besar i_3 dihitung dengan persamaan

$$i = C \frac{dv}{dt} \text{ menjadi}$$

$$i_3 = C_1 \frac{dv_A}{dt}$$

Arus i_2 memberikan beda potensial v_C antara C_2 adalah

$$i_2 = C_2 \frac{dv_C}{dt}$$

Dengan demikian kondisi untuk arus pada simpul A, persamaan (2.11) menjadi

$$\frac{v - v_A}{R_1} = C_2 \frac{dv_C}{dt} + C_1 \frac{dv_A}{dt} \quad (2.12)$$

Beda potensial antara kombinasi seri R_2 dan C_2 adalah v_A , dengan demikian

$$v_A = i_2 R_2 + v_C$$

$$v_A = R_2 C_2 \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Penurunannya memberikan

$$\frac{dv_A}{dt} = R_2 C_2 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{dv_C}{dt}$$

Dengan demikian substitusi untuk v_A dan dv_A/dt dalam persamaan (2.12) memberikan

$$\frac{v}{R_1} - \frac{R_2 C_2}{R_1} \frac{dv_C}{dt} - \frac{v_C}{R_1} = C_2 \frac{dv_C}{dt} + R_2 C_2 C_1 \frac{d^2 v_C}{dt^2} + C_1 \frac{dv_C}{dt}$$

Dengan demikian

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_C = \frac{v}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (2.13)$$

Persamaan di atas dapat juga diturunkan dengan analisis jaring dari rangkaian, seperti diperlihatkan Gambar 2.3(b). Untuk kalang dengan arus i_1 hukum Kirchoff II memberikan

$$v = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt$$

Ini dapat diatur kebalikan untuk memberikan

$$v = i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \quad (2.14)$$

Untuk kalang dengan arus i_2 hukum Kirchoff II memberikan

$$0 = i_2 R_2 + v_c + \frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt \quad (2.15)$$

Bila

$$i_2 = C_2 \frac{dv_c}{dt}$$

Dan

$$v_c = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$

kemudian persamaan (2.15) dapat ditulis menjadi

$$0 = R_2 C_2 \frac{dv_c}{dt} + v_c + \frac{C_2 v_c}{C_1} - \frac{1}{C_1} \int i_1 dt$$

Penurunan persamaan tersebut menjadi

$$0 = R_2 C_2 \frac{dv_c}{dt} + v_c + \frac{C_2 v_c}{C_1} - \frac{i_1}{C_1}$$

$$i_1 = R_2 C_2 C_1 \frac{d^2 v_c}{dt^2} + (C_1 + C_2) \frac{dv_c}{dt}$$

Bila i_1 disubstitusi ke persamaan (2.14), maka persamaan tersebut menjadi

$$v = R_1 R_2 C_2 C_1 \frac{d^2 v_c}{dt^2} + (C_1 + C_2) \frac{dv_c}{dt} + R_2 C_2 \frac{dv_c}{dt} + \frac{(C_1 + C_2)}{C_1} v_c - \frac{1}{C_1} \int i_2 dt$$

Tetapi

$$v_c = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$

Kemudian, dengan penyusunan ulang, persamaan menjadi

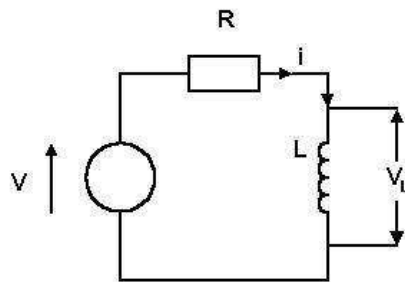
$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} v_c = \frac{v}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Hasil yang diperoleh analisis jaring ini sama dengan hasil yang diperoleh dari analisis simpul pada persamaan (2.13).

Contoh 2:

Soal:

Turunkan hubungan antara keluaran, beda potensial yang melewati induktor v_L , dan masukan v untuk rangkaian yang terlihat pada Gambar 2.4 berikut ini:



Gambar II.4 Soal contoh 2.

Jawab:

Menggunakan hukum Kirchoff II untuk kalang rangkaian, sehingga

$$v = v_R + v_L$$

Dalam hal ini v_R adalah beda potensial yang melalui resistor, dan v_L adalah beda potensial yang melalui induktor. Dengan mengacu pada persamaan (2.15), jika $v_R = iR$, maka

$$v = iR + v_L$$

$$i = \frac{1}{L} \int v_L dt$$

$$v = \frac{R}{L} \int v_L dt + v_L$$

2.4 Analogi Elektrik dan Mekanik

Pembuatan blok untuk sistem elektrik dan mekanik mempunyai beberapa persamaan yang secara ringkas terlihat pada Tabel 2.3 berikut ini:

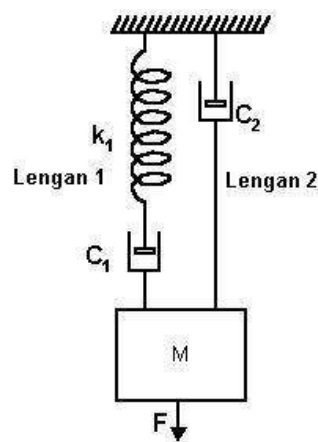
Tabel II.3 Kesetaraan mekanik dan elektrik.

Blok bangun	Persamaan Umum	Energi/daya	Tetapan kesetaraan
Energi yang disimpan			
Induktor	$i = \frac{1}{L} \int v dt$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	$\frac{1}{L}$

Pegas translasi	$F = kx = k \int v dt$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	k
Pegas torsi	$F = k\theta = k \int \omega dt$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	k
Kapasitor	$i = C \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Cv^2$	C
Massa	$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} mv^2$	m
Momen kelembaman	$T = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I \frac{d\omega}{dt}$	$E = \frac{1}{2} I\omega^2$	I
Energi yang hilang			
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R} v^2$	$\frac{1}{R}$
<i>Dashpot</i> translasi	$F = cv$	$P = cv^2$	c
Peredam rotasi	$T = c\omega$	$P = c\omega^2$	c

Contoh 3:**Soal:**

Gambarkan rangkaian elektrik yang setara dengan sistem mekanik pada Gambar 2.5.



Gambar II.5 Soal contoh 3.

Jawab:

Gaya yang sama akan bekerja pada pegas k_1 dan *dashpot* C_1 , sehingga di dalam kesetaraan rangkaian elektrik arus yang sama masuk melalui komponen setara, yaitu induktor dan resistor. Gaya netto yang bekerja pada massa adalah:

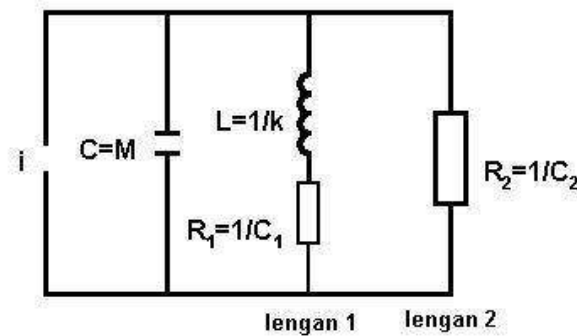
Gaya netto yang bekerja = F – daya desak lengan 1 - daya desak lengan 2 sehingga

$$F = \text{gaya netto pada massa} + \text{daya desak lengan 1} + \text{daya desak lengan 2}$$

Kesetaraan elektrik dari massa adalah kapasitor. Komponen pada lengan 2 adalah sebuah *dashpot* yang setara dengan sebuah resistor. Oleh sebab itu

$$i = \text{arus melalui kapasitor} + \text{arus melalui lengan 1} + \text{arus melalui lengan 2}$$

Kapasitor, lengan 1 dan resistansi 2 harus dalam rangkaian paralel, sehingga hasilnya adalah Gambar 2.6.



Gambar II.6 Jawab contoh 3.

2.5 Pembuatan Blok Bangun dan Model Sistem Zalir

Pada sistem aliran-zalir terdiri atas tiga komponen penyusun yang dapat disetarakan dengan sistem elektrik yaitu resistansi, kapasitansi, dan induktansi. Sebagai contoh pada Gambar 2.7 yang mempunyai masukan setara dengan arus elektrik pada sistem elektrik adalah laju volumetrik aliran q dan keluaran yang setara dengan beda potensial pada sistem elektrik, adalah perbedaan tekanan $(p_1 - p_2)$. Sistem zalir dapat dibedakan menjadi dua kategori, yaitu hidrolis (zalir berujud zalir yang tidak dapat dimampatkan) dan pneumatik (zalir berujud gas dan dapat dimampatkan).

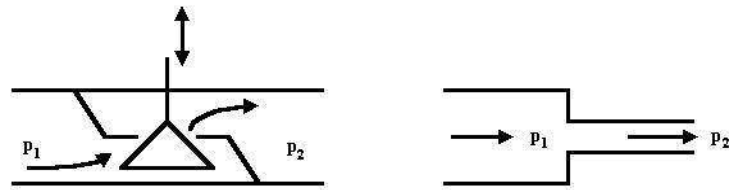


Gambar II.7 Blok bangun sistem zalir.

Resistansi hidrolis adalah resistansi aliran yang terjadi sebagai hasil dari aliran zalir memasuki katup-katup atau perubahan diameter pipa (Gambar 2.8). Hubungan antara laju volume aliran zalir q melalui elemen resistansi dan menghasilkan perbedaan tekanan $(p_1 - p_2)$ adalah

$$(p_1 - p_2) = Rq \quad (2.16)$$

dalam hal ini R adalah sebuah tetapan resistansi hidrolis. Semakin besar resistansi, semakin besar pula perbedaan tekanan untuk laju aliran yang diberikan.



Gambar II.8 Resistansi hidrolis.

Kapasitansi hidrolis adalah bagian yang digunakan untuk menggambarkan energi yang tersimpan di dalam zalir dan disimpan dalam bentuk energi potensial. Ketinggian zalir pada sebuah penampang (Gambar 2.9), yang kemudian disebut dengan tinggi tekan, adalah bentuk dari penyimpanan tersebut. Untuk sebuah kapasitansi, laju perubahan volume V di dalam penampang (dV/dt) sama dengan perbedaan antara laju volumetrik pada zalir yang dimasukkan ke dalam penampang q_1 dan laju q_2 pada saat keluar.

$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt}$$

Tetapi $V = Ah$, dalam hal ini A adalah luas penampang dari penampang dan h adalah ketinggian zalir di dalamnya, oleh karena itu

$$q_1 - q_2 = \frac{d(Ah)}{dt} = A \frac{dh}{dt}$$

Perbedaan tekanan antara masukan dan keluaran adalah p , sehingga

$$p = h\rho g$$

dalam hal ini ρ adalah kerapatan zalir dan g adalah percepatan gravitasi. Jadi

$$q_1 - q_2 = \frac{d(p/\rho g)}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt}$$

Persamaan tersebut berlaku untuk zilir yang diasumsikan tak-termampatkan, yaitu kerapatan tak berubah terhadap tekanan. Kapasitansi hidrolik didefinisikan sebagai

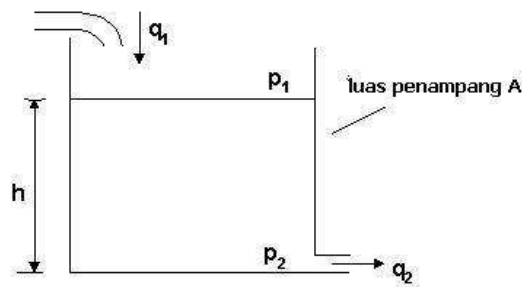
$$C = \frac{A}{\rho g} \quad (2.17)$$

Jadi

$$q_1 - q_2 = C \frac{dp}{dt} \quad (2.18)$$

Integral persamaan (2.18) memberikan

$$p = \frac{1}{C} \int (q_1 - q_2) dt \quad (2.19)$$



Gambar II.9 Kapasitansi hidrolik.

Kelembaman hidrolik setara dengan induktansi pada sistem elektrik atau sebuah pegas pada sistem mekanik. Untuk percepatan suatu zilir dan juga peningkatan kecepatan suatu gaya, kelembaman hidrolik dibutuhkan. Gambar 2.10 menunjukkan massa zilir m . Gaya netto yang bekerja pada zilir adalah

$$F_1 - F_2 = p_1 A - p_2 A = (p_1 - p_2) A$$

dalam hal ini $(p_1 - p_2)$ adalah perbedaan tekanan dan A adalah luas penampang. Gaya netto ini menyebabkan percepatan massa dengan percepatan a , dan

$$(p_1 - p_2) A = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$(p_1 - p_2) A = m \frac{dv}{dt}$$

Jika zilir mempunyai kerapatan ρ , maka $m = AL\rho$, dan

$$(p_1 - p_2)A = AL\rho \frac{dv}{dt}$$

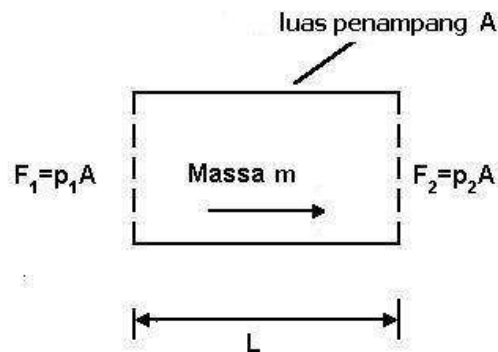
Jika laju volume aliran $q = Av$, maka

$$(p_1 - p_2)A = L\rho \frac{dq}{dt}$$

$$p_1 - p_2 = I \frac{dq}{dt} \quad (2.20)$$

Kelembaman hidrolik I didefinisikan sebagai

$$I = \frac{L\rho}{A} \quad (2.21)$$



Gambar II.10 Kelembaman hidrolik.

Sistem pneumatik pada dasarnya sama dengan sistem hidrolik, perbedaannya pada sistem pneumatik digunakan zilir berujud gas (zilir yang dapat termampatkan), sedangkan pada sistem hidrolik digunakan zilir berujud zilir (zilir yang tak-termampatkan). Kesetaraan blok bangun zilir (sistem hidrolik dan pneumatik) dan blok bangun elektrik dapat dilihat pada Tabel 2.4 berikut ini:

Tabel II.4 Kesetaraan blok bangun zilir dan elektrik.

Bentuk fisik	Persamaan Umum	Energi/daya	Tetapan kesetaraan
Energi yang disimpan			
Induktor	$i = \frac{1}{L} \int v dt$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	$\frac{1}{L}$

Kelembaman hidrolis	$q = \frac{1}{L} \int (p_1 - p_2) dt$	$E = \frac{1}{2} I q^2$	$\frac{1}{L}$
Kelembaman pneumatik	$\dot{m} = \frac{1}{L} \int (p_1 - p_2) dt$	$E = \frac{1}{2} I (\dot{m})^2$	$\frac{1}{L}$
Kapasitor	$i = C \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v^2$	C
Kapasitansi hidrolis	$q = C \frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C (p_1 - p_2)^2$	C
Kapasitansi pneumatik	$\dot{m} = C \frac{d(p_1 - p_2)}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C (p_1 - p_2)^2$	C
Energi yang hilang			
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R} v^2$	$\frac{1}{R}$
Resistansi hidrolis	$q = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$P = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)^2$	$\frac{1}{R}$
Resistansi pneumatik	$\dot{m} = \frac{(p_1 - p_2)}{R}$	$P = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)^2$	$\frac{1}{R}$

Contoh 4:**Soal:**

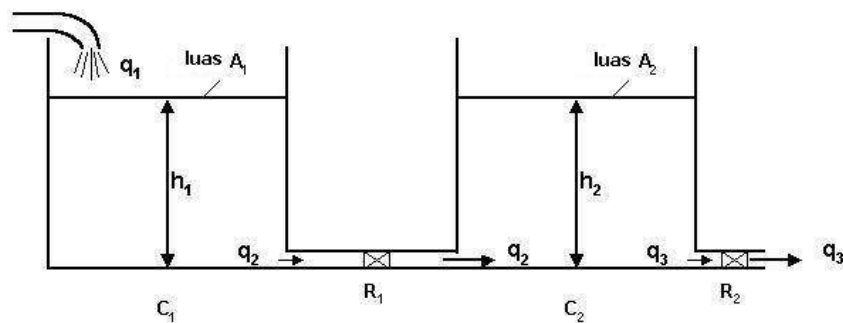
Gambar 2.11 menunjukkan sistem hidrolis. Carilah hubungan yang digambarkan oleh ketinggian zalir dalam dua penampung yang berubah terhadap waktu. Abaikan kelembaman.

Jawab:

Penampung 1 adalah kapasitor, sehingga persamaannya adalah

$$q_1 - q_2 = C_1 \frac{dp}{dt} \quad (2.22)$$

$$q_1 - q_2 = A_1 \frac{dh_1}{dt}$$



Gambar II.11 Soal contoh 4.

Laju pada saat zalir meninggalkan penampung q_2 sama dengan laju pada saat meninggalkan katup R_1 . Jadi untuk resistor persamaannya menjadi

$$p = R_1 q_2$$

Perbedaan tekanan p antara kedua sisi katup adalah $h_1 \rho g$ dan $h_2 \rho g$. Jadi

$$(h_1 - h_2) \rho g = R_1 q_2 \quad (2.23)$$

Menggunakan nilai q_2 diberikan persamaan ini dan disubstitusikan ke dalam persamaan (2.22), memberikan

$$q_1 - \frac{(h_1 - h_2) \rho g}{R_1} = A_1 \frac{dh_1}{dt} \quad (2.24)$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa ketinggian zalir dalam penampung 1 gayut pada laju aliran masukan.

Penampung 2 setara dengan kapasitor C_2

$$q_2 - q_3 = C_2 \frac{dp}{dt} \quad (2.25)$$

$$q_2 - q_3 = A_2 \frac{dh_2}{dt}$$

Laju pada saat zalir meninggalkan penampung q_3 sama dengan laju pada saat meninggalkan katup R_2 . Jadi untuk resistor persamaannya menjadi

$$p = R_2 q_3$$

Perbedaan tekanan p antara kedua sisi katup adalah $h_2 \rho g$ dan 0, diasumsikan zalir keluar menuju atmosfer. Jadi

$$h_2 \rho g = R_2 q_3 \quad (2.26)$$

Menggunakan nilai q_3 diberikan persamaan ini dan disubstitusikan ke dalam persamaan (2.25), memberikan

$$q_2 - \frac{h_2 \rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (2.27)$$

Substitusikan q_2 ke dalam persamaan (2.27) menggunakan nilai yang diperoleh dari persamaan (2.23)

$$\frac{(h_1 - h_2)\rho g}{R_1} - \frac{h_2\rho g}{R_2} = A_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (2.28)$$

Persamaan (2.28) menunjukkan bagaimana perubahan ketinggian pada penampung 2. Jadi persamaan (2.24) dan (2.28) menggambarkan variasi ketinggian di dalam dua penampung.

2.6 Pembuatan Blok Bangun dan Model Sistem Termal

Pada blok bangun sistem termal hanya terdapat dua blok bangun dasar, yaitu resistansi dan kapasitansi, serta hanya ada sebuah aliran bahang netto antara dua titik yang disebut dengan perbedaan suhu antara dua titik tersebut.

Tabel II.5 Kesetaraan blok bangun termal dan elektrik.

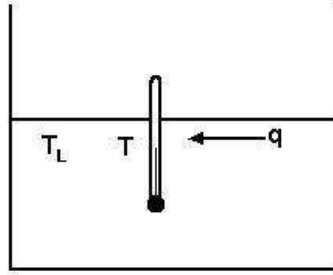
Blok bangun	Persamaan Umum	Energi/daya	Tetapan kesetaraan
Energi yang disimpan			
Kapasitor	$i = C \frac{dv}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Cv^2$	C
Kapasitansi termal	$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt}$	$E = CT$	C
Resistor	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R} v^2$	$\frac{1}{R}$
Resistansi termal	$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$	$P = q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$	$\frac{1}{R}$

Tabel 2.5 menunjukkan perbandingan antara blok bangun termal dan elektrik. Dalam hal ini sistem termal tidak mempunyai kesetaraan dengan induktor pada sistem elektrik. Pada sistem elektrik, resistor menghilangkan energi dan mengubahnya menjadi bahang. Resistansi termal tidak dapat dikatakan menghilangkan energi, akan tetapi sebagai konsekuensi perbedaan suhu disebut aliran termal.

Contoh 5:

Soal:

Sebuah termometer pada suhu T yang dimasukkan ke dalam sebuah zalir yang bersuhu T_L (Gambar 2.12). Jika resistansi termal aliran bahang dari zalir ke termometer adalah R , maka bagaimanakah kesetaraan sistem termal ini ke bentuk sistem elektrik.



Gambar II.12 Sebuah sistem termal soal contoh 5.

Jawab:

Resistansi termal aliran bahang dari zalir ke termometer adalah R , maka

$$q = \frac{T_L - T}{R} \quad (2.29)$$

dalam hal ini q adalah laju netto aliran bahang dari zalir ke termometer.

Kapasitansi termal C termometer adalah

$$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt}$$

Karena hanya ada satu aliran bahang dari zalir ke termometer, maka $q_1 = q$ dan $q_2 = 0$. Jadi

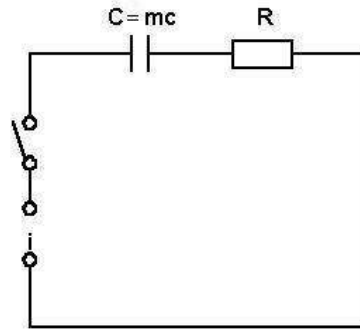
$$q = C \frac{dT}{dt} \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) ini disubstitusikan ke dalam persamaan (2.29) menjadi

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{T_L - T}{R} \quad (2.31)$$

$$RC \frac{dT}{dt} + T = T_L$$

Dari uraian tersebut, dapat ditunjukkan kesetaraan sistem termal dengan sistem elektrik pada Gambar 2.13 berikut ini



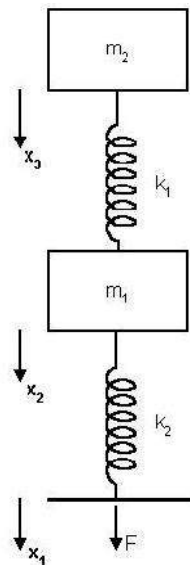
Gambar II.13 Kesetaraan sistem termal dan elektrik soal contoh 5

Sumber Kepustakaan :

- 1) Bolton, W., 1999. Control Engineering, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London.
- 2) Ogata, K. 1997. Modern Control Engineering, 3rd, Prentice Hall Inc. London.
- 3) Pakpahan, Sahat. 1988. Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan. Erlangga. Jakarta.
- 4) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. Dasar Sistem Pengaturan. Satya Wacana. Semarang.

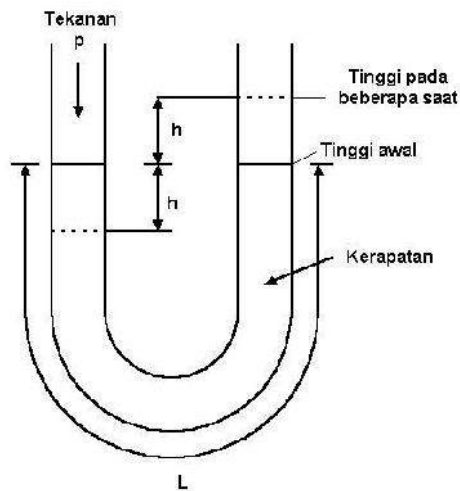
Soal-soal Bab II:

- 1) Tentukan persamaan beda yang menggambarkan gerakan massa m_1 dari sistem pada Gambar 2.14 saat sebuah gaya F digunakan.



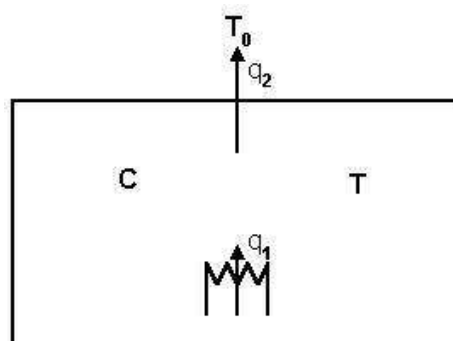
Gambar II.14 Soal nomor 1.

- 2) Gambar 2.15 menunjukkan sebuah tabung U yang berisi zaliir. Tentukan bagaimana gambaran perbedaan ketinggian antara dua kaki yang berubah terhadap waktu ketika tekanan di atas zaliir kaki 1 dinaikkan dan gambarkan diagram rangkaian yang menunjukkan kesetaraan sistem elektrik dari sistem hidrolilik ini.



Gambar II.15 Sistem hidrolilik tabung U untuk soal nomor 2.

- 3) Gambar 2.16 menunjukkan sebuah sistem termal yang terdiri atas sebuah pemanas listrik di suatu ruang. Pemanas memancarkan bahang dengan laju q_1 dan ruang kehilangan bahang dengan laju q_2 . Diasumsikan bahwa udara di dalam ruang pada suatu suhu seragam T dan tidak terdapat penyimpanan energi pada dinding ruang. Tentukan persamaan yang menggambarkan bagaimana suhu ruang tersebut berubah terhadap waktu.



Gambar II.16 Sistem termal untuk soal nomor 3.

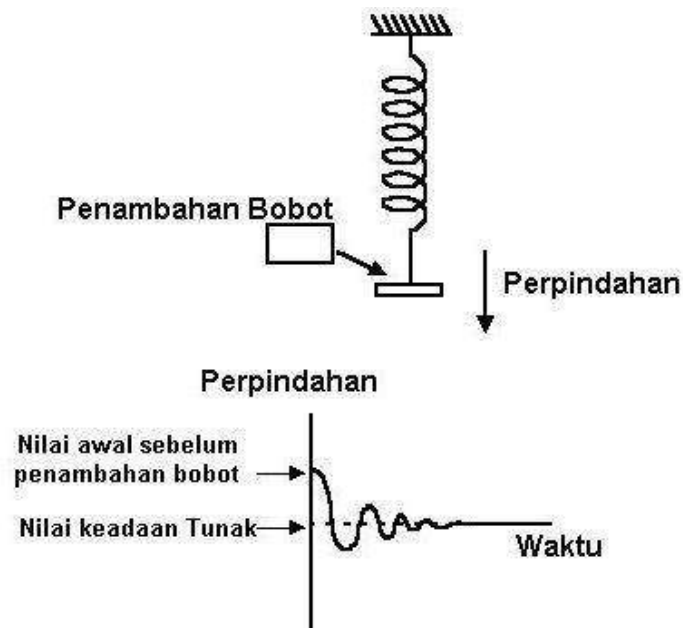
III. TANGGAPAN-TANGGAPAN SISTEM

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan dan memberikan contoh suatu sistem orde-1,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan dan memberikan contoh suatu sistem orde-2, dan
- 3) Mahasiswa dapat memecahkan penyelesaian persamaan diferensial orde-1 dan orde-2.

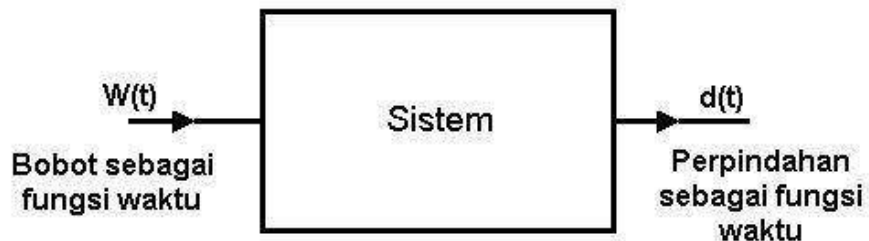
3.1 Pendahuluan

Tanggapan total dari suatu sistem kendali, atau elemen dari sebuah sistem, disusun dari dua aspek: tanggapan kondisi tunak dan tanggapan peralihan. Tanggapan peralihan adalah bagian dari tanggapan sistem yang terjadi saat terjadi perubahan masukan dan berhenti setelah interval waktu pendek. Tanggapan kondisi tunak adalah tanggapan yang terjadi setelah semua tanggapan peralihan selesai. Gambaran dari kedua tanggapan dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar III.1 Tanggapan peralihan dan keadaan tunak pada sistem pegas.

Gambar 3.2 di bawah ini menunjukkan diagram kotak dari sistem pegas pada Gambar 3.1.

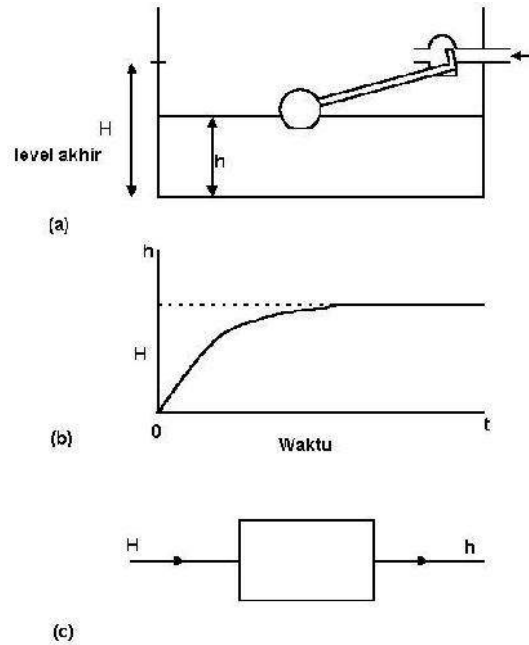


Gambar III.2 Sistem pegas.

Untuk menguraikan perilaku dari sistem secara utuh, sebuah model harus dijabarkan hubungan antara masukan-masukan dan keuaran-keluaran sebagai fungsi waktu dan untuk menjabarkan perilaku kondisi tunak dan peralihan. Satu jenis model yang digunakan untuk menjabarkan perilaku sistem kendali atau elemen sistem kendali adalah persamaan beda yang dapat diklasifikasikan sebagai orde-1, orde-2, dan seterusnya.

3.2 Sistem Orde-1

Sebuah contoh sistem orde-1 adalah pengendalian tangki air dengan pelampung (Gambar 3.3(a)).



Gambar III.3 (a) Tangki air terkendali-pelampung, (b) variasi ketinggian air terhadap waktu, (c) diagram kotak sistem (a).

Laju perubahan ketinggian adalah proporsional terhadap $(H-h)$, sehingga

$$\frac{dh}{dt} = k(H - h)$$

Dalam hal ini dh/dt adalah laju perubahan ketinggian, dan k adalah suatu tetapan. Lebih lanjut aras air meninggi di dalam tangki memperkecil selisih nilai $(H-h)$, sehingga memperkecil pula laju perubahan ketinggian terhadap waktu (dh/dt), Gambar 3.3(b) menunjukkan grafik ketinggian air terhadap waktu yang dapat dituliskan dengan persamaan

$$h = H(1 - e^{-kt})$$

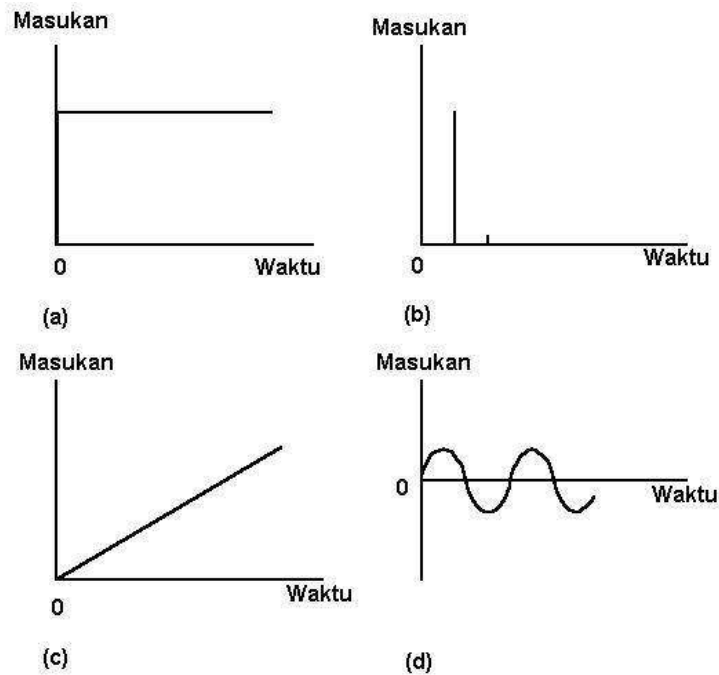
Sistem tersebut dapat dikatakan mempunyai masukan H dan keluaran h (Gambar 3.3(c)).

Persamaan orde-1 dapat dituliskan dengan bentuk umum sebagai **laju perubahan isyarat keluaran yang sebanding dengan $(b_0\theta_i - a_0\theta_o)$** , atau kadang-kadang ditulis dengan

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0\theta_o = b_0\theta_i \quad (3.1)$$

Dalam hal ini a_1 , a_0 , dan b_0 adalah tetapan-tetapan, θ_i adalah fungsi masukan, θ_o keluaran, $d\theta_o/dt$ adalah laju perubahan keluaran terhadap waktu.

Bentuk-bentuk isyarat masukan dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut ini



Gambar III.4 Isyarat-isyarat masukan: (a) undak, (b) impuls, (c) lereng, dan (d) sinusoidal.

Metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde-1 dengan menggunakan persamaan (3.1)

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i$$

Buat substitusi

$$\theta_o = u + v$$

Maka

$$a_1 \frac{d(u+v)}{dt} + a_0(u+v) = b_0 \theta_i$$

$$\left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) \left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b_0 \theta_i$$

$$\text{Jika } \left(a_1 \frac{dv}{dt} + a_0 v \right) = b_0 \theta_i \quad (3.2)$$

$$\text{Maka } \left(a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u \right) = 0 \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) memberikan nilai u tanpa masukan, sehingga nilai u disebut bagian peralihan atau tanggapan bebas dari penyelesaian. Pada persamaan (3.2) mempunyai fungsi masukan, sehingga nilai v disebut bagian tanggapan paksa dari penyelesaian. Jadi penyelesaian total adalah

$$\theta_o = u + v$$

Setelah mengetahui penyelesaian umum tersebut, langkah selanjutnya adalah melakukan coba-coba. Contoh-contoh dari bentuk penyelesaian (v) coba-coba tersebut gayut pada isyarat masukan yang diberikan (Tabel 3.1).

Tabel III.1 Bentuk penyelesaian coba-coba berdasar isyarat masukan.

Bentuk isyarat masukan (θ_i)	Bentuk penyelesaian (v)
Undak	k
$\theta_i = a + bt + ct^2$	$a + bt + ct^2$
lereng	bt
Sinusoidal (cosinusidal)	$A \sin \omega t + B \cos \omega t$

Sebagai gambaran, jika suatu sistem diberi masukan undak (Gambar 3.4(a)) terjadi pada saat $t=0$, dicoba penyelesaian yang mungkin, yaitu $v=k$, sehingga $dv/dt=0$, dan persamaan beda menjadi

$$a_0 k = b_0 \theta_i$$

$$v = \frac{b_0 \theta_i}{a_0}$$

Penyelesaian penuhnya adalah

$$\theta_o = u + v$$

$$\theta_o = A e^{-(a_0 t / a_1)} + (b_0 / a_0) \theta_i$$

Nilai tetapan A ditentukan dengan kondisi awal $\theta_o=0$ dan $t=0$, jadi

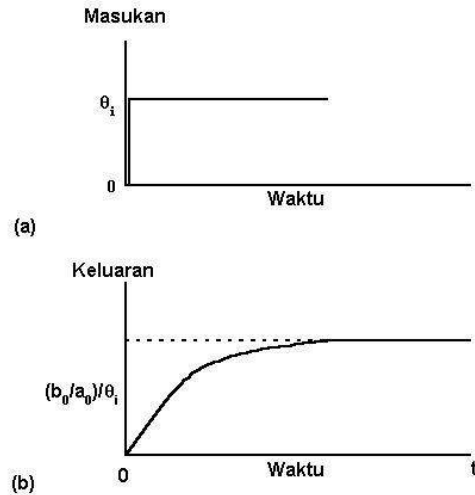
$$0 = A + (b_0 / a_0) \theta_i$$

$$A = -(b_0 / a_0) \theta_i$$

Persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \theta_o &= -(b_0 / a_0) \theta_i e^{-(a_0 t / a_1)} + -(b_0 / a_0) \theta_i \\ \theta_o &= (b_0 / a_0) \theta_i [1 - e^{-(a_0 t / a_1)}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gambar 3.5(b) menunjukkan grafik keluaran θ_o terhadap waktu untuk masukan undak pada Gambar 3.5(a).



Gambar III.5 (a) Masukan undak untuk sistem orde-1 dan (b) hasil keluaran.

Contoh 1:

Soal:

Sebuah sistem elektrik, sebuah tahanan dirangkai seri dengan kapasitor (seperti Gambar 3.6), ketika diberi masukan undak berukuran V diperoleh perbedaan tegangan pada kapasitor sebesar v_C yang diberikan dengan persamaan beda

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V$$

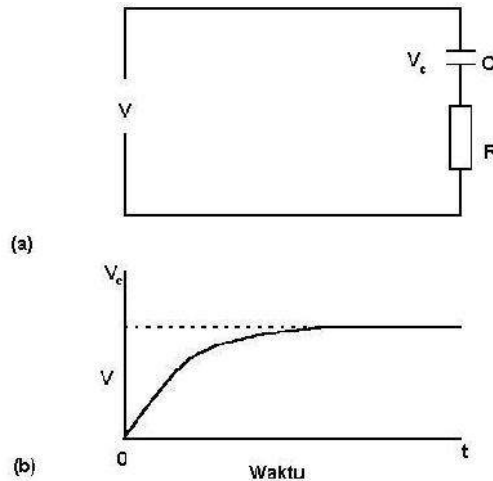
Bagaimana penyelesaian persamaan beda tersebut?

Penyelesaian:

Dari persamaan (3.1) $a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i$, di mana $a_1 = RC$, $a_0 = 1$, dan $b_0 = 1$, maka penyelesaian dari bentuk yang diberikan oleh persamaan (3.4), adalah

$$\theta_o = (b_0 / a_0) \theta_i [1 - e^{-(a_0 t / a_1)}]$$

$$v_C = V [1 - e^{-(t/RC)}]$$



Gambar III.6 (a) Rangkaian RC seri, dan (b) beda tegangan kapasitor terhadap waktu.

3.3 Sistem Orde-2

Sebuah contoh sistem orde-2 tampak pada Gambar 3.7 yang merupakan sistem pegas yang ditambah dengan peredaman. Gaya sebesar F diberikan pada massa m , aksi gaya netto pada massa adalah

$$\text{Gaya netto} = F - kx - c \frac{dx}{dt}$$

Gaya netto ini menyebabkan percepatan a pada massa (hukum Newton II), jadi

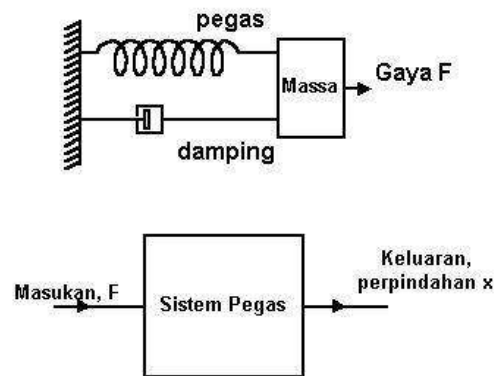
$$F - kx - c \frac{dx}{dt} = ma$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

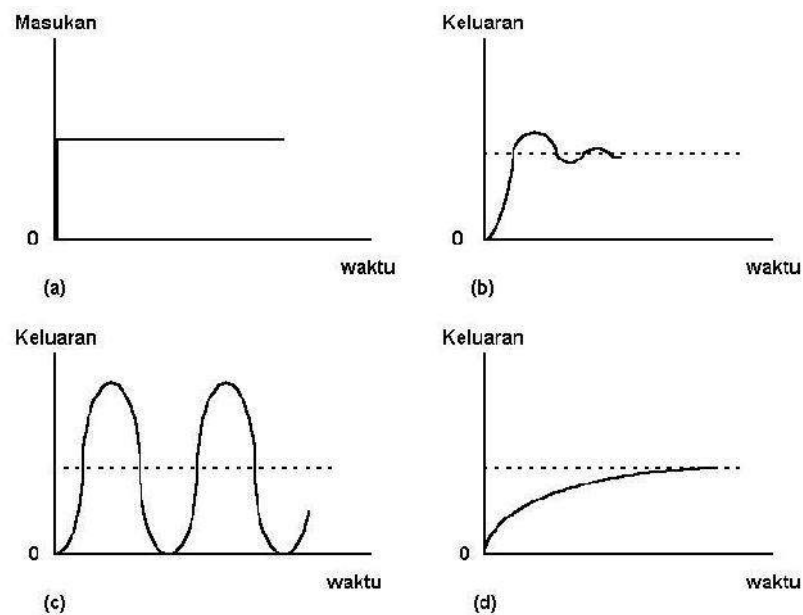
$$F - kx - c \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

Ada beberapa jenis peredaman dengan ilustrasi sederhana yang dapat dilihat pada Gambar 3.8.



Gambar III.7 Sistem pegas orde-2.



Gambar III.8 Jenis-jenis keluaran bervariasi terhadap waktu

- a) untuk masukan undak dengan
 (b) tak teredam, (c) teredam sebagian,
 (d) teredam tinggi.

Bentuk umum persamaan orde-2 adalah

$$a_2 \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i \quad (3.5)$$

Dalam hal ini b_0 , a_0 , a_1 dan a_2 adalah tetapan-tetapan. Karena pada sistem orde-2 terdapat ada peredaman, maka keluaran dapat dituliskan dengan

$$\theta_o = A \sin \omega t$$

dengan A adalah amplitude osilasi, dan ω adalah frekuensi sudut osilasi tak terredam bebas, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_o}{dt} &= A \cos \omega_n t \\ \frac{d^2\theta_o}{dt^2} &= -\omega_n^2 A \sin \omega_n t = -\omega_n^2 \theta_o \\ \frac{d^2\theta_o}{dt^2} + \omega_n^2 \theta_o &= 0\end{aligned}$$

Bentuk umum persamaan beda orde-2 adalah

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = 0 \quad (3.6)$$

Persamaan beda dapat diselesaikan dengan metode yang sama untuk persamaan beda orde-1, yaitu

$$\theta_o = u + v$$

Maka u adalah,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2u = 0 \quad (3.7)$$

Dan v adalah,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2v = \omega_n^2b_0\theta_i \quad (3.8)$$

Untuk menyelesaikan persamaan peralihan dicoba solusi dalam bentuk

$$\begin{aligned}u &= Ae^{st} \\ \frac{du}{dt} &= Ase^{st} \\ \frac{d^2u}{dt^2} &= As^2e^{st}\end{aligned}$$

Sehingga persamaan (3.8) menjadi

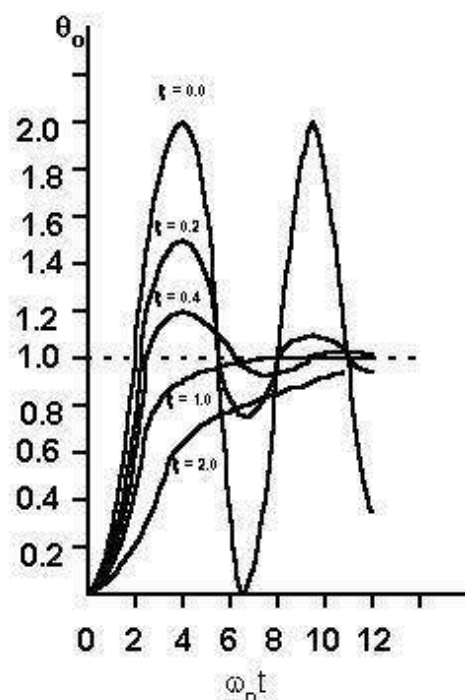
$$\begin{aligned}
As^2 e^{st} + 2\zeta\omega_n Ase^{st} + \omega_n^2 Ae^{st} &= 0 \\
s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 \\
s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)} \\
u &= A \exp s_1 t + B \exp s_2 t
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

Penyelesaian persamaan beda orde-2 untuk berbagai macam sistem peredaman dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel III.2 Penyelesaian persamaan beda orde-2 untuk berbagai macam sistem peredaman.

ζ	Macam peredaman	u	Penyelesaian lengkap persamaan beda
>1	Teredam lebih	$A \exp s_1 t + B \exp s_2 t$	$\theta_o = A \exp s_1 t + B \exp s_2 t + b_0 \theta_i$
=1	Teredam kritis	$\exp(-\zeta\omega_n t)[A \exp(j\omega t) + B \exp(-j\omega t)]$	$\theta_o = (At + B) \exp -\omega_n t + b_0 \theta_i$
<1	Teredam kurang	$\exp(-\zeta\omega_n t)[(A + B) \cos \omega t + j(A - B) \sin \omega t]$	$\theta_o = e^{(-\zeta\omega_n t)} (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + b_0 \theta_i$

Grafik yang menunjukkan bentuk keluaran sebagai fungsi waktu untuk berbagai nilai faktor peredaman ζ dapat dilihat pada Gambar 3.9.



Gambar III.9 Tanggapan sistem orde-2 untuk masukan undak.

Sumber Kepustakaan :

- 1) Auslander, David M., Yasundo Takahshi, Michael J. Rabins. 1974. *Introducing Systems and Control*. McGraw-Hill, Inc. New York.
- 2) Bolton, W., 1999. *Control Engineering*, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London.
- 3) Ogata, K. 1997. *Modern Control Engineering*, 3rd, Prentice Hall Inc. London.
- 4) Pakpahan, Sahat. 1988. *Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan*. Erlangga. Jakarta.
- 5) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. *Dasar Sistem Pengaturan*, Satya Wacana. Semarang.

Soal-soal Bab III:

- 1) Berilah contoh dari sistem yang dilihat sehari-hari bentuk persamaan beda orde-1 dan orde-2, berikan juga penyelesaiannya.
- 2) Bagaimanakah penyelesaian persamaan beda dari sistem

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

IV. ALIH-RAGAM LAPLACE DAN MODEL SISTEM DINAMIK

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat menerapkan alihragam Laplace pada sistem kendali,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan elemen-elemen sistem orde-1 dan orde-2,
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan tanggapan sistem terhadap masukan undak pada sistem orde-1 dan orde-2,
- 4) Mahasiswa dapat menjelaskan tanggapan sistem terhadap masukan tajak pada sistem orde-1 dan orde-2, dan
- 5) Mahasiswa dapat menjelaskan tanggapan sistem terhadap masukan pulsa pada sistem orde-1 dan orde-2.

4.1 Pendahuluan

Alihragam Laplace adalah suatu metode untuk mengubah persamaan beda ke dalam bentuk persamaan matematika yang lebih mudah diselesaikan. Dengan mengambil konsep pengubahan bentuk matematika ke dalam prespektif, sebuah contoh sederhana dari bentuk matematika adalah masalah perkalian menjadi bentuk yang lebih sederhana yaitu dalam bentuk logaritme (Gambar 4.1), sebagai contoh:

$$A=BC$$

Dapat diubah dengan menggunakan logaritme menjadi

$$\log A = \log BC = \log B + \log C$$

$$\log B + \log C = D$$

$$\log A = D$$

$$\therefore A = \text{antilog } D$$



Gambar IV.1 Alihragam logaritme.

Alihragam Laplace serupa dengan operasi matematika bentuk transformasi logaritme seperti terlihat pada Gambar 4.2. Perilaku rangkaian dalam kawasan waktu dialihragamkan ke kawasan- s dalam bentuk manipulasi matematika. Kemudian untuk alihragam inversi, seperti antilog, untuk mendapatkan solusi yang menggambarkan bagaimana sebuah sinyanya bervariasi terhadap waktu, yaitu perubahan dari kawasan- s kembali ke kawasan waktu.



Gambar IV.2 Alihragam Laplace.

4.2 Alihragam Laplace

Alihragam Laplace digunakan untuk menyelesaikan persamaan beda dengan cara: mengalikan setiap *term* pada persamaan beda tersebut dengan e^{-st} dan kemudian setiap *term* diintegrasikan terhadap waktu dari nol sampai tak berhingga; s adalah sebuah tetapan dengan satuan 1/waktu. Bentuk umum alihragam Laplace sebagai berikut

$$\int_0^{\infty} (\text{term}) e^{-st} dt$$

Term merupakan fungsi waktu yang ditulis sebagai $f(t)$ dengan alihragam Laplace $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.1)$$

4.2.2 Alihragam Laplace untuk suatu fungsi undak (*step*)

Penggunaan alihragam Laplace pada fungsi undak yang berukuran 1 satuan dan pada saat $t=0$ (Gambar 4.3) mempunyai persamaan:

$$f(t) = 1$$

untuk semua nilai dengan $t > 0$. Untuk nilai $t < 0$, persamaan tersebut menjadi

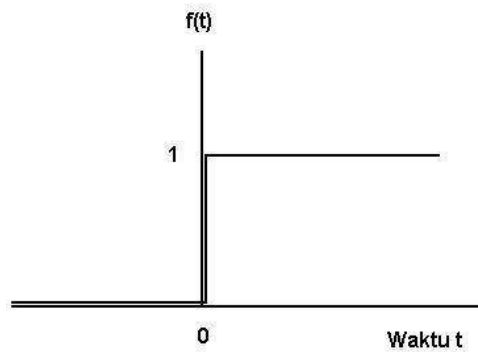
$$f(t) = 0$$

Alihragam Laplace dari fungsi undak dengan nilai-nilai >0 adalah

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt \quad \text{dan menjadi} \quad F(s) = -\frac{1}{s} \left[e^{-st} \right]_0^{\infty}$$

Untuk $t = \infty$, nilai $e^{\infty} = 0$ dan saat $t = 0$, nilai $e^0 = -1$, maka

$$F(s) = \frac{1}{s} \tag{4.2}$$



Gambar IV.3 Fungsi undak dengan ketinggian 1.

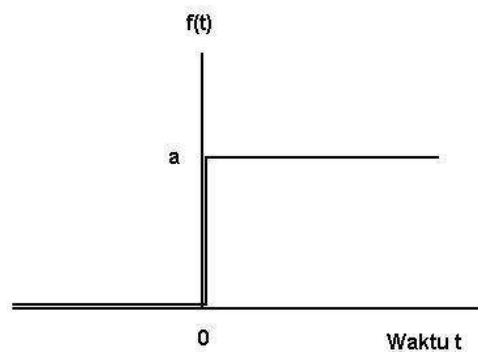
Jika fungsi undak mempunyai ketinggian a satuan (Gambar 4.4), dan untuk semua nilai $t > 0$, didapatkan

$$f(t) = a$$

Alihragam Laplace fungsi tersebut adalah

$$F(s) = \int_0^{\infty} ae^{-st} dt = a \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$F(s) = \frac{a}{s}$$



Gambar IV.4 Fungsi undak dengan ketinggian a.

Beberapa fungsi alihragam Laplace dapat dilihat pada Tabel 4.1 berikut ini:

Tabel IV.1 Alihragam Laplace.

Alihragam Laplace	Fungsi waktu	Deskripsi fungsi waktu
1		Satuan impulse
$\frac{1}{s}$		Fungsi undak
$\frac{e^{-st}}{s}$		Fungsi undak tertunda
$\frac{1 - e^{-st}}{s}$		Pulsa kotak, durasi T
$\frac{1}{s^2}$	t	Kemiringan fungsi lereng
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	Peluruhan eksponensial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	
$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	Pertumbuhan eksponensial
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{(1 - e^{-at})}{a}$	
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - e^{-at} - ate^{-at}$	
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}$	
$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 - \frac{b}{b-a}e^{-at} + \frac{b}{b-a}e^{-bt}$	
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-a)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	

$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	Gelombang sinus
Alihragam Laplace	Fungsi waktu	Deskripsi fungsi waktu
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	Gelombang cosinus
$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	Gelombang sinus teredam
$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	Gelombang cosinus teredam
$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$	
$\frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$	$\frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin[\omega\sqrt{1-\zeta^2}t]$	
$\frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$	$1 - \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin[\omega\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi]$	
Dengan $\zeta < 1$	Dengan $\zeta = \cos\phi$	

Contoh 1:**Soal:**

Dengan menggunakan Tabel 4.1, tentukan alihragam Laplace untuk:

- 1) Tegangan undak berukuran 4V yang dimulai pada $t=0$.
- 2) Tegangan undak berukuran 4V yang dimulai pada $t=2s$.
- 3) Tegangan tajak yang dimulai pada $t=0$ dan meningkat dengan laju 3V/s.
- 4) Tegangan tajak yang dimulai pada $t=2s$ dan meningkat dengan laju 3V/s.
- 5) Tegangan impuls berukuran 4V yang dimulai pada $t=3s$.
- 6) Tegangan sinusoidal dengan amplitudo 2V dan frekuensi anguler 10Hz.

Penyelesaian:

Gambar 4.5 berikut menunjukkan bentuk dari keenam fungsi tersebut, dan alihragam masing-masing fungsi adalah:

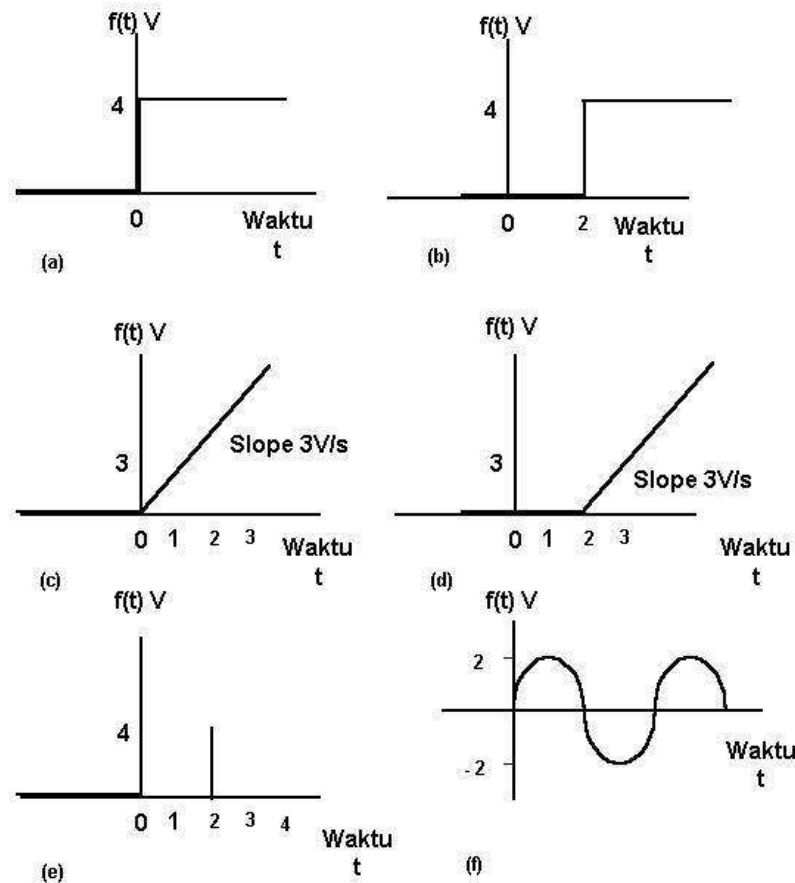
- 1) $F(s) = \frac{4}{s}$
- 2) $F(s) = \frac{a}{s} e^{-sT} = \frac{4}{s} e^{-2T}$

$$3) F(s) = \frac{a}{s^2} = \frac{3}{s^2}$$

$$4) F(s) = \frac{ae^{-T/s}}{s^2} = \frac{3e^{-2s}}{s^2}$$

$$F(s) = 4e^{-3/s}$$

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{20}{s^2 + 100}$$



Gambar IV.5 (a) Fungsi undak, (b) fungsi undak tertunda, (c) fungsi tanjak, (d) fungsi tanjak tertunda, (e) impuls tertunda, (f) fungsi sinusoidal.

Contoh 2:

Soal:

Untuk masukan tegangan undak berukuran V pada $t=0$ masuk rangkaian seri CR , persamaan beda untuk beda potensial melawan kapasitor v_C diberikan oleh

$$V = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C, \quad v_C=0 \text{ pada } t=0. \text{ Gunakan alihragam Laplace untuk}$$

menyelesaikan persoalan tersebut.

Penyelesaian:

Alihragam Laplace dari suatu masukan undak adalah $1/s$ dan untuk satu ukuran V adalah V/s . Alihragam Laplace untuk $dv_c/dt = [sV_c(s) - 0]$. Jadi alihragam Laplace untuk $RCdv_c/dt = RCsV_c(s)$. Alihragam Laplace $v_c = V_c(s)$, sehingga alihragam untuk fungsi keseluruhan adalah

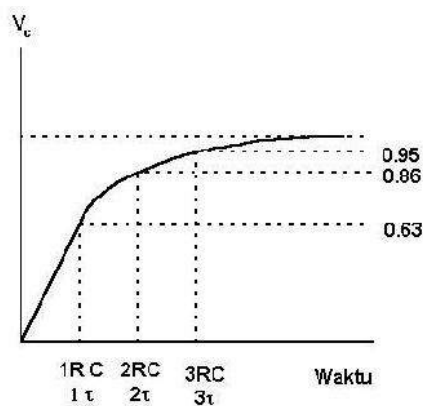
$$\frac{V}{s} = RCsV_c(s) + V_c(s)$$

$$V_c(s) = \frac{V}{(RCs+1)s} = \frac{V(1/RC)}{[s+(1/RC)]s}$$

Alihragam Laplace untuk fungsi $(1 - e^{-at}) = \frac{a}{(s+a)s}$, dengan $a=(1/RC)$, sehingga

$$v_c = V(1 - e^{-t/RC})$$

Gambar 4.6 di bawah ini menunjukkan persamaan tersebut.



Gambar IV.6 Grafik contoh soal nomor 2.

4.3 Fungsi alih untuk elemen-elemen dinamik

Suatu sistem yang mempunyai masukan θ_i dihubungkan dengan keluaran θ_o oleh persamaan beda

$$a_2 \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_1 \theta_i$$

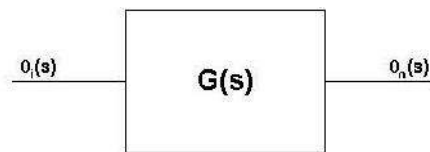
dalam hal ini a_2 , a_1 , a_0 , dan b_1 adalah tetapan. Jika semua kondisi awal=0, maka alihragam Laplace dari persamaan tersebut

$$a_2 s^2 \theta_o(s) + a_1 s \theta_o(s) + a_0 \theta_o(s) = b_1 \theta_i(s)$$

Fungsi alih sistem dinamik adalah perbandingan antara alihragam Laplace peubah keluaran dengan peubah masukan yang dinyatakan sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_1}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (4.3)$$

dan dapat digambarkan dengan diagram kotak seperti Gambar 4.7.



Gambar IV.7 Representasi diagram kotak.

Contoh 3:

Soal:

Tuliskan fungsi alih sistem berikut ini;

- 1) Suatu sistem pegas-*dashpot*-massa dengan masukan F dan keluaran x :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

- 2) Sebuah rangkaian RCL dengan masukan v dan keluaran v_C

$$v = RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C$$

Penyelesaian:

- 3) Alihragam Laplace persamaan dengan semua kondisi awal = 0 adalah:

$$ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

Sehingga

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

- 4) Alihragam Laplace persamaan dengan semua kondisi awal = 0 adalah:

$$RCsV_C(s) + LCs^2V_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

Sehingga

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

4.4 Elemen-elemen orde-1 dan orde-2

Orde suatu elemen atau sistem dapat didefinisikan sebagai daya tertinggi dari s pada penyebut. Untuk elemen orde-satu mempunyai bentuk persamaan beda:

$$a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i \quad (4.4)$$

Alihragam Laplace dari persamaan (4.4) jika $\theta_o=0$ pada $t=0$ adalah

$$a_1 s \times \theta_o(s) + a_0 s \times \theta_o(s) = b_0 \times \theta_i(s)$$

Sehingga fungsi alih fungsi tersebut adalah

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}, \text{ dapat ditulis } G(s) = \frac{b_0/a_0}{(a_1/a_0)s + 1} \quad (4.5)$$

Bila b_0/a_0 adalah fungsi alih kondisi tunak dari sistem yang dilambangkan G , dan a_1/a_0 adalah tetapan waktu τ , maka

$$G(s) = \frac{G}{\tau s + 1} \quad (4.6)$$

Persamaan 4.6 di atas merupakan bentuk umum yang menyatakan hubungan antara masukan-keluaran di kawasan s untuk sistem orde-satu.

Hubungan antara masukan-keluaran (θ_i - θ_o) untuk sistem orde-dua digambarkan dengan persamaan beda

$$a_2 \frac{d^2 \theta_o}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_o}{dt} + a_0 \theta_o = b_0 \theta_i \quad (4.7)$$

dalam hal ini b_0 , a_0 , a_1 , dan a_2 adalah tetapan. Jika pada $t=0$ sistem mempunyai $\theta_o=0$ dan $d\theta_o/dt=0$, maka alihragam Laplace-nya adalah

$$a_2 s^2 \times \theta_o(s) + a_1 s \times \theta_o(s) + a_0 s \times \theta_o(s) = b_0 \times \theta_i(s)$$

sehingga

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dibagi dengan a_0 menjadi

$$G(s) = \frac{(b_0 / a_0)}{(a_2 / a_0)s^2 + (a_1 / a_0)s + 1} \quad (4.8)$$

Persamaan beda orde-dua dapat ditulis dengan frekuensi natural ω_n dan rasio peredaman ζ , yaitu

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_o}{dt} + \omega_n^2\theta_o = b_0\omega_n^2\theta_i \quad (4.9)$$

Alihragam Laplace dari persamaan (4.9)

$$s^2\theta_o(s) + 2\zeta\omega_n s\theta_o(s) + \omega_n^2\theta_o(s) = b_0\omega_n^2\theta_i(s)$$

sehingga

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.10)$$

Persamaan 4.6 di atas merupakan bentuk umum yang menyatakan hubungan antara masukan-keluaran di kawasan s untuk sistem orde-dua.

4.5 Tanggapan sistem terhadap masukan undak

Alihragam Laplace untuk satu satuan masukan undak pada $t=0$ adalah $1/s$. Sehingga, untuk masukan serupa menghasilkan alihragam Laplace keluaran:

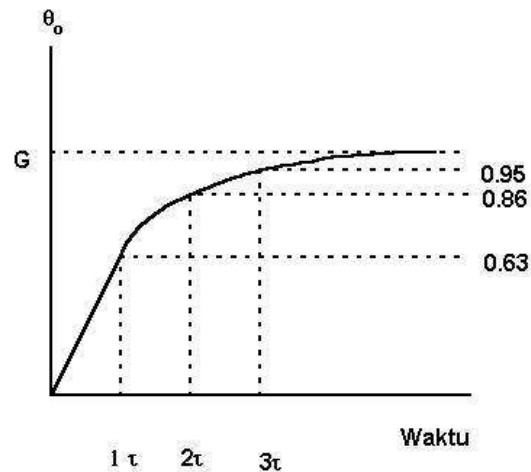
$$\frac{G}{\tau s + 1} \times \frac{1}{s} = G \times \frac{(1/\tau)}{s[s + (1/\tau)]}$$

Jika $a = (1/\tau)$, maka untuk masukan undak

$$\theta_o = G[1 - e^{-t/\tau}] \quad (4.11)$$

Gambar 4.8 adalah grafik untuk persamaan (4.11). Jika undak berukuran A , maka

$$\theta_o = AG[1 - e^{-t/\tau}] \quad (4.12)$$



Gambar IV.8 $\theta_o = G[1 - e^{-t/\tau}]$ untuk masukan undak.

Sistem orde-dua pada kawasan s mempunyai bentuk

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \times \theta_i(s) \quad (4.13)$$

Untuk sistem orde-dua dengan masukan fungsi undak $\theta_i(s) = 1/s$, maka

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (4.14)$$

Yang dapat ditulis sebagai,

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)s} \quad (4.15)$$

dalam hal ini m_1 dan m_2 adalah akar-akar dari persamaan (4.15)

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Dengan menggunakan rumus *abc* untuk mencari akar-akarnya, diperoleh:

$$m_1 = -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)} \quad (4.16)$$

$$m_2 = -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)} \quad (4.17)$$

Jenis tanggapan yang terjadi, yaitu alihragam inversi, gayut pada nilai faktor peredaman ζ . Jika $\zeta > 1$, maka $\sqrt{(\zeta^2 - 1)}$ adalah bilangan real dan sistem dikatakan teredam lebih. Hal ini berarti kedua akar adalah real.

Menggunakan persamaan fraksi parsial (4.15) dapat diubah menjadi sebagai

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s} + \frac{A}{s - m_1} + \frac{B}{s - m_2} \quad (4.18)$$

dengan

$$A = -\frac{b_0 \zeta}{2\sqrt{(\zeta^2 - 1)}} - \frac{b_0}{2}$$

$$B = \frac{b_0 \zeta}{2\sqrt{(\zeta^2 - 1)}} - \frac{b_0}{2}$$

Tanggapan sistem adalah alihragam inversi dari persamaan (4.18). Alihragam inversi untuk $1/s=1$, untuk $A/(s - m_1)$ adalah $Ae^{m_1 t}$, dan untuk $B/(s - m_2)$ adalah $Be^{m_2 t}$, maka

$$\theta_o = 1 + \left[-\frac{b_0 \zeta}{2\sqrt{(\zeta^2 - 1)}} - \frac{b_0}{2} \right] e^{\left\{ \left[-\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)} \right] t \right\}} + \left[\frac{b_0 \zeta}{2\sqrt{(\zeta^2 - 1)}} - \frac{b_0}{2} \right] e^{\left\{ \left[-\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)} \right] t \right\}}$$

Jika $\zeta=1$, maka sistem dikatakan pada kondisi teredam kritis, dengan $m_1 = m_2 = -\zeta\omega_n$, sehingga persamaan (4.15) menjadi

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s}$$

Alihragam inversinya berdasar Tabel 4.1 diperoleh

$$\theta_o = b_0 [1 - e^{-\omega_n t}] - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

Jika $\zeta < 1$ dalam hal ini akar-akarnya bilangan kompleks dan sistem dikatakan teredam bawah, maka alihragam inversi untuk kondisi ini adalah

$$\theta_0(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$\theta_o = b_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi] \right]$$

dalam hal ini $\cos \phi = \zeta$.

Jika $\zeta=0$, yaitu sistem tak teredam, maka

$$\theta_o = b_0 \{1 - \sin \omega_n t\}$$

jadi keluaran berosilasi dengan frekuensi tak teredam ω_n .

4.6 Tanggapan sistem terhadap masukan tanjak/lereng

Untuk sistem orde-satu yang diberi masukan fungsi tanjak satu satuan pada $t=0$ adalah $1/s^2$. Sehingga alihragam Laplace keluarannya adalah:

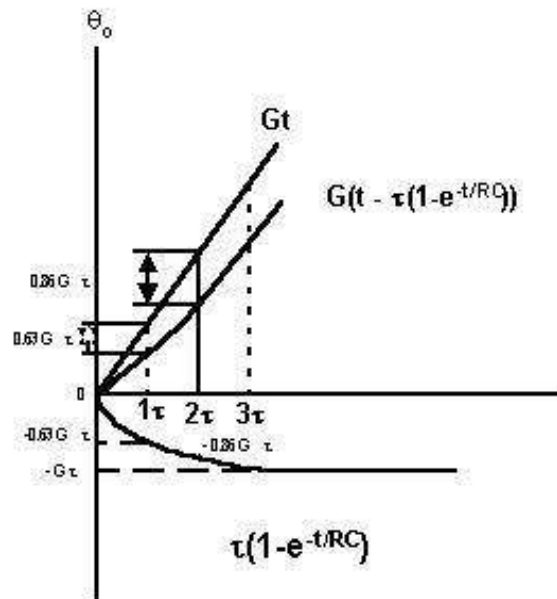
$$\frac{G}{(\tau s + 1)s^2} = G \times \frac{(1/\tau)}{[s + (1/\tau)]s^2}$$

Jadi keluaran θ_o untuk sebuah satuan lereng tanjak diberikan oleh

$$\theta_o = G[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] \quad (4.19)$$

Gambar 4.9 menunjukkan grafik persamaan 4.19. Untuk suatu masukan tanjak dengan kemiringan A , yaitu $\theta_i = A$, maka

$$\theta_o = GA[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] \quad (4.20)$$



Gambar IV.9 $\theta_o = G[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]$ untuk masukan tanjak.

Untuk sistem orde-dua yang diberi masukan fungsi tanjak, maka alihragam Laplace keluarannya adalah:

$$= G(s) \times \text{alihragam Laplace masukan}$$

Sehingga bentuk umum dari sistem orde-dua pada kawasan s untuk masukan fungsi tanjak, adalah

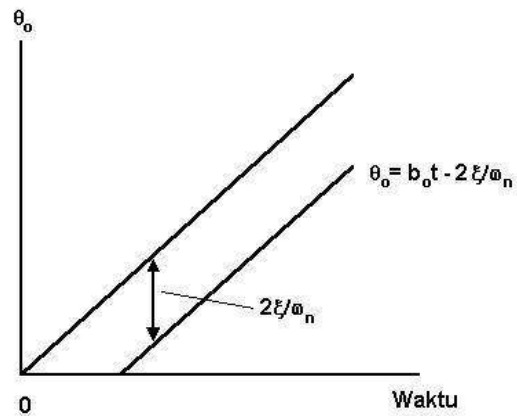
$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2) s^2} \quad (4.21)$$

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2) s^2} \quad (4.22)$$

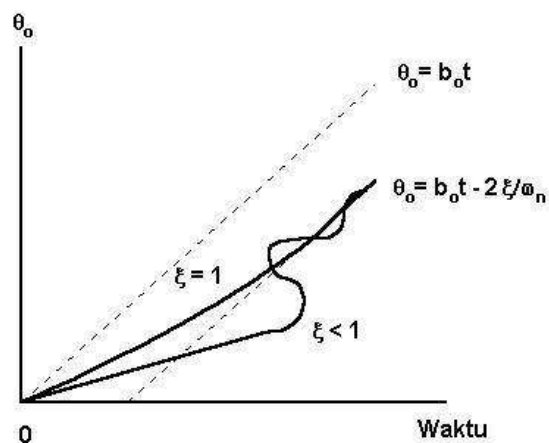
Dengan m_1 dan m_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, yang besarnya adalah

$$m_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

Gambar 4.20 menggambarkan tanggapan kondisi tunak dari sistem orde-dua dengan masukan tanjak, dan Gambar 4.21 menggambarkan tanggapan kondisi tunak ditambah transien dari sistem orde-dua dengan masukan tanjak.



Gambar IV.10 Tanggapan kondisi tunak dari sistem orde-dua untuk masukan tanjak.



Gambar IV.11 Tanggapan kondisi tunak dan transien dari sistem orde-dua untuk masukan tanjak.

4.7 Tanggapan sistem terhadap masukan impuls

Untuk sistem orde-satu yang diberi masukan fungsi impuls satu satuan pada $t=0$ adalah 1. Sehingga alihragam Laplace keluarannya adalah:

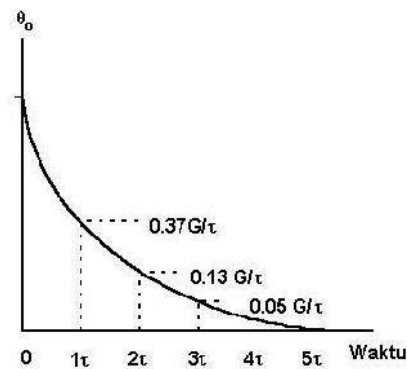
$$\frac{G}{(zs + 1)} \times 1 = G \times \frac{(1/\tau)}{[s + (1/\tau)]}$$

Jadi keluaran θ_o untuk sebuah satuan lereng tanjak diberikan oleh

$$\theta_o = G(1/\tau)e^{-t/\tau} \quad (4.23)$$

Gambar 4.22 menunjukkan grafik persamaan 4.23. Untuk suatu masukan tanjak dengan kemiringan A, yaitu $\theta_i = A$, maka

$$\theta_o = GA(1/\tau)e^{-t/\tau} \quad (4.24)$$



Gambar IV.12 $\theta_o = G(1/\tau)e^{-t/\tau}$ untuk satuan impuls pada $t = 0$.

Untuk sistem orde-dua yang diberi masukan fungsi tanjak, maka alihragam Laplace keluarannya adalah:

$$= G(s) \times \text{alihragam Laplace masukan}$$

Sehingga bentuk umum dari sistem orde-dua pada kawasan s untuk masukan fungsi impuls, adalah

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \times \theta_i(s) \quad (4.25)$$

Untuk satuan impuls pada $t = 0$, $\theta_i(s) = 1$, maka

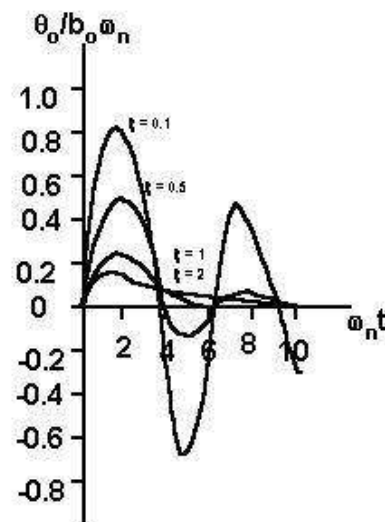
$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.26)$$

$$\theta_o(s) = \frac{b_0 \omega_n^2}{(s - m_1)(s - m_2)} \quad (4.27)$$

dalam hal ini m_1 dan m_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, yang besarnya adalah

$$m_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\zeta^2 - 1)}$$

Bentuk tanggapan yang terjadi gayut pada akar-akar m_1 dan m_2 , real atau kompleks, $\zeta >$ atau $<$ 1. Jika $\zeta >$ 1 akar-akar real dan tidak sama dan hasilnya meningkat pada keluaran yang diikuti dengan sebuah penurunan perlahan untuk kembali ke nilai nol (Gambar 4.23). Jika $\zeta = 1$ akar-akar real dan sama dan sistem teredam kritis, yang berarti pada awal proses keluaran meningkat dan berakhir ke nilai nol pada waktu minimum tanpa osilasi. Jika $\zeta <$ 1 akar-akar adalah penjumlahan kompleks dan mengikuti keluaran awal meningkat serta berosilasi dan seterusnya dan pada akhirnya keluaran mendekati nilai nol.



Gambar IV.13 Tanggapan sistem orde-dua untuk satuan impuls pada $t = 0$.

Contoh 4:

Soal:

Sebuah lengan robot mempunyai fungsi alih sebagai berikut

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)^2}$$

Carilah hubungan antara keluaran, yaitu posisi lengan, dan waktu jika lengan adalah subyek terhadap masukan satuan tanjak.

Penyelesaian:

Keluaran adalah:

$$\theta_o(s) = \frac{K}{s^2(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{(s+3)^2}$$

Sehingga

$$As(s+3)^2 + B(s+3)^2 + Cs^2(s+3) + Ds^2 = K$$

Sehingga, $A = \frac{-2K}{27}$, $B = \frac{K}{9}$, $C = \frac{2K}{27}$, $D = \frac{K}{9}$

$$\theta_o(s) = \frac{-2K}{27s} + \frac{K}{9s^2} + \frac{2K}{27(s+3)} + \frac{K}{9(s+3)^2}$$

Dengan menggunakan tabel 4.1 diperoleh:

$$\theta_o(s) = \frac{-2K}{27} + \frac{K}{9}t + \frac{2K}{27}e^{-3t} + \frac{K}{9}te^{-3t}$$

Sumber Kepustakaan :

- 1) Auslander, David M., Yasundo Takahshi, Michael J. Rabins. 1974. *Introducing Systems and Control*. McGraw-Hill, Inc. New York.
- 2) Bolton, W., 1999. *Control Engineering, 2nd*, Addison Wisley Longman Publishing. London.
- 3) Ogata, K. 1997. *Modern Control Engineering, 3rd*, Prentice Hall Inc. London.
- 4) Pakpahan, Sahat. 1988. *Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan*. Erlangga. Jakarta.
- 5) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. *Dasar Sistem Pengaturan, Satya Wacana*. Semarang.

Soal-soal Bab 4:

- 1) Gunakan Tabel 4.1 untuk menentukan alihragam Laplace
 - a. Tegangan undak berukuran 6V yang dimulai pada $t=3s$.
 - b. Tegangan tanjak 6V/s yang dimulai pada $t=3s$.
 - c. Impuls berukuran 6V pada $t=3s$.
 - d. $5e^{-2t}$
 - e. $2\frac{dx}{dt} + 5x = 6$ dengan $x=0$ pada $t=0$

- 2) Jelaskan perilaku sistem orde-dua bila subyek mempunyai masukan fungsi:
- a. undak
 - b. tanjak/lereng
 - c. Impuls
- 3) Bagaimana tanggapan sistem dengan fungsi alih berikut, dan masukan berupa fungsi impuls?

$$G(s) = \frac{2}{(s+3)(s+4)}$$

V. DIAGRAM KOTAK dan GALAT SISTEM KONDISI TUNAK

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat merancang diagram kotak,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan diagram kotak,
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan galat sistem dalam kondisi tunak, dan
- 4) Mahasiswa dapat menjelaskan galat sistem dalam kondisi tunak untuk masukan undak, tajak dan parabolik

5.1 Pendahuluan

Diagram kotak pada sistem kendali merupakan penggambaran hubungan antarsubsystem dalam suatu sistem. Di bidang pengendalian, hal yang sangat perlu diperhatikan adalah fungsi alih (perbandingan antara fungsi masukan dengan fungsi keluaran) dari masing-masing subsystem tersebut, jadi apabila terdapat satu subsystem yang belum diketahui fungsinya, maka perlu dicari terlebih dahulu fungsi alih subsystem tersebut sebelum menganalisis sistem kendali tersebut.

5.2 Prosedur menggambarkan diagram kotak

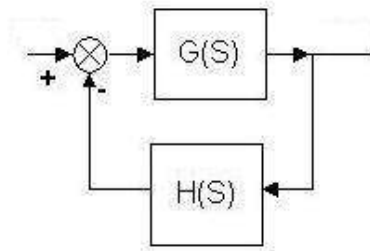
Sebelum menggambarkan diagram kotak sistem kendali, terlebih dahulu perlu diketahui bagian-bagian penyusun diagram kotak tersebut (Gambar 5.1) dan fungsi dari masing-masing bagian, yaitu

- a. Tanda panah, berfungsi untuk menunjukkan arah aliran isyarat.
- b. Titik penjumlahan, berfungsi untuk menjumlahkan secara aljabar isyarat-isyarat yang masuk ke titik tersebut.



Gambar V.1 Bagian-bagian dari diagram kotak.

- c. Titik pencabangan (*take-off point*), adalah titik awal mula proses pencabangan.
- d. Kotak, bersama-sama dengan fungsi alih menggambarkan subsistem dari sistem kendali.



Gambar V.2 Lintasan isyarat.

Gambar 5.2 menunjukkan diagram kotak sistem kendali sederhana yang terdiri atas bagian lintasan maju (terdapat elemen umpan maju $G(s)$) dan bagian lintasan balik (terdapat elemen umpan balik $H(s)$).

5.3 Prosedur mereduksi diagram kotak

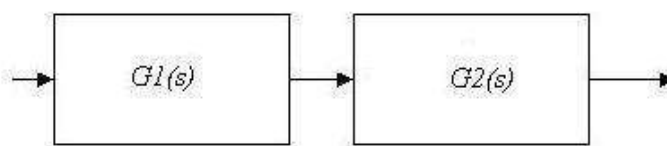
Diagram kotak dengan kotak disusun secara seri

Jika sebuah sistem terdiri atas sejumlah elemen yang disusun secara seri (Gambar 5.3), maka fungsi alih $G(s)$ sistemnya adalah perkalian dari masing-masing fungsi alih elemen penyusun, yaitu

$$\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\theta_{o1}(s)}{\theta_i(s)} \times \frac{\theta_{o2}(s)}{\theta_i(s)} \times \frac{\theta_{o3}(s)}{\theta_i(s)} \times \dots \quad (5.1)$$

$$G(s) = G_1(s) \times G_2(s) \times G_3(s) \times \dots$$

Jadi sejumlah kotak tersusun seri dapat digantikan oleh satu kotak saja dengan fungsi alih $G(s)$.



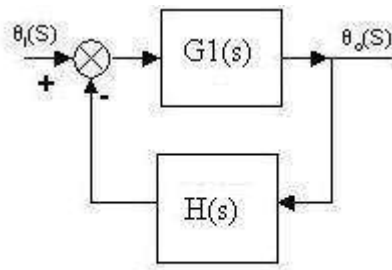
Gambar V.3 Sistem dengan elemen yang disusun secara seri.

Kotak dengan kalang umpan balik

Sistem kendali kalang umpan balik (Gambar 5.4) mempunyai bentuk umum fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)H(s)} \quad (5.2)$$

Tanda (+) pada penyebut digunakan bila sistem merupakan sistem kendali umpan balik negatif (-), dan sebaliknya tanda (-) pada penyebut digunakan bila sistem merupakan sistem kendali umpan balik positif (+).



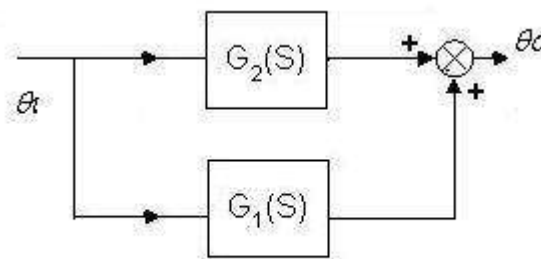
Gambar V.4 Sistem kendali dengan kalang umpan balik.

Diagram kotak dengan kotak disusun secara paralel

Gambar 5.5 merupakan penggambaran sistem kendali kalang umpan maju yang mempunyai fungsi alih sebagai berikut:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (5.3)$$

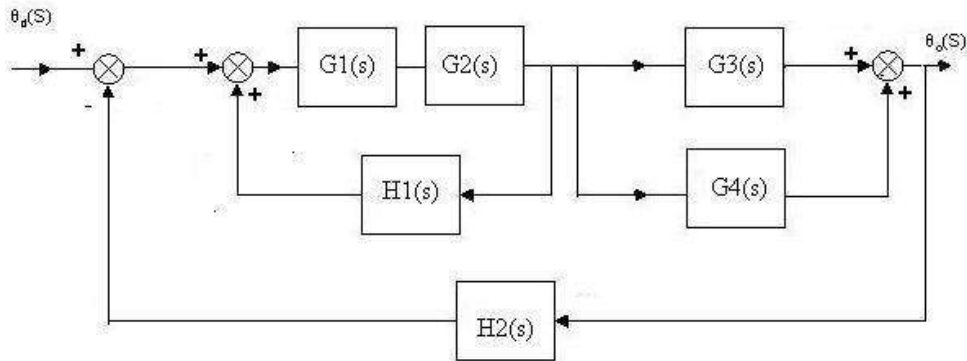
Tanda + dan - pada persamaan (5.3) gayut pada tanda di titik penjumlahan



Gambar V.5 Sistem kendali dengan kalang umpan maju.

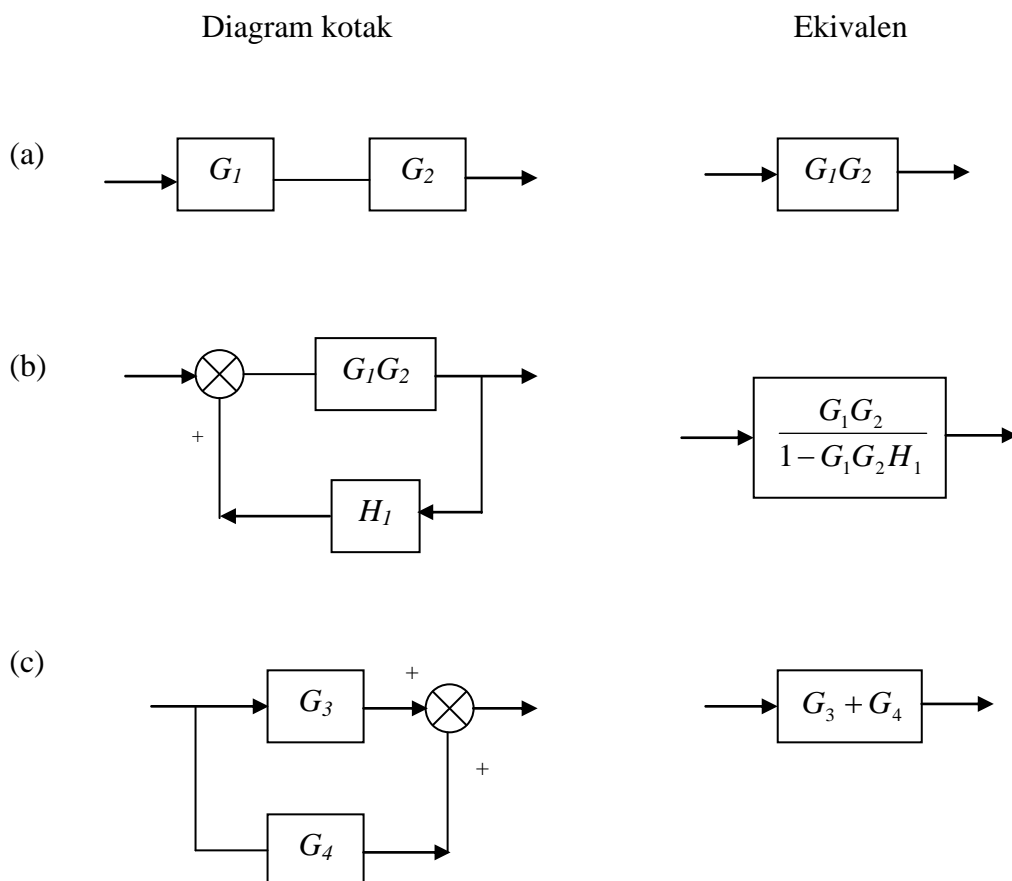
Penyederhanaan diagram kotak

Suatu sistem kendali seperti tampak pada Gambar 5.6, sebagai contoh sistem kendali yang tersusun atas kalang umpan maju dan kalang umpan balik.

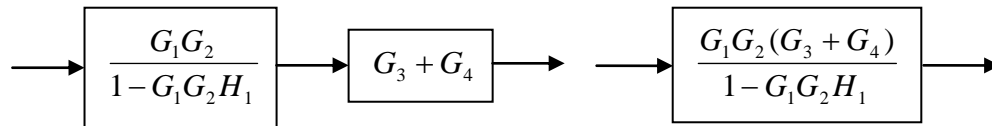


Gambar V.6 Diagram kotak sistem kendali dengan kalang umpan maju dan umpan balik.

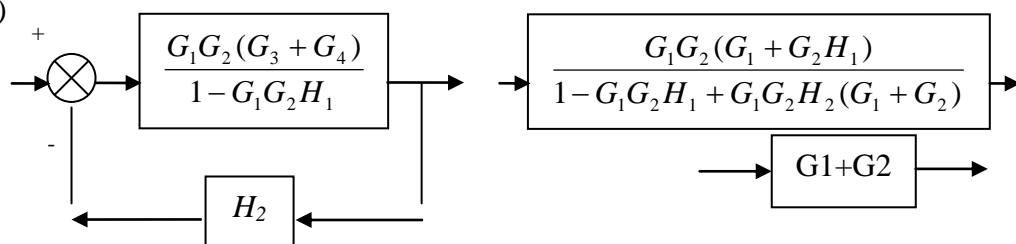
Dalam menentukan fungsi alih pada Gambar 5.6 dilakukan penyederhanaan melalui beberapa tahapan sebagai berikut:



(d)



(e)



Sehingga fungsi alih keseluruhan dari sistem tersebut adalah

$$G = \frac{G_1 G_2 (G_1 + G_2 H_1)}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 H_2 (G_1 + G_2)}$$

Ditulis dalam kawasan s sebagai

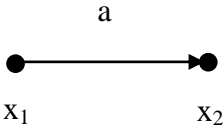
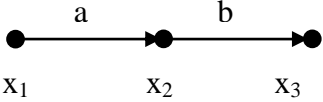
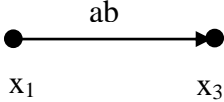
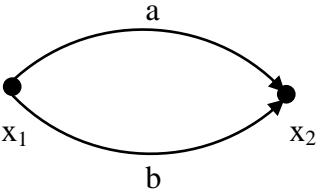
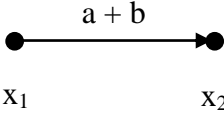
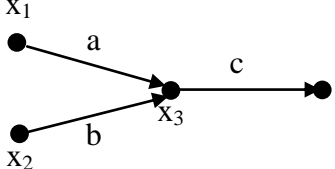
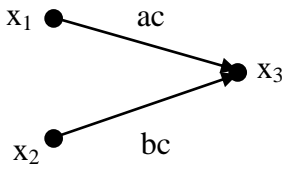
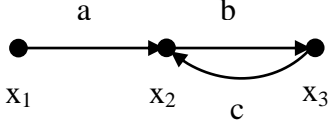
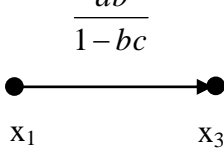
$$G(s) = \frac{G_1(s) G_2(s) [G_1(s) + G_2(s) H_1(s)]}{1 - G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_1(s) G_2(s) H_2(s) [G_1(s) + G_2(s)]}$$

Prosedur penyederhanaan diagram kotak dapat juga dilakukan dengan menggambarkan grafik aliran isyarat, yang menggunakan istilah-istilah sebagai berikut:

- SIMPUL merupakan titik yang menyatakan suatu peubah atau isyarat.
- TRANSMITANSI, merupakan penguatan antar dua buah simpul yang digabungkan.
- KALANG, merupakan lintasan tertutup.
- LINTASAN MAJU, merupakan lintasan dari simpul masukan menuju simpul keluaran dan hanya melewati setiap simpul sekali.

Pada aljabar grafik aliran isyarat, dapat dinyatakan dengan persamaan aljabar dengan menggunakan pedoman pada Tabel 5.1 berikut ini

Tabel V.1 Aljabar grafik aliran isyarat.

No.	Grafik aliran isyarat	Ekivalen aliran	Persamaan ajabar
1.			$x_2 = ax_1$
2.			$x_3 = abx_1$
3.			$x_2 = ax_1 + bx_1$ $= (a + b)x_1$
4.			$x_3 = ax_1 + bx_2$ $x_3 = cx_3$ $= acx_1 + bcx_2$
5.			$x_3 = \frac{ab}{1 - bc} x_1$

Rumus yang biasa digunakan untuk menghitung aljabar grafik aliran isyarat adalah **Rumus Penguatan Mason** yang secara matematik dapat ditulis:

$$P = \frac{1}{\epsilon} \sum P_k \epsilon_k \quad (5.4)$$

dengan

P_k adalah penguatan atau transmitansi lintas maju ke-k

ε adalah determinan grafik

$$= 1 - (\text{jumlah semua penguat kalang berbeda}) + (\text{jumlah hasil kali penguat semua kombinasi yang mungkin dari dua lingkaran yang tak bersentuhan}) - (\text{jumlah hasil kali penguat semua kombinasi yang mungkin dari tiga lingkaran yang tak bersentuhan}) + \dots$$

ε_k adalah kofaktor dari determinan lintas maju ke k dengan menghilangkan kalang-kalang yang menyentuh lintasan maju ke-k.

5.4 Galat sistem dalam kondisi tunak

Galat kondisi tunak adalah galat antara nilai dengan perintah masukan. Galat kondisi tunak dari sistem gayut pada sistem dan bentuk masukan sistem. Untuk menganalisis galat kondisi tunak sistem digunakan klasifikasi sistem ke dalam jenis sistem. Jenis tingkat sistem ini mengindikasikan setiap jenis galat kondisi tunak masukan yang akan terjadi.

Pada sistem kendali kalang terbuka (Gambar 5.7), jika masukan adalah $\theta_i(s)$ dan keluaran adalah $\theta_o(s)$, maka galat $E(s)$ adalah

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$$

Jika fungsi alih untuk $G(s)$ adalah $\theta_o(s)/\theta_i(s)$, maka

$$E(s) = \theta_i(s) - G(s)\theta_i(s) = [1 - G(s)]\theta_i(s) \quad (5.5)$$

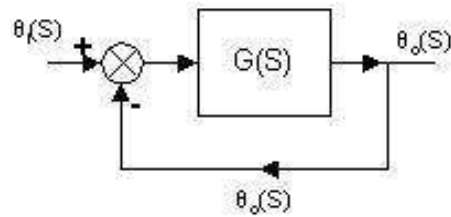
Galat gayut tidak hanya pada sistem(fungsi alih sistem), tetapi juga dari fungsi masukan yang diberikan.



Gambar V.7 Sistem kendali kalang terbuka.

Pada sistem kendali kalang tertutup (Gambar 5.8), jika masukan acuan adalah $\theta_i(s)$ dan keluaran aktual adalah $\theta_o(s)$ dan juga isyarat umpan balik adalah $\theta_o(s)$, maka galat $E(s)$ adalah

$$E(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$$



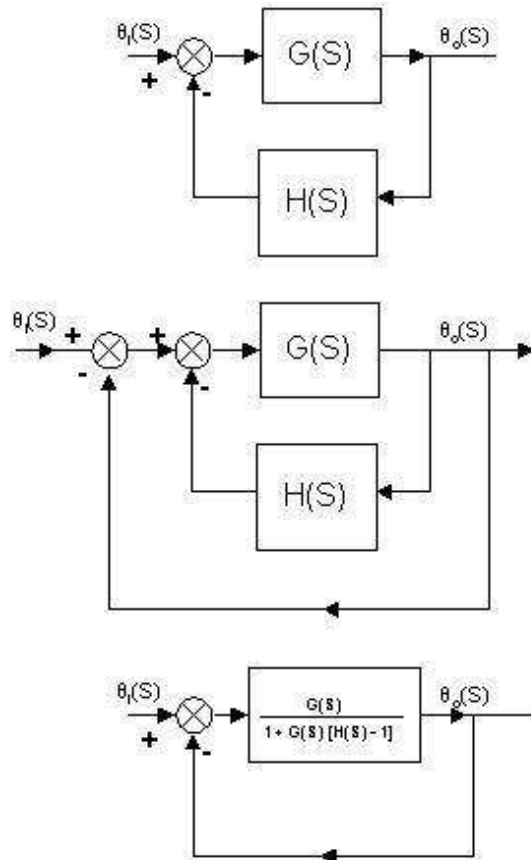
Gambar V.8 Sistem kendali kalang tertutup sederhana.

Galat pada sistem kendali kalang tertutup dengan elemen umpan balik sebesar satu adalah

$$E(s) = \theta_i(s) - \frac{G(s)\theta_i(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(s)}\theta_i(s) \quad (5.6)$$

Jika sistem kalang tertutup mempunyai kalang umpan balik dengan fungsi alih $H(s)$ (Gambar 5.9(a)), maka sistem dapat dikonversikan ke satu dengan satuan umpan balik oleh proses pada Gambar 5.9(b). Hasil ekivalensi sistem umpan balik satu satuan dapat dilihat pada Gambar 5.9(c). Fungsi alih lintasan maju adalah

$$\frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]} \quad (5.7)$$



Gambar V.9 (a) Sistem kendali kalang tertutup, (b) diberi elemen umpan balik satu satuan, (c) sistem ekivalen dengan umpan balik satu satuan.

Untuk menentukan galat kondisi tunak digunakan teorema nilai akhir. Galat kondisi tunak adalah galat (sebagai fungsi waktu t), saat semua kondisi peralihan semakin menurun, dan nilai t cenderung tak-berhingga. Teorema nilai akhir untuk kondisi ini diberikan oleh persamaan (5.8) berikut ini

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (5.8)$$

Untuk sistem kalang terbuka, persamaan (5.8) menjadi

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \{s[1 - G(s)]\theta_i(s)\} \quad (5.9)$$

Sedangkan sistem kalang tertutup mempunyai galat kondisi tunak sebagai berikut

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + G(s)} \theta_i(s) \right] \quad (5.10)$$

Galat kondisi tunak dari sistem gayut pada nilai $\lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, dan nilai $E(s)$ gayut pada fungsi alih lintasan maju dari sistem umpan balik ketika umpan balik sebesar satu. Sistem diklasifikasikan oleh nilai fungsi alih lintasan maju ketika umpan balik sebesar satu, atau yang disebut dengan fungsi alih kalang terbuka dari sistem kalang tertutup. Untuk sistem dengan fungsi alih maju $G(s)$ dan fungsi alih kalang tertutup $H(s)$, fungsi alih kalang terbuka $G_o(s)$ adalah

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]} \quad (5.11)$$

Fungsi alih kalang terbuka dari sistem dapat dituliskan dalam bentuk persamaan umum sebagai berikut

$$\frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \dots + a_1s + a_0)}{s^q (s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)} \quad (5.12)$$

dalam hal ini K adalah sebuah tetapan, dan m dan n adalah integer, a_0 atau b_0 adalah nol. q adalah sebuah integer, dan besar nilai q merupakan jenis atau kelas dari sistem, jadi bila $q=0$, maka jenis 0; jika $q=1$, maka jenis 1; dan seterusnya. Jadi nomor jenis adalah nomor 'integrator' pada fungsi alih kalang terbuka.

Contoh 1:

Soal:

Termasuk jenis sistem nomor berapakah sistem yang terlihat pada Gambar 5.10?

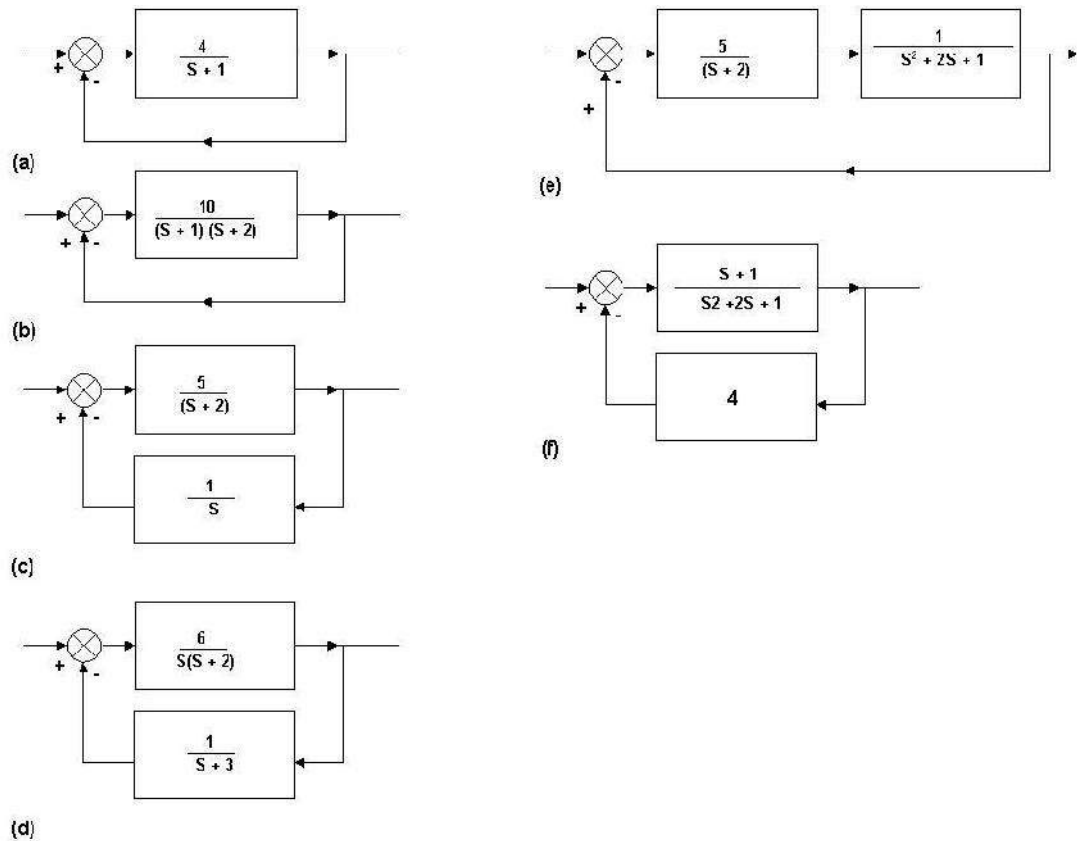
Penyelesaian:

(a) Sistem tersebut mempunyai fungsi alih kalang terbuka

$$\frac{4}{(s+1)}, \text{ termasuk jenis sistem nomor 0.}$$

(b) Sistem tersebut mempunyai fungsi alih kalang terbuka

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)}, \text{ termasuk jenis sistem nomor 0}$$



Gambar V.10 Soal contoh no. 1.

- (c) Sistem tersebut mempunyai fungsi alih kalang terbuka

$$\frac{5/(s+2)}{1 + [5/(s+2)][(1/s) - 1]} = \frac{5s}{(s^2 - 3s + 5)}, \text{ termasuk jenis sistem nomor 0}$$

- (d) Sistem tersebut mempunyai fungsi alih kalang terbuka

$$\frac{6/[s(s+2)]}{1 + \{6/[s(s+2)]\}[1/(s+3) - 1]} = \frac{6(s+3)}{s^3 + 5s^2 + 9s - 12},$$

termasuk jenis sistem nomor 0

- (e) Sistem tersebut mempunyai fungsi alih kalang terbuka

$$\frac{10}{s^2(s^2 + 2s + 1)}, \text{ termasuk sistem jenis nomor 2}$$

- (f) Sistem tersebut mempunyai fungsi alih kalang terbuka

$$\frac{(s+1)/(s^2 + 2s + 1)}{1 + [(s+1)/(s^2 + 2s + 1)](4-1)} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 4}.$$

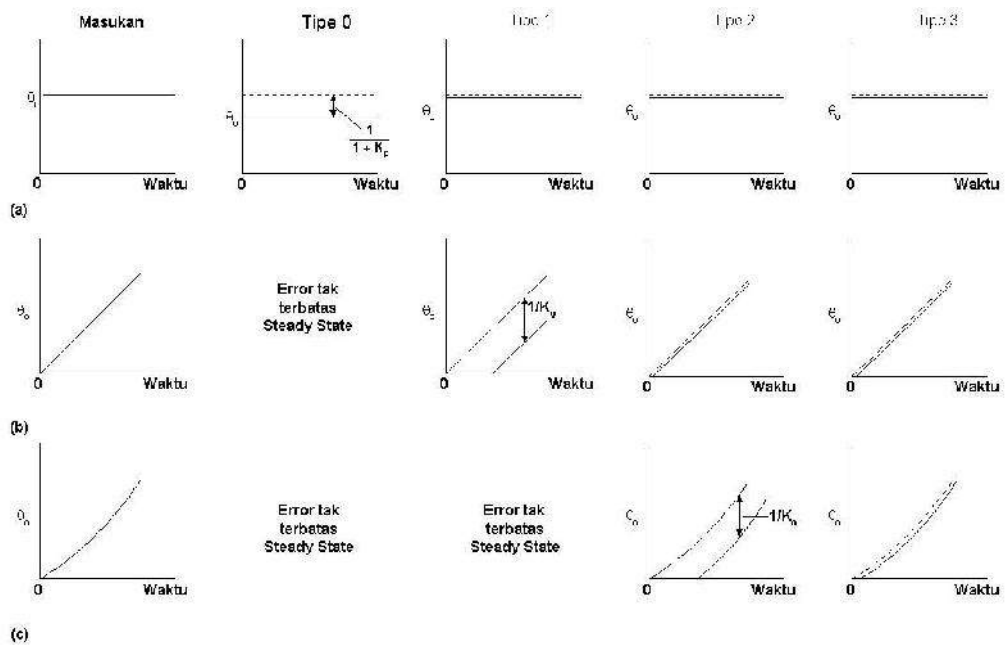
termasuk sistem jenis nomor 0

5.5 Galat sistem dalam kondisi tunak untuk berbagai fungsi masukan

Tabel 5.2 menunjukkan galat kondisi tunak yang direpresentasikan oleh Gambar 5.11 berikut ini

Tabel V.2 Daftar galat kondisi tunak.

Jenis sistem	Galat kondisi tunak terhadap fungsi masukan			
	Undak $1/s$	Tanjak/lereng $1/s^2$	Parabola $1/s^3$	$1/s^4$
0	$1/(1 + K_p)$	∞	∞	∞
1	0	$1/K_v$	∞	∞
2	0	0	$1/K_a$	∞
3	0	0	0	$1/K_4$
4	0	0	0	0



Gambar V.11 Galat kondisi tunak: (a) masukan undak, (b) masukan tanjak, (c) masukan parabolis.

Contoh 2:

Soal:

Sebuah lengan robot mempunyai fungsi alih kalang terbuka untuk posisi angular sebagai berikut

$$G_o(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+2)}$$

Bagaimanakah galat kondisi tunaknya saat masukan seperti pada Gambar 5.11.

Jawab:

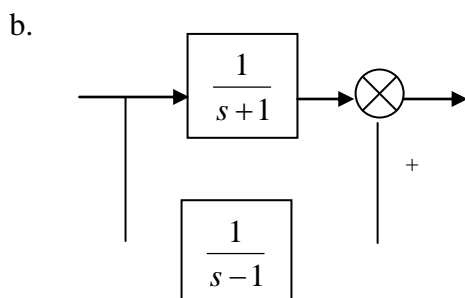
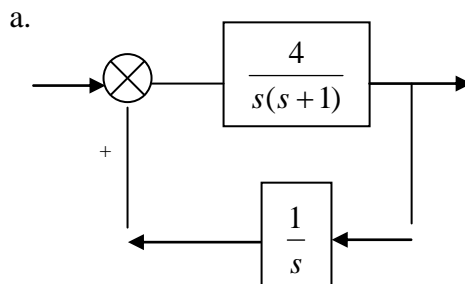
Sistem tersebut termasuk jenis sistem 1 dan pada masukan isyarat lereng sebesar $10^\circ/\text{detik}$ cenderung mendekati nol, sehingga $sG_o(s)$ cenderung $100/10=10s^{-1}$. Jadi $K_v = 10s^{-1}$ dan untuk laju sebuah lereng A adalah $A/K_v=10/10=1^\circ$. Kesimpulan yang dapat diambil adalah keluaran selalu tertunda di belakang masukan sebesar 1° .

Sumber Kepustakaan :

- 1) Auslander, David M., Yasundo Takahshi, Michael J. Rabins. 1974. *Introducing Systems and Control*. McGraw-Hill, Inc.
- 2) Bolton, W., 1999. *Control Engineering*, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London
- 3) Ogata, K. 1997. *Modern Control Engineering*, 3rd, Prentice Hall Inc. London.
- 4) Pakpahan, Sahat. 1988. *Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan*. Erlangga. Jakarta.
- 5) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. *Dasar Sistem Pengaturan*, Satya Wacana. Semarang.

Soal-soal Bab 5:

1) Carilah fungsi alih keseluruhan dari diagram kotak berikut ini:





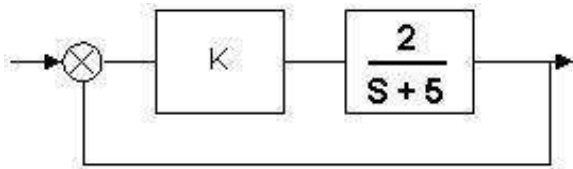
- 2) Tentukan jenis sistem nomor berapakah sistem yang mempunyai fungsi alih kalang terbuka berikut ini:

c. $\frac{5}{s+2}$

d. $\frac{2(s+1)}{s^2+2s+1}$

e. $\frac{2(s+3)}{s^2(s^2+2s+1)}$

- 3) Hitung galat kondisi tunak dari sistem pada Gambar 5.12 berikut ini, dengan masukan undak dan nilai K sebesar (a) 1, (b) 10, dan kesimpulan apakah yang bisa diambil?



VI. ANALISIS KESTABILAN SISTEM

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

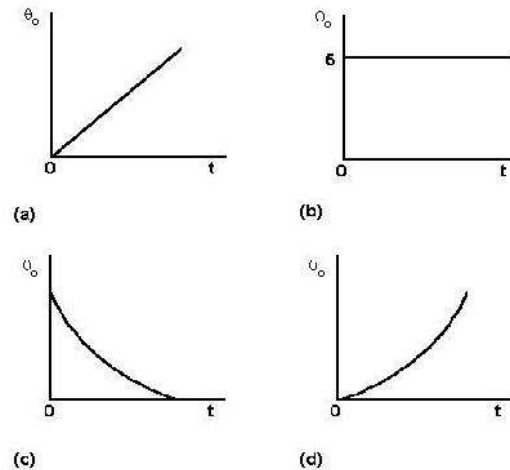
- 1) Mahasiswa dapat menganalisis kestabilan bidang kompleks,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan kestabilan mutlak dan relatif,
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, dan
- 4) Mahasiswa dapat menggambarkan dan menjelaskan Analisis Kedudukan Akar (*Root Locus Analysis*).

6.1 Definisi Kestabilan Sistem

Sebuah sistem didefinisikan stabil bila setiap batasan masukan menghasilkan keluaran yang terbatas juga. Atau dengan kata lain sistem dikatakan stabil bila ke dalam sistem tersebut diberikan masukan impuls, maka keluaran yang dihasilkan akan mendekati nol dengan waktu tak-berhingga. Sistem disebut sebagai sistem tak-stabil bila masukan impuls, menghasilkan keluaran cenderung tak-terbatas terhadap waktu dan cenderung tak-berhingga. Stabil-kritis atau marginal adalah sistem kendali bila menerima masukan, akan menghasilkan keluaran yang tidak mendekati nol atau naik sampai tak-berhingga tetapi cenderung mendekati suatu nilai tertentu.

Contoh 1:

Dari keempat soal berikut ini, sistem manakah yang stabil (Gambar 6.1)?



Gambar VI.1 Soal contoh 1

- Sebuah masukan undak diberikan ke sebuah sistem, sistem tersebut menghasilkan keluaran yang dapat dijabarkan dengan persamaan $\theta_o=2t$.
- Sebuah masukan undak diberikan ke sebuah sistem, sistem tersebut menghasilkan keluaran yang dapat dijabarkan dengan persamaan $\theta_o=5$.
- Sebuah masukan impuls diberikan ke sebuah sistem, sistem tersebut menghasilkan keluaran yang dapat dijabarkan dengan persamaan $\theta_o=e^{-t}$.
- Sebuah masukan impuls diberikan ke sebuah sistem, sistem tersebut menghasilkan keluaran yang dapat dijabarkan dengan persamaan $\theta_o=e^t$.

Penyelesaian:

- Sistem tersebut tak-stabil, karena keluaran yang dihasilkan naik terus dan tak-berhingga.
- Sistem tersebut stabil, karena keluaran yang dihasilkan mempunyai tertentu (berhingga).
- Sistem tersebut stabil, karena keluaran yang dihasilkan mempunyai tertentu (berhingga).
- Sistem tersebut tak-stabil, karena keluaran yang dihasilkan naik terus dan tak-berhingga.

6.2 Kutub dan Nol

Secara umum fungsi alih kalang-tertutup $G(s)$ dari suatu sistem direpresentasikan dengan

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \dots + a_1s + a_0)}{(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0)} \quad (6.1)$$

Persamaan (2.1) dapat ditulis dengan akar-akar pembilang dan penyebut sebagai berikut:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \quad (6.2)$$

dalam hal ini akar-akar pembilang yaitu z_1, z_2, \dots, z_m disebut **nol-nol**, dan akar-akar penyebut yaitu p_1, p_2, \dots, p_n disebut **kutub-kutub**, K adalah sebuah konstanta pengali atau penguatan sistem. Nol (*zero*) adalah nilai s yang diperoleh bila fungsi alih menjadi 0, dan kutub adalah nilai s yang diperoleh bila fungsi alih menjadi tak-berhingga, yaitu kutub-kutub mengakibatkan nilai penyebut menjadi 0.

Nol dan kutub dapat dalam bentuk real atau kompleks, secara umum nol dan kutub dapat ditulis sebagai

$$s = \sigma + j\omega \quad (6.3)$$

dalam hal ini σ adalah bagian real dan $j\omega$ merupakan bagian khayal.

Contoh 2:

Tentukan kutub-kutub dan nol-nol dari fungsi alih sistem-sistem kalang-tertutup berikut ini:

(a) $\frac{s - 1}{s^2 - 4s + 4}$

(b) $\frac{2(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)}$

(c) $\frac{1}{s^2 + s + 1}$

Penyelesaian:

(a) Penyebut = $(s - 2)(s - 2)$, jadi kutub-kutub adalah +2 dan +2.

Pembilang = $(s - 1)$, jadi nol adalah +1.

(b) Penyebut = $(s + 1)(s - 2)(s - 3)$, jadi kutub-kutub adalah -1, -2 dan +3.

Pembilang = $2(s + 1)$, jadi nol adalah -1.

(c) Penyebut = $(s^2 + s + 1)$, akar-akar persamaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan persamaan untuk akar-akar m dari persamaan kuadrat

$$(ax^2 + bx + c), \text{ yaitu } m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -0,5 \pm j0,87,$$

sehingga kutub-kutubnya adalah $(-0,5 + j0,87)$ dan $(-0,5 - j0,87)$.

Pembilang = 1, jadi tak terdapat nilai nol.

Contoh 3:

Tuliskan fungsi alih dari suatu sistem yang mempunyai nilai kutub-kutub dan nol-nol berikut ini:

- (a) Kutub-kutub -1, -2; tanpa nol
- (b) Kutub-kutub +1, -2; nol = 0
- (c) Kutub-kutub $(-2 \pm j1)$; nol = +1

Penyelesaian:

- (a) Penyebut = $(s+1)(s+2)$ dan pembilang = 1, sehingga fungsi alihnya adalah

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- (b) Penyebut = $(s+1)(s+2)$ dan pembilang = $(s-0)$, sehingga fungsi alihnya

$$\text{adalah } G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

- (c) Penyebut = $[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)] = [s^2 + 4s + 5]$, pembilang = $(s-1)$,

$$\text{sehingga fungsi alihnya adalah } G(s) = \frac{(s-1)}{s^2 + 4s + 5}$$

6.3 Penggambaran nol-kutub

Kutub-kutub dan nol-nol dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram, yang disebut diagram nol-kutub (*pole-zero plot*). Gambar 6.1 memperlihatkan sumbu-sumbu yang digunakan pada setiap penggambaran diagram, sumbu-x adalah bagian real atau nol, dan sumbu-y adalah bagian khayal. Posisi sebuah kutub dilambangkan dengan silang 'x' dan posisi sebuah nol dilambangkan dengan lingkaran kecil 'o'. Jadi pada Gambar 8.1 sebuah kutub mempunyai koordinat pada bagian real -1 dan pada bagian khayal +1, yaitu kutub $(-1 + j1)$. Nol ditempatkan pada bagian real +1, dan tanpa bagian khayal.

Diagram dua-dimensi disebut 'bidang-s'. Kutub-kutub dan nol-nol pada sisi sebelah-kiri diagram seluruhnya negatif, kutub-kutub dan nol-nol pada sisi sebelah-kiri diagram seluruhnya positif.

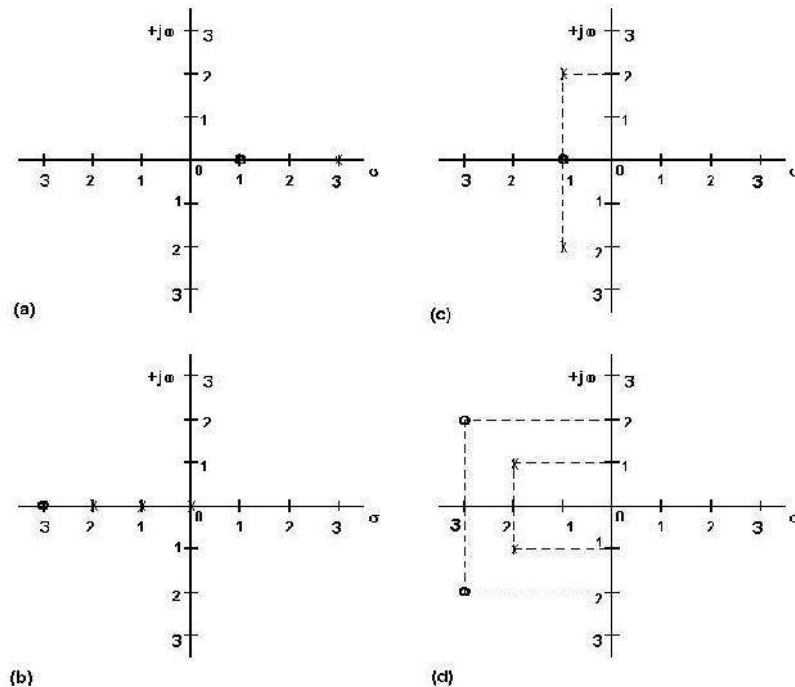
Contoh 4:

Gambarlah diagram nol-kutub dari sistem yang mempunyai kutub-kutub dan nol-nol berikut:

- (a) Kutub-kutub -2, +3; nol +1.
- (b) Kutub-kutub 0, -1, -2; nol -3.
- (c) Kutub-kutub $-1 \pm j2$; nol -1.

(d) Kutub-kutub $-2 \pm j1, 0$; nol $-3 \pm j2$.

Penyelesaian:



Gambar VI.2 Penyelesaian contoh soal no. 4

6.4 Stabilitas dan Kutub-kutub

Stabilitas suatu sistem dapat ditentukan dengan mempertimbangkan perubahan keluaran dengan waktu setelah sistem tersebut diberi masukan. Dengan sebuah sistem yang stabil keluaran akan berhenti mendekati nol terhadap waktu, jika sistem tak-stabil maka keluaran akan meningkat terhadap waktu.

Jika suatu sistem mempunyai sebuah kutub yaitu -2 dan tanpa nol, maka fungsi alih $G(s)$ menjadi

$$G(s) = \frac{1}{s + 2},$$

Sehingga keluaran $\theta_o(s)$ bila dihubungkan dengan masukan $\theta_i(s)$, maka akan diperoleh:

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s + 2} \theta_i(s)$$

Jika sistem diberi masukan sebuah satuan impuls sehingga $\theta_i(s) = 1$, maka

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s+2}$$

Alih-ragam Laplace untuk bentuk $1/(s+a)$ dan pembalikannya menjadi

$$\theta_o = e^{-2t}$$

Nilai e^{-2t} menurun terhadap waktu, dan menjadi nol pada waktu tak berhingga sehingga sistem tersebut stabil.

Diberikan sebuah sistem tanpa nol dan terdapat sebuah kutub pada $+2$, fungsi-alih $G(s)$ menjadi

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

Sehingga,

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s-2} \theta_i(s)$$

Untuk masukan impuls $\theta_i(s) = 1$, maka

$$\theta_o(s) = \frac{1}{s-2}$$

Alih-ragam Laplace untuk bentuk $1/(s+a)$ dan pembalikannya menjadi

$$\theta_o(s) = e^{2t}$$

Nilai e^{2t} naik terhadap waktu, sehingga sistem tidak-stabil.

Sebuah contoh lagi, diberikan sistem mempunyai kutub-kutub $(-2 \pm j1)$ dan tanpa-nol. Fungsi alihnya adalah

$$G(s) = \frac{1}{[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)]}$$

dan menjadi

$$\theta_o(s) = \frac{1}{[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)]} \theta_i(s)$$

Bila diberi masukan impuls sebesar $\theta_i(s) = 1$, maka

$$\theta_o(s) = \frac{1}{[s - (-2 + j1)][s - (-2 - j1)]}$$

Alih-ragam Laplace untuk bentuk $1/[(s+a)(s+b)]$ dan pembalikannya menjadi

$$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$$

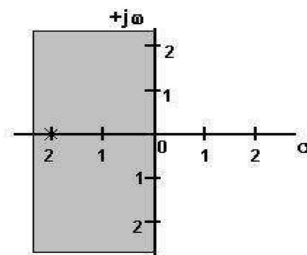
Dengan $a = -(-2 + j1)$ dan $b = -(-2 - j1)$, sehingga

$$\theta_o(s) = \frac{1}{j2} (e^{-2t} e^{jt} - e^{-2t} e^{-jt}) = e^{-2t} \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{j2} \right)$$

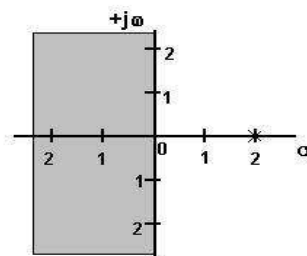
Dan $\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{j2} \right) = \sin t$, sehingga

$$\theta_o = e^{-2t} \sin t e^{-2t}$$

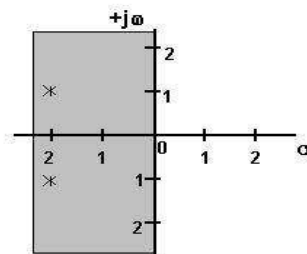
Gelombang sinus mempunyai amplitudo yang menurun terhadap e^{-2t} , yang mengakibatkan keluaran menurun dengan waktu dan sistem stabil.



(a)



(b)



(c)

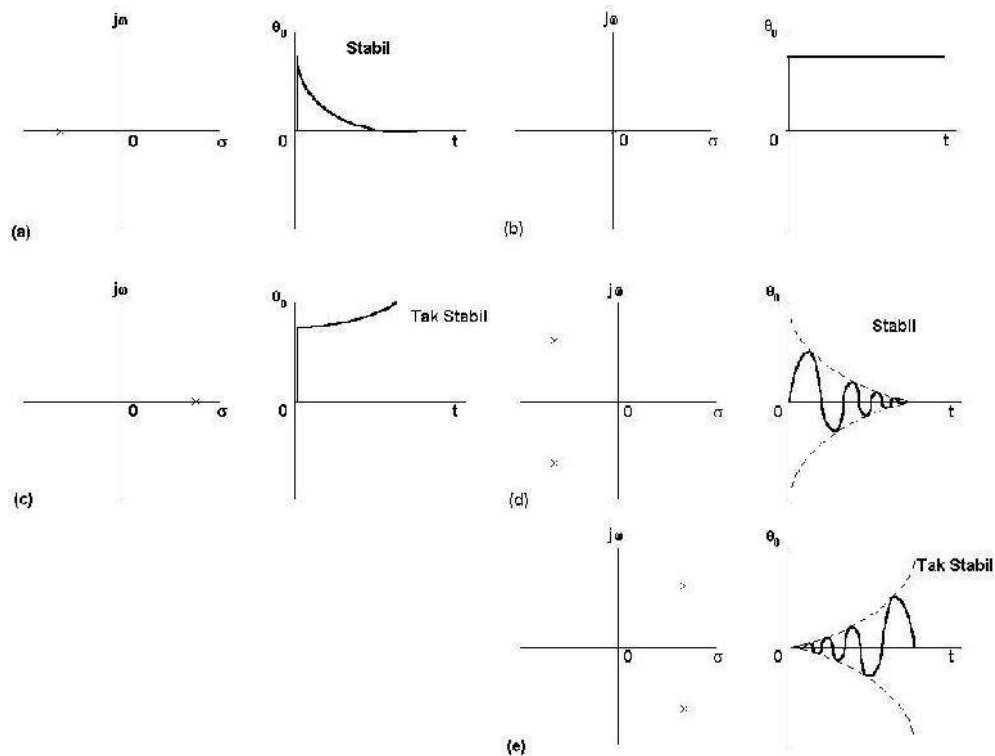
Gambar VI.3 Plot kutub-nol dan stabilitas, daerah stabil terarsir

(a) Kutub -2, tanpa nol, stabil; (b) Kutub +2, tanpa nol, Tak stabil; (c) Kutub-kutub $(-2 \pm j1)$, tanpa nol, stabil

Secara umum, ketika sebuah masukan impuls digunakan di dalam sebuah sistem, keluaran dalam bentuk suatu penjumlahan bentuk eksponensial. Jika hanya satu bagian eksponensial adalah eksponensial naik (fungsi positif), maka keluaran akan naik terhadap waktu dan sistem menjadi tak-stabil. Keadaan ini akan bangkit jika sembarang nilai kutub terletak pada bagian real yang positif dan juga penyebut dari fungsi-alih termasuk bentuk $(s+a)$. Jika pasangan kutub-kutub meliputi $\pm j\omega$, maka keluaran akan selalu sebuah osilasi. Jadi sebuah osilasi dikatakan stabil jika bagian real pasangan kutub adalah negatif dan tak-stabil jika positif.

Jadi jika semua kutub-kutub berada pada sisi-kiri diagram nol-kutub, maka sistem adalah stabil. Jika satu kutub terletak pada sisi-kanan, maka sistem adalah tak-stabil. Sebuah sistem dikatakan stabil-kritis bila satu atau lebih kutub-kutub terletak pada sumbu vertikal diagram nol-kutub, yaitu sebuah nilai kutub sama dengan nol real, dan tanpa kutub-kutub yang terletak pada sisi-kanan diagram nol-

kutub. Gambar 6.3 menunjukkan posisi kutub-kutub sebagai contoh di atas, dan Gambar 6.4 menunjukkan bentuk umum dari keluaran untuk berbagai posisi kutub-kutub yang berbeda dengan masukan berupa impuls. Dalam sebuah fungsi-alih sistem, kestabilan ditentukan oleh nilai-nilai kutub, sedangkan nilai-nilai nol tak ada hubungan.



Gambar VI.4 Keluaran untuk posisi kutub berlainan dengan masukan impuls.

Sebuah alternatif bentuk lain dari analisis kestabilan untuk menentukan stabilitas sistem adalah bagaimana perubahan keluaran terhadap waktu setelah diberi masukan undak. Gambar 6.5 menunjukkan bentuk umum keluaran untuk masukan undak yang ditentukan oleh posisi kutub-kutub yang berbeda dengan masukan berupa fungsi undak.

Contoh 5:

Soal:

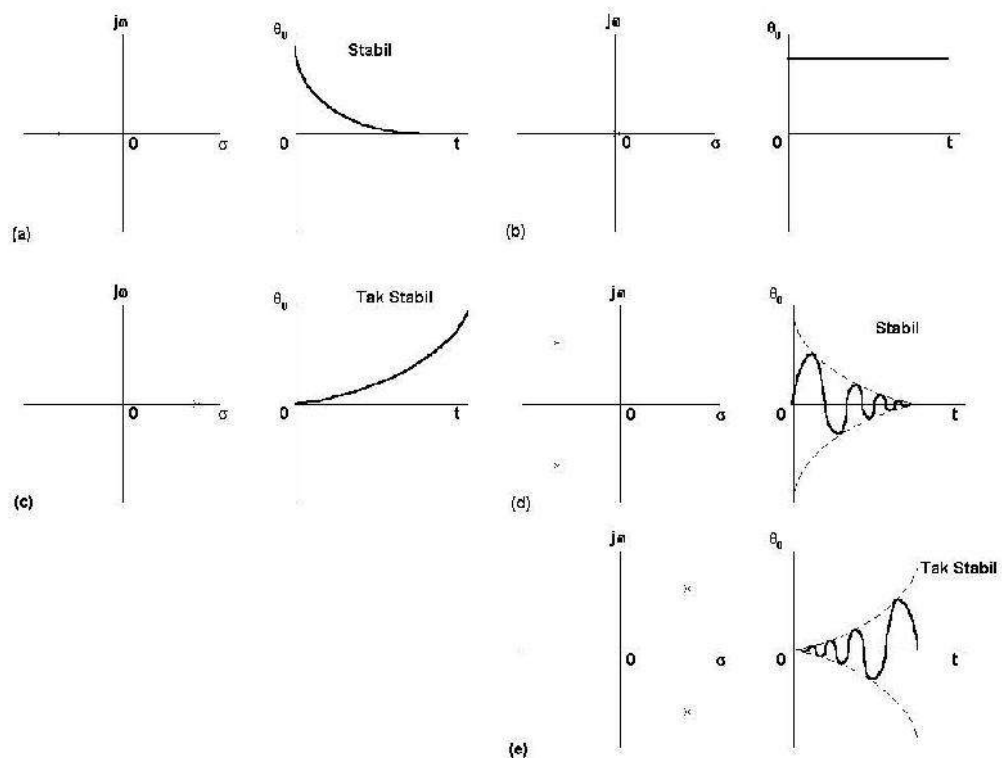
Sistem-sistem berikut ini termasuk stabil, stabil-kritis, dan tak-stabil:

- Kutub -4 ; nol $+1$.
- Kutub $+1$; tanpa-nol.
- Kutub $0, -1, -2$; nol $+1$.
- Kutub $(-2 \pm j3)$; tanpa-nol.

(e) Kutub $(1 \pm j2)$; nol -2.

Penyelesaian:

Nilai-nilai nol tidak ada hubungan dalam menyelesaikan persoalan ini. Untuk stabilitas seluruh nilai real kutub harus negatif. Jadi (a) dan (d) adalah stabil. Untuk stabil-kritis, satu atau lebih nilai real kutub sama dengan nol dan tak satu pun nilai kutub yang positif, jadi (c) adalah stabil-kritis. Untuk ketidakstabilan satu atau lebih nilai kutub real adalah positif, jadi (b) dan (e) adalah tak-stabil.



Gambar VI.5 Keluaran untuk posisi kutub berlainan dengan masukan undak.

6.5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Penentuan stabilitas sistem diberikan oleh fungsi-alih termasuk penghitungan akar-akar penyebut dari fungsi. Akar-akar tersebut akan lebih mudah ditentukan bila penyebut mempunyai bentuk

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4)$$

dan $n > 3$. Kriteria Routh-Hurwitz, merepresentasikan sebuah metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan situasi ini.

Uji pertama diaplikasikan untuk menyelidiki koefisien-koefisien, yaitu nilai-nilai setiap bagian untuk ekspresi di atas. Jika semua positif dan tidak ada nol, maka sistem disebut stabil. Jika ada koefisien yang negatif, maka sistem tak-stabil. Jika ada koefisien yang bernilai nol, maka sistem disebut stabil kritis. Sebagai contoh, sebuah penyebut $(s^3 + 2s^2 + 3s + 1)$ dapat dikatakan stabil bila semua koefisien ada dan positif. Bagaimanapun $(s^3 - 2s^2 + 3s + 1)$ tidak stabil karena mempunyai koefisien negatif. Pada $(s^3 + 2s^2 + 3s)$ terdapat bagian yang hilang dan sistem adalah stabil-kritis.

Koefisien pada persamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk orde yang disebut *larik Routh*, yaitu

$$\begin{array}{l|llll}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 s^2 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
 s^1 & y_1 & y_2 & & \\
 s^0 & z_1 & & &
 \end{array}$$

Elemen baris ke-tiga ditentukan oleh dua baris sebelumnya dengan cara sebagai berikut:

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-3} \quad (5)$$

$$b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-5} \quad (6)$$

Elemen baris ke-empat diperoleh dari elemen-elemen dua baris sebelumnya, yaitu:

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1} \right) b_2 \quad (7)$$

$$c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1} \right) b_3 \quad (8)$$

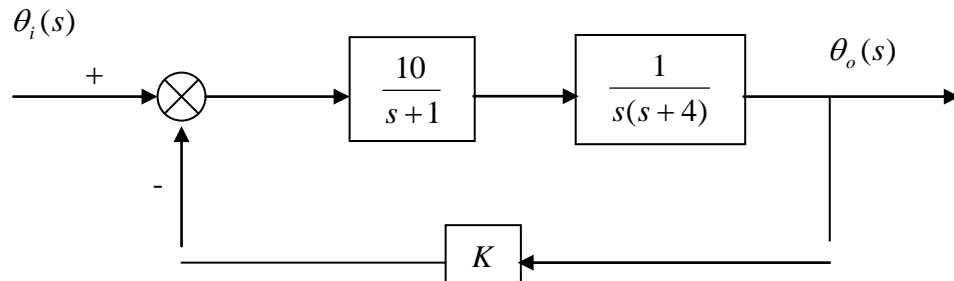
Elemen-elemen baris selanjutnya mengikuti analogi persamaan (5) s.d. (8).

Contoh 6:**Soal:**

Tentukan nilai K dari sistem kendali berikut agar sistem tersebut stabil,

(a) $s^3 + 4s^2 + 8s + K$

(b)

**Penyelesaian:**

(a) Dua baris pertama dari larik Routh adalah:

$$\begin{array}{l} s^3 \\ s^2 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 4 & K \end{array} \right.$$

Elemen dalam baris ketiga larik tersebut dihitung menggunakan persamaan (5) dan (6),

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-3} = 8 - \left(\frac{1}{4} \right) K$$

Dan

$$b_2 = 0 - \left(\frac{1}{4} \right) 0 = 0$$

Sehingga larik menjadi

$$\begin{array}{l} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 4 & K \\ 8 - \frac{1}{4}K & 0 \end{array} \right.$$

Elemen-elemen pada baris keempat larik tersebut dihitung menggunakan persamaan (7),

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1} \right) b_2 = K - \left(\frac{4}{8 - \frac{1}{4}K} \right) 0 = K$$

dan larik terakhir menjadi

$$\begin{array}{l} s^3 \\ s^2 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \\ 4 & K \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} s^1 & 8 - \frac{1}{4}K & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

Sistem tersebut stabil bila semua elemen pada kolom pertama bernilai positif, berarti:

$$\left(8 - \frac{1}{4}K\right) > 0$$

$$8 > \frac{1}{4}K$$

$$32 > K$$

dan

$$K > 0$$

Jadi nilai K adalah $0 < K < 32$

(b) Fungsi-alih sistem keseluruhan adalah

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

jika fungsi-alih bagian maju adalah $10/[s(s+1)(s+4)]$, maka fungsi-alih keseluruhan sistem adalah

$$\frac{10/[s(s+1)(s+4)]}{1 + 10K/[s(s+1)(s+4)]} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10K}$$

Jadi larik Routh untuk penyebut dari fungsi-alih tersebut adalah

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 4 & 10K \\ s^1 & 4 - 2K & \\ s^0 & 10K & \end{array}$$

Sistem tersebut stabil bila semua elemen pada kolom pertama bernilai positif, berarti:

$$4 - 2K > 0$$

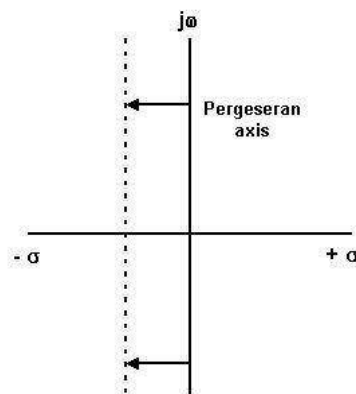
dan

$$K > 0$$

Jadi nilai K adalah $0 < K < 2$

6.6 Kestabilan Relatif

Konstruksi dari larik Routh dan aplikasi kriteria bahwa suatu sistem dikatakan stabil bila kolom pertama dari larik Routh merupakan bilangan positif dan penentuan bahwa semua akar dari sebuah sistem terletak di sebelah kiri bidang- s . Namun, seringkali sistem stabil sangat dekat dengan sistem tak-stabil, sehingga disebut stabil relatif. Untuk itu kita harus mengetahui seberapa dekat akar-akarnya terhadap sumbu nol. Hal ini dilakukan dengan cara menggeser sumbu tersebut ke arah kiri beberapa langkah dan menyelesaikan persamaan baru menggunakan langkah-langkah Routh-Hurwitz untuk menentukan kestabilan sistem tersebut (Gambar 6.6).



Gambar VI.6 Pergeseran sumbu.

Penggeseran sumbu ke $-\sigma$ mempunyai arti bahwa semua nilai penyebut dari fungsi-alih pada s diubah menjadi $(r - \sigma)$, kemudian persamaan dalam r inilah yang diuji kestabilannya.

Contoh 8:

Soal:

Apakah sebuah fungsi-alih sistem dengan penyebut berikut ini mempunyai akar-akar yang lebih mendekati sumbu nol daripada -1 ?

$$s^3 + 4s^2 + 8s + 4$$

Penyelesaian:

Langkah 1:

Melakukan uji kestabilan menurut kriteria Routh-Hurwitz dengan membuat larik Routh sebagai berikut:

$$s^3 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 8 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 4 & 4 \\ s^1 & 7 & \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

Dari larik tersebut dapat dilihat bahwa sistem dalam keadaan stabil.

Langkah 2:

Gantikan sumbu nol dengan menggeser sumbu khayal ke -1, dan gantikan s dengan $(r-1)$,

$$\begin{aligned} & (r-1)^3 + 4(r-1)^2 + 8(r-1) + 4 \\ &= (r^3 - 3r^2 + 3r - 1) + 4(r^2 - 2r + 1) + 8(r-1) + 4 \\ &= r^3 + r^2 + 3r - 1 \end{aligned}$$

Membuat larik Routh dari persamaan ini, yaitu

$$\begin{array}{c|cc} r^3 & 1 & 3 \\ r^2 & 1 & -1 \\ r^1 & 4 & \\ r^0 & -1 & \end{array}$$

Sistem tersebut tak-stabil.

Jadi sistem tersebut bersifat stabil relatif (hanya terhadap sumbu nol) karena saat sumbu nol digeser ke -1, terdapat pada kolom pertama satu nilai yang negatif.

6.7 Analisis Tempat Kedudukan Akar (*Root Locus Analysis*)

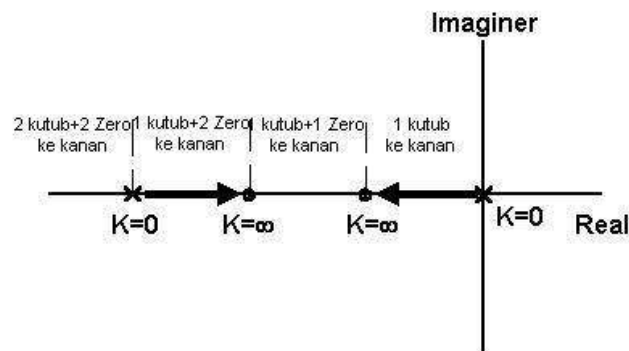
Langkah-langkah penggambaran/konstruksi kedudukan akar adalah sebagai berikut:

- 1) Jumlah kedudukan akar sama dengan orde n dari persamaan karakteristik fungsi-alih kalang-terbuka (pembilang). Setiap akar merupakan sebuah tempat kedudukan sebagai variasi K dari 0 pada sebuah kutub kalang-terbuka sampai tak-berhingga pada sebuah nol.
- 2) Tempat kedudukan akar dari suatu sistem dengan sebuah persamaan karakteristik real adalah simetris terhadap sumbu real. Hal ini menyebabkan akar kompleks terjadi dalam bentuk berpasangan $\sigma \pm j\omega$.
- 3) Tempat kedudukan akar dimulai dari n kutub dari sistem dimana $K=0$.
- 4) Tempat kedudukan akar berakhir pada m nol dari sistem, dalam hal ini $K = \infty$. Jika jumlah kutub > jumlah nol ($n > m$), maka loci m berakhir pada m nol dan meninggalkan loci $(n-m)$ berakhir pada tak-berhingga.

- 5) Bagian-bagin sumbu real adalah bagian kedudukan akar jika jumlah kutub dan nol pada sumbu ke kanan bagian ganjil (Gambar 6.7).
- 6) Kedudukan tersebut berakhir pada tak-berhingga cenderung ke arah asimtot sudut ke sumbu real positif dari

$$\frac{\pi}{n-m}, \frac{3\pi}{n-m}, \frac{5\pi}{n-m}, \dots, \frac{[2(n-m)-1]\pi}{n-m}$$

Gambar 6.8 merupakan contoh loci dari sistem dengan $n = 3$ dan $m = 0$. Sudut asimtot adalah $\pi/3$ atau 60° , π atau 180° dan $5\pi/3$ atau 300° .



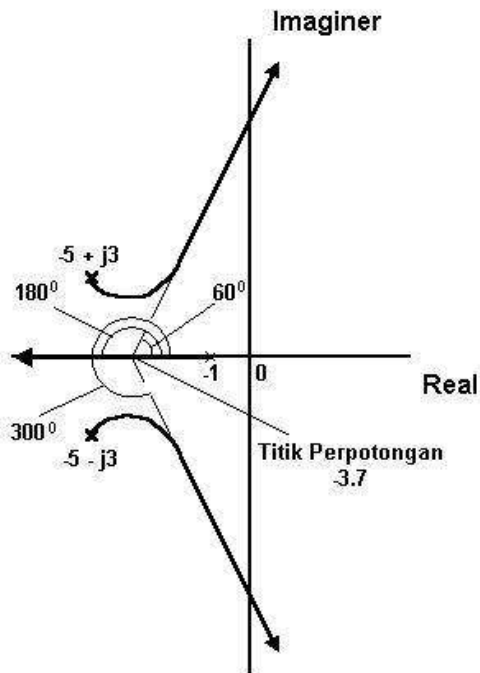
Gambar VI.7 Akar loci pada sumbu real.

- 7) Perpotongan asimtot pada sumbu real di sebuah titik, biasa disebut *centre of gravity* atau *centroid* dari asimtot, yang diberikan oleh

$$\frac{(p_1 + p_2 + \dots p_n) - (z_1 + z_2 + \dots z_n)}{n - m}$$

Sebagai contoh Gambar 6.8 dimana kutub-kutub adalah -1 dan $-5 \pm j3$ dan tidak ada nol, maka titik perpotongan adalah

$$\frac{-1 - 5 + j3 - 5 - j3}{3} = -3,7$$



Gambar VI.8 Asimtot-asimtot dengan $n = 3$, dan $m = 0$.

- 8) Perpotongan kedudukan akar terhadap sumbu khayal dapat dicari dengan menghitung nilai-nilai K yang menghasilkan akar-akar karakteristik $\sigma + j\omega$ dengan $\sigma = 0$.
- 9) Bagian titik pecah (*breakaway point*) terjadi bila dua atau lebih tempat kedudukan bertemu pada satu titik dan berikutnya “pecah” dari titik tersebut sepanjang bagian yang terpisah. Titik pecah terjadi pada titik-titik persamaan karakteristik, $dK/ds = 0$. Untuk sistem yang diberikan pada Gambar 6.9

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

Persamaan karakteristik adalah

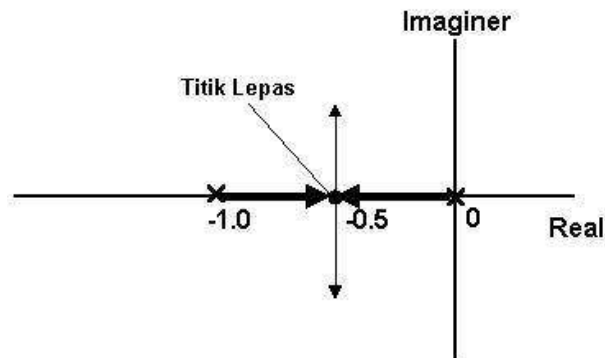
$$s^2 + s + K = 0, \text{ sehingga}$$

$$K = -s^2 - s$$

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 1 = 0$$

$$-2s - 1 = 0$$

Jadi titik pecah pada $s = -0,5$



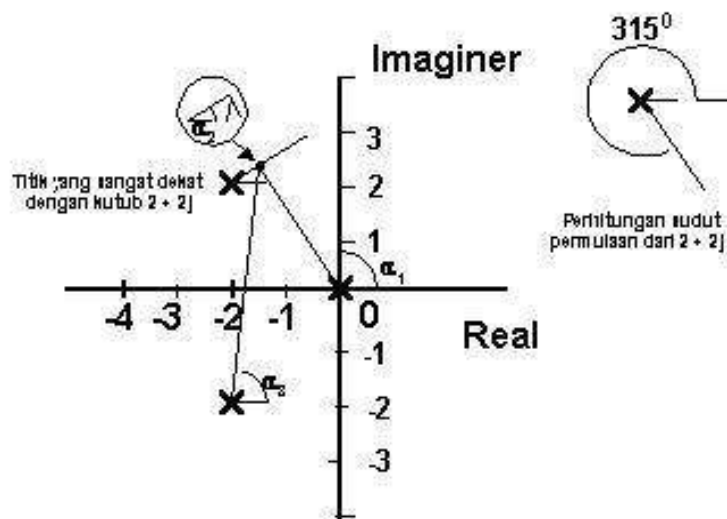
Gambar VI.9 Titik pecah $G_o(s) = K / s(\sigma + 1)$.

- 10) Sudut datang dari tempat kedudukan pada $K=0$ dari kutub kompleks dan sudut datang dari tempat kedudukan $K = \infty$ pada nol kompleks dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan argumen

$[\angle(s - z_1) + (s - z_2) + \dots + (s - z_m)] - [\angle(s - p_1) + (s - p_2) + \dots + (s - p_n)]$
 $= \pm$ perkalian ganjil dari π , dan membiarkan s sebagai sebuah titik pada tempat kedudukan akar sangat dekat dengan kutub dan nol yang disarankan. Gambar 6.10 menggambarkan cara menentukan sudut datang dari kutub kompleks $(2 + j2)$. Sistem memiliki kutub-kutub pada 0, dan $2 \pm j2$ dan tanpa nol sehingga diperoleh

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pm \text{kelipatan ganjil dari } \pi$$

Jika titik sangat dekat dengan kutub, maka $\alpha_1 = 180^\circ - \tan^{-1}(2/2) = 135^\circ$.
 Sudut $\alpha_3 = 90^\circ$. Jadi $-(135^\circ + \alpha_2 + 90^\circ) = -$ kelipatan ganjil dari 180° .
 $\alpha_2 = 315^\circ$



Gambar VI.10 Sudut datang.

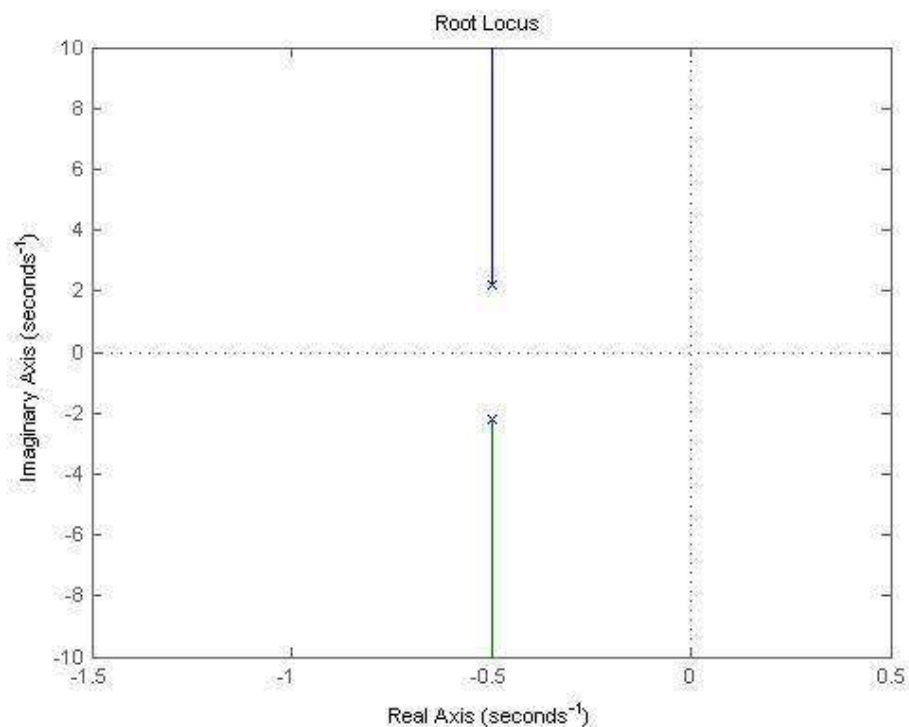
Untuk system yang diberikan pada Gambar 6.9 dengan memisalkan $K=5$, maka

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

Dengan bantuan software Matlab dapat diketikkan sebagai berikut:

```
num = [5];
den = [1 1 5];
rlocus (num,den)
```

sehingga akan tampil akar kedudukan system $G(s)$ seperti pada Gambar 6.11



Gambar VI.11 Akar Kedudukan Sistem G(s)

Sumber Kepustakaan :

- 1) Auslander, David M., Yasundo Takahshi, Michael J. Rabins. 1974. *Introducing Systems and Control*. McGraw-Hill, Inc. New York.
- 2) Bolton, W., 1999. *Control Engineering, 2nd*, Addison Wisley Longman Publishing. Landon.
- 3) Ogata, K. 1997. *Modern Control Engineering, 3rd*, Prentice Hall Inc. London.
- 4) Pakpahan, Sahat. 1988. *Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan*. Erlangga. Jakarta.
- 5) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. *Dasar Sistem Pengaturan*, Satya Wacana. Semarang.
- 6) Hartanto, Thomas Wahyu Dwi dan Y. Wahyu Agung Prasetyo. 2002. *Analisis dan Desain Sistem Kontrol dengan Matlab*, Andi. Yogyakarta.

Soal-soal:

- 1) Dari penyebut-penyebut suatu fungsi-alih berikut ini, selidikilah apakah sistem tersebut stabil, stabil-kritis, atau tak-stabil:
 - a. $s^2 + 2s$
 - b. $s^3 - 2s^2 + s + 3$

- c. $s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s - 1$
 d. $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 1$

2) Dengan menggunakan larik Routh, apakah sistem berikut ini stabil?

- a. $s^3 + 4s^2 + 8s + 12$
 b. $s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 3$
 c. $s^3 + 2s^2 + 2s + 6$
 d. $s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 32s + 16$

3) Penyebut suatu fungsi-alih adalah sebagai berikut:

$$s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

Berapakah nilai K agar sistem tersebut stabil?

4) Apakah sebuah fungsi-alih sistem dengan penyebut berikut ini mempunyai akar-akar yang lebih mendekati sumbu nol daripada -1?

$$s^2 + 4s + 2$$

5) Sistem mempunyai fungsi-alih kalang terbuka $\frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$,
 gambarkan diagram tempat kedudukan akar!

VII. TANGGAPAN FREKUENSI

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat membuat Bode plot
- 2) Mahasiswa dapat menganalisis dan menjelaskan kriteria kestabilan Nyquist
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan tanggapan frekuensi sistem kendali kalang tertutup.

7.1 Pendahuluan

Tanggapan frekuensi didefinisikan sebagai tanggapan keadaan tunak dari suatu sistem untuk masukan sinusoidal, tanggapan dipantau terhadap rentang frekuensi. Tanggapan keadaan tunak adalah tanggapan yang terjadi setelah semua peralihan meluruh menuju nol. Dua teknik penggambaran tanggapan frekuensi yang akan dibahas adalah plot Bode dan diagram Nyquist.

7.2 Tanggapan frekuensi

Jika sebuah masukan sinusoidal digunakan pada sistem linear, maka keluaran sistem juga sinusoidal dan pada frekuensi yang sama. Keluaran dapat berbeda dalam amplitude dan dalam fase. Perbandingan amplitude masukan dengan keluaran disebut dengan *magnitude*, meskipun kadang-kadang disebut rasio amplitude atau penguatan. Perubahan fase keluaran sinusoidal relatif terhadap masukan sinusoidal dan disebut *fase*. Variasi dari *magnitude* dan *fase* terhadap frekuensi disebut *tanggapan frekuensi* sistem.

7.3 Plot Bode

Plot Bode terdiri atas dua grafik, yang pertama adalah plot *magnitude* terhadap frekuensi, dan yang kedua adalah plot sudut fase terhadap frekuensi. *Magnitude* dan *fase* digambarkan dengan menggunakan skala logaritma.

Untuk sistem yang mempunyai fungsi alih meliputi sejumlah term, persamaan (7.1) berikut ini mengindikasikan bahwa *magnitude* resultan adalah hasil dari *magnitude-magnitude* dari elemen-elemen unsur pokok, yaitu

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|\dots \quad (7.1)$$

Persamaan tersebut diubah dalam bentuk logaritma dengan bilangan pokok 10 sebagai berikut:

$$\log|G(j\omega)| = \log|G_1(j\omega)| + \log|G_2(j\omega)| + \log|G_3(j\omega)| \quad (7.2)$$

Jadi penggambaran sebuah grafik dari $\log|G(j\omega)|$ terhadap frekuensi berarti bahwa dapat hanya menambahkan nilai kontribusi dari bagian magnitude individual. Sebagai contoh adalah bagaimana menggambarkan plot Bode untuk

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j\omega)}{2 + j\omega}$$

Dapat diplot secara terpisah grafik log untuk magnitude dari elemen 5, elemen $(1+j\omega)$ dan elemen $1/(2+j\omega)$ dan hanya menjumlahkan untuk memperoleh plot $|G(j\omega)|$. Magnitude mempunyai satuan desibel (dB) yang mempunyai perumusan:

$$\text{Magnitude dalam dB} = 20 \log|G(j\omega)| \quad (7.3)$$

Jadi jika $|G(j\omega)|=10$, maka $20 \log 10 = 20$, sehingga magnitude = 20 dB.

Grafik fase ketika sebuah bilangan dari elemen-elemen adalah merupakan penjumlahan elemen terpisah (persamaan (7.3)). Skala frekuensi yang digunakan untuk kedua plot magnitude dan fase adalah logaritmis.

Disebabkan plot Bode untuk sebuah sistem dapat dibuat dari elemen-elemen individual dalam suatu fungsi alih sistem berguna untuk mempertimbangkan plot dari semua elemen yang ada di dalam fungsi alih. Dengan menggunakan elemen-elemen plot Bode untuk rentang lebar dari sistem dapat secara cepat dibuat. Elemen dasar adalah sebagai berikut:

Penguatan tetap

Diberikan

$$G(s) = K \quad (7.4)$$

Menjadi

$$G(j\omega) = K \quad (7.5)$$

Untuk sistem ini magnitudo dalam dB adalah:

$$|G(j\omega)| = 20 \log K \quad (7.6)$$

Dan fase adalah nol. Jadi bentuk plot Bode dapat dilihat pada Gambar 7.1. Plot magnitudo adalah garis dari magnitudo konstan. Perubahan penguatan K hanya mengubah plot magnitudo naik atau turun dengan bilangan dB.

Sebuah kutub pada sumber (asal)

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (7.7)$$

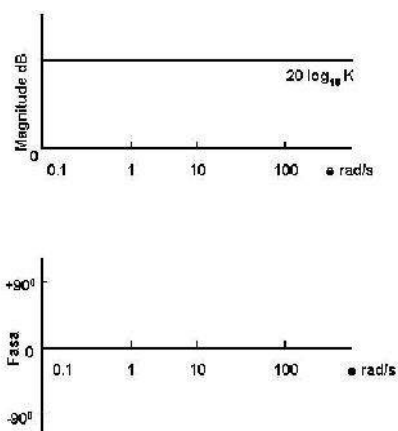
Sehingga

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega} \quad (7.8)$$

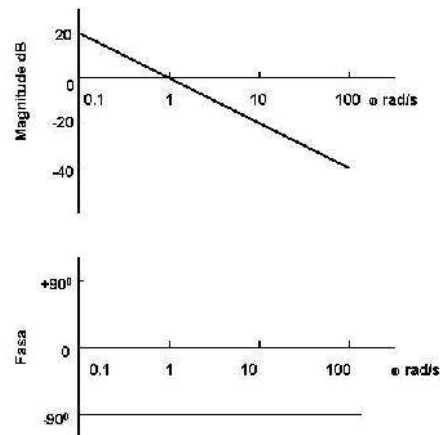
Untuk sebuah sistem seperti ini, magnitudo dalam dB adalah

$$|G(j\omega)| = 20 \log(1/\omega) = -20 \log \omega \quad (7.9)$$

Jika $\omega = 1$ rad/detik, maka $|G(j\omega)| = 0$, dan jika $\omega = 10$ rad/detik, maka $|G(j\omega)| = -20\text{dB}$. Untuk setiap kenaikan frekuensi sebesar sepuluh kali lipat, maka magnitudo turun sebesar -20dB .



Gambar VII.1 Plot Bode untuk penguatan tetap



Gambar VII.2 Plot Bode untuk kutu pada sumber (asal)

Plot magnitude Bode berupa garis lurus dengan kelerengan -20 dB per dekade frekuensi yang memasuki 0 dB pada $\omega = 1$ rad/detik (Gambar 7.2). Fase dari sistem seperti ini diberikan oleh

$$\tan \phi = \frac{(-1/\omega)}{0} = -\infty$$

ϕ adalah tetap untuk semua frekuensi pada -90° .

Sebuah nol pada sumber (asal)

$$G(s) = s \tag{7.10}$$

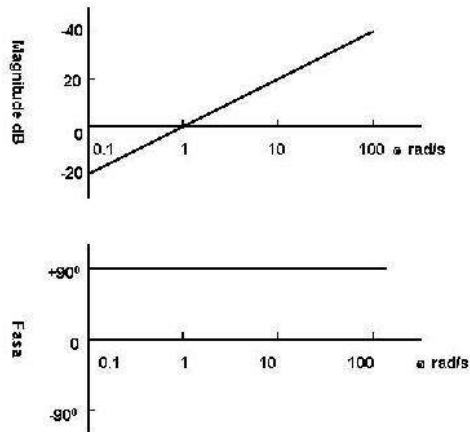
Sehingga

$$G(j\omega) = j\omega \tag{7.11}$$

Untuk sebuah sistem seperti ini, magnitude dalam dB adalah $20\log\omega$. Jika $\omega = 1$ rad/detik, maka $|G(j\omega)| = 0$ dB, dan jika $\omega = 10$ rad/detik, maka $|G(j\omega)| = 20$ dB. Untuk setiap kenaikan frekuensi sebesar sepuluh kali lipat, maka magnitude turun sebesar $+20$ dB. Plot magnitude Bode berupa garis lurus dengan kelerengan $+20$ dB per dekade frekuensi yang memasuki 0 dB pada $\omega = 1$ rad/detik (Gambar 7.3). Fase dari sistem seperti ini diberikan oleh

$$\tan \phi = \frac{\omega}{0} = \infty$$

ϕ adalah tetap untuk semua frekuensi pada 90° .



Gambar VII.3 Plot Bode untuk nol pada sumber (asal)

Sebuah kutub real

Hal ini berarti sistem mengikuti orde satu, dimana

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (7.12)$$

Sehingga

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (7.13)$$

Untuk sebuah sistem seperti ini, magnitude dalam dB adalah

$$20 \log \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \right]$$

Dan sudut fase

$$\tan \phi = -\omega\tau$$

Jika $\omega \ll 1/\tau$, maka $\omega^2\tau^2$ diabaikan dibandingkan dengan 1 sehingga magnitudenya 0dB. Pada frekuensi rendah di mana plot magnitudo berbentuk garis lurus pada nilai tetap 0dB. Untuk frekuensi lebih tinggi, jika $\omega \gg 1/\tau$, maka $\omega^2\tau^2$ harus lebih besar daripada 1 dan juga magnitudo menjadi

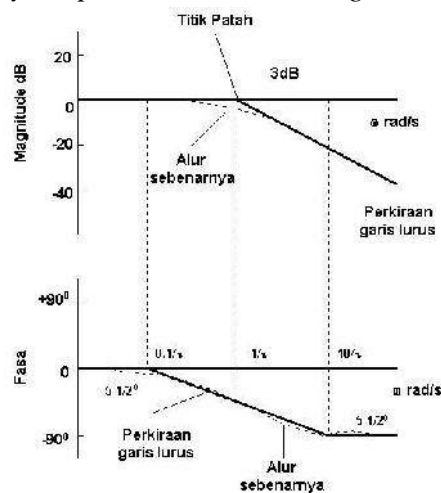
$$20\log(1/\omega\tau) = -20\log\omega\tau$$

Sebuah garis lurus dengan kelereng -20dB per dekade frekuensi yang memotong garis nol dB saat $\omega\tau = 1$. Gambar 7.4 menunjukkan plot untuk frekuensi rendah dan tinggi dengan perpotongan atau titik pecah atau frekuensi sudut pada $\omega = 1/\tau$. Dua garis lurus disebut pendekatan asimtotik untuk plot sebenarnya. Plot sebenarnya berkisar pada perpotongan dua garis, seperti ditunjukkan pada Gambar 7.4. Galat maksimum adalah 3 dB pada titik pecah. Tabel 7.1 memberikan perbedaan antara nilai-nilai sebenarnya dengan nilai-nilai asimtotik.

Gambar VII.4 Galat asimtotik untuk kutub real dan nol real

ω	$0,10/\tau$	$0,2/\tau$	$0,50/\tau$	$1/\tau$	$2/\tau$	$5/\tau$	$10/\tau$
Galat magnitudo (dB)	-0,04	-0,02	-1,0	-3,0	-1,0	-0,2	-0,04
Galat fase	$-5,7^\circ$	$+2,3^\circ$	$+4,9^\circ$	0°	$-4,9^\circ$	$-2,3^\circ$	$+5,7^\circ$

Catatan: nilai sebenarnya = pendekatan linear + galat



Gambar VII.5 Plot Bode untuk sebuah kutub real

Sudut fase adalah $-\tan^{-1}\omega\tau$. Pada frekuensi rendah ketika $\omega < 0,1/\tau$, maka fase secara maya adalah 0° . Pada frekuensi tinggi ketika $\omega > 10/\tau$, maka fase

secara maya adalah 90° . Di antara kedua sudut fase yang ekstrem dapat dipertimbangkan sebagai garis lurus yang terlihat (Gambar 7.4). Garis ini adalah pendekatan asimtotik. Galat maksimum mengasumsi sebuah garis lurus $5,5^\circ$. Pada $\omega = 1/\tau$, titik pecah, fase adalah 45° .

Sebuah nol real

Hal ini berarti sistem mendahului orde satu, dimana

$$G(s) = \tau s + 1 \quad (7.14)$$

Sehingga

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau \quad (7.15)$$

Untuk sebuah sistem seperti ini, magnitudo dalam dB adalah

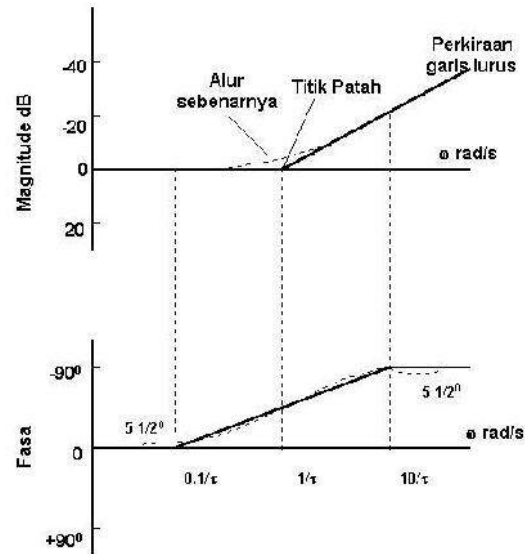
$$20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Dan sudut fase

$$\tan \phi = \omega \tau$$

Pada frekuensi rendah, jika $\omega \ll 1/\tau$, maka $\omega^2 \tau^2$ tidak berarti dibandingkan dengan 1 sehingga magnitudenya 0dB. Untuk frekuensi tinggi, jika $\omega \gg 1/\tau$, maka $\omega^2 \tau^2$ harus lebih besar daripada 1 dan magnitudo $20 \log \omega \tau$ sehingga sebuah garis lurus dengan kelerengan 20dB per dekade frekuensi dengan titik pecah pada $\omega = 1/\tau$. Gambar 7.5 menunjukkan dua garis lurus mendekati plot magnitudo sebenarnya, galat maksimum 3 dB pada titik pecah.

Sudut fase $\tan^{-1} \omega \tau$. Pada frekuensi rendah dimana $\omega < 0,1/\tau$, maka fase secara maya adalah 0° . Pada frekuensi tinggi ketika $\omega > 10/\tau$, maka fase secara maya adalah 90° . Di antara kedua sudut fase yang ekstrem dapat dipertimbangkan sebagai garis lurus yang terlihat (Gambar 7.5). Galat maksimum mengasumsi sebuah garis lurus $5,5^\circ$. Pada $\omega = 1/\tau$, titik pecah, fase adalah 45° .



Gambar VII.6 Plot Bode untuk sebuah nol real

Pasangan kutub kompleks

Hal ini adalah

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.16)$$

Dan jadi

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (7.17)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

Kemudian dapat dituliskan sebagai

$$G(j\omega) = \frac{[1 - (\omega/\omega_n)^2] - j[2\zeta(\omega/\omega_n)]}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

Sehingga magnitude dalam dB adalah

$$|G(j\omega)| = 20 \log \sqrt{\left\{ \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \right\}} \quad (7.18)$$

$$|G(j\omega)| = -20 \log \sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

Dan fase adalah

$$\tan \phi = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (7.19)$$

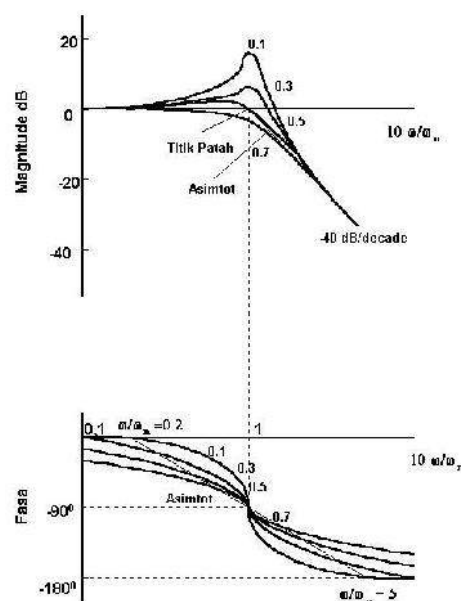
Jika $(\omega/\omega_n) \ll 1$, maka pendekatan magnitude untuk

$$|G(j\omega)| = -20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

Jika $(\omega/\omega_n) \gg 1$, maka pendekatan magnitude untuk

$$|G(j\omega)| = -20 \log(\omega/\omega_n)^2$$

Pada frekuensi rendah, plot magnitude pada 0dB. Untuk frekuensi tinggi, berupa garis lurus dengan kelereng -40dB per dekade frekuensi. Perpotongan atau titik pecah pada $\omega = \omega_n$. Plot magnitude adalah pendekatan dari dua garis asimtotik. Nilai sebenarnya gayut pada rasio peredaman ζ . Gambar 7.6 menunjukkan dua garis lurus dan nilai sebenarnya untuk rasio peredaman yang berbeda.



Gambar VII.7 Plot Bode untuk sepasang kutub kompleks

Tabel 7.2 memberikan perbedaan antara nilai sebenarnya dengan asimtotik untuk suatu rasio peredaman.

Tabel VII.1 Galat magnitudo asimtotik dalam dB untuk pasangan kutub dan nol

ζ	ω/ω_n						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2	5	10
1	-0,09	-0,34	-1,92	-6,0	-1,92	-0,34	-0,09
0,7	0	-0,01	-0,26	-3,0	-0,26	-0,01	0
0,5	+0,04	+0,17	+0,9	0,0	+0,90	+0,17	+0,04
0,3	+0,07	+0,29	+1,85	+4,4	+1,85	+0,29	+0,07

Catatan: nilai sebenarnya = pendekatan linear + galat

Jika $(\omega/\omega_n) \leq 0,2$, maka fase $\approx 0^\circ$. Jika $(\omega/\omega_n) \geq 5$, maka fase $\approx -180^\circ$. Jika $\omega = \omega_n$, maka fase $\approx -90^\circ$.

Tabel 7.3 memberikan galat, atau perbedaan, antara nilai-nilai sebenarnya dan nilai-nilai asimtotik.

Tabel VII.2 Galat fase asimtotik untuk pasangan kompleks kutub dan nol

ζ	ω/ω_n						
	0,1	0,2	0,5	1,0	2	5	10
1	-11,4°	-22,6°	+1,6°	0	-1,6°	+22,6°	+11,4°
0,7	-8,1°	-16,4°	+19,6°	0	-19,6°	+16,4°	+8,1°
0,5	-5,8°	-15,3°	+29,2°	0	-29,2°	+15,3°	+5,8°
0,3	-3,5°	-22,3°	+41,1°	0	-41,1°	+22,3°	+3,5°

Catatan: nilai sebenarnya = pendekatan linear + galat

Pasangan nol kompleks

Hal ini adalah

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \quad (7.20)$$

Dan jadi

$$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}{\omega_n^2} \quad (7.21)$$

$$G(j\omega) = [1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]$$

Kemudian dapat dituliskan sebagai

Sehingga magnitude adalah

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2\}} \quad (7.22)$$

Dan fase adalah

$$\tan \phi = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (7.23)$$

Jika $(\omega/\omega_n) \ll 1$, maka pendekatan magnitude untuk

$$|G(j\omega)| = -20 \log_{10} 1 = 0dB$$

Jika $(\omega/\omega_n) \gg 1$, maka pendekatan magnitude untuk

$$|G(j\omega)| = -20 \log(\omega/\omega_n)^2$$

Pada frekuensi rendah, plot magnitude pada 0dB. Untuk frekuensi tinggi, berupa garis lurus dengan kelerengan -40dB per dekade frekuensi. Perpotongan atau titik pecah pada $\omega = \omega_n$. Plot magnitude adalah pendekatan dari dua garis asimtotik. Nilai sebenarnya gayut pada rasio peredaman ζ . Gambar 7.6 menunjukkan dua garis lurus dan nilai sebenarnya untuk rasio peredaman yang berbeda.

Contoh 1:

Soal:

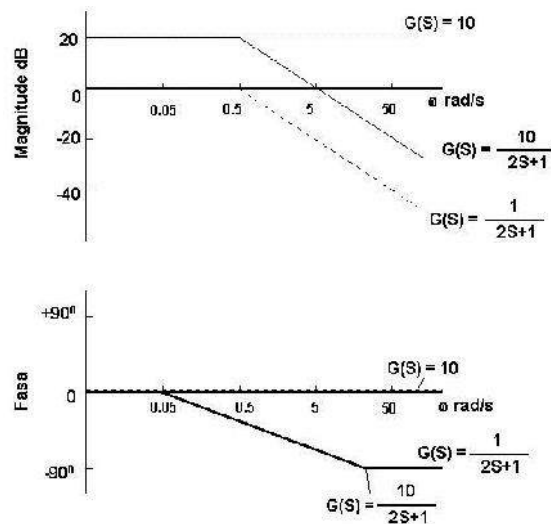
Gambar asimtot dari diagram Bode untuk sebuah sistem yang mempunyai fungsi

$$\text{alih } G(s) = \frac{10}{2s + 1}$$

Jawab:

Terdapat dua bentuk fungsi alih yaitu 10 dan $1/(2s+1)$. Plot Bode menggambarkan masing-masing fungsi alih tersebut kemudian menjumlahkannya. Sebuah sistem dengan fungsi alih $G(s) = 10$ adalah suatu tetapan sistem. Plot akan terlihat seperti gambar 7.1. Magnitude tetap dalam dB adalah $20 \log 10 = 20$. Fase = 0° .

Sebuah sistem dengan fungsi alih $G(s)=1/(2s+1)$ mempunyai satu kutub dan tanpa nol, tetapan waktu $\tau = 2s$. Plot mempunyai titik pecah $1/\tau = 1/2 = 0,5$ detik dan asimtot serta penjumlahan dua plot Bode menghasilkan Gambar 7.7.

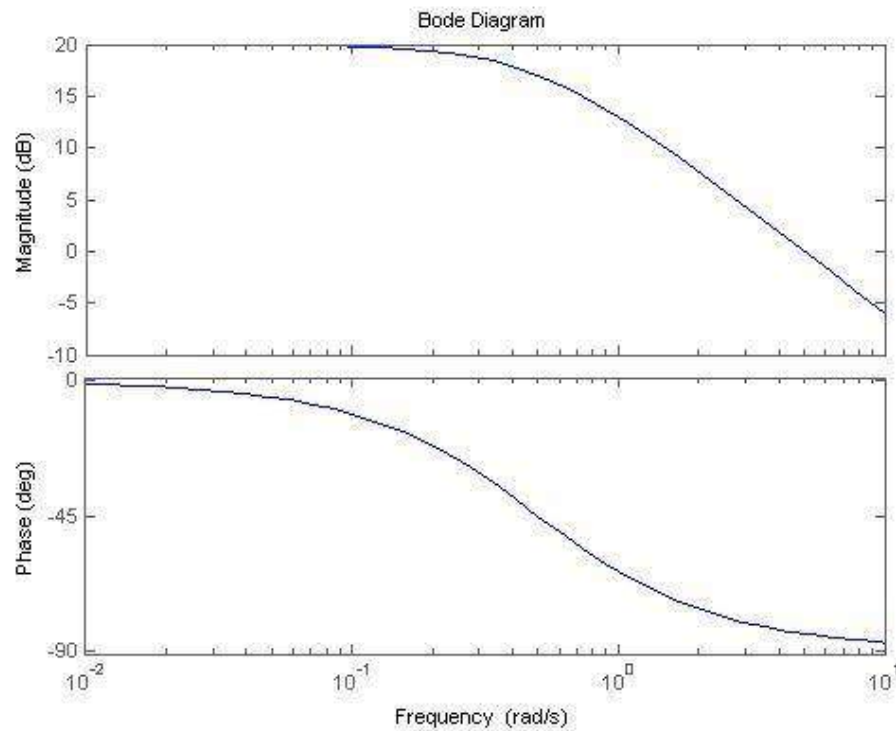


Gambar VII.8 Plot Bode hasil contoh 1

Dengan bantuan software Matlab untuk menggambar Plot Bode system $G(s)$ dapat diketikkan:

```
num = [10];
den = [2 1];
bode (num,den)
```

sehingga tampil Plot Bode system $G(s)$ seperti pada Gambar 7.9

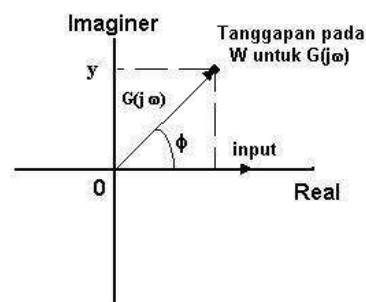


Gambar VII.9 Plot Bode system $G(s)$ pada contoh 1

7.4 Diagram Nyquist

Diagram Nyquist digunakan untuk menentukan perilaku sebuah sistem dengan masukan sinusoidal. Diagram Nyquist adalah plot polar dari tanggapan frekuensi sistem.

Keluaran diagram Nyquist, untuk masukan sinusoidal unit-amplitude pada frekuensi sudut khusus, adalah ditentukan dengan menggambarkan sebuah garis panjang ke magnitude $|G(j\omega)|$ pada sudut fase ϕ dengan sumbu nyata (Gambar 7.10). Masukan sinusoidal ke dalam sistem menjadi efektif digambarkan dengan garis dari magnitude 1 yang terbentang sepanjang sumbu nyata.



Gambar VII.10 Penggambaran sebuah titik pada diagram Nyquist

Pada penggambaran diagram Nyquist terdapat empat titik kunci yang digambarkan pada diagram: mulai plot dimana $\omega = 0$, plot berakhir pada $\omega = \infty$; dimana plot melintasi sumbu nyata, yaitu $\phi = 0^\circ$ atau $\pm 180^\circ$; dan dimana plot melintasi sumbu imajiner, yaitu $\phi = \pm 90^\circ$. Untuk sebuah sistem orde satu atau sistem mengikut sederhana, bentuk fungsi alihnya adalah

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (7.24)$$

Jadi fungsi tanggapan frekuensi $G(j\omega)$ adalah

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (7.25)$$

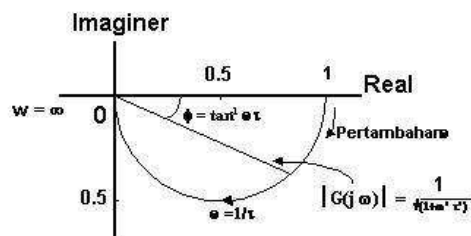
$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left[\frac{1}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} + \frac{\omega^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}\right]} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (7.26)$$

Fase ϕ diberikan oleh bagian khayal dibagi dengan bagian nyata menjadi

$$\tan \phi = \frac{-\omega\tau/(1 + \omega^2\tau^2)}{1/(1 + \omega^2\tau^2)} \quad (7.27)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \omega\tau$$

Jika $\omega = 0$, maka $|G(j\omega)| = 1$ & $\phi = 0^\circ$. Hal ini juga pada titik yang mana plot melintasi sumbu real. Jika ω cenderung ∞ , maka $|G(j\omega)|$ cenderung 0 dan $\phi = -90^\circ$. Jika $\omega = 1/\tau$, maka $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ dan $\phi = -45^\circ$. Gambar 7.11 menunjukkan plot Nyquist dan berbentuk semi lingkaran.



Gambar VII.11 Diagram Nyquist untuk $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$

Untuk sistem orde-dua dengan fungsi alih

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.28)$$

Tanggapan frekuensi fungsi $|G(j\omega)|$ diberikan oleh

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (7.29)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

Sehingga magnitudo dalam dB adalah

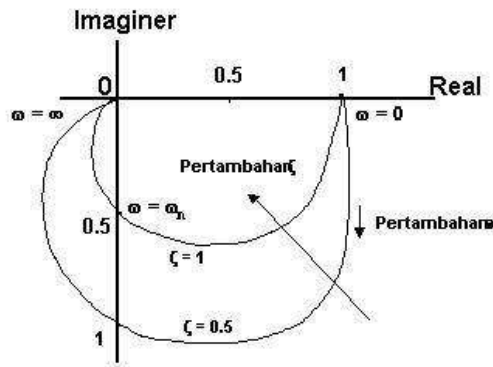
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]^2\}}} \quad (7.30)$$

Dan fase adalah

$$\tan \phi = -\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (7.31)$$

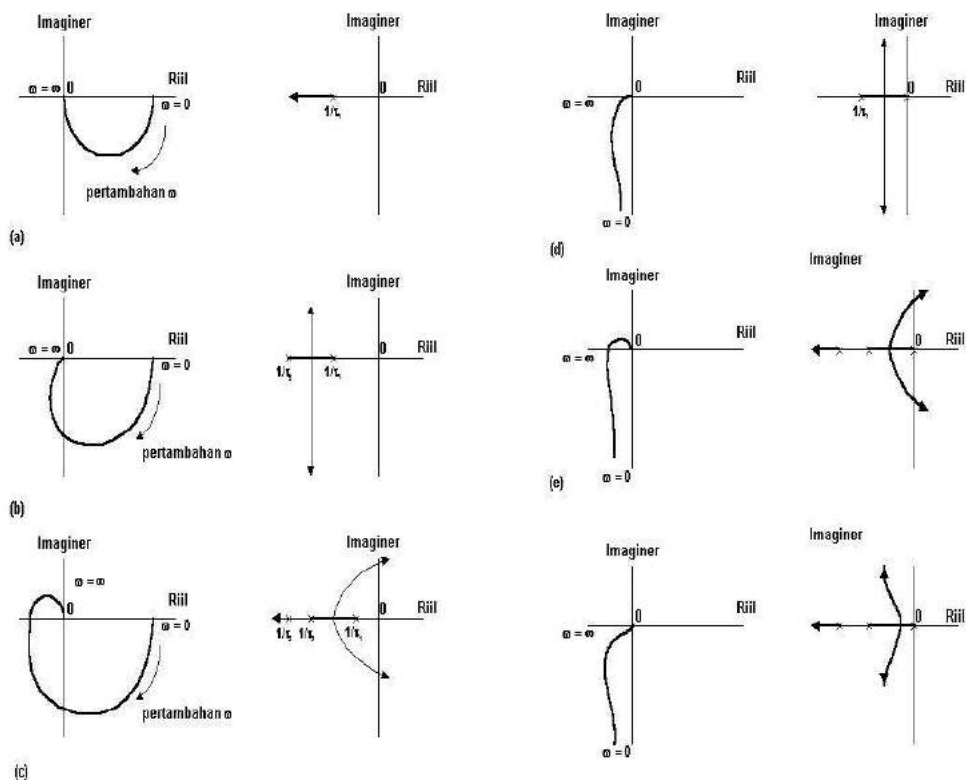
$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right]$$

Jika $\omega = 0$, maka $|G(j\omega)| = 1$ & $\phi = 0^\circ$. Jika $\omega = \infty$, maka $|G(j\omega)| = 0$ dan $\phi = -180^\circ$. Kedua titik tersebut melintasi sumbu nyata. Jika $\omega = \omega_n$, maka $|G(j\omega)| = 1/2\zeta$ dan $\phi = -90^\circ$, titik ini melintasi sumbu khayal. Gambar 7.12 menunjukkan plot Nyquist hasil dari rasio peredaman yang berbeda.



Gambar VII.12 Plot Nyquist untuk $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Gambar 7.13 menunjukkan beberapa contoh diagram Nyquist dan kesetaraannya dengan diagram kedudukan akar



Gambar VII.13 Diagram Nyquist dan kesetaraannya dengan diagram kedudukan akar:

- (a) $G(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$
- (b) $G(s) = 1/(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$
- (c) $G(s) = 1/(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)$

$$(d) G(s) = 1/s(\tau_1 s + 1)$$

$$(e) G(s) = 1/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$$

$$(f) G(s) = (\tau s + 1)/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$$

Contoh 2:

Soal:

Gambarkan diagram Nyquist dari sistem yang mempunyai fungsi alih

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$

Jawab:

Tanggapan frekuensi fungsi $|G(j\omega)|$ adalah

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{(2j\omega+1)(-\omega^2+j\omega+1)} = \frac{1}{(1-3\omega^2)+j(3\omega-2\omega^3)} \\ &= \frac{(1-3\omega^2)-j(3\omega-2\omega^3)}{(1-3\omega^2)+j(3\omega-2\omega^3)} \end{aligned}$$

magnitude dalam dB adalah

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{[(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-2\omega^3)^2]}}$$

Dan fase adalah

$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{3\omega-2\omega^3}{1-3\omega} \right]$$

Saat $\omega = 0$, maka $|G(j\omega)| = 1$ & $\phi = 0^\circ$. Jika $\omega = \infty$, maka $|G(j\omega)| = 0$ dan $\phi = 90^\circ$. Titik-titik potong pada sumbu nyata diberikan oleh $\phi = 0^\circ$ atau $\pm 180^\circ$. Untuk $\phi = -180^\circ$, maka $\tan \phi = -0$ dan didapatkan

$$3\omega - 2\omega^3 = 0$$

Ini berarti $\omega = 0$ atau $\sqrt{(3/2)} = 1,2$ rad/detik. Dengan nilai tersebut, didapatkan nilai magnitude sebesar

$$\frac{1}{\sqrt{[(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-2\omega^3)^2]}} = \frac{1}{\sqrt{[(1-3(3/2))^2 + 0]}}$$

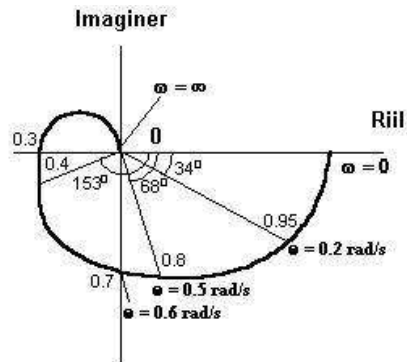
Atau -0,3. Titik-titik yang melintasi sumbu khayal diberikan oleh $\phi = \pm 90^\circ$. Untuk $\omega = \infty$, maka $|G(j\omega)| = 0$ dan $\phi = +90^\circ$. Untuk $\phi = -90^\circ$, maka $\tan \phi = -\infty$ dan diperoleh

$$1 - 3\omega^2 = 0$$

Ini berarti $\omega = 1/\sqrt{3} = 0,6$ rad/detik. Dengan nilai tersebut, didapatkan nilai magnitude sebesar

$$\frac{1}{\sqrt{[(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-2\omega^3)^2]}} = \frac{1}{\sqrt{[0 - (\sqrt{3} - 2/3\sqrt{3})^2 + 0]}}$$

Atau -0,7. Gambar 7.14 menunjukkan hasil plot Nyquist contoh 2.

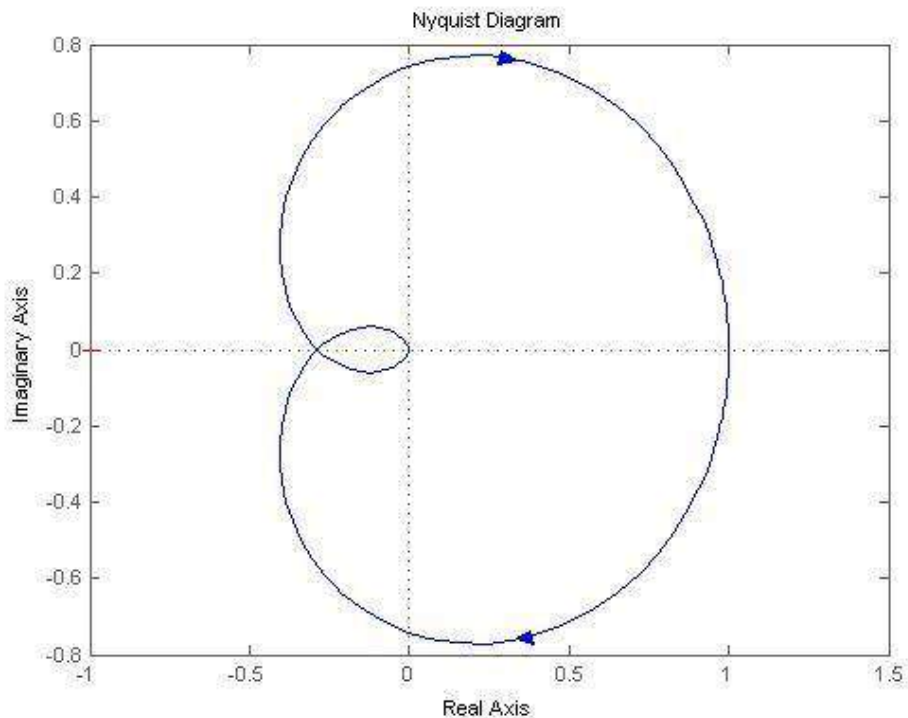


Gambar VII.14 Contoh soal nomor 2

Dengan bantuan software Matlab dapat diketikkan:

```
num = [1];
den = conv([2 1], [1 1 1]);
nyquist(num, den)
```

sehingga menghasilkan diagram Nyquist system $G(s)$ seperti pada Gambar 7.15

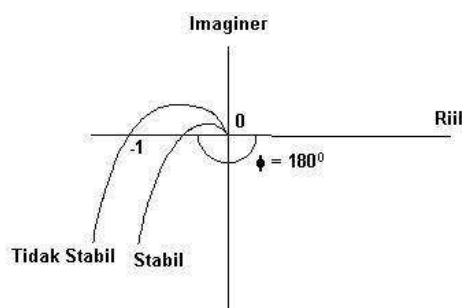


Gambar VII.15 Diagram Nyquist dari system $G(s)$

7.5 Kriteria kestabilan Nyquist

Jika masukan suatu sistem berbentuk sinusoidal, maka keluaran sistem tersebut sinusoidal dengan frekuensi sudut yang sama tetapi amplitude dan fasenya berbeda. Ketidakstabilan terjadi bila masukan sistem adalah sinusoidal kemudian magnitude kalang terbuka > 1 ketika fase kalang terbuka mengikut 180° . Jika sistem kalang terbuka stabil, maka sistem kalang tertutup stabil.

Gambar 7.16 menunjukkan implikasi kriteria kestabilan Nyquist untuk sistem kalang terbuka. Sudut fase 180° berarti sebuah titik magnitude keluar sepanjang sumbu nyata negatif. Jika magnitude pada fase tidak lebih dari 1, maka plot polar harus tidak mendekati titik -1 pada sumbu nyata, jika sistem tersebut stabil.



Gambar VII.16 Plot Nyquist stabil dan tidak stabil

Sumber Kepustakaan :

- 1) Auslander, David M., Yasundo Takahshi, Michael J. Rabins. 1974. *Introducing Systems and Control*. McGraw-Hill, Inc.
- 2) Bolton, W., 1999. *Control Engineering*, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing.
- 3) Ogata, K. 1997. *Modern Control Engineering*, 3rd, Prentice Hall Inc.
- 4) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. *Dasar Sistem Pengaturan*, Satya Wacana. Semarang.
- 5) Hartanto, Thomas Wahyu Dwi dan Y. Wahyu Agung Prasetyo. 2002. *Analisis dan Desain Sistem Kontrol dengan Matlab*, Andi. Yogyakarta.

Soal-soal bab 11:

- 1) Carilah magnitude dan fase dari fungsi alih berikut

$$(a) \frac{5}{s+2}$$

$$(b) \frac{2}{s(s+1)}$$

- 2) Gambarkan asimtot dari plot Bode untuk sistem yang mempunyai fungsi alih berikut ini

$$(a) G(s) = \frac{10}{s(0,1s+1)}$$

$$(b) G(s) = \frac{1}{(2s+1)(0,5s+1)}$$

- 3) Gambarkan diagram Nyquist dari sistem yang mempunyai fungsi alih berikut ini

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

VIII. JENIS-JENIS PENGENDALI DAN PERANGKAT KERAS SISTEM KENDALI

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan jenis-jenis pengendali,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan elemen-elemen pengukuran,
- 3) Mahasiswa dapat menjelaskan elemen-elemen koreksi elektrik, hidrolik dan pneumatik, dan
- 4) Mahasiswa dapat memberikan contoh sistem kendali.

8.1 Pendahuluan

Kestabilan suatu sistem sangat dipengaruhi oleh alat kendali (pengendali) yang digunakan pada sistem. Oleh karena itu harus dipelajari sifat-sifat pengendali tersebut. Pada dasarnya ada tiga jenis pengendali baik yang digunakan sendiri-sendiri ataupun gabungan dari dua atau lebih jenis pengendali.

Jenis-jenis pengendali yang dimaksud adalah:

- a. Pengendali proporsional (P),
- b. Pengendali integral (I),
- c. Pengendali derivatif (D),
- d. Penggabungan dua atau lebih pengendali (yang disusun secara paralel): PI, PD, dan PID.

8.2 Kendali proporsional (P)

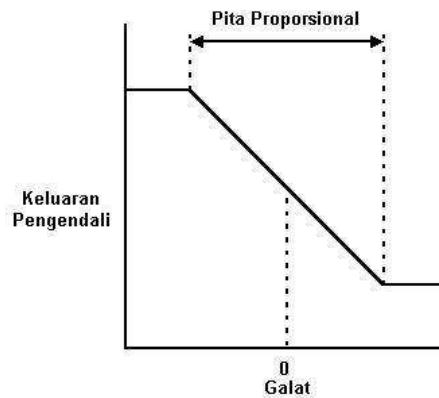
Pengendali proporsional pada dasarnya adalah suatu penguat yang mempunyai penguatan konstan, dalam hal ini keluaran pengendali berbanding langsung dengan masukan. Masukan sebagai isyarat galat e merupakan sebuah fungsi waktu, jadi

$$\text{keluaran} = K_p e \quad (8.1)$$

dengan K_p adalah suatu tetapan yang disebut *penguatan proporsional*. Keluaran dari pengendali hanya gayut pada galat pada suatu waktu tertentu. Fungsi alih $G_c(s)$ untuk pengendali ini adalah

$$G_c(s) = K_p \quad (8.2)$$

Galat yang besar pada beberapa waktu menghasilkan keluaran pengendali yang besar pula pada waktu tersebut. Tetapan penguatan cenderung hanya terdapat pada galat dengan jangkauan tertentu, rangkaian ini disebut *proportional band*. Gambar 8.1 menunjukkan grafik keluaran terhadap galat yang merupakan garis lurus dengan kemiringan K_p yang ada di dalam jangkauan *pita proporsional*.



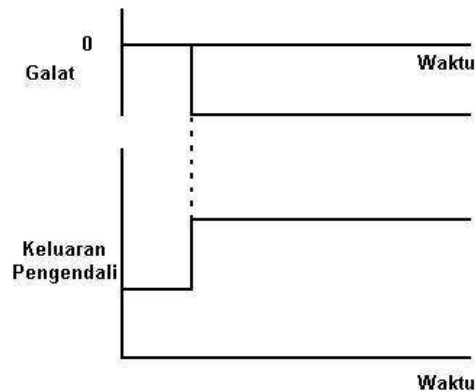
Gambar VIII.1 Kendali proporsional.

yang mempunyai sifat:

- a. Tanggapan awal cepat, dan
- b. Dalam keadaan statis, galat tak pernah nol, kecuali bila penguatan pengendali sama dengan tak berhingga.

Seringkali keluaran pengendali diekspresikan dengan persentase dari keluaran pengendali yang mungkin. Jadi perubahan 100% pada pengendali berhubungan dengan perubahan galat dari satu perbedaan besar pada pita proporsional terhadap yang lain (Gambar 8.2), sehingga

$$K_p = \frac{100}{\text{pita proporsional}} \quad (8.3)$$

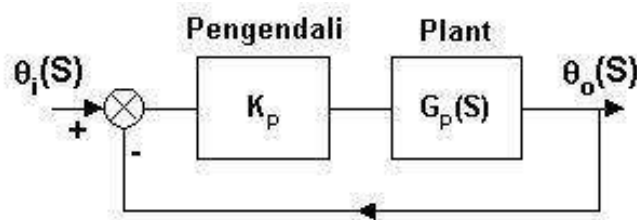


Gambar VIII.2 Sistem dengan kendali proporsional.

Gambar 8.3 menunjukkan suatu sistem kendali proporsional dasar, yang mempunyai fungsi alih kalang terbuka sebagai berikut:

$$G_o(s) = K_p G_p(s) \quad (8.4)$$

$G_p(s)$ adalah fungsi alih *plant*.



Gambar VIII.3 Sistem kendali proporsional.

Contoh 1:

Soal:

Suatu sistem kendali proporsional seperti tampak pada Gambar 8.3 mempunyai fungsi alih:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tentukan :

- Jenis sistem
- Galat kondisi tunak bila diberi masukan (i) undak, (ii) tanjak

Jawab:

- Fungsi alih kalang terbuka sistem tersebut adalah:

$$G_o(s) = \frac{K_p}{s(s+1)}, \text{ jadi termasuk jenis sistem 1.}$$

b. Karena jenis sistem 1, maka galat kondisi tunak untuk masukan:

(i) Undak $\theta_i(s) = 1/s$ adalah

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + G_o(s)} \right] \theta_i(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + [K_p / s(s+1)]} \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

(ii) Tanjak $\theta_i(s) = 1/s^2$ adalah

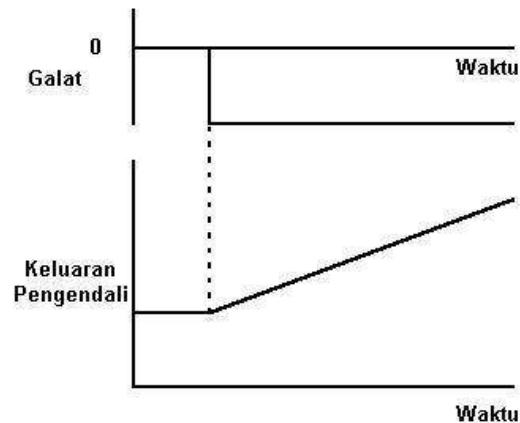
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + [K_p / s(s+1)]} \frac{1}{s^2} \right] \\ &= \frac{1}{K_p} \end{aligned}$$

8.3 Kendali integral (I)

Keluaran kendali integral sebanding dengan integral galat isyarat e terhadap waktu, yaitu

$$\text{Keluaran} = K_i \int_0^t e \, dt \quad (8.5)$$

Dalam hal ini K_i adalah suatu tetapan yang disebut penguatan integral (s^{-1}). Gambar 8.3 menunjukkan peristiwa ketika galat dalam bentuk undak. Integral antara t dan 0 berada di bawah area grafik antara t dan 0 .



Gambar VIII.4 Galat kendali integral.

Dengan mengambil alihragam Laplace dari persamaan (8.5) akan menghasilkan fungsi alih pengendali integral sebesar

$$G_C(s) = \frac{\text{output}(s)}{e(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (8.6)$$

Sistem pada Gambar 8.4, kendali integral memberikan fungsi alih lintasan maju $(K_i/s)G_P(s)$ dan fungsi alih kalang terbuka

$$G_o(s) = \left(\frac{K_i}{s} \right) G_P(s) \quad (8.7)$$

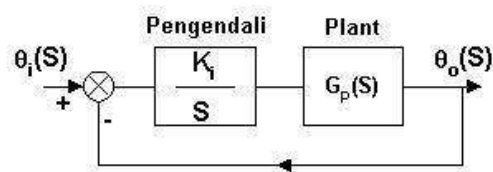
Pada kendali integral diperkenalkan pula istilah s di bagian penyebut yang menaikkan tingkat jenis sistem dengan 1.

Contoh 2:

Soal:

Suatu sistem kendali integral seperti tampak pada Gambar 8.5 mempunyai fungsi alih:

$$G_P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



Gambar VIII.5 Kendali integral.

Tentukan :

- Jenis sistem
- Galat kondisi tunak bila diberi masukan (i) undak, (ii) tanjak
- Stabilitas sistem, dan bandingkan dengan contoh 1.

Jawab:

- Fungsi alih kalang terbuka sistem tersebut adalah:

$$G_o(s) = \frac{K_i}{s^2(s+1)},$$

jadi termasuk jenis sistem 2.

- Karena jenis sistem 2, maka galat kondisi tunak untuk masukan:

- Undak $\theta_i(s) = 1/s$ adalah

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + G_o(s)} \right] \theta_i(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + [K_p / s^2 (s+1)]} \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

- Tanjak $\theta_i(s) = 1/s^2$ adalah

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + [K_p / s^2 (s+1)]} \frac{1}{s^2} \right] \\ &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

- Untuk situasi kendali proporsional pada Contoh 1 mempunyai fungsi alih:

$$G(s) = \frac{K_p / [s(s+1)]}{1 + K_p / [s(s+1)]} = \frac{K_p}{s(s+1) + K_p} \text{ dengan persamaan karakteristik}$$

sebagai berikut:

$$s^2 + s + K_p = 0.$$

Analisis kestabilan Routh untuk persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K_P \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & K_P & \end{array}, \text{ kolom pertama semuanya positif dan } K_P > 0$$

untuk kendali integral pada soal ini, mempunyai fungsi alih:

$$G(s) = \frac{K_i / [s^2(s+1)]}{1 + K_i / [s^2(s+1)]} = \frac{K_i}{s^2(s+1) + K_i}$$

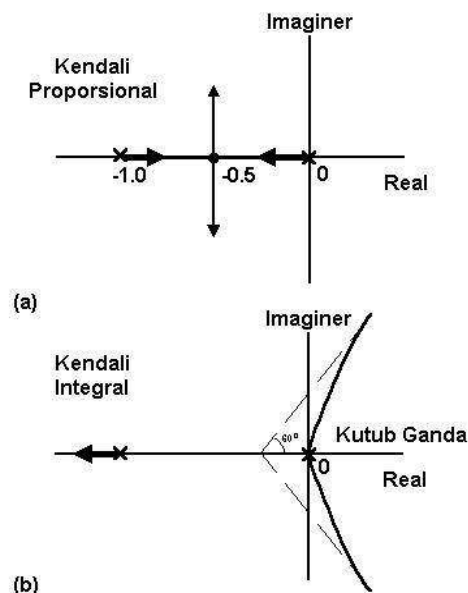
sehingga persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$s^3 + s^2 + K_i = 0,$$

Analisis kestabilan Routh untuk sistem tersebut adalah:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 0 & \\ s^2 & 1 & K_i & \\ s^1 & -K_i & & \\ s^0 & K_i & & \end{array}, \text{ sistem tak stabil karena pada kolom I ada nilai negatif}$$

Jadi perubahan sistem kendali dari proporsional menjadi integral menyebabkan sistem menjadi tak stabil. Gambar 8.6 menunjukkan kedudukan akar dari kedua sistem kendali.



Gambar VIII.6 Contoh 2.

Respon system pada contoh soal 1 dapat ditampilkan menggunakan bantuan software Matlab. Dengan menentukan $K_p = 5$, maka:

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

sehingga numerator dan denominator dapat kita tentukan sebagai berikut pada Command Window Matlab:

```
num = [5]
den = [1 1 5]
```

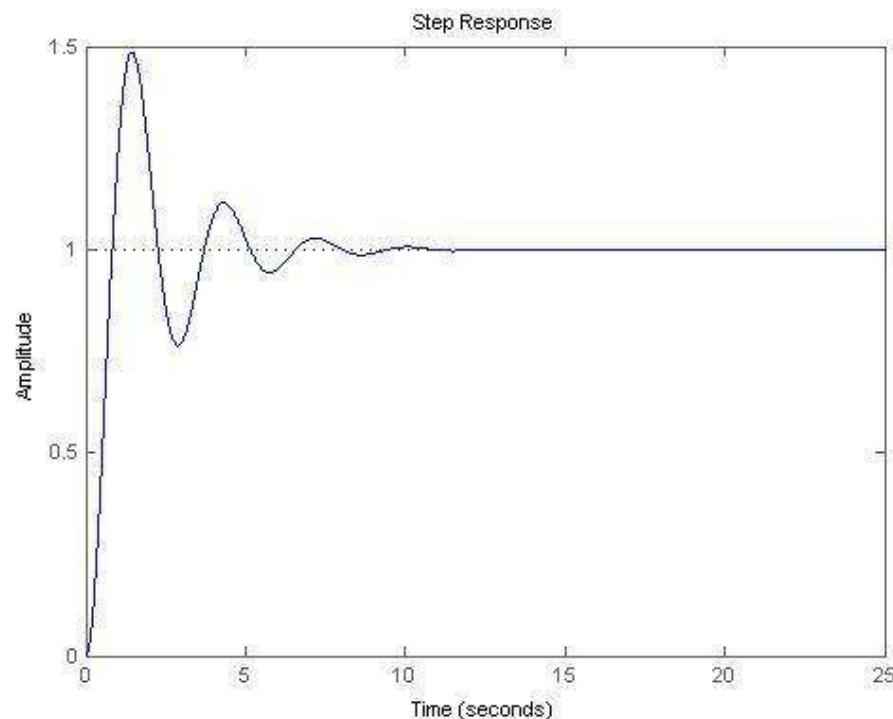
kemudian waktu tampilan dapat diatur $t = 25$ detik dengan pencacah waktu 0,1 detik dengan mengetikkan pada Command Window:

```
t=0:0.1:25;
```

untuk plotting pada grafik dapat dilakukan dengan perintah:

```
step(num, den, t)
```

sehingga muncul grafik sebagai berikut:



Gambar VIII.7 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional

Pada Gambar 8.7 dapat dilihat bahwa system mencapai kestabilan pada detik ke 12.

Respon system pada contoh soal 2 dapat ditampilkan menggunakan bantuan software Matlab. Dengan menentukan $K_i = 2,5$, maka:

$$G(s) = \frac{2,5}{s^3 + s^2 + 2,5}$$

sehingga numerator dan denominator dapat kita tentukan sebagai berikut pada Command Window Matlab:

```
num = [2.5]
den = [1 1 0 2.5]
```

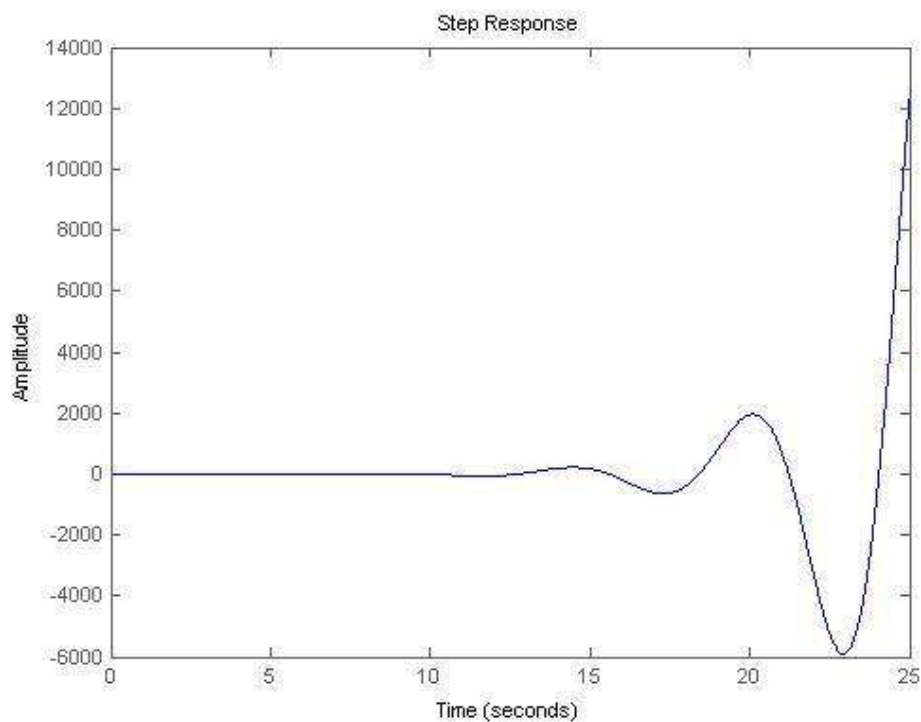
kemudian waktu tampilan dapat diatur $t = 25$ detik dengan pencacah waktu 0,1 detik dengan mengetikkan pada Command Window:

```
t=0:0.1:25;
```

untuk plotting pada grafik dapat dilakukan dengan perintah:

```
step(num, den, t)
```

sehingga muncul grafik sebagai berikut:



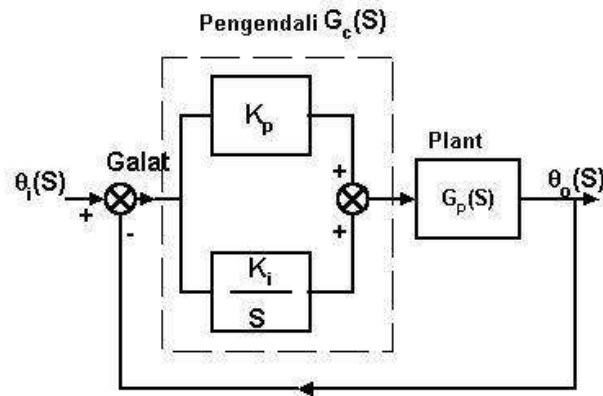
Gambar VIII.8 Respon Sistem dengan Kendali Integral

Pada Gambar 8.8 dapat dilihat bahwa system tidak stabil.

8.4 Kendali proporsional+integral (PI)

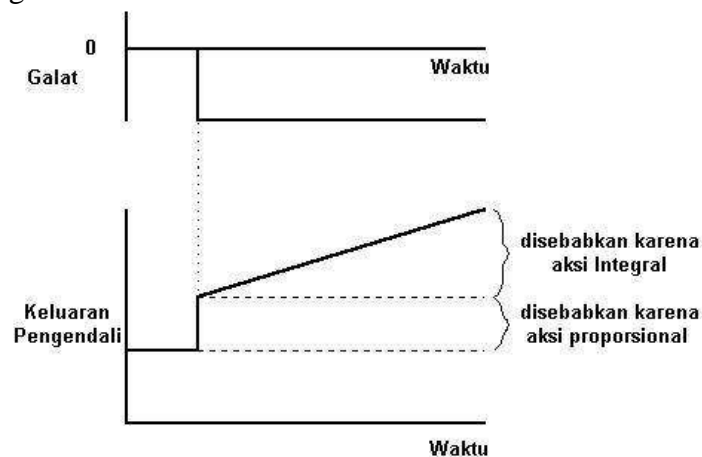
Reduksi hasil stabilitas relatif dari pemakaian kendali integral, digunakan kendali proporsional dan integral (Gambar 8.9), dengan keluaran pengendali kombinasi sebagai berikut:

$$Keluaran = K_p e + K_i \int_0^t e dt \quad (8.8)$$



Gambar VIII.9 Kendali proporsional plus integral.

Gambar 8.10 menunjukkan keluaran pengendali yang terjadi pada sistem ketika diberi masukan galat undak.



Gambar VIII.10 Kendali proporsional plus integral.

Fungsi alih dalam bentuk alihragam Laplace untuk pengendali PI adalah

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p + \frac{K_i}{s} \\ &= \frac{sK_p + K_i}{s} \\ &= \frac{K_p[s + (K_i / K_p)]}{s} \end{aligned}$$

(K_p/K_i) disebut tetapan waktu integral τ_i . Jadi

$$G_c(s) = \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]}{s} \quad (8.9)$$

dan fungsi alih kalang terbukanya adalah

$$G_o(s) = \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]G_p(s)}{s} \quad (8.10)$$

Contoh 3:

Soal:

Suatu sistem kendali proporsional plus integral seperti tampak pada Gambar 8.7 mempunyai fungsi alih:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tentukan :

- Jenis sistem berapa?
- Galat kondisi tunak bila diberi masukan (i) undak, (ii) tanjak
- Stabilitas sistem, dan bandingkan dengan contoh 1 dan 2.

Jawab:

- Fungsi alih kalang terbuka sistem tersebut adalah:

$$G_o(s) = \frac{K_p[s + (1/\tau_i)]G_p(s)}{s} = \frac{K_p(s+0,5)}{s^2(s+1)}$$

Jadi termasuk jenis sistem ke-2.

- Karena jenis sistem 2, maka galat kondisi tunak untuk masukan:

- Undak $\theta_i(s) = 1/s$ adalah $e_{ss} = 0$
- Tanjak $\theta_i(s) = 1/s^2$ adalah $e_{ss} = 0$

- c. Untuk situasi kendali proporsional plus integral mempunyai fungsi alih:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{K_p [s + (1/\tau_i)] G_p(s) / s}{1 + K_p [s + (1/\tau_i)] G_p(s) / s} \\
 &= \frac{K_p [s + 0,5] [1/s(s+1)] / s}{1 + K_p [s + 0,5] [1/s(s+1)] / s}, \\
 &= \frac{K_p [s + 0,5]}{s^2 (s+1) + K_p [s + 0,5]}
 \end{aligned}$$

$$K_p / K_i = \tau_i$$

$$K_i = (1/\tau_i) K_p$$

$$K_i = 0,5 K_p$$

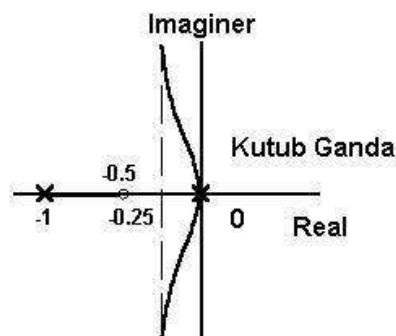
mempunyai persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$s^3 + s^2 + K_p s + 0,5 K_p = 0$$

dengan baris Routh

$$\begin{array}{l|ll}
 s^3 & 1 & K_p \\
 s^2 & 1 & 0,5K_p \\
 s^1 & 0,5K_p & \\
 s^0 & 0,5K_p &
 \end{array}$$

Kolom I semua anggota positif, sehingga sistem tersebut stabil jika $K_p > 0$. Penggambaran tempat kedudukan akarnya tampak pada Gambar 8.11 berikut ini:



Gambar VIII.11 Contoh 3.

Respon system pada contoh soal ini dapat ditampilkan menggunakan bantuan software Matlab. Dengan menentukan $K_p = 5$, maka:

$$G(s) = \frac{5s + 2,5}{s^3 + s^2 + 5s + 2,5}$$

sehingga numerator dan denominator dapat kita tentukan sebagai berikut pada Command Window Matlab:

```
num = [5 2.5]
den = [1 1 5 2.5]
```

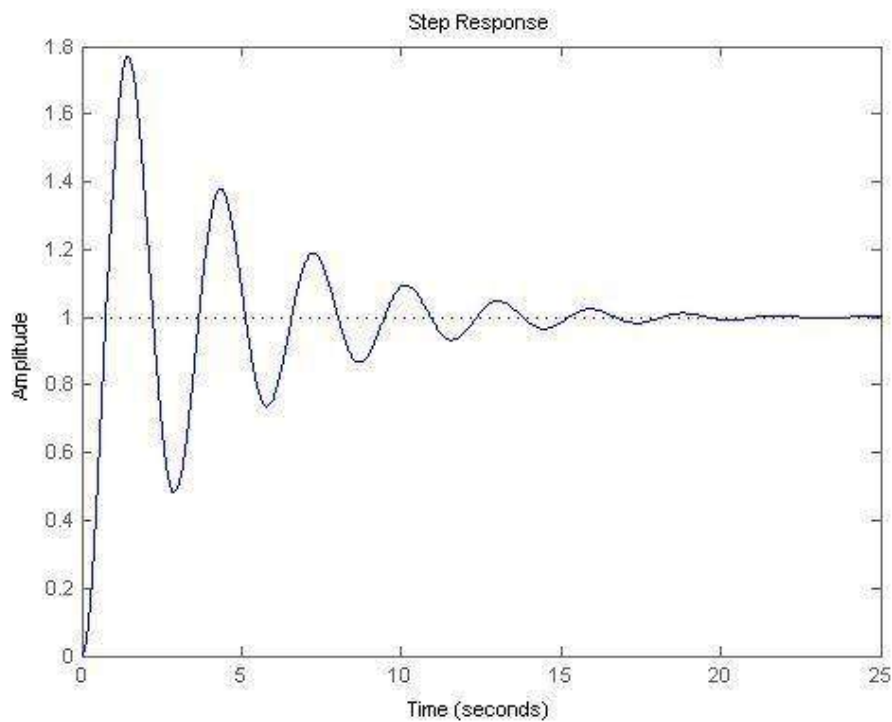
kemudian waktu tampilan dapat diatur $t = 25$ detik dengan pencacah waktu 0,1 detik dengan mengetikkan pada Command Window:

```
t=0:0.1:25;
```

untuk plotting pada grafik dapat dilakukan dengan perintah:

```
step(num,den,t)
```

sehingga muncul grafik sebagai berikut:



Gambar VIII.12 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional plus Integral

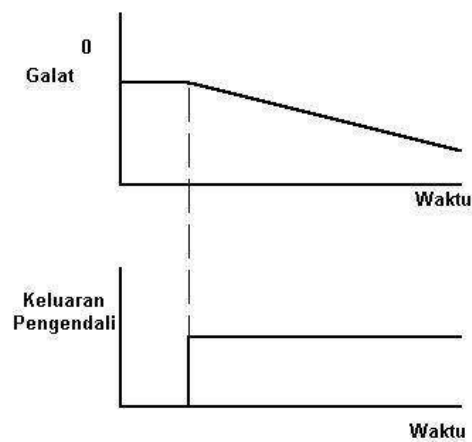
Pada Gambar 8.12 dapat dilihat bahwa system mulai stabil pada detik ke 20.

8.5 Kendali derivatif (D)

Pengendali bentuk derivatif mempunyai keluaran yang sebanding dengan galat e terhadap waktu, yaitu

$$\text{Keluaran} = K_d \frac{de}{dt} \quad (8.11)$$

dengan K_d adalah penguatan diferensial dan mempunyai satuan s . Gambar 8.13 menunjukkan grafik keluaran pengendali derivatif bila diberi masukan galat tanjak.



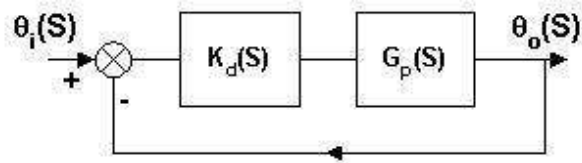
Gambar VIII.13 Keluaran pengendali derivatif dengan masukan galat tanjak.

Fungsi alih pengendali derivatif dalam bentuk alihragam Laplace dari persamaan 8.11 adalah

$$G_c(s) = K_d s \quad (8.12)$$

Untuk sistem kendali kalang tertutup yang menggunakan pengendali derivatif (Gambar 8.14) mempunyai fungsi alih kalang terbuka sebagai berikut

$$G_o(s) = \frac{K_d s G_p(s)}{1 + K_d s G_p(s)} \quad (8.13)$$



Gambar VIII.14 Kendali derivatif kalang tertutup.

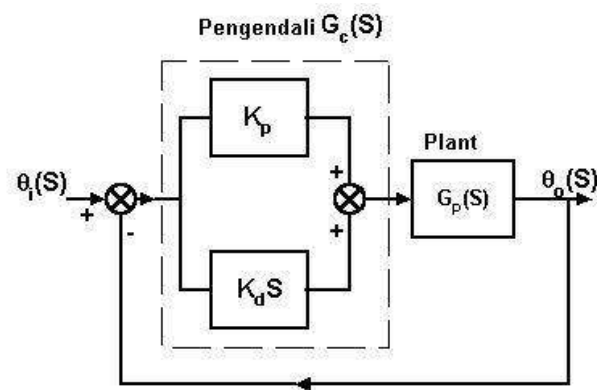
8.6 Kendali proporsional+derivatif (PD)

Jika kendali derivatif digunakan bersama dengan kendali proporsional (Gambar 8.15), maka fungsi alih kalang terbukanya adalah:

$$G_o(s) = (K_p + K_d s)G_p(s) \quad (8.14)$$

$$G_o(s) = K_d[(1/\tau_d) + s]G_p(s)$$

dalam hal ini $\tau_d = K_d / K_p$ disebut tetapan waktu derivatif.



Gambar VIII.15 Kendali proporsional plus derivatif.

Contoh 4:

Soal:

Suatu sistem kendali proporsional + derivatif seperti tampak pada Gambar 8.15 mempunyai fungsi alih:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tentukan :

- Jenis sistem berapa?
- Galat kondisi tunak bila diberi masukan (i) undak, (ii) tanjak
- Bagaimanakah stabilitas sistemnya? Tetapan waktu derivatif = 2 detik.

Jawab:

- a. Fungsi alih kalang terbuka sistem tersebut adalah:

$$G_o(s) = \frac{K_d[s + (1/\tau_d)]G_p(s)}{s} = \frac{K_d(s + 0,5)}{s^2(s + 1)}$$

jadi termasuk jenis sistem ke-1.

- b. Karena jenis sistem 2, maka galat kondisi tunak untuk masukan:

(i) Undak $\theta_i(s) = 1/s$ adalah $e_{ss} = 0$

(ii) Tanjak $\theta_i(s) = 1/s^2$ adalah

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + [K_d(s + 0,5)/s(s + 1)]} \frac{1}{s^2} \right]$$

$$= \frac{1}{0,5K_p}$$

$$(1/\tau_d) = 0,5 = K_p / K_d$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_p}$$

- c. Untuk situasi kendali proporsional + derivatif mempunyai fungsi alih:

$$G(s) = \frac{K_d(s + 0,5)G_p(s)}{1 + K_p(s + 0,5)G_p(s)}$$

$$= \frac{K_d(s + 0,5)[1/s(s + 1)]}{1 + K_d(s + 0,5)[1/s(s + 1)]}$$

$$= \frac{K_d(s + 0,5)}{s(s + 1) + K_d(s + 0,5)}$$

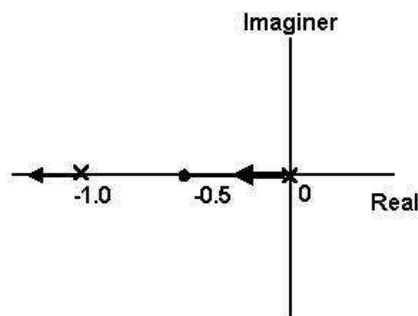
mempunyai persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$s^2 + (1 + K_d)s + 0,5K_d = 0$$

dengan baris Routh

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & 1 & 0,5K_d \\ s^1 & 1 + K_d & \\ s^0 & 0,5K_d & \end{array}$$

Kolom I semua anggota positif, sehingga sistem tersebut stabil jika $K_d > 0$. Penggambaran tempat kedudukan akarnya tampak pada Gambar 8.16.



Gambar VIII.16 Contoh 4.

Respon system pada contoh soal ini dapat ditampilkan menggunakan bantuan software Matlab. Dengan menentukan $K_d = 10$, maka:

$$G(s) = \frac{10s + 5}{s^2 + 11s + 5}$$

sehingga numerator dan denominator dapat kita tentukan sebagai berikut pada Command Window Matlab:

```
num = [10 5]
den = [1 11 5]
```

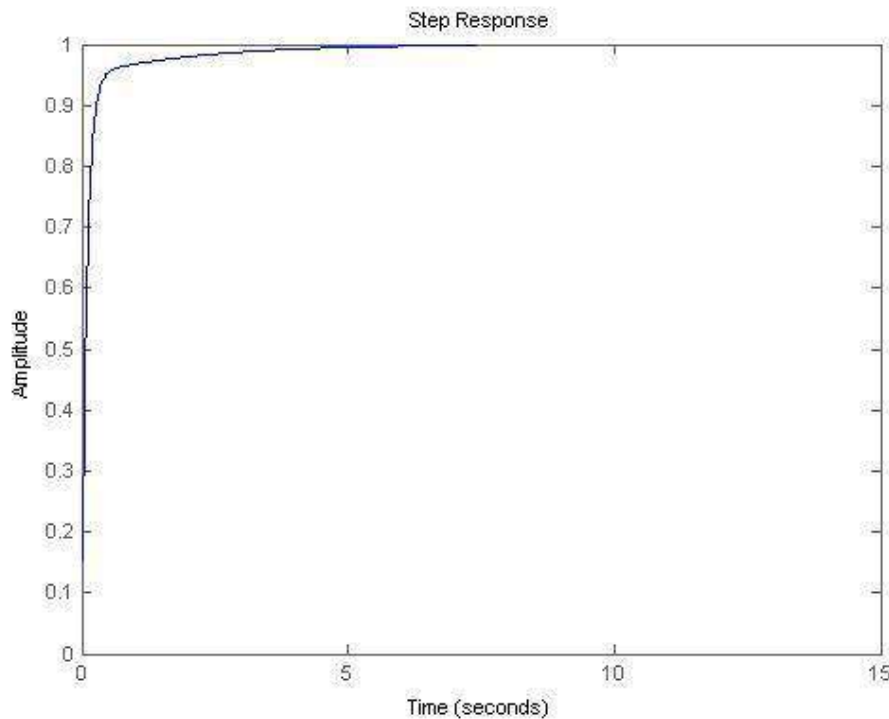
kemudian waktu tampilan dapat diatur $t = 15$ detik dengan pencacah waktu 0,1 detik dengan mengetikkan pada Command Window:

```
t=0:0.1:15;
```

untuk plotting pada grafik dapat dilakukan dengan perintah:

```
step(num,den,t)
```

sehingga muncul grafik sebagai berikut:



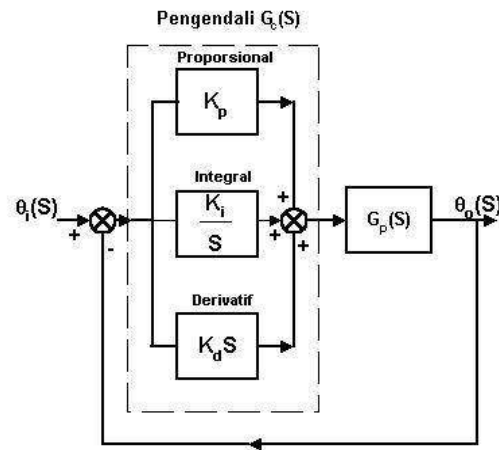
Gambar VIII.17 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional plus Derivatif

Pada Gambar 8.17 dapat dilihat bahwa system mulai stabil pada detik ke 7.

8.7 Kendali proporsional-integral-derivatif (PID)

Pengendali PID sering disebut juga sebagai pengendali tiga-term, dengan bentuk sistem seperti tampak pada Gambar 8.18, bila diberikan masukan sebuah galat e , maka akan memberikan keluaran

$$keluaran = K_p e + K_i \int_0^t e dt + K_d \frac{de}{dt} \quad (8.15)$$



Gambar VIII.18 Kendali PID

Fungsi alih pengendali adalah

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p s} + \frac{K_d s}{K_p} \right) \\ &= K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Fungsi alih kalang terbuka dari Gambar 8.18 adalah

$$\begin{aligned} G_c(s) &= G_c(s)G_p(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right) G_p(s) \\ G_c(s) &= \frac{K_p (\tau_i s + 1 + \tau_i \tau_d s^2) G_p(s)}{\tau_i s} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Contoh 5:

Soal:

Suatu sistem kendali PID seperti tampak pada Gambar 8.18 mempunyai fungsi alih:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tentukan :

- a. Jenis sistem berapa?

- b. Galat kondisi tunak bila diberi masukan (i) undak, (ii) tanjak
- c. Di mana posisi nol dan kutub dari kalang terbuka?
- d. Bagaimanakah stabilitas sistemnya? Tetapan waktu derivatif = 0,5 detik, dan tetapan waktu integral = 2 detik.

Jawab:

- a. Fungsi alih kalang terbuka sistem tersebut adalah:

$$G_o(s) = \frac{K_p (\tau_i s + 1 + \tau_i \tau_d s^2) G_p(s)}{\tau_i s}$$

$$G_o(s) = \frac{K_p (1 + 2s + s^2) G_p(s)}{2s} = \frac{K_p (1 + 2s + s^2)}{2s^2 (s + 1)}$$

$$G_o(s) = \frac{K_p (s + 1)}{2s^2}$$

jadi termasuk jenis sistem ke-2.

- b. Karena jenis sistem 2, maka galat kondisi tunak untuk masukan:
 - (i) Undak $\theta_i(s) = 1/s$ adalah $e_{ss} = 0$
 - (ii) Tanjak $\theta_i(s) = 1/s^2$ adalah $e_{ss} = 0$
- c. Fungsi alih kalang terbuka pada jawaban (a) terlihat nilai nol = -1 dan kutub ganda = 0.
- d. Untuk situasi kendali PID mempunyai fungsi alih:

$$G(s) = \frac{K_p (s + 1) / 2s^2}{1 + K_p (s + 1) / 2s^2}$$

$$= \frac{K_p (s + 1)}{2s^2 + K_p (s + 1)}$$

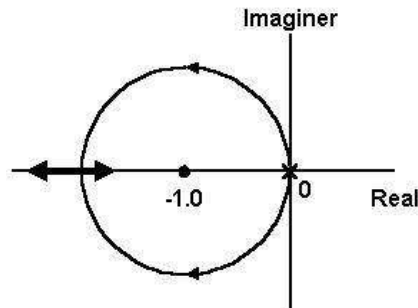
dengan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$2s^2 + K_p s + K_p = 0$$

dengan baris Routh

$$\begin{array}{l|l} s^2 & 2 \quad K_p \\ s^1 & K_p \\ s^0 & K_p \end{array}$$

Kolom I semua anggota positif, sehingga sistem tersebut stabil jika $K_p > 0$. Penggambaran tempat kedudukan akarnya tampak pada Gambar 8.19 berikut ini:



Gambar VIII.19 Contoh 5.

Respon system pada contoh soal ini dapat ditampilkan menggunakan bantuan software Matlab. Dengan menentukan $K_p = 5$, maka:

$$G(s) = \frac{5s + 5}{2s^2 + 5s + 5}$$

sehingga numerator dan denominator dapat kita tentukan sebagai berikut pada Command Window Matlab:

```
num = [5 5]
den = [2 5 5]
```

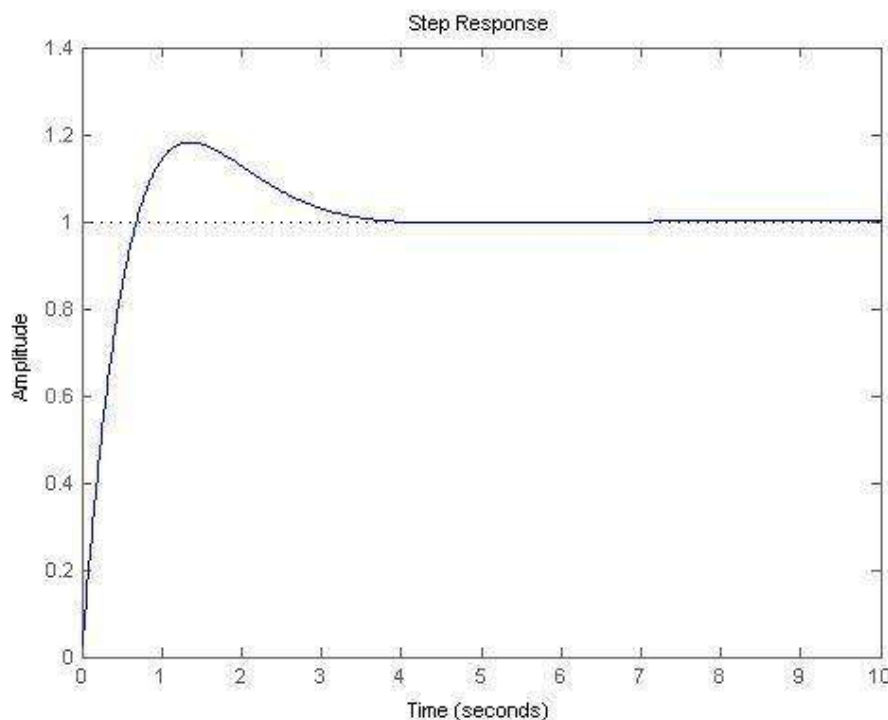
kemudian waktu tampilan dapat diatur $t = 15$ detik dengan pencacah waktu 0,1 detik dengan mengetikkan pada Command Window:

```
t=0:0.1:15;
```

untuk plotting pada grafik dapat dilakukan dengan perintah:

```
step(num,den,t)
```

sehingga muncul grafik sebagai berikut:



Gambar VIII.20 Respon Sistem dengan Kendali Proporsional plus Integral plus Derivatif

Pada Gambar 8.20 dapat dilihat bahwa system mulai stabil pada detik ke 4.

8.8 Pengaturan penguatan pengendali

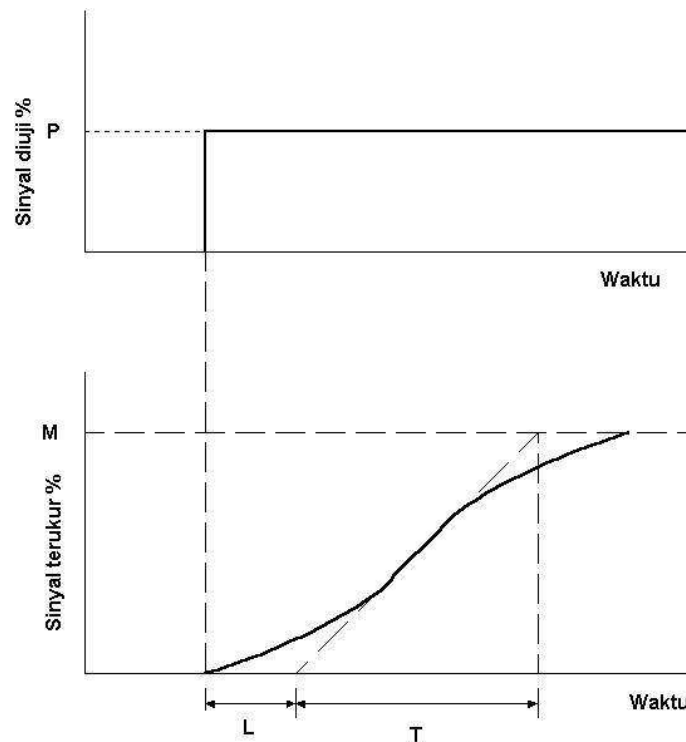
Pengaturan penguatan pengendali gayut pada jenis pengendali, untuk pengendali proporsional saja, maka peubah yang diatur hanya penguat proporsional; jika pengendali jenis PI, maka peubah yang diatur ada dua yaitu penguat proporsional dan penguat integral; terakhir, jika pengendali jenis PID, maka peubah yang diatur ada tiga, yaitu penguat proporsional, penguat integral, dan penguat derivatif. Pemilihan peubah-peubah tersebut menentukan lokasi kutub-kutub dan nol-nol yang menentukan stabilitas sistem kendali.

Penalaan digunakan untuk menjabarkan proses penyeleksian *setting* pengendali terbaik. Metode yang biasa digunakan untuk mengatur peubah kendali adalah hasil temuan dari Ziegler dan Nichols, yang terdiri atas dua kriteria, yaitu kriteria kurva reaksi proses (Gambar 8.21 menunjukkan isyarat uji dan jenis tanggapan) dan kriteria siklus akhir.

Isyarat uji P ditunjukkan sebagai persentase perubahan unit koreksi. Peubah yang diukur ditunjukkan sebagai persentase dari rentang skala-penuh, tangen menggambarkan gradien maksimum dari grafik. Pada Gambar 8.16, gradien maksimum R adalah M/T . Waktu antara isyarat uji dimulai dan tangen memotong

sumbu waktu grafik dan diberi notasi L . Tabel 8.1 menunjukkan kriteria yang direkomendasikan oleh Ziegler-Nichols untuk men-*set* nilai-nilai P , R , dan L .

Untuk kriteria siklus akhir menggunakan cara yang berbeda, yaitu aksi integral dan derivatif direduksi ke nilai minimumnya. Tetapan proporsional K_p diset rendah dan kemudian secara perlahan dinaikkan. Terjadinya nilai kritis tetapan proporsional K_{pc} dicatat dan waktu periodik osilasi T_c diukur. Tabel 8.2 menunjukkan kriteria yang direkomendasikan oleh Ziegler-Nichols yang dihubungkan dengan nilai K_{pc} . Pita proporsional kritis sebesar $100/K_{pc}$.



Gambar VIII.21 Kurva proses reaksi.

Tabel VIII.1 Kriteria kurve reaksi proses Ziegler dan Nichols.

Mode kendali	K_p	K_i	K_d
Proporsional saja	P/RL		
Proporsional+integral	$0,9 P/RL$	$1/3,33L$	
Proporsional+integral+derivatif	$1,2 P/RL$	$1/2 L$	$0,5 L$

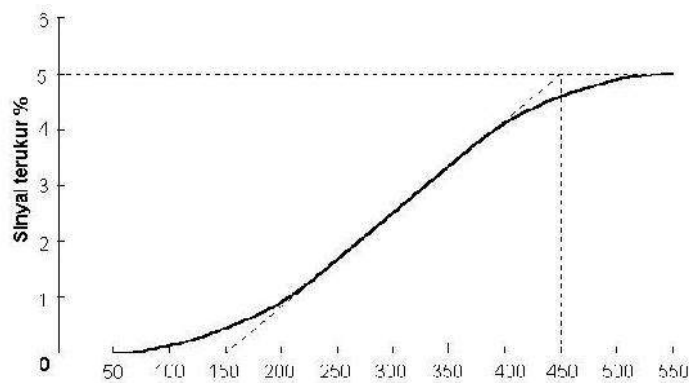
Tabel VIII.2 Kriteria siklus akhir Ziegler dan Nichols.

Mode kendali	K_p	K_i	K_d
--------------	-------	-------	-------

Proporsional saja	$0,5 K_{pc}$		
Proporsional+integral	$0,45 K_{pc}$	$1,2/T_c$	
Proporsional+integral+derivatif	$0,6 K_{pc}$	$2,0/T_c$	$8/T_c$

Contoh 6:**Soal:**

Tentukan *setting* dari K_p , K_i , dan K_d yang diberikan pada pengendali tiga-mode yang dalam hal ini mempunyai kurva reaksi proses seperti tampak pada Gambar 8.22, isyarat uji = 6% mengubah posisi katup kendali.



Gambar VIII.22 Contoh 6.

Jawab:

Gradien maksimum pada Gambar 8.22 memberikan tunda $L = 150$ detik dan gradien R dari $5/300 = 0,017\%/s$ sehingga

$$K_p = \frac{1,2P}{RL} = \frac{1,2 \times 6}{0,017 \times 150} = 2,82$$

$$K_i = \frac{1}{2L} = \frac{1}{2 \times 150} = 0,0033 s^{-1}$$

$$K_d = 0,5L = 0,5 \times 150 = 75 s$$

Contoh 7:**Soal:**

Penalaan suatu sistem kendali PID dengan menggunakan metode siklus akhir mendapatkan osilasi mulai terjadi pada pita proporsional diturunkan hingga 30%. Osilasi mempunyai periode waktu 500 detik. Berapakah nilai yang tepat untuk K_p , K_i , dan K_d ?

Jawab:

Nilai kritis $K_{pc} = 100/\text{pita proporsional kritis} = 100/30 = 3,33$. Jadi dengan menggunakan Tabel 8.12 diperoleh

$$K_p = 0,6K_{pc} = 0,6 \times 3,33 = 2,0$$

$$K_i = \frac{2}{T_c} = \frac{2}{500} = 0,004s^{-1}$$

$$K_d = \frac{T_c}{8} = \frac{500}{8} = 0,004s$$

8.9 Umpanbalik kecepatan

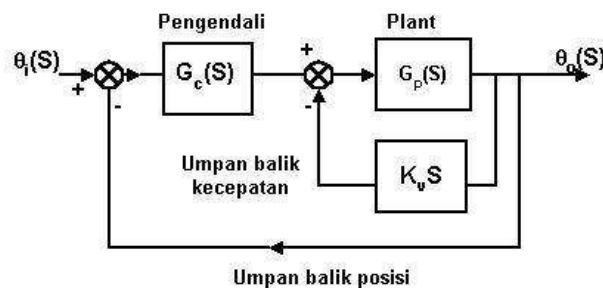
Umpanbalik kecepatan digunakan untuk menggambarkan sebuah kalang umpanbalik yang dalam hal ini isyarat umpanbalik bukan merupakan nilai keluaran tetapi laju perubahan keluaran terhadap waktu. Persamaan yang menyatakan hubungan antara keluaran umpanbalik pada lintasan umpanbalik dengan masukan adalah

$$\text{Keluaran} = K_v \frac{d\theta_o}{dt} \quad (8.19)$$

dan fungsi alih lintasan umpanbaliknya sebagai berikut

$$H(s) = K_v s \quad (8.20)$$

dalam hal ini K_v adalah tetapan penguatan umpanbalik.



Gambar VIII.23 Sistem dengan umpanbalik kecepatan dan posisi.

Umpanbalik posisi digunakan pada sistem kendali untuk keluaran nilai umpanbalik. Bagian ini bangkit segera setelah digunakan pada sistem kendali untuk mengendalikan posisi beberapa obyek, umpanbalik posisi kemudian mengukur posisi obyek bersama-sama dengan umpanbalik kecepatan yang mengukur kecepatan obyek. Gambar 8.23 menunjukkan sistem dengan kedua

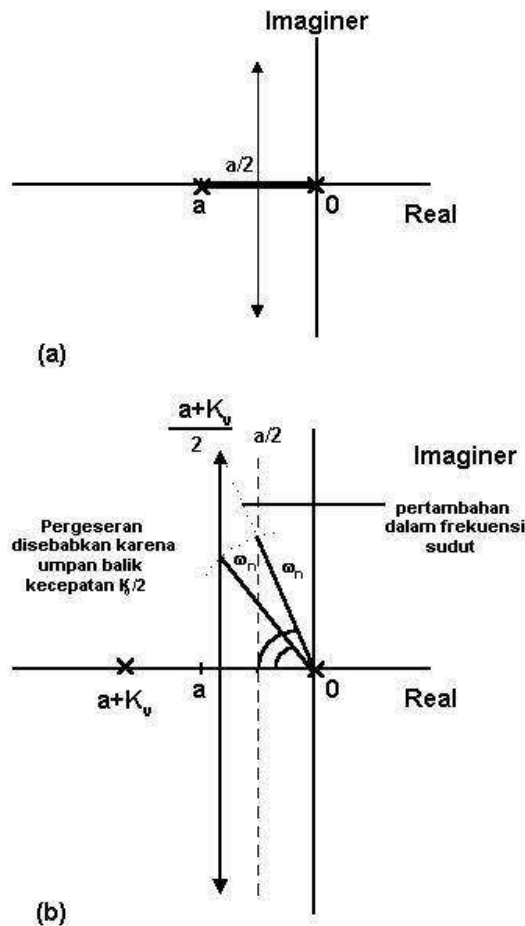
jenis umpanbalik. Fungsi alih kalang terbuka sistem tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$G_o(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_p(s)K_v s} \tag{8.21}$$

dan fungsi alih kalang tertutupnya adalah

$$G_o(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_p(s)K_v s + G_c(s)G_p(s)} \tag{8.22}$$

Efek umpanbalik kecepatan pada sistem kendali adalah untuk mengurangi $\tan \phi$ dan konsekuensinya akan menurunkan persentase *overshoot*. Gambar 8.24 menunjukkan diagram kedudukan akar dari sistem kendali yang tanpa umpanbalik kecepatan (Gambar 8.24 (a)) dengan yang menggunakan umpanbalik kecepatan (Gambar 8.24 (b)).

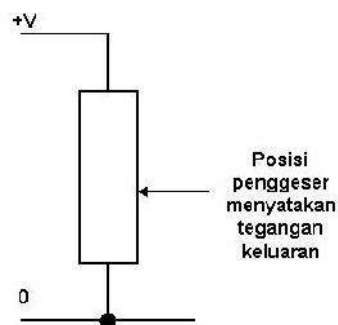


Gambar VIII.24 Efek umpanbalik kecepatan:
 (a) tanpa, dan (b) dengan umpanbalik kecepatan.

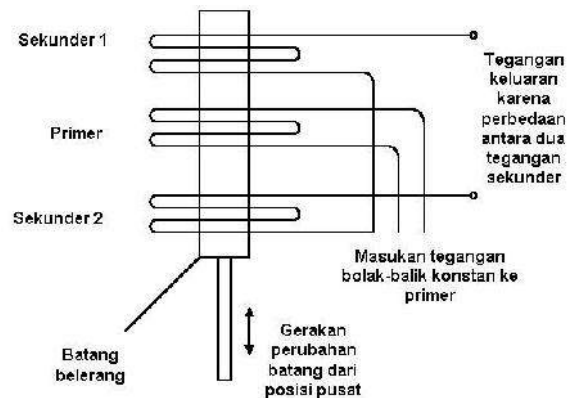
8.10 Perangkat keras sistem kendali

Perangkat keras yang dipakai dalam sistem kendali dibagi menjadi dua, yaitu elemen pengukur dan elemen pengoreksi. Elemen-elemen pengukur terdiri atas sensor pemindahan linear, pemindahan sudut, regangan, tekanan, suhu, dan zahir, sedangkan elemen pengoreksi terdiri atas rele-rele, katup kendali, dan motor. Berikut ini beberapa contoh dari elemen-elemen pengukur (Gambar 8.25 s.d 8.36):

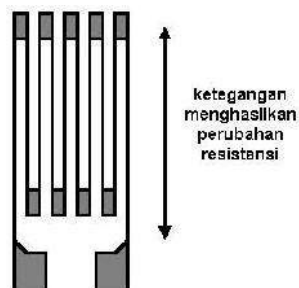
- 1) Detektor-detektor posisi: potensiometer, *LVDT*
- 2) Pengukur regangan: *strain gauge*
- 3) Pengukur kecepatan: tachometer (ac dan dc)
- 4) Pengukur pengukur gerakan: *increment encoder* (linear), *synchro*, dan *absolut encoder* (sudut/angular).
- 5) Pengukur suhu: RTD, NTC, termokopel.
- 6) Pengukur laju aliran zahir: tabung venturi, nosel meter aliran, tabung Dall, piringan *orifice*.



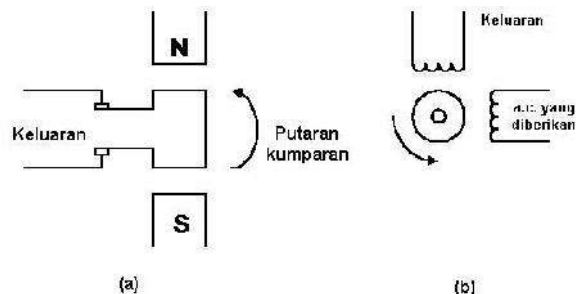
Gambar VIII.25 Potensiometer.



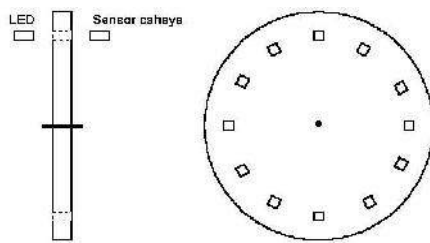
Gambar VIII.26 *LVDT*.



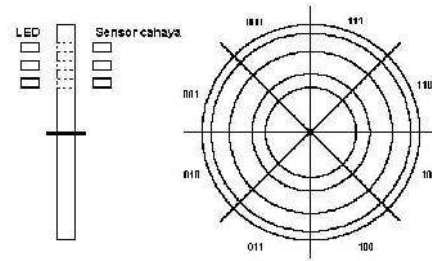
Gambar VIII.27 *Strain gauge*.



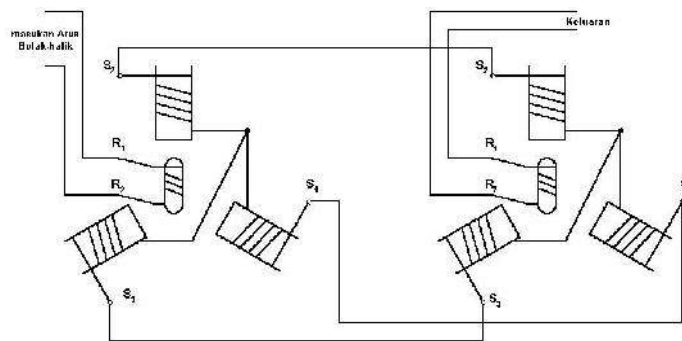
Gambar VIII.28 Tachometer: (a) *dc*, (b) *ac*.



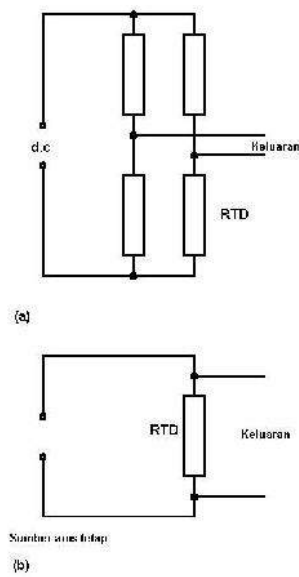
Gambar VIII.29 Incremental encoder.



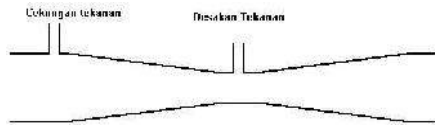
Gambar VIII.30 Absolute encoder.



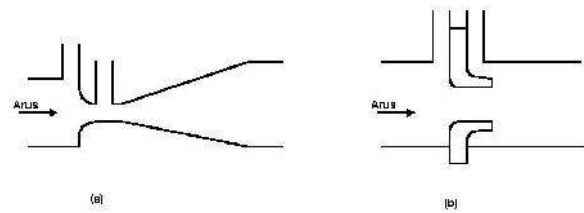
Gambar VIII.31 Synchro error detector.



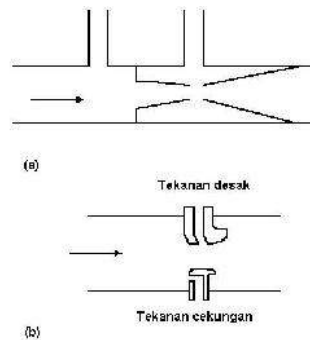
Gambar VIII.32 Rangkaian RTD: (a) jembatan, (b) arus tetap.



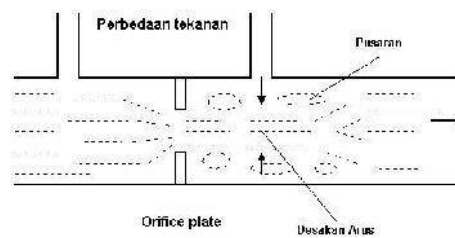
Gambar VIII.33 Tabung venturi.



Gambar VIII.34 (a) nosel venturi,
(b) nosel aliran.



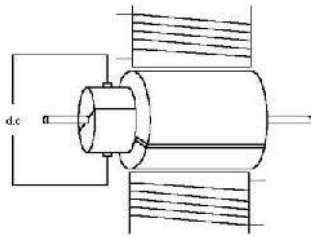
Gambar VIII.35 Meter aliran Dall: (a) tabung, (b) orifice.



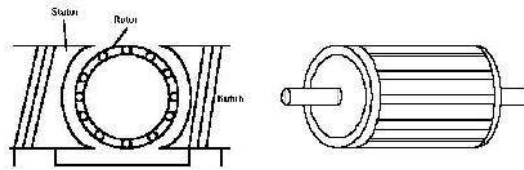
Gambar VIII.36 Meter aliran orifice.

Elemen-elemen pengoreksi (Gambar 8.37 s.d 8.41):

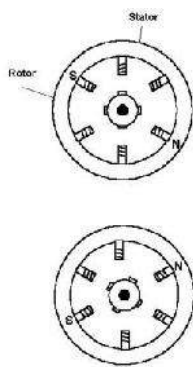
- 1) Elemen pengoreksi elektrik: motor *dc*, motor *ac*, motor langkah, dan rele.
- 2) Elektropneumatik dan hidrolik: katup solenoid, katup kendali.



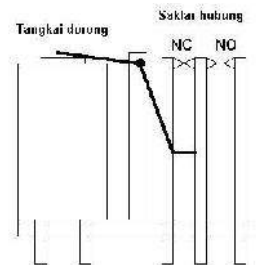
**Gambar VIII.37 Motor
dc.**



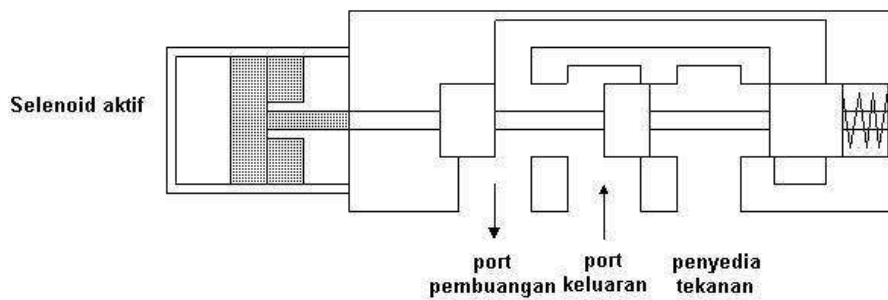
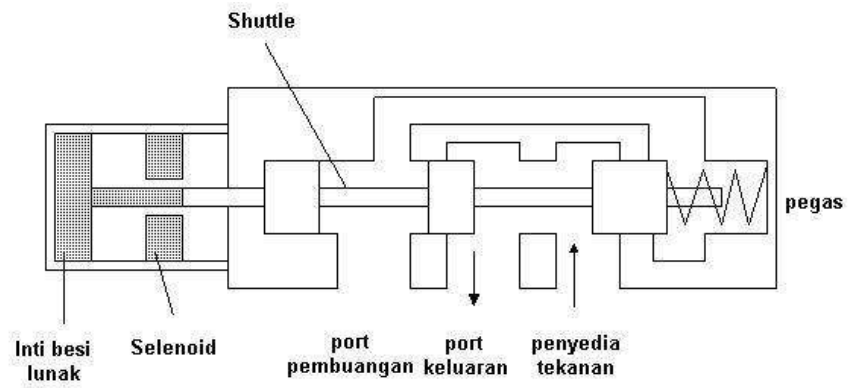
**Gambar VIII.38 Motor
ac.**



Gambar VIII.39 Motor langkah.



Gambar VIII.40 Rele.



Gambar VIII.41 Katup solenoid.**Sumber Kepustakaan :**

- 1) Bolton, W., 1999. Control Engineering, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London.
- 2) Ogata, K. 1997. Modern Control Engineering, 3rd , Prentice Hall Inc. London.
- 3) Pakpahan, Sahat. 1988. Kontrol Otomatik Teori dan Penerapan. Erlangga. Jakarta.
- 4) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. Dasar Sistem Pengaturan, Satya Wacana. Semarang.
- 5) Hartanto, Thomas Wahyu Dwi dan Y. Wahyu Agung Prasetyo. 2002. Analisis dan Desain Sistem Kontrol dengan Matlab, Andi. Yogyakarta.

Soal-soal Bab 8:

- 1) Sebutkan dan jelaskan jenis-jenis sistem kendali!
- 2) Jelaskan kelemahan dan keunggulan masing-masing pengendali!
- 3) Buatlah suatu sistem kendali PID lengkap dengan diagram kotak, fungsi alih kalang terbuka, dan fungsi alih kalang tertutupnya!
- 4) Apakah yang dimaksud dengan umpanbalik kecepatan dan umpanbalik posisi, jelaskan fungsinya!
- 5) Sebutkan contoh-contoh perangkat keras sistem kendali, jelaskan pula fungsinya.

IX. KENDALI PROSES-PROSES DISKRET

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan proses-proses diskret,.
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan metode untuk menggambarkan proses diskret, dan
- 3) Mahasiswa dapat melakukan pemrograman kendali logika terprogram.

9.1 Pendahuluan

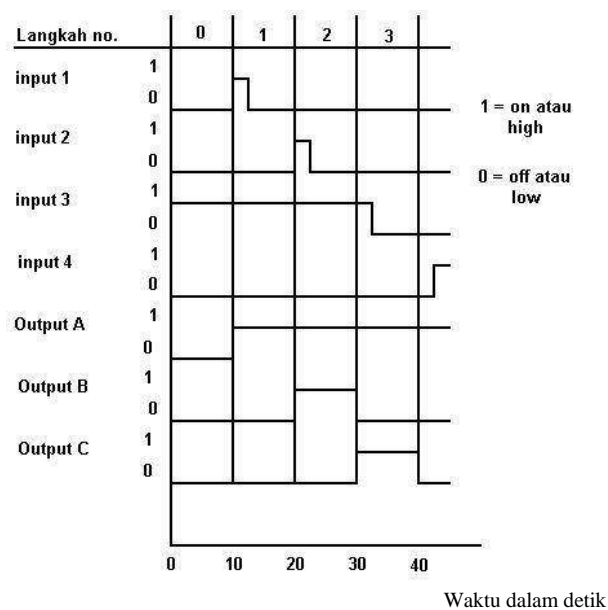
Suatu proses diskret meliputi operasi-operasi yang berbeda dengan masing-masing mempunyai kondisi tertentu untuk memulainya. Oleh karena itu, pengendaliannya berupa urutan operasi, sebagai contoh operasi ke-1 mulai dan operasi ke-2 tidak dapat mulai sampai operasi ke-1 lengkap, operasi ke-3 tidak dapat mulai hingga operasi ke-2 lengkap, dan seterusnya.

9.2 Proses-proses diskret

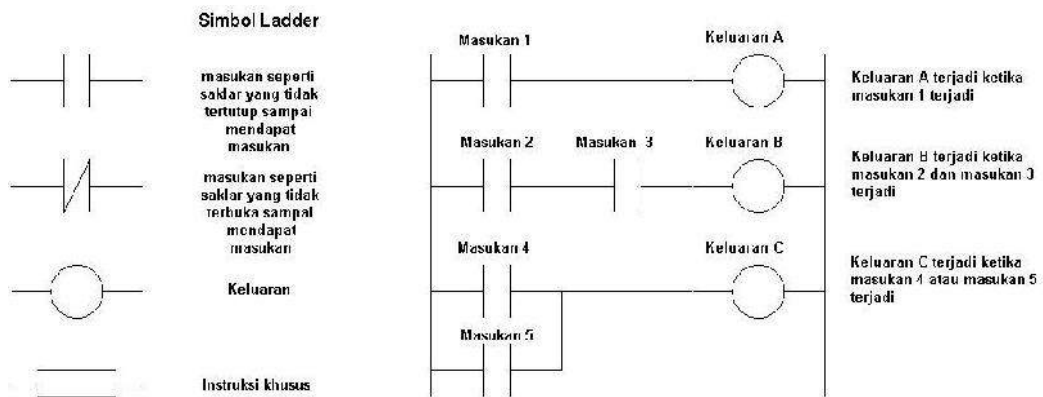
Dengan kendali proses diskret, semua operasi dilakukan secara berurutan, sebuah operasi tunggal dapat berupa proses kendali kalang-tertutup atau kalang-terbuka dan dikendalikan oleh waktu, dengan operasi-operasi dalam urutan perintah tertentu. Berikut ini beberapa metode proses sekuensial:

- 1) Daftar pernyataan
Daftar pernyataan berisi aksi kondisi operasi untuk setiap langkah urutan yang diberikan. Contoh:
Keluaran A terjadi pada saat masukan ke-1 terjadi dengan waktu 100 detik.
Keluaran B terjadi pada saat masukan ke-2 terjadi dengan waktu 10 detik.
Keluaran C terjadi pada saat masukan ke-3 terjadi dengan waktu 10 detik.
- 2) Diagram waktu proses
Sebuah diagram waktu proses adalah grafik yang menggambarkan langkah urutan operasi sebagai fungsi waktu, seperti tampak pada Gambar 9.1.

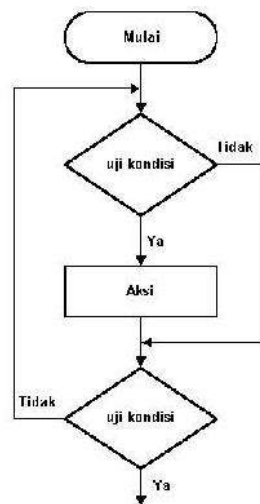
- 3) Diagram tangga
 Diagram tangga menggambarkan setiap langkah proses pada suatu tangga (Gambar 9.2).
- 4) Diagram alir
 Diagram alir menggunakan kotak-kotak untuk menggambarkan setiap langkah dan garis-garis untuk memperlihatkan bagian langkah demi langkah (Gambar 9.3).
- 5) Diagram fungsi sekuensial
 Diagram fungsi sekuensial menggunakan kotak-kotak untuk menggambarkan setiap langkah untuk menunjukkan transisi dari bentuk langkah yang satu ke langkah yang lain (Gambar 9.4).



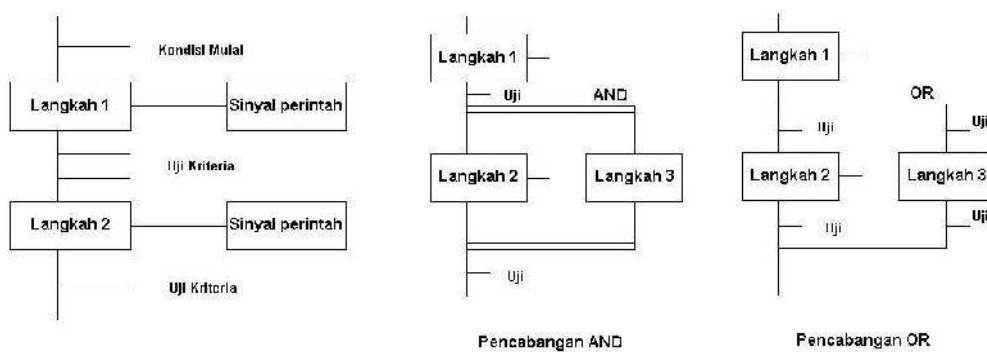
Gambar IX.1 Diagram waktu.



Gambar IX.2 Diagram tangga.



Gambar IX.3 Diagram alir.



Gambar IX.4 Diagram fungsi.

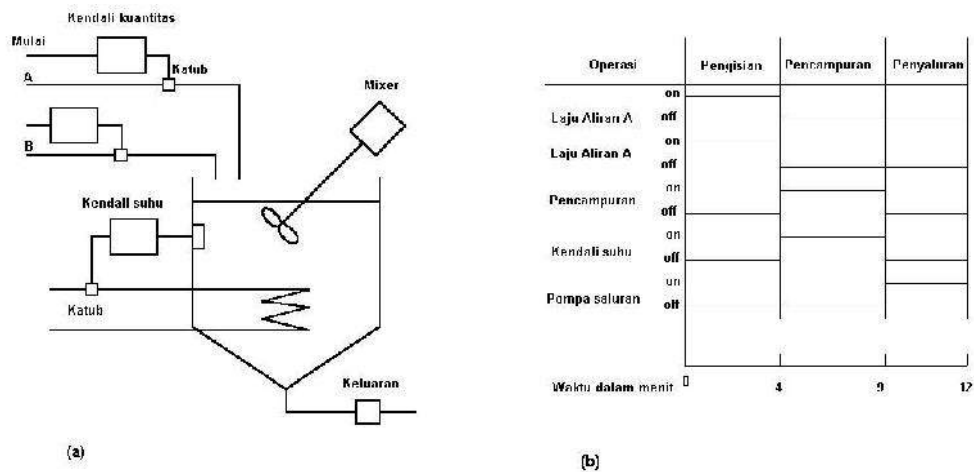
Contoh 1:

Gambarkan diagram proses waktu untuk pencampuran cairan A dan B. Gambar 9.5(a) menunjukkan proses tersebut dan daftar pernyataannya adalah sebagai berikut:

- 1) Tekan tombol mulai. Tangki pencampur mulai terisi dengan jumlah A dan B tertentu, waktu 4 menit.
- 2) Pemanas akan hidup dan pencampur (*mixer*) beroperasi untuk mencampur isi di dalam tangki pencampur, waktu 5 menit.
- 3) Pompa keluar semua isi tangki pencampur, waktu 3 menit.

Penyelesaian:

Gambar 9.5(b) menggambarkan diagram waktu proses tersebut



Gambar IX.5 (a) Pencampuran zalir, (b) Diagram waktu.

9.3 Pengendali logika terprogram (PLC)

Secara umum PLC (*Programmable Logic Control*) dapat dibayangkan seperti sebuah personal komputer konvensional (konfigurasi internal pada PLC mirip sekali dengan konfigurasi internal pada sebuah personal komputer). Akan tetapi dalam hal ini PLC dirancang untuk pembuatan panel listrik (untuk arus kuat). Jadi bisa dianggap bahwa PLC adalah komputernya panel listrik. Ada juga yang menyebutnya dengan PC (*Programmable Controller*).

PLC (*Programmable Logic Controller*) adalah suatu sistem kendali logika terprogram, merupakan piranti elektronik yang dirancang untuk dapat beroperasi secara digital dengan menggunakan memori sebagai media penyimpanan instruksi-instruksi internal untuk menjalankan fungsi-fungsi logika, seperti fungsi pencacah (*counter*), fungsi pewaktu (*pewaktu*), fungsi urutan proses, fungsi aritmatika, dan fungsi yang lainnya dengan cara memprogramnya. PLC secara khusus dirancang untuk dapat menangani suatu sistem kontrol otomatis pada mesin-mesin industri ataupun pada aplikasi-aplikasi lain seperti kendali lampu lalu lintas, air mancur, sistem bagasi pada lapangan terbang, penyiraman lapangan golf secara otomatis, dan lain-lain.

Fungsi lain dari PLC dapat digunakan untuk memonitor jalannya proses pengendalian yang sedang berlangsung, sehingga dapat dengan mudah dikenali urutan kerja (*work sequence*) proses pengendalian pada saat itu.

Diagram Balok dan Memori pada PLC

Pada PLC terdapat beberapa komponen (Gambar 9.6) yaitu :

- 1) Modul Masukan

Modul masukan berfungsi menerima isyarat dari unit pengindera periperal dan memberikan pengaturan isyarat, terminasi, isolasi, atau indikator isyarat masukan. Isyarat-isyarat piranti periferil itu dipindai dan dikomunikasikan melalui modul antarmuka (*interface*) dalam PLC. Terminal masukan mengirimkan isyarat dari kabel yang dihubungkan dengan masukan sensor dan transduser. Modul masukan mempunyai masukan yang berupa isyarat digital maupun isyarat analog (tergantung dengan perangkat masukan yang digunakan).

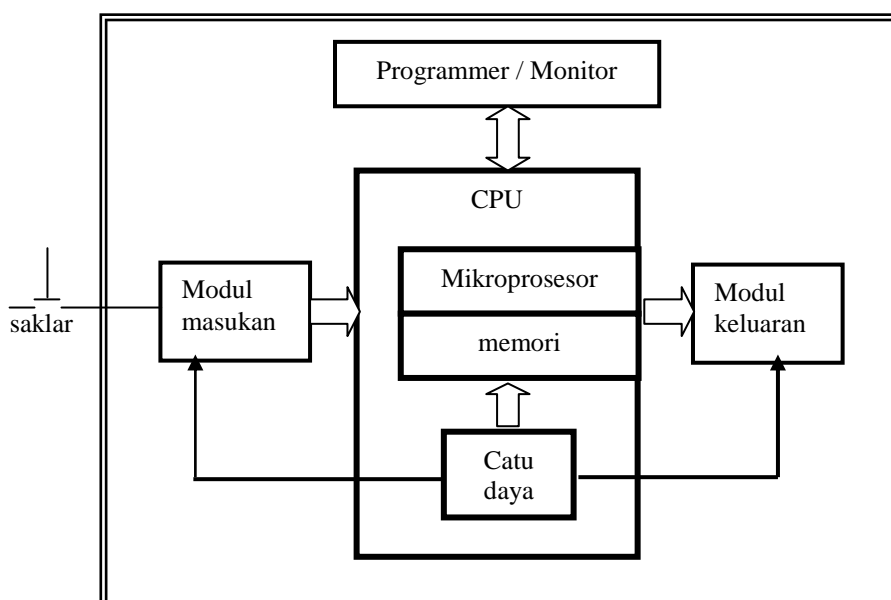
2) Modul Keluaran

Modul keluaran berfungsi mengaktifasi berbagai macam piranti seperti aktuator, hidrolik, pneumatik, solenoid, starter motor, tampilan status titik periferil yang terhubung dengan sistem, *conditioning*, terminasi, dan pengisolasian. Modul keluaran menyediakan tegangan keluaran untuk aktuator atau indikator alat modul keluarannya. Seperti halnya modul masukan, maka isyarat keluaran PLC dapat berupa isyarat analog atau digital tergantung perangkat keluaran yang digunakan.

3) *Programmer / Monitor* :

Merupakan suatu alat yang digunakan untuk berkomunikasi dengan PLC, sehingga dapat memasukan dan memonitor proses yang dilakukan dan memiliki beberapa fungsi :

- *Off*, difungsikan untuk mematikan PLC sehingga program yang dibuat tidak dapat dijalankan.
- *Run*, difungsikan untuk pengendalian suatu proses pada saat program dalam kondisi diaktifkan.
- *Monitor* untuk mengetahui keadaan suatu proses yang terjadi pada PLC
- *Program* yang menyatakan suatu keadaan monitor pemrogram yang dapat digunakan untuk membuat program.



Gambar IX.6 Sistem tata letak dan hubungan PLC

4) CPU (*Central Processing Unit*), Gambar 9.7 menunjukkan diagram balok fungsi komponen CPU PLC yang terdiri dari :

a. *Mikroprosesor*

Merupakan otak dari PLC, yang difungsikan untuk operasi matematika, operasi logika, mengeksekusi instruksi program, memproses isyarat I/O dan berkomunikasi dengan perangkat eksternal. Sistem operasi dasar disimpan dalam ROM (*Read Only Memory*) secara permanen. Kegunaan utama ROM adalah untuk menyediakan suatu program yang disebut suatu monitor atau *bug*.

b. *Memori*

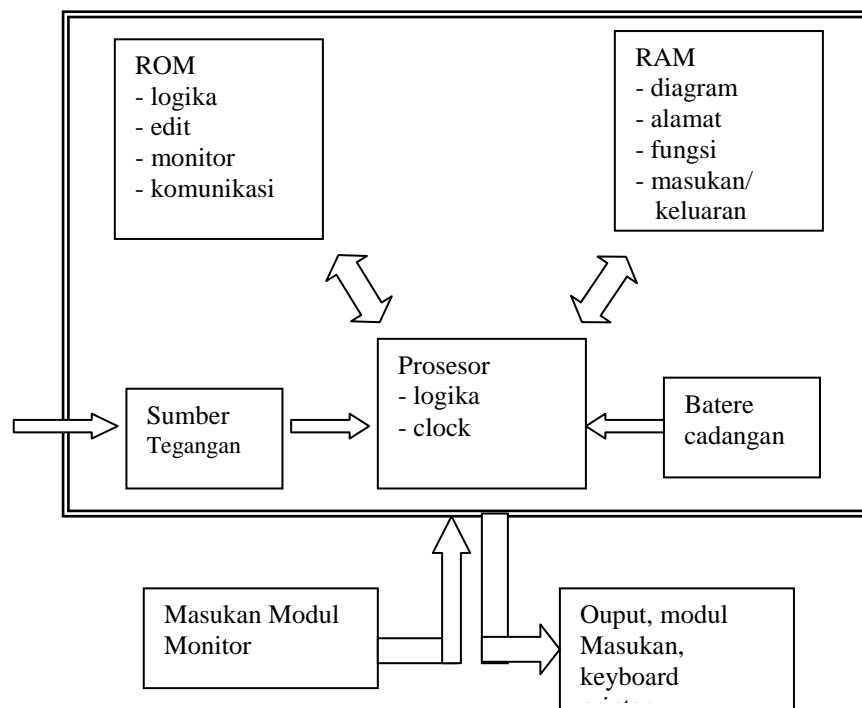
Merupakan daerah dari CPU yang digunakan untuk melakukan proses penyimpanan dan pengiriman data pada PLC. Menyimpan informasi digital yang bisa diubah dan berbentuk tabel data, register citra, atau RLL (*Relay Ladder Logic*) yang merupakan program pengendali proses. Untuk pemakaian, pembuatan program perlu disimpan dalam memori yang dapat diubah-ubah dan dihapus yang disebut RAM (*Random Access Memory*) dan disimpan tidak permanen, jika sumber masukannya hilang maka programnya akan hilang. CPU dilengkapi dengan baterai cadangan bila sumber utamanya mati. Selain ROM dan RAM ada beberapa memori yang sering digunakan oleh PLC yaitu :

- PROM (*Programmable read-only memory*) pada dasarnya sama seperti ROM, kecuali pada PROM dapat di program oleh programmer hanya untuk satu kali
- EPROM (*Erasable programmable read-only memory*) adalah PROM yang dapat dihapus dengan menyinari sinar UV (ultraviolet) untuk beberapa menit dan sering disebut UV PROM.
- EEPROM (*Electrically erasable programmable read-only memory*) mempunyai kelebihan dibandingkan dengan dengan EPROM, karena dapat dengan cepat direset dan mudah dihapus.
- NOVRAM (*Nonvolatile random access memory*) merupakan jenis memori yang sering digunakan pada CPU PLC. NOVRAM merupakan kombinasi dari EEPROM dengan RAM. Bila catu daya berkurang maka isi memori RAM disimpan pada EEPROM, sebelum hilang memori dibaca kembali oleh RAM saat catu daya kembali normal.

c. *Catu Daya*

Berfungsi untuk mengubah sumber tegangan masukan tegangan bolak balik menjadi tegangan searah. Sehingga dalam catu daya terdapat rangkaian yang mampu mengubah rangkaian 220 V AC, menjadi 5 volt dan -5 volt.

Modul catu daya memberikan tegangan DC ke berbagai modul PLC lainnya selain modul tambahan dengan kemampuan arus sekitar 20mA sampai 50mA, yang sama dengan *battery lithium integral* yang digunakan sebagai *memory Backup*. Berfungsi seandainya modul catu daya gagal atau tegangan arus bolak-balik pada masukannya turun isi memori tetap terjaga.



Gambar IX.7 Diagram blok fungsi komponen CPU PLC.

9.4 Pemrograman kendali logika terprogram

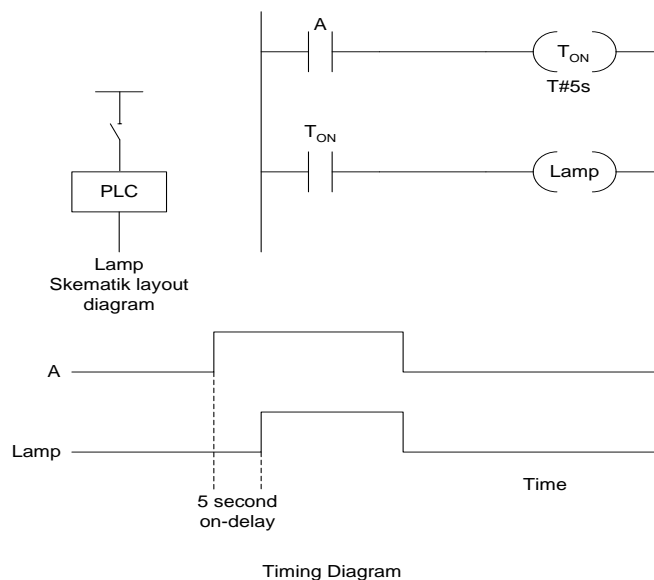
Berikut ini adalah contoh-contoh pemrograman kendali logika terprogram:

9.4.1 Pewaktu (*Timer*)

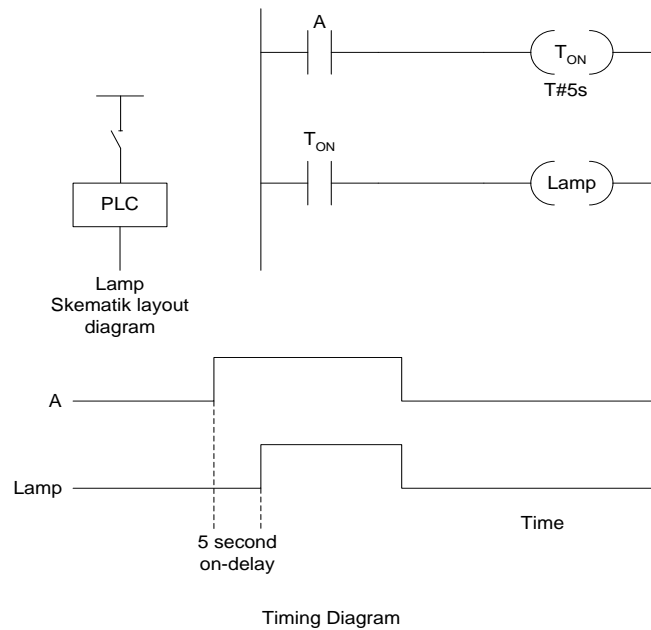
Fungsi untuk penundaan waktu menyala (*on-delay*) atau penundaan waktu mati (*off-delay*). Fungsi pewaktu pada PLC ini dapat diatur sesuai format program kendali yang dibuat. Selain itu pewaktu menggunakan teknologi zat padat sehingga mempunyai kecermatan dan kecepatan yang lebih baik dibandingkan dengan teknologi yang digunakan pada rele konvensional.

Contoh pewaktu *on-delay* pada Gambar 9.8 Pewaktu diset (pre-set time) 5 detik (T#5s). Pada saat masukan A bernilai 1 (tinggi) pewaktu aktif, pada saat nilai set dicapai keluaran (lampu) menjadi 1 (tinggi) pewaktu reset pada saat masukan A bernilai 0 (rendah).

Contoh pewaktu *off-delay* pada Gambar 9.9, nilai pewaktu diset pada 5 detik (T#5s). Ketika masukan A menjadi rendah (0) pewaktu menjadi aktif dan menahan keluaran (lampu) untuk nilai tertentu (selama 5 detik).



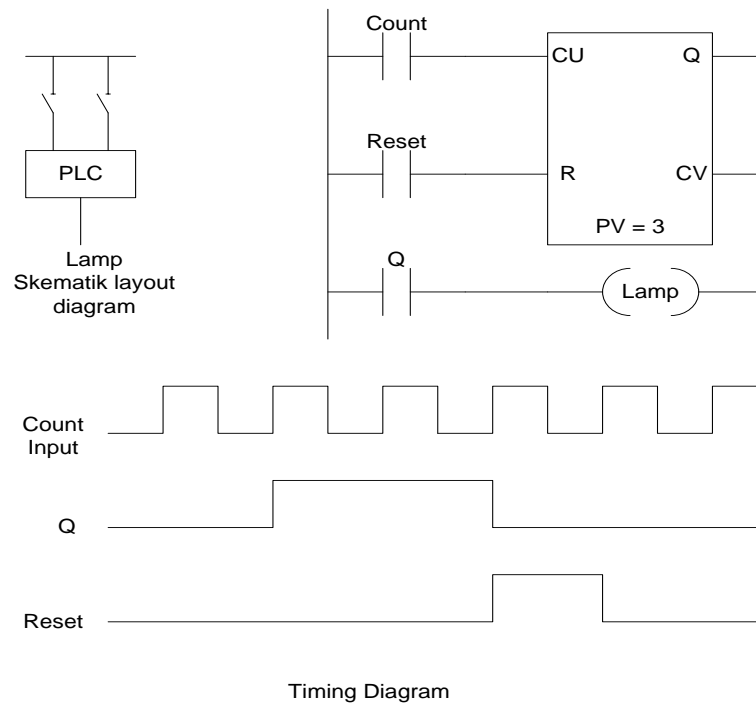
Gambar IX.8 Pewaktu *On-Delay*.



Gambar IX.9 Pewaktu *Off-Delay*.

9.4.2 Pencacah (*counter*)

Fungsi dasar pencacah PLC adalah sebagai pencacah-naik maupun pencacah-turun. Penghitungan cacahan fungsi pencacah tergantung pada nilai yang dimasukkan dalam fungsi tersebut. Untuk pencacah-naik (*up-counter*), pencacah dimulai dari nol dan kemudian ditambah satu pada masing-masing pulsa on dari masukan pencacah. Ketika nilai acuannya telah tercapai, maka keluaran akan terangsang oleh pengaktifan masukan reset yang berakibat pencacah kembali nol, dan mereset keluaran pencacah. Pada pengoperasian pencacah turun (*down-counter*) sama dengan pencacah naik dalam hal ini pencacahan dimulai dari acuannya dan ketika telah mencapai nilai nol maka akan mengaktifkan keluaran pencacah. Contoh pencacah-naik (diagram tangga) pada Gambar 9.10 sebuah pulsa positif diaktifkan menggunakan reset *contact clears* pada pencacah sehingga keluaran Q *false* (nol) dan nilai *preset* (Pr) sama dengan tiga. Jika pulsa tiga positif diaktifkan menggunakan kontak pencacah maka keluaran adalah tinggi (1) pada naikan pulsa ketiga.



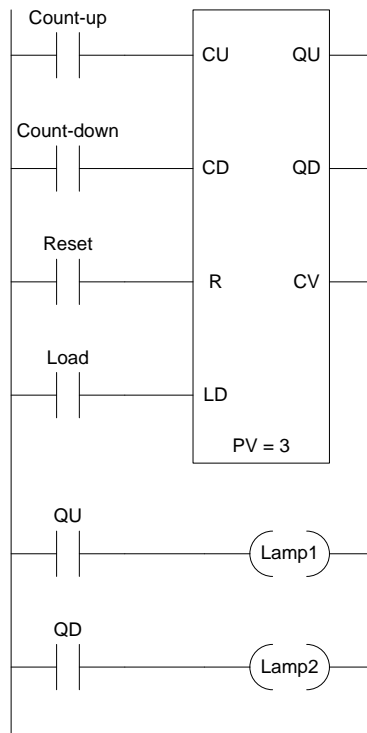
Gambar IX.10 Pencacah-naik.

Contoh pencacah naik/turun pada Gambar 9.11 tipe pencacah ini digunakan untuk pencacah naik dan pencacah turun.

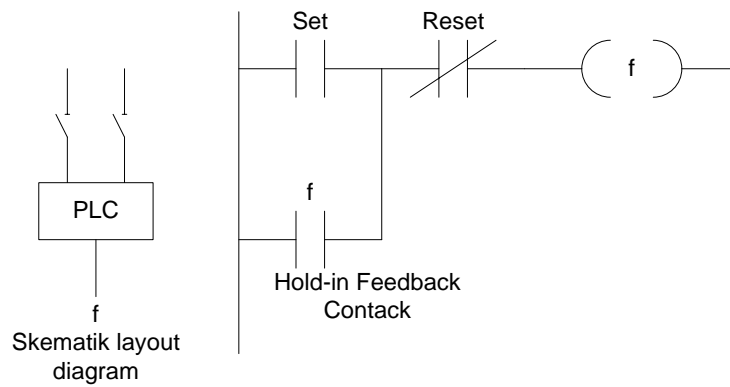
9.4.3 Pengunci (*Latch*)

Rangkaian tangga *latch* menyebabkan keluaran kumparan diset dan dan mempertahankannya sampai keadaan berbeda terjadi untuk mereset *coil* menjadi *off*.

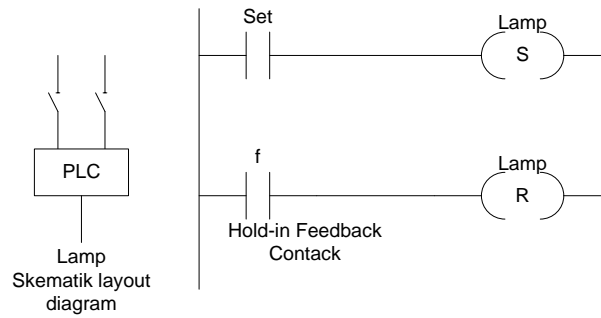
Contoh rangkaian *latch* terlihat pada Gambar 9.12 Asumsikan seluruh kontak terdapat pada kondisi awalnya. Keluaran f diset tinggi (1) pada saat masukan set menjadi tinggi (1) waktu mengeset keluaran f tidak dapat dipertahankan lama oleh masukan set. Untuk itu digunakan umpanbalik kontak f untuk tetap menahan keluaran set.



Gambar IX.11 Pencacah naik/turun.



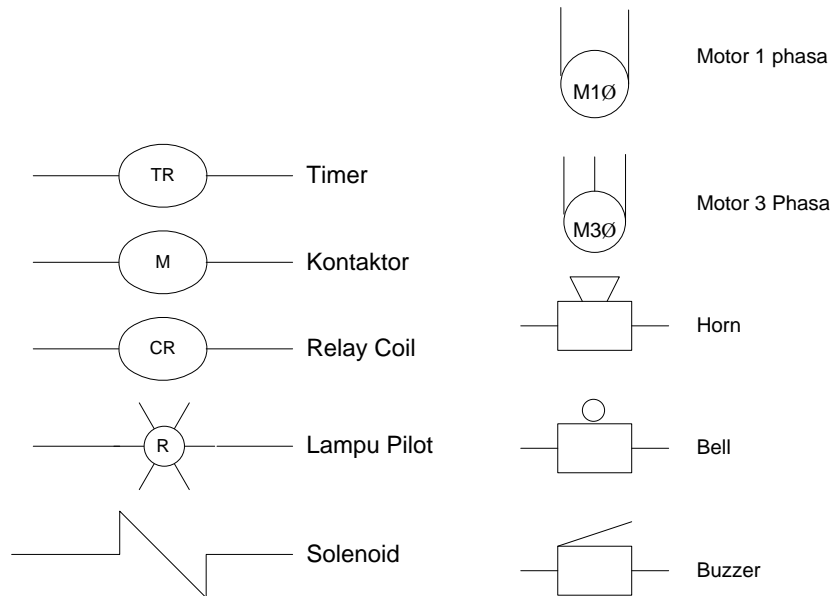
Gambar IX.12 Rangkaian pengunci.



Gambar IX.13 Pengunci menggunakan kumparan set dan reset.

Keluaran

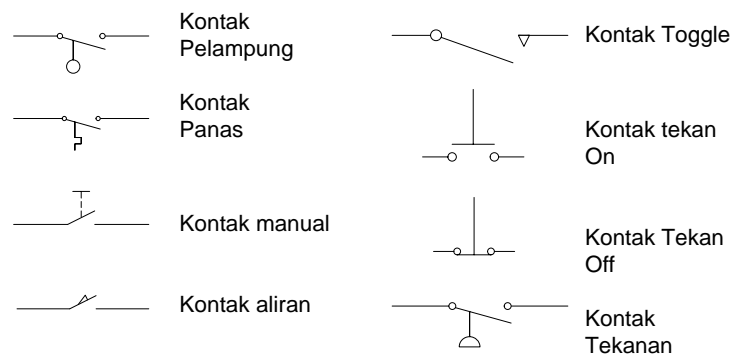
Pada PLC terdapat dua keluaran yaitu keluaran internal dan keluaran eksternal. Untuk keluaran internal dapat berupa rele internal, pewaktu, pencacah, dan sebagainya. Sedangkan keluaran eksternal dapat berupa keluaran atau piranti yang ingin dikendalikan dengan menggunakan PLC, misalnya motor solenoida, lampu, dan sebagainya. Keluaran-keluaran tersebut dihubungkan ke PLC melalui modul PLC. Gambar 9.14 menunjukkan beberapa keluaran yang banyak digunakan sebagai keluaran PLC.



Gambar IX.14 Beberapa keluaran.

Kontak

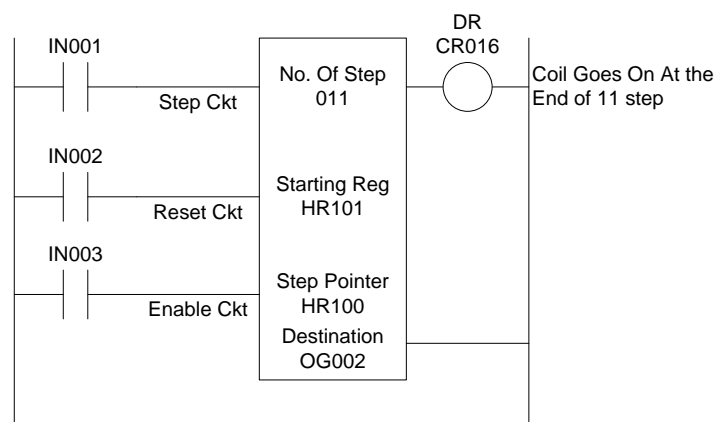
Keadaan saklar (kontak) pada diagram ladder terpengaruh pada dua hal yaitu kontak eksternal dan kontak internal. Pada saklar internal kontak-kontak dipengaruhi oleh rele internal yang terdapat pada PLC dan kontak-kontak tersebut menjadi saklar NO oleh kontak-kontak eksternal yang dipasang melalui modul masukan PLC. Berbagai macam saklar eksternal, diantaranya dalam bentuk saklar atau berupa sensor. Gambar 9.15 menunjukkan beberapa macam saklar masukan.



Gambar IX.15 Beberapa Kontak Masukan.

Sequencer

Fungsi PLC yang mengurutkan suatu urutan yang telah ditetapkan dari suatu event atau keadaan. Juga dapat mengurutkan daftar perbandingan (*a listing of comparison*) atau operasi yang lain. Dapat digunakan dengan sebuah masukan untuk pemilihan dalam operasi fungsi.



Gambar IX.16 Typical Sequencer Function.

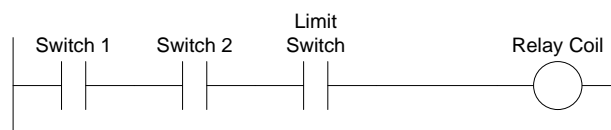
Pemrograman sistem dengan PLC *sequencer* relatif mudah. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 9.16 terdapat 3 masukan:

- Rangkaian *step*: tiap-tiap pulsa *on* melangkahakan fungsi pada pola HR berikutnya.
- Rangkaian *reset*: tiap-tiap pulsa *on* mereset kembali pada HR awal.
- Rangkaian *enable*: pada saat *on* memungkinkan fungsi dilakukan, tetapi tidak pada saat *off*.

Rele

Rele adalah suatu peralatan yang aktualisasinya digerakkan oleh tegangan atau isyarat. Fungsinya untuk menggerakkan/mengubah keadaan suatu alat mekanik atau elektronik yang dihubungkan oleh alat tersebut. Contoh diagram tangganya terdapat pada Gambar 9.17.

Pada gambar kumparan rele untuk menggerakkan pada saat saklar dua togel dan satu saklar pembatas digerakkan.



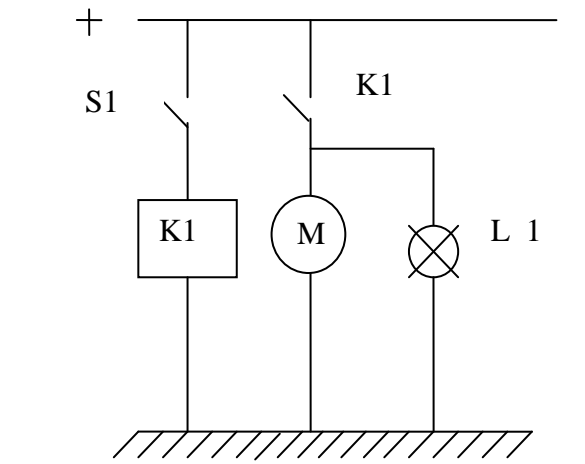
Gambar IX.17 Logika Diagram Tangga untuk Rele Masukan.

Contoh 2:

Soal:

Gambar 9.18 menjelaskan prinsip kerja suatu rele. Suatu rele terdiri dari dua bagian yaitu koil dan kontak. Pada saat saklar S1 ditekan, arus akan mengalir ke rele (koil) sehingga akan mengaktifkan kontak-kontaknya. Kontak K1 akan berubah dari keadaan NO (normali Open) menjadi NC (Normally Close).

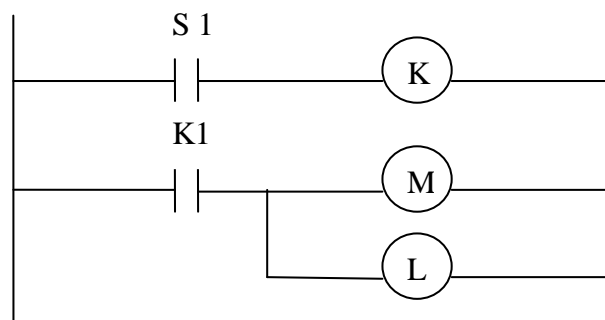
Karena tertutupnya kontak K1 akan menyebabkan arus mengalir ke motor (M) dan ke Lampu indikator (L1). Motor dan lampu merupakan keluaran dari sistem ini. Gambarkan diagram tangga dari Gambar 9.18 tersebut.



Gambar IX.18 Diagram pengkabelan.

Jawab:

Diagram tangga dari rele tersebut di atas dapat dilihat pada Gambar 9.19 berikut :



Gambar IX.19 Diagram tangga.

Sumber Kepustakaan :

- 1) Bolton, W., 1999. Control Engineering, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London.
- 2) Bolton, W., 2003. Programmable Logic Controller, 3rd edition. Elsevier Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, OX3 IGB, England.

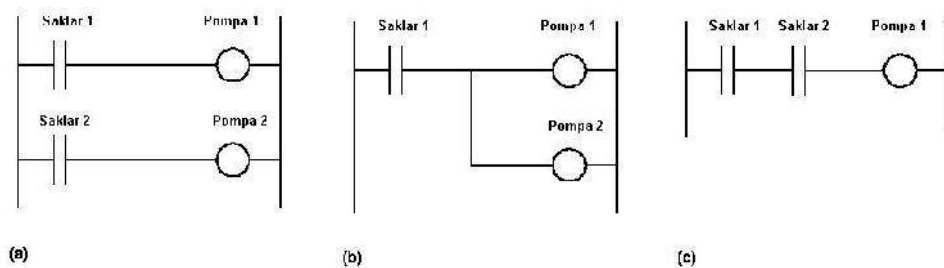
Soal-soal:

- 1) Tuliskan pernyataan-pernyataan yang menjelaskan urutan operasi yang ditunjukkan oleh diagram fungsional pada Gambar 9.20.



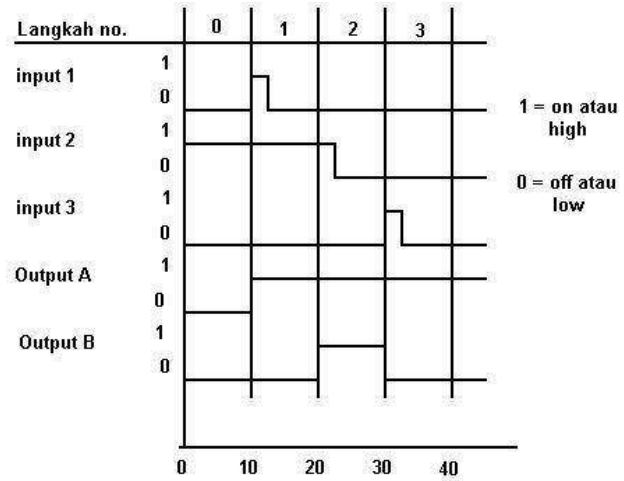
Gambar IX.20 Soal nomor 1.

- 2) Tuliskan pernyataan-pernyataan yang menjelaskan urutan operasi yang ditunjukkan oleh diagram tangga pada Gambar 9.21.



Gambar IX.21 Soal nomor 2.

- 3) Tuliskan pernyataan-pernyataan yang menjelaskan urutan operasi yang ditunjukkan oleh diagram waktu pada Gambar 9.22.



Gambar IX.22 Soal nomor 3.

X. KENDALI DIGITAL LANGSUNG

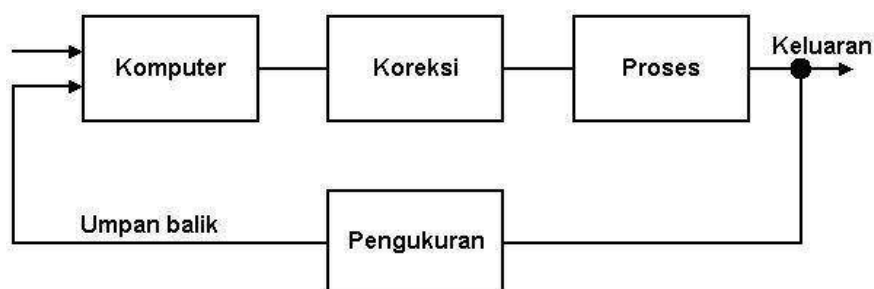
Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan kendali digital langsung, dan
- 2) Mahasiswa dapat memberikan contoh kendali digital langsung.

10.1 Komputer-komputer Pada Kendali

Sebuah komputer digital terdiri atas tiga komponen utama yaitu: unit pemrosesan pusat (*central processing unit/CPU*), program dan memori data, dan sebuah sistem masukan/keluaran (*I/O*). *CPU* mengendalikan aliran informasi antara komponen-komponen dan pemrosesan data.

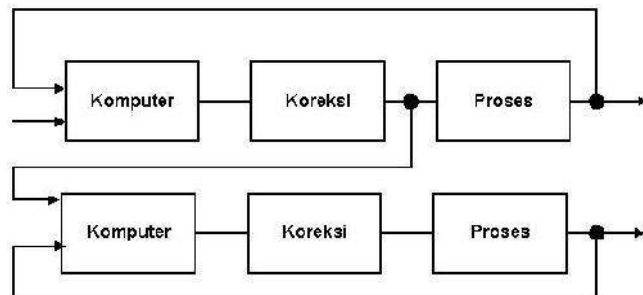
Bagian kendali digital langsung (*direct digital control/DDC*) digunakan ketika komputer terletak pada kalang umpan balik atau pada kalang-kalang sistem kendali (Gambar 10.1) dan menggunakan hukum kendali. Komputer mempunyai sebuah masukan yang menyediakan *set point* dan umpan balik dari keluaran terukur dan memberikan sebuah keluaran berupa isyarat untuk menggerakkan elemen pengkoreksi. Bila sistem kendali menggunakan komputer digital, maka semua masukan dan keluaran merupakan isyarat digital. Jika isyarat analog yang diberikan, maka harus diubah menggunakan pengubah analog-ke-digital (*analogue-to-digital converter/ADC*) untuk masukan dan pengubah digital-ke-analog (*digital-to-analogue converter/DAC*) untuk keluaran.



Gambar X.1 Kendali digital langsung.

10.2 Jenis-jenis Kendali Digital Langsung

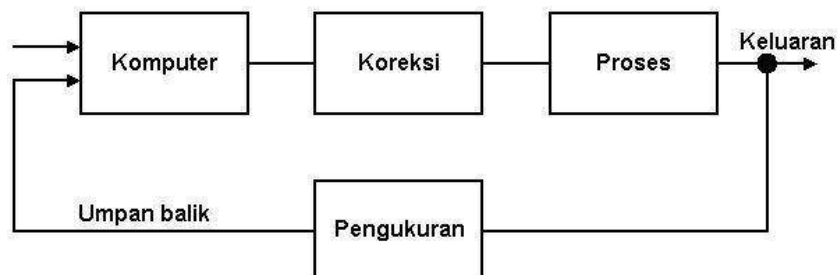
Kendali digital langsung dapat diaplikasikan untuk sebuah kalang umpanbalik atau untuk sistem yang besar yang terdiri atas beratus-ratus kalang umpanbalik. Berdasarkan jumlah dan susunan kalang, maka kendali digital langsung dapat disusun secara bertingkat sebagai kendali kaskade (Gambar 10.2). Selain itu kendali digital langsung tidak terbatas hanya pada kendali umpanbalik sederhana tetapi digunakan pula untuk implementasi pada kendali inferensial, kendali umpanmaju, dan kendali adaptif.



Gambar X.2 Kendali kaskade

Pada kendali inferensial, elemen pengukur bukan umpanbalik peubah yang dikendalikan, sebagai gantinya adalah umpanbalik bentuk lain, dalam hal ini pengendali menentukan pengubah yang dikendalikan. Sebagai contoh adalah pengendalian komposisi bahan kimia di dalam sebuah *chemical plant*, komposisi ditentukan dari pengukuran suhu titik didih.

Kendali umpan maju bekerja dengan mengukur gangguan-gangguan sistem, bukan dengan mengukur keluaran (seperti tampak pada Gambar 10.3), hal ini berakibat tanggapan sistem lebih cepat bila dibandingkan dengan kendali umpanbalik karena tidak ada waktu yang terbuang untuk menunggu sistem bereaksi.



Gambar X.3 Kendali umpan maju.

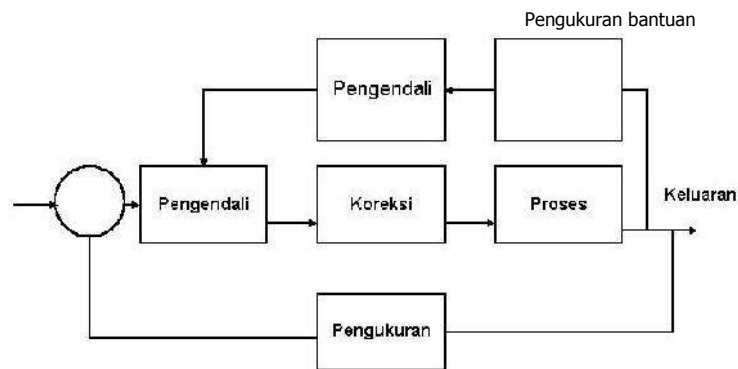
Kendali adaptif meliputi sistem yang secara otomatis beradaptasi sebagai strategi pengendalian untuk mengatasi perubahan situasi. Sistem kendali adaptif dapat dibagi menjadi tiga jenis sebagai berikut:

a. Kendali penguatan-terjadwal (*Gain-scheduled control*)

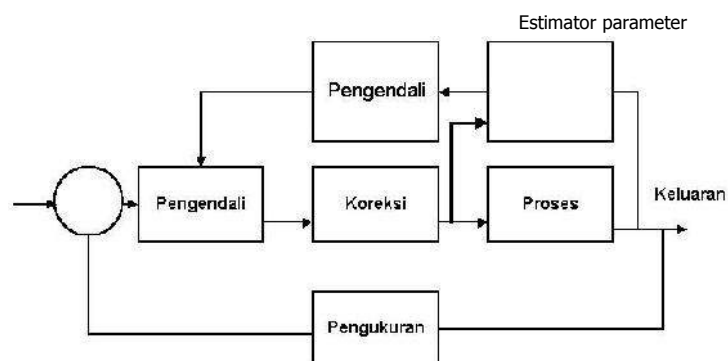
Gambar 10.4 menunjukkan diagram kotak dari sistem kendali adaptif jenis *gain-scheduled control*, seperti penguatan pada hukum proporsional, sistem kendali ini berbasis pada perubahan yang terjadi di beberapa pengukuran dari peubah yang dikendalikan.

b. Kendali swa-tala (*Self-tuning control*)

Pada sistem kendali jenis *self-tuning*, sistem secara terus-menerus menala parameter-parameter milik sendiri (Gambar 10.5).



Gambar X.4 Kendali penguatan terjadwal.

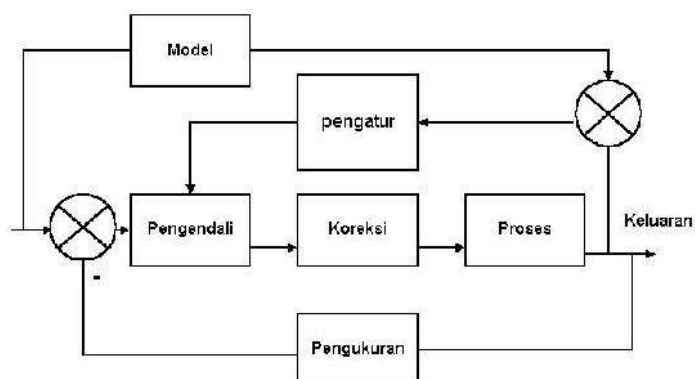


Gambar X.5 Kendali swatala.

c. Kendali model-acuan (*Model-referenced control*)

Sistem kendali ini merupakan suatu model akurat dari suatu sistem yang dibangun dan nilai set dan kemudian yang digunakan sebagai masukan adalah nilai aktual dan model sistem, perbedaan antara keluaran aktual

dan keluaran model dipantau dan digunakan untuk mengatur parameter-parameter yang dikendalikan (Gambar 10.6).



Gambar X.6 Kendali model acuan.

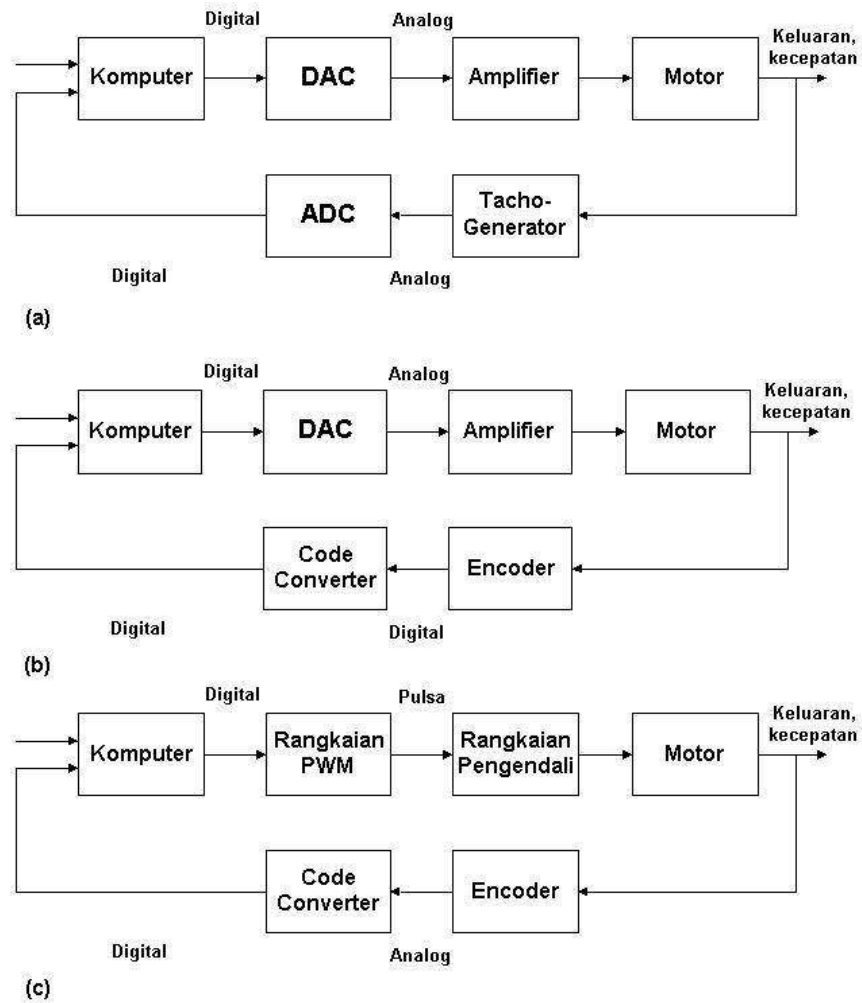
10.3 Contoh-contoh Kendali Digital Langsung

Pengendalian kecepatan motor menggunakan komputer (seringkali komputer digantikan oleh pengendali mikro) merupakan salah satu contoh dari sistem kendali digital langsung (Gambar 10.7).

Pada Gambar 10.7(a) isyarat umpan balik diberikan oleh tachogenerator yang menghasilkan isyarat analog, sehingga sebelum isyarat dapat diolah oleh komputer harus diubah terlebih dahulu menjadi isyarat digital dengan menggunakan *ADC*. Sebaliknya keluaran dari komputer diubah dari digital menjadi analog dengan menggunakan *DAC*, sehingga dapat mengatur kecepatan motor dengan mengendalikan arus jangkar.

Pada Gambar 10.7(b) isyarat umpan balik diberikan oleh sebuah enkoder, sehingga berbentuk digital. Pengubahan sandi diperlukan agar isyarat tersebut dapat diolah oleh komputer.

Pada Gambar 10.7(c), kecepatan motor dikendalikan oleh modulasi lebar pulsa. Hal ini secara langsung dikendalikan oleh keluaran digital dari komputer, sehingga tidak diperlukan *DAC*.



Gambar X.7 Kendali kecepatan motor d.c.

Sumber Kepustakaan :

Bolton, W., 1999. Control Engineering, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London.

Soal Latihan Bab 10

Jelaskan apa yang dimaksud dengan:

- 1) Kendali digital langsung
- 2) Kendali kaskade
- 3) Kendali inferensial
- 4) Kendali adaptif

XI. ALIHRAGAM-Z

Tujuan mahasiswa mempelajari Bab I ini adalah:

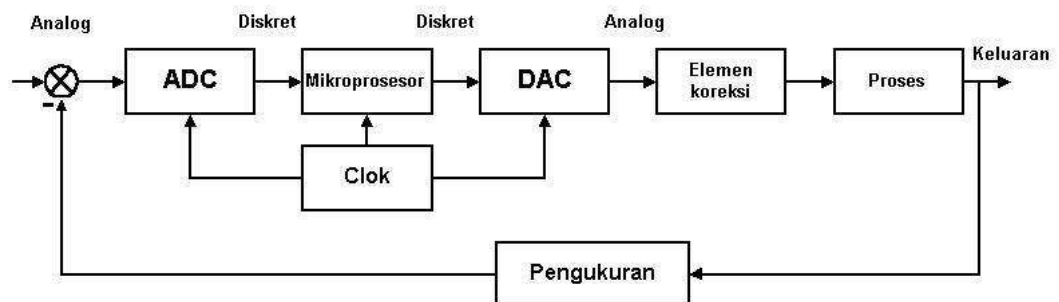
- 1) Mahasiswa dapat menjelaskan sistem pencuplikan data,
- 2) Mahasiswa dapat menjelaskan dan memakai alihragam-Z dalam pemrosesan sinyal waktu diskret, dan
- 3) Mahasiswa dapat memakai alihragam-Z untuk menentukan tanggapan-tanggapan data cuplik.

11.1 Pendahuluan

Komputer digital mempunyai isyarat-isyarat masukan dan keluaran yang bukan merupakan fungsi kontinyu terhadap waktu tetapi sebuah urutan pulsa. Bab ini menggunakan pendekatan pencuplikan untuk membuat alihragam-z, yang merupakan salah satu cara untuk menentukan perilaku subyek sistem terhadap masukan berupa isyarat waktu diskret.

11.2 Sistem data-cuplik

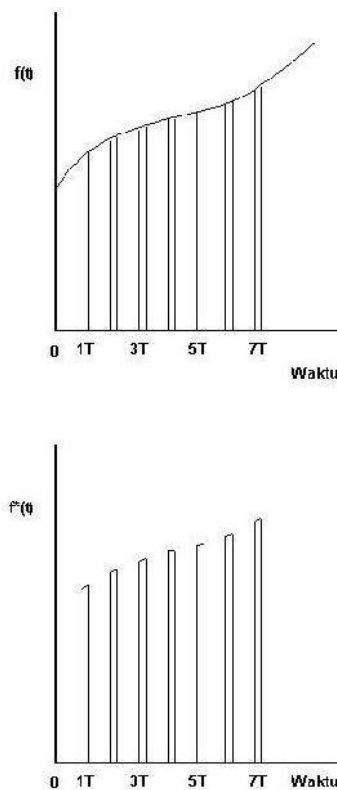
Bentuk data-cuplik dari sistem kendali dimana sebuah mikroprosesor digunakan untuk melaksanakan aksi kendali seperti tampak pada Gambar 11.1. Masukan sistem berupa isyarat analog yang dikonversi ke dalam isyarat waktu diskret dengan *ADC*. Mikroprosesor menggunakan strategi atau hukum kendali, sebagaimana ditentukan dengan program, dan keluaran kemudian dikembalikan menjadi isyarat analog dengan *DAC*. Isyarat analog hasil dapat digunakan untuk menggerakkan unit pengoreksi dan mengendalikan peubah *plant*.



Gambar XI.1 Sistem Data-cuplik.

Sebuah detak memberikan sebuah pulsa setiap T detik, setiap waktu ADC menerima sebuah pulsa galat isyarat, sehingga T adalah periode cuplik (Gambar 11.2), masukan mikroprosesor kemudian berupa serangkaian pulsa-pulsa. Untuk membedakan isyarat kontinyu dengan cuplik, pada Gambar 11.2 dibedakan dengan tanda bintang ($f(t)$ untuk fungsi pulsa kontinyu, dan $f^*(t)$ untuk pulsa cuplik). Pada Gambar 11.2, T adalah periode cuplik, nilai $f(t)$ diperoleh dengan waktu relatif singkat dengan rentang Δt . Deret pulsa berdasar fungsi waktu dapat ditulis sebagai:

$$f(0), f(1T), f(2T), f(3T), \dots, f(kT), \text{ dengan } k \text{ adalah integer}$$



Gambar XI.2 Proses cuplik.

Dengan mempertimbangkan sebuah masukan isyarat analog yang hanya sebuah unit impuls pada $t=0$, keluaran yang dicuplik ditunjukkan oleh Gambar 11.3 (a) dan hanya pulsa tunggal pada $t=0$. Deret pulsa-pulsanya adalah:

$$1, 0, 0, 0, \dots, 0$$

Sebuah unit impuls pada $t = 0$ dapat ditulis dengan $f[0]\delta(t)$. Jika $f[0] = 1$ hal ini adalah $1\delta(t)$. Untuk sebuah unit impuls pada $t = 2T$ (Gambar 11.3(b)) deret impuls-impulsnya adalah:

$$0, 0, 1, 0, \dots, 0$$

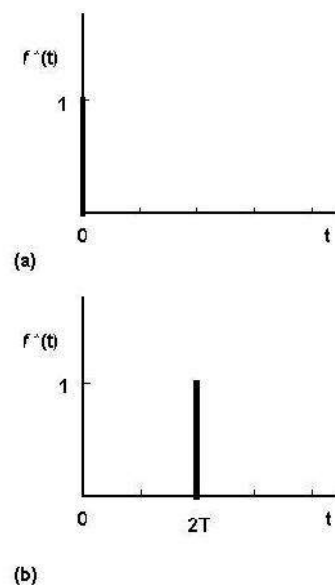
dan dapat direpresentasikan sebagai $f[2]\delta(t-2T)$. $\delta(t-2T)$ menunjukkan bahwa fungsi impuls $\delta(t)$ terjadi pada $t = 2T$.

Untuk fungsi waktu kontinu $f(t)$ pada a unit undak $t = 0$ (Gambar 11.4), kemudian deret pulsa-pulsa yang dihasilkan adalah:

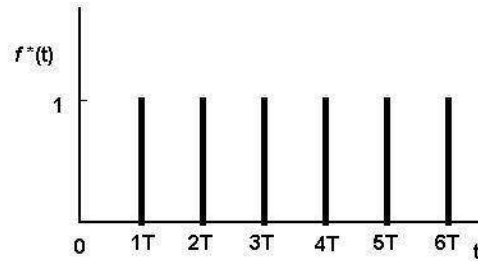
$$1, 1, 1, 1, \dots, 1$$

Impuls-impuls urutan ini adalah penjumlahan impuls-impuls pada $t = 0, t = 1T, t = 2T$, dan seterusnya, dan dapat diruliskan sebagai:

$$1\delta(t), 1\delta(t-1T), 1\delta(t-2T), 1\delta(t-3T), \dots$$



Gambar XI.3 Unit impuls pada (a) $t = 0$, dan (b) $t = 2T$.



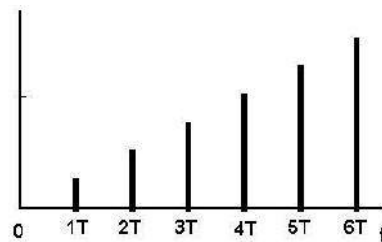
Gambar XI.4 Unit undak.

Untuk fungsi waktu kontinyu $f(t)$ pada a unit tanjak dengan kenaikan 1 untuk setiap periode cuplik (Gambar 11.5), deret pulsa-pulsa yang dihasilkan adalah:

$$0, 1, 2, 3, \dots, k$$

Impuls-impuls urutan ini adalah penjumlahan impuls-impuls pada $t = 0, t = 1T, t = 2T$, dan seterusnya, dan dapat diruliskan sebagai:

$$0\delta(t), 1\delta(t-1T), 2\delta(t-2T), 3\delta(t-3T), \dots$$



Gambar XI.5 Tanjak.

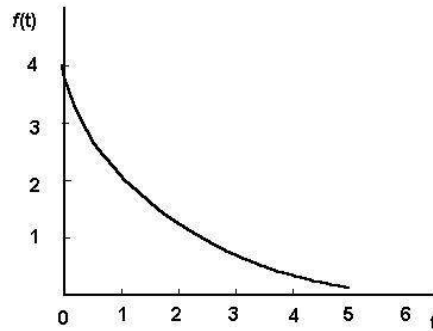
Bagaimanapun bentuk fungsi waktu kontinyu, isyarat data cuplik adalah deretan impuls-impuls yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$f^*(t) = f[0]\delta(t) + f[1]\delta(t-1T) + f[2]\delta(t-2T) + f[3]\delta(t-3T) + \dots + f[k]\delta(t-kT) \quad (11.1)$$

Contoh 1:

Soal:

Untuk isyarat waktu kontinyu pada Gambar 11.6, keadaan nilai-nilai pulsa yang dihasilkan hingga $k = 3$ untuk ADC dengan periode cuplik $T = 1$ detik.



Gambar XI.6 Contoh 1

Jawab:

Pada $k = 0$, $t = 0$, maka $f(t) = 4$. Pada $k = 1$, $t = 1$, maka $f(t) = 2$. Pada $k = 2$, $t = 2$, maka $f(t) = 1$. Pada $k = 3$, $t = 3$, maka $f(t) = 0,5$. Jadi isyarat waktu diskret adalah suatu deret impuls-impuls:

$$4\delta(t), 2\delta(t-1), 1\delta(t-2), 0,5\delta(t-3), \dots$$

11.3 Alihragam-Z

Fungsi yang menggambarkan urutan dari impuls-impuls seperti yang ditulis pada persamaan (11.1). Alihragam Laplace dari sebuah impuls pada $t = 0$ adalah 1, pada saat $1T = e^{-Ts}$, pada saat $2T = e^{-2Ts}$, pada saat $3T = e^{-3Ts}$, dan seterusnya. Jadi alihragam Laplace dari fungsi cuplik $f^*(t)$ adalah:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^*(t)\} &= F^*(s) \\ &= f[0]1 + f[1]e^{-Ts} + f[2]e^{-2Ts} + f[3]e^{-3Ts} + \dots + f[k]e^{-kTs} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f[k]e^{-kTs} \end{aligned}$$

Jika $z = e^{Ts}$, maka

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (11.2)$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai:

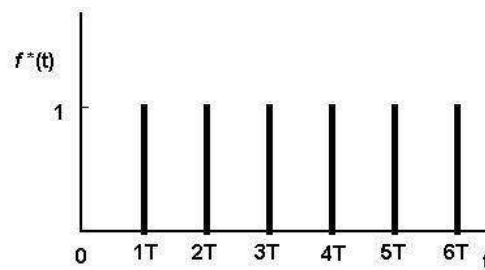
$$\begin{aligned} \{f(k)\} = F(z) &= f[0] + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots + f(k)z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f[k]z^{-k} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Diberikan alihragam-z untuk unit cuplik undak (Gambar 11.7), dan undak memiliki $f(t) = 1$ untuk semua nilai $t > 0$, persamaan (11.3) dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= f[0] + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots \\
 &= 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{11.4}$$

Persamaan (11.4) adalah deret geometris dari bentuk $1 + x + x^2 + \dots$ dengan penjumlahan tak berhingga, diberikan deret konvergen $|x| < 1$, dari $1/(1-x)$. Jadi bila kita tuliskan $1/z$ untuk x :

$$F(z) = \frac{1}{1 - (1/z)} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1
 \tag{11.5}$$



Gambar XI.7 Fungsi undak unit step.

Tabel XI.1 Alihragam-Z untuk fungsi cuplik.

Fungsi tercuplik $f(t)$, periode cuplik T	$F(z)$
Impulse satuan, $\delta(t)$	1
Impulse satuan tertunda oleh kT	z^{-k}
Undak satuan, $u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
Undak satuan tertunda oleh kT	$\frac{z}{z^k(z-1)}$
Tanjak (lereng) satuan, t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

e^{-at}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Tabel XI.2 Alihragam-Z untuk fungsi sekuensial.

$f[k]$	$f[0], f[1], f[2], f[3], \dots$	$F(z)$
$1u[k]$	1, 1, 1, 1, ...	$\frac{z}{z - 1}$
a^k	$a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$	$\frac{z}{z - a}$
k	0, 1, 2, 3, ...	$\frac{z}{(z - 1)^2}$
ka^k	$0, a^1, 2a^2, 3a^3, \dots$	$\frac{az}{(z - a)^2}$
ka^{k-1}	$0, a^0, 2a^1, 3a^2, \dots$	$\frac{z^2}{(z - a)^2}$
e^{-ak}	$e^0, e^{-a}, e^{-2a}, e^{-3a}, \dots$	$\frac{z}{z - e^{-a}}$

Diberikan alihragam-z untuk fungsi unit cuplik tanjak (Gambar 11.8) $f(t) = t$, persamaan (11.3) dapat ditulis sebagai:

$$F(z) = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots \quad (11.6)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{zF(z)}{T} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots \quad (11.7)$$

Digunakan teorema binomial untuk $(1-x)^{-2}$ untuk mendapatkan deret $1 + 2x + 3x^2 + \dots$ dengan penjumlahan tak berhingga, diberikan deret konvergen $|z| > 1$, sehingga persamaan (11.7) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{zF(z)}{T} &= \frac{1}{(1-1/z)^2} \\ F(z) &= \frac{Tz}{(z-1)^2} \end{aligned} \quad (11.8)$$

11.4 Penggunaan alihragam-Z

Tabel 11.1 dan 11.2 merupakan alihragam-Z untuk fungsi cuplik dan sekuensial. Sifat-sifat dasar dari alihragam-Z sebagai berikut:

1) Linearitas

Alihragam-Z pada penjumlahan dua rangkaian $f[k]$ dan $g[k]$ adalah penjumlahan dari alihragam-Z masing-masing fungsi, yaitu:

$$\mathcal{Z}\{f[k] + g[k]\} = \mathcal{Z}\{f[k]\} + \mathcal{Z}\{g[k]\}$$

Alihragam-Z dari perkalian antara suatu fungsi dengan sebuah tetapan sama dengan perkalian antara alihragam-Z dengan tetapan tersebut:

$$\mathcal{Z}\{af[k]\} = a \mathcal{Z}\{f[k]\}$$

Contoh 2:

Soal:

Tentukan alihragam-Z dari fungsi $f(t) = t + e^{-t}$ jika fungsi tersebut dicuplik setiap 1 detik.

Jawab:

Menggunakan sifat-sifat linearitas dan tabel 11.1 dengan $T = 1$ detik, diperoleh:

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ dan}$$

$$\mathcal{Z}\{f(e^{-t})\} = \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z}{z-e^{-1}},$$

Sehingga

$$\mathcal{Z}\{f(t+e^{-t})\} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-1}}$$

Contoh 3:

Soal:

Tentukan alihragam-Z dari $f[k] = k + e^{-k}$

Jawab:

Menggunakan alihragam-Z dan Tabel 11.2, diperoleh

$$\mathcal{Z}\{k + e^{-k}\} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-1}}$$

2) Teorema perubahan

Bila $f[k]$ merupakan sebuah runtutan dan $F(z)$ adalah alihragam-Z dari peningkatan runtutan dengan jangkauan n , yaitu dengan mengubah suku pada ruas kiri menjadi $f[k+n]$, sehingga diperoleh alihragam-Z sebesar:

$$\mathcal{Z}\{f[k+n]\} = z^n F(z) - (z^n f[0] + z^{n-1} f[1] + z^{n-2} f[2] + \dots + z f[n-1])$$

Jika $n=1$, maka:

$$\mathcal{Z}\{f[k+1]\} = zF(z) - zf[0]$$

Jika $n=2$, maka:

$$\mathcal{Z}\{f[k+2]\} = z^2 F(z) - z^2 f[0] - zf[1]$$

Jika sebuah fungsi cuplik $f(t)u(t)$ menggantikan suku di ruas kanan, yaitu ditunda, dengan jangkauan cuplik n , maka alihragam-Z dari fungsi cuplik yang dipindahkan diberikan oleh:

$$\mathcal{Z}\{f[k-n]u[k-n]\} = z^{-n} F(z)$$

Teorema perubahan menyatakan bahwa z adalah *time-shift operator*. Perkalian dengan z sama dengan kenaikan waktu oleh satu jangka waktu pencuplikan; pembagian dengan z sama dengan sebuah waktu tunda oleh satu jangka waktu pencuplikan.

Contoh 4:**Soal:**

Tentukan alihragam-Z dari urutan waktu diskret 0, 1, 2, 3, 4, dst.

Jawab:

Pada urutan 0, 1, 2, 3, 4, ... ditunda oleh satu jangka waktu. Seperti dinyatakan pada Tabel 11.2, isyarat tak-tertunda mempunyai alihragam-Z sebesar $\frac{z}{(z-1)^2}$, sehingga dengan menggunakan teorema

pengubahan, urutan-tertunda mempunyai alihragam-Z sebesar $\frac{z^{-1}z}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}$.

3) Complex translation

Alihragam-Z dari fungsi cuplik $f(t)$ ketika dikalikan dengan e^{-at} termasuk substitusi ze^{-aT} untuk z pada alihragam-Z dari fungsi cuplik $f(t)$, yaitu

$$\mathcal{Z}\{e^{-akt} f[k]\} = F(e^{aT} z)$$

Contoh 5:**Soal:**

Tentukan alihragam-Z untuk fungsi cuplik te^{-at} .

Jawab:

Menggunakan sifat-sifat *complex translation* dan substitusi ze^{-aT} untuk z dalam alihragam dari t memberikan:

$$\frac{Tze^{aT}}{(ze^{aT} - 1)^2} = \frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$$

4) Teorema nilai awal dan nilai akhir

Teorema nilai awal memberikan nilai fungsi waktu saat $t=0$, yaitu kondisi awal, teorema tersebut adalah:

$$f[0] = \lim_{t \rightarrow 0} f[k] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Dengan mempertimbangkan nilai limit yang diberikan, nilai teorema akhir adalah nilai fungsi waktu yang mempunyai waktu cenderung tak berhingga, yaitu pada kondisi tunak. Teorema tersebut adalah:

$$f[0] = \lim_{t \rightarrow 0} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

Contoh 6:**Soal:**

Tentukan nilai-nilai awal dan akhir dari urutan waktu diskret yang mempunyai alihragam $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0,5)}$.

Jawab:

Alihragam di atas dapat ditulis sebagai:

$$\frac{z^2}{z^2 - 1,5z + 0,5} = \frac{1}{1 - 1,5/z + 0,5/z^2}$$

Kemudian, menggunakan teorema nilai awal, $z \rightarrow \infty$ kita dapatkan $f[0] = 1$. Teorema nilai akhir memberikan:

$$f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{z-0,5} = 2$$

11.5 Inversi alihragam-Z

Untuk mendapatkan urutan dari isyarat waktu diskret atau fungsi cuplik direpresentasikan dengan suatu alihragam-z dalam bentuk inversi alihragam-z. Jika $\mathcal{Z}\{f^*(t)\} = F(z)$ atau $\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$, maka inversi alihragam-z ditulis dengan $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$. Pengubahan dapat diperoleh dengan tiga cara sebagai berikut:

1. Menggunakan tabel, dalam hal ini Tabel 11.1 dan Tabel 11.2.
2. Fraksi parsial

Dalam hal ini menggunakan fraksi parsial untuk menyederhanakan alihragam-z dan meletakkan kembali dalam bentuk yang dapat dikenal dalam bentuk alihragam baku.

Contoh 7:**Soal:**

Tentukan inversi alihragam dari $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)}$

Jawab:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$(z-0,5)A + (z-1)B = 1$$

$$A = 2, B = -2$$

Jadi:

$$F(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0,5}$$

Bagian I berbentuk $z/(z-1)$ adalah alihragam-z dari unit cuplik undak atau urutan waktu diskret 1, 1, 1, 1, Bagian II memiliki bentuk $z/(z-a)$ yang merupakan alihragam-z dengan urutan $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$ atau a^k . Jadi inversi alihragam-z adalah:

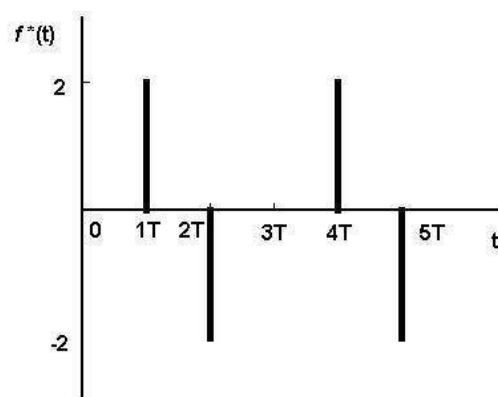
$$f[k] = 2u[k] - 2 \times 0,5^k$$

- Ekspansi sebagai suatu deret daya dengan pembagian panjang
Cara ini mengambil alihragam ke dalam bentuk deret daya dengan menggunakan pembagian panjang dari pembilang oleh penyebut.

Contoh 8:

Soal:

Tentukan inversi alihragam $F(z) = \frac{2z}{z^2 + z + 1}$



Gambar XI.8 Soal contoh 8.

Jawab:

Memakai pembagian panjang untuk ekspansi ini sebagai deret daya:

$$\begin{array}{r}
 2z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-4} - 2z^{-5} + \dots \\
 z^2 + z + 1 \overline{) 2z} \\
 \underline{2z + 2z^0 + 2z^{-1}} \\
 -2z^0 - 2z^{-1} \\
 \underline{-2z^0 - 2z^{-1} - 2z^{-2}} \\
 -2z^{-2} \\
 \underline{-2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4}} \\
 -2z^{-3} - 2z^{-4} \\
 \underline{-2z^{-3} - 2z^{-4} - 2z^{-5}} \\
 2z^{-5}
 \end{array}$$

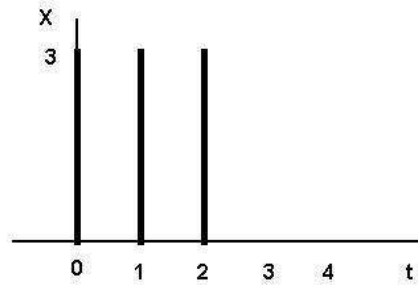
Jadi representasi $F(z)$ adalah $F(z) = 0z^0 + 2z^{-1} - 2z^{-2} + 0z^{-3} + 2z^{-4} - 2z^{-5} + \dots$ dan urutan waktu diskretnya adalah 0, 2, -2, 0, 2, -2, ... (Gambar 11.8).

Sumber Kepustakaan :

- 1) Bolton, W., 1999. Control Engineering, 2nd, Addison Wisley Longman Publishing. London.
- 2) Ogata, K. 1997. Modern Control Engineering, 3rd, Prentice Hall Inc. London.
- 3) Sulasno, Thomas Agus Prajitno. 1991. Dasar Sistem Pengaturan, Satya Wacana. Semarang.

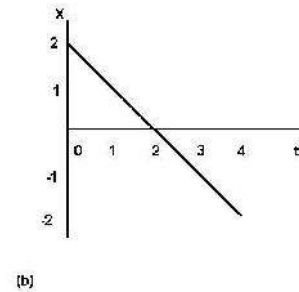
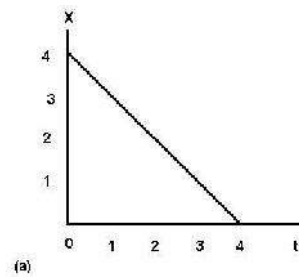
Soal-soal Bab 11:

- 1) Deskripsikan isyarat yang terlihat pada Gambar 11.9 ke dalam bentuk fungsi impuls



Gambar XI.9 Soal no. 1.

- 2) Isyarat waktu kontinyu pada Gambar 11.10, tentukan nilai-nilai pulsa yang dihasilkan oleh sebuah *ADC* hingga $k = 3$ jika periode cuplik adalah 1 detik.



Gambar XI.10 Soal no. 2.