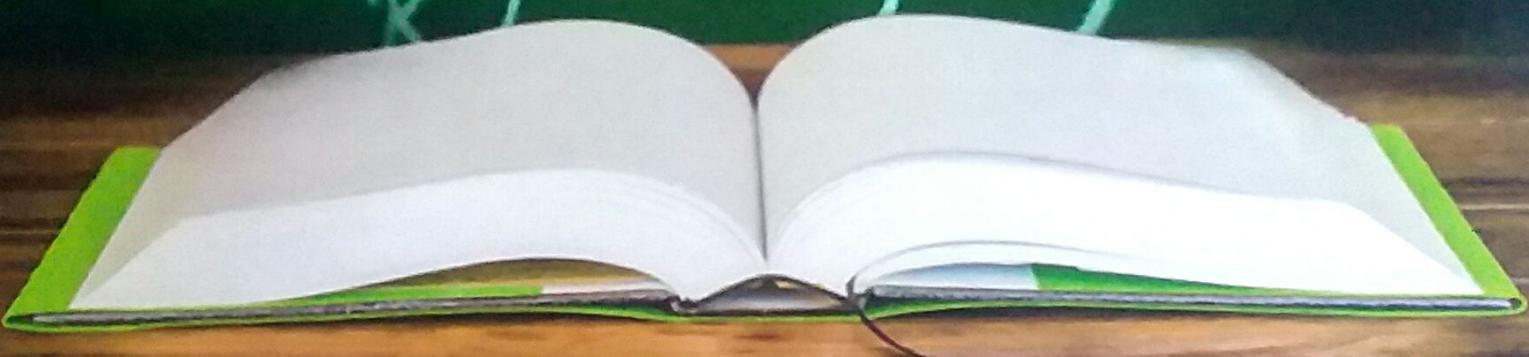


YUDA ROMDANIA, S.T., M.T.
Dr. AHMAD HERISON, S.T., M.T.
Ir. YOHANES, M.T.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} dy/dx = \int dx \left(\frac{y(b)}{y(a)} \right)$$



SOAL DAN PENYELESAIAN
MATEMATIKA
DIFERENSIAL
UNTUK UNIVERSITAS

SOAL DAN PENYELESAIAN MATEMATIKA DIFERENSIAL UNTUK UNIVERSITAS

Buku ini disusun sebagai salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar pada mata pelajaran Matematika di Universitas.

Untuk memenuhi keperluan belajar mengajar mahasiswa, kami telah menyusun sebuah buku ajar matematika. kami berharap buku ini dapat menjadi pedoman bagi dosen yang membinah mata kuliah tersebut di lingkungan Universitas. Selain itu juga dapat menjadi penunjang bagi mahasiswa dalam proses belajar. Disamping itu buku ajar ini pun dapat dijadikan acuan bagi mahasiswa dan dosen pembimbing.

Alimron
PENERBIT PENDIDIKAN & PENGETAHUAN

ISBN 978-602-5857-24-9



KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa, karena atas berkah, rahmat, dan karunia-Nya, penyusunan buku soal dan penyelesaian matematika diferensial untuk universitas dapat diselesaikan. Buku ini disusun sebagai salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar pada mata pelajaran Matematika di Universitas Lampung.

Untuk memenuhi keperluan belajar mengajar mahasiswa, kami telah menyusun sebuah buku ajar matematika. kami berharap buku ini dapat menjadi pedoman bagi dosen yang membinah mata kuliah tersebut di fakultas teknik di lingkungan Universitas Lampung. Selain itu juga dapat menjadi penunjang bagi mahasiswa dalam proses belajar. Disamping itu buku ajar ini pun dapat dijadikan acuan bagi mahasiswa dan dosen pembimbing.

Karena terbatasnya waktu yang tersedia untuk penyusunan buku ajar ini, kami akan berusaha menyempurnakan buku ini setiap tahun ajaran. Oleh karena itu kritik dan saran untuk perbaikan buku ini sangat kami harapkan untuk perbaikan dan penyempurnaanya. Kepada semua pihak yang ikut berpartisipasi demi terwujudnya buku ini kami ucapkan terimakasih

Bandar Lampung, Januari 2020

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

| |
|--|
| KATA PENGANTAR |
| DAFTAR ISI..... |
| BAB I TURUNAN |
| BAB II TURUNAN FUNGSI ALJABAR |
| BAB III TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI..... |
| BAB IV GRADIEN GARIS SINGGUNG..... |
| BAB V FUNGSI NAIK, STASIONER dan FUNGSI TURUN |
| DAFTAR PUSTAKA |

BAB 1

TURUNAN

- 1) Tentukan kecepatan rata rata jika t berubah dari 2 sampai 5 detik dan $s =$

$$(2t^2 + 5t - 3)m$$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{Kecepatan rata-rata} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{s(t + \Delta t)^2 - s(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{(2(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) - 3) - (2t^2 + 5t - 3)}{\Delta t} \\ &= \frac{(2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2 + 5t + 5\Delta t - 3) - (2t^2 + 5t - 3)}{\Delta t} \\ &= \frac{4t\Delta t + 2\Delta t^2 + 5\Delta t}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t + 5 \end{aligned}$$

$$\Delta t = 5 - 2 = 3$$

$$\text{Kecepatan rata rata} = 4.2 + 2.3 + 5 = 19 m/s$$

- 2) Tentukan turunan dari $y = \frac{2x-1}{2x+1}$

Jawab :

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{2(2x+1)-(2x-1)2}{(2x+1)^2} = \frac{(4x+2)-(4x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{4}{(2x+1)^2}$$

3) Tentukan kemiringan dari kurva $y = \frac{4}{x+1}$ dititik $x=1$

Jawab :

$$m = y' = \frac{0(x+1)-1(4)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(1+1)^2} = -2$$

$$y = \frac{4}{(x+1)} = \frac{4}{(1+1)} = 2$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 4$$

4) Hitung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jika diberikan $y = x^2 + 4x$ dan x berubah dari 0,7 menjadi 0,85

Jawab:

$$y = x^2 + 4x$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4x$$

$$y + \Delta y = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 4(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 4x + 4\Delta x$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 4\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + \Delta x + 4)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 4 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 0,85 - 0,7 = 0,15$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(0,85) + (0,15) + 4$$

$$= 5,85$$

- 5) Tentukan turunan dari $y = \frac{2x-1}{2x+1}$

Jawab :

$$y = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$u = 2x - 1 \quad v = 2x + 1$$

$$u' = 2 \quad v' = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(2x+1) - (2x-1)2}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+2 - 4x+2}{4x^2+4x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4x^2+4x+1}$$

- 6) Hitung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jika diberikan $y = x^2 + 6x$ dan x berubah dari 0,6 menjadi 0,75.

Jawab :

$$y = x^2 + 6x$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 6(x + \Delta x)$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 6x + 6\Delta x$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + \Delta x + 6)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 6 \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 0,75 - 0,6 = 0,15$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(0,75) + (0,15) + 6 = 7,65$$

7) Tentukan turunan dari $y = \frac{4x-1}{4x+1}$

Jawab :

$$y = \frac{4x-1}{4x+1}$$

$$u = 4x - 1 \quad v = 4x + 1$$

$$u' = 4 \quad v' = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(4x+1) - (4x-1)4}{(4x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{16x+4 - 16x+4}{16x^2 + 8x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{16x^2 + 8x + 1}$$

8) Tentukan kecepatan rata-rata jika t berubah dari 3 sampai 6 detik dan $s = (2t^2 + 6t - 3)$ m.

Jawab :

$$s = (2t^2 + 6t - 3)$$

$$\frac{ds}{dt} = 4t + 6$$

Untuk $t = 3$

$$\frac{ds}{dt} = 4t + 6$$

$$= 4(3) + 6 = 18$$

Untuk $t = 5$

$$\frac{ds}{dt} = 4t + 6$$

$$= 4(5) + 6 = 26$$

Untuk $t = 4$

$$\frac{ds}{dt} = 4t + 6$$

$$= 4(4) + 6 = 22$$

Untuk $t = 6$

$$\frac{ds}{dt} = 4t + 6$$

$$= 4(6) + 6 = 30$$

$$\text{Jadi, kecepatan rata rata} = \frac{18+22+26+30}{4} = 24$$

- 9) Hitung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jika diberikan $y = x^2 + 4x$ dan x berubah dari 0,7 menjadi 0,85

Jawab :

$$y = x^2 + 4x$$

$$y_1' = 2x + 4$$

$$y_1' = 2(0,7) + 4$$

$$y_1 = 1,4 + 4 = 5,4$$

$$y_2' = 2(0,85) + 4$$

$$y_2 = 1,7 + 4 = 5,7$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5,7 - 5,4}{0,85 - 0,7} = \frac{0,3}{0,15} = 2$$

10) Tentukan kecepatan rata – rata jika t berubah dari 2 sampai 5 detik dan s =

$$(2t^2 + 5t - 3) \text{ m}$$

Jawab :

$$s' = 4t+5$$

$$\text{Kecepatan rata – rata} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$\text{Untuk } t = 5 \rightarrow r = 4.5+5 = 25 \text{ m}$$

$$\text{Untuk } t = 2 \rightarrow r = 4.2+2 = 10$$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{25-10}{5-2} = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s}$$

11) Hitung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jika diberikan $y = x^2 + 4x$ dan x berubah dari 0,7 menjadi 0,85

Jawab :

$$y = x^2 + 4x, \Delta x = 0,85 - 0,7 = 0,15$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x)$$

$$\textcolor{red}{y} + \Delta y = \textcolor{red}{x^2} + 2x(\Delta x) + \Delta x^2 + \textcolor{red}{4x} + 4\Delta x$$

$$\Delta y = 2x(\Delta x) + \Delta x^2 + 4\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + \Delta x + 4)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 4 = 2(0,7) + 0,15 + 4 = 5,55$$

12) Tentukan kecepatan rata-rata jika t berubah dari 2 sampai 5 detik dan s = $(2t^2 +$

$$5t - 3) \text{ m.}$$

Jawab :

$$s = 2t^2 + 5t - 3, \Delta t = 5 - 2 = 3$$

$$s + \Delta s = 2(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) - 3$$

$$s + \Delta s = 2(t^2 + t(\Delta t) + \Delta t^2) + 5(t + \Delta t) - 3$$

$$\textcolor{red}{s} + \Delta s = \textcolor{red}{2t^2} + 2t(\Delta t) + 2\Delta t^2 + \textcolor{red}{5t} + 5\Delta t - 3$$

$$\Delta s = (2t + 2\Delta t + 5)\Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 2t + 2\Delta t + 5 = 2(2) + 2(3) + 5 = 15 \text{ m/s}$$

13) Tentukan kemiringan dari kurva $y = \frac{4}{x+1}$ di titik $x = 1$

Jawab :

$$y = \frac{4}{x+1}$$

$$y' = \frac{0 \cdot (x+1) - 4(1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = -\frac{4}{(x+1)^2}, \text{ pada } x = 1, \text{ maka}$$

$$y' = -\frac{4}{(1+1)^2} = -\frac{4}{(2)^2}$$

$$y' = -\frac{4}{4} = -1$$

14) Tentukan titik kemiringan $y = \frac{4}{x+1}$

Jawab :

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(0)(x+1) - (4)(1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{0-4}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

substitusikan $x = 1$

$$\frac{-4}{(1+1)^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

Titik kemiringan kurva = (1, -1)

BAB II

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

1) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

Jawab :

$$y' = \frac{dy}{dx} (\sqrt{2x}) \cdot \frac{dy}{dx} (2x) + \frac{dy}{dx} (2\sqrt{x})$$

$$y' = \frac{1}{2} (2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2(x)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$y' = (2x)^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$$

$$y' = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$$

2) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$

Jawab :

$$y' = \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{aturan diferensiasi } \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$y' = -\frac{\frac{dy}{dx} \left((2)^{\frac{1}{3}} (x)^{\frac{1}{3}} \right)}{\left((2)^{\frac{1}{3}} (x)^{\frac{1}{3}} \right)^2}$$

$$y' = -\frac{(2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} \left(x^{\frac{1}{3}} \right)}{\left((2)^{\frac{1}{3}} (x)^{\frac{1}{3}} \right)^2}$$

$$y' = -\frac{(2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\left((2)^{\frac{1}{3}} (x)^{\frac{1}{3}} \right)^2}$$

$$y' = -\frac{(2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{(2)^{\frac{2}{3}} (x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{3}}{(2)^{\frac{1}{3}} (x)^{\frac{4}{3}}}$$

$$y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x^4}}$$

$$y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{2}x\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{2x}}$$

3) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = \sqrt{x^3} - \frac{1}{x^5}$

Jawab :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2 - \left(-\frac{\frac{dy}{dx}(x^5)}{(x^5)^2} \right)$$

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot 3x^2 - \left(-\frac{5x^2}{x^{10}} \right)$$

$$y' = \frac{3x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \left(\frac{5}{x^6} \right)$$

4) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = (x^2 + 4)^3(2x^3 - 1)^2$

Jawab :

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv' \\ &= 6x(x^2 + 4)^2 \cdot (2x^3 - 1)^2 + (x^2 + 4)^3 \cdot 12x^2(2x^3 - 1) \\ &= (2x^3 - 1)(x^2 + 4)^2 (6x(2x^3 - 1) + 12x^2(x^2 + 4)) \\ &= 6(2x^3 - 1)(x^2 + 4)^2 (4x^4 + 8x^2 - x) \end{aligned}$$

5) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = (x^2 - 3)^4$

Jawab :

$$y = (x^2 - 3)^4$$

$$y' = 4(x^2 - 3)^3 \cdot 2x$$

$$y' = 8x(x^2 - 3)^3$$

6) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}$

Jawab :

$$\text{Gunakan aturan Diferensiasi } \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$y' = \frac{3x^2(2x^3 + 1) - (x^3 - 1) \cdot 2 \cdot 3x^2}{(2x^3 + 1)^2}$$

$$y' = \frac{3x^2(2x^3+1)-(x^3-1).2.3x^2}{(2x^3+1)^2}$$

$$y' = \frac{3x^2(2x^3+1)-(x^3-1).6x^2}{(2x^3+1)^2}$$

$$y' = \frac{(6x^5+3x^2)-(6x^5-6x^2)}{(2x^3+1)^2}$$

$$y' = \frac{9x^2}{(2x^3+1)^2}$$

$$y' = \left(\frac{3x}{2x^3+1}\right)^2$$

7) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^2y + xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$

Jawab :

$$x^2y + xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$$

$$\left(x^2y\frac{d}{dx} + x^2y\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}\right) + \left(xy^3\frac{d}{dx} + xy^3\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}\right) + 6x + \left(2y^2\frac{d}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right) + \left(y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx}\right) + 6x + \left(4y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 3xy^2 + 4y)\frac{dy}{dx} + 2xy + y^3 + 6x$$

8) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $\frac{x^3-y}{2x+y^2} = 2$

Jawab :

$$\frac{x^3-y-(4x+2y^2)}{2x+y^2} = \frac{x^3-2y^2-4x-y}{2x+y^2}$$

$$u' = 3x^2 - 4y - 5$$

$$v' = 2 + 2y$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(3x^2 - 4y - 5)(2x + y^2) - (x^3 - 2y^2 - 4x - y)(2 + 2y)}{(2x + y^2)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + y^2 + 3x^2y^2 - 2x^3y - 2x + 2y}{(2x + y^2)^2}$$

9) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^4 + 3y - 4x^3y^3 = 5x + 1$

Jawab :

$$\left(x^4 \frac{d}{dx}\right) + \left(3y \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}\right) - \left(4x^3y^3 \frac{d}{dx} + 4x^3y^3 \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx}\right) = 5x \frac{d}{dx} + 0$$

$$x^3 + 3 \frac{dy}{dx} - \left(12x^2y^3 + 12x^3y^2 \frac{dy}{dx}\right) = 5$$

$$\Rightarrow (3 - 12x^3y^2) \frac{dy}{dx} + x^3 - 12x^2y^3 - 5$$

10) Diketahui $(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$. Jika $f'(x) < 0$, tentukan nilai x

Jawab :

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$$

$$f'(x) = x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$x = -4, x = 1$$



11) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x^3y + xy^3 = 2$ untuk

$$x = 1$$

Jawab :

$$x^3y + xy^3 = 2$$

$$3x^2y + x^3 \frac{dy}{dx} + y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \frac{dy}{dx} + 3xy^2 \frac{dy}{dx} + 3x^2y + y^3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x^3 + 3xy^2) = -3x^2y - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3(1)^2y - y^3}{(1)^3 + 3(1)y^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3y - y^3}{1 + 3y^2}$$

12) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x + xy + y = 2$

Jawab :

$$x + xy + y = 2$$

$$1 + y + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = -2y - 1$$

$$f'(x) = \frac{-2y - 1}{x}$$

13) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $x = \sqrt{y} + 5$

Jawab :

$$x = \sqrt{y} + 5$$

$$\sqrt{y} = x - 5$$

$$y = (x - 5)^2$$

$$y = x^2 - 10x - 25$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 10$$

$$d.y = \sqrt{x^3 - \frac{1}{x^5}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - x^{-5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (-5)(x)^{-6}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{5}{x^6}$$

$$14) \text{ Tentukan } \frac{dy}{dx} \text{ dari fungsi } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

Jawab :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$$

$$y = (1 - \sqrt{x})^2$$

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$15) \text{ Tentukan turunan } \frac{dy}{dx} \text{ dari fungsi implisit } x^2y - xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$$

Jawab :

$$x^2y - xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - \left(1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + 6x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 3xy^2 \frac{dy}{dx} + 4y \frac{dy}{dx} = -2xy + y^3 - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} (x^2 - 3xy^2 + 4y) = y^3 - 2xy - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2xy - 6x}{x^2 - 3xy^2 + 4y}$$

16) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^4 + 3y - 4x^3y^3 = 5x + 1$

Jawab :

$$x^4 + 3y - 4x^3y^3 = 5x + 1$$

$$x^4 + 3y - 4x^3y^3 - 5x - 1 = 0$$

$$4x^3 + 3 \frac{dy}{dx} - \left(12x^2y^3 + 4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} \right) - 5 = 0$$

$$3 \frac{dy}{dx} - 4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} = -4x^3 + 12x^2y^3 + 5$$

$$4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2y^3 - 5$$

$$\frac{dy}{dx} (4x^3 \cdot 3y^2 - 3) = 4x^3 - 12x^2y^3 - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 12x^2y^3 - 5}{4x^3 \cdot 3y^2 - 3}$$

17) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab :

$$xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} - \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 2x - 5 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} + 2x - 5 = 0$$

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{dy}{dx} = -y^3 + 2xy - 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 - x^2) = -y^3 + 2xy - 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3 + 2xy - 2x + 5}{3xy^2 - x^2}$$

18) Diketahui $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$. Jika $f'(x) < 0$, tentukan nilai x

Jawab :

$$f'(x) = 6x^3 + 18x - 24 < 0$$

$$(6x - 6)(x + 4) < 0$$

$$6x - 6 = 0 \text{ atau } x + 4 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -4$$



$$Hp = \{-4 < x < 1\}$$

19) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x^3y + xy^3 = 2$ untuk $x=1$

$$x=1$$

Jawab :

$$x^3y + xy^3 = 2 \text{ untuk } x=1$$

$$3x^2y + x^3 \frac{dy}{dx} + 1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} + x^3 \frac{dy}{dx} = -3x^2y - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 + x^3) = -3x^2y - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y - y^3}{3xy^2 + x^3} \text{ untuk } x=1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3 \cdot 1^2 y - y^3}{3 \cdot 1 \cdot y^2 + 1^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y - y^3}{3y^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-3 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx}\right)(3y^2 + 1) - (-3y - y^3)\left(6y \frac{dy}{dx}\right)}{(3y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-9y^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} - 9y^4 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} + 18y^2 \frac{dy}{dx} + 6y^4 \frac{dy}{dx}}{(3y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}(-9y^2 - 3 - 9y^4 - 3y^2 + 18y^2 + 6y^4)}{(3y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}(6y^2 - 3y^4 - 3)}{(3y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{dy}{dx}(3y^4 - 6y^2 + 3)}{(3y^2 + 1)^2}$$

20) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x + xy + y = 2$

Jawab :

$$x + xy + y = 2$$

$$xy + y = 2 - x$$

$$y(x + 1) = 2 - x$$

$$y = \frac{2-x}{x+1}$$

$$y' = \frac{-1(x+1) - (2-x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{0(x+1)^2 - (-3)(2x+2)}{(x+10)^4}$$

$$y'' = \frac{6x+6}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{6(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{6}{(x+1)^3}$$

21) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sqrt{4x} + 2\sqrt{x}$

Jawab :

$$y = \sqrt{4x} + 2\sqrt{x}$$

$$y = (4x)^{\frac{1}{2}} + 2(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (8x)^{-\frac{1}{2}} + (x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

22) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Jawab :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

$$\sqrt{y} = 3 - \sqrt{x}$$

$$y = (3 - \sqrt{x})^2$$

$$y = x - 6\sqrt{x} + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

23) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $x = \sqrt{y} + 6$

Jawab :

$$x = \sqrt{y} + 6$$

$$y = (x - 6)^2$$

$$y = x^2 - 18x - 36$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 18$$

$$d.y = \sqrt{x^3} - \frac{1}{x^6}$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - x^{-6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (-6)(x)^{-7}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{6}{x^7}$$

24) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$

Jawab :

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$$

$$y = (3x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3x)^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\sqrt[3]{(3x)^4}$$

25) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^4 + 3y - 5x^3y^3 = 4x + 1$

Jawab :

$$x^4 + 3y - 5x^3y^3 = 4x + 1$$

$$x^4 + 3y - 5x^3y^3 - 4x - 1 = 0$$

$$4x^3 + 3 \frac{dy}{dx} - \left(15x^2y^3 + 4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} \right) - 4 = 0$$

$$3 \frac{dy}{dx} - 4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} = -4x^3 + 15x^2y^3 + 4$$

$$4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 15x^2y^3 - 4$$

$$\frac{dy}{dx} (4x^3 \cdot 3y^2 - 3) = 4x^3 - 15x^2y^3 - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 15x^2y^3 - 4}{4x^3 \cdot 3y^2 - 3}$$

26) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $xy^3 - x^2y + x^2 - 4x + 7 = 0$

Jawab :

$$xy^3 - x^2y + x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} - \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 2x - 4 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} + 2x - 4 = 0$$

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{dy}{dx} = -y^3 + 2xy - 2x + 4$$

$$\frac{dy}{dx}(3xy^2 - x^2) = -y^3 + 2xy - 2x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3 + 2xy - 2x + 4}{3xy^2 - x^2}$$

27) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^2y - xy^3 + 4x^2 + 2y^2 = 0$

Jawab :

$$x^2y - xy^3 + 4x^2 + 2y^2 = 0$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - \left(1 \cdot y^3 + x \cdot 4y^2 \frac{dy}{dx} \right) + 8x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 4xy^2 \frac{dy}{dx} + 4y \frac{dy}{dx} = -2xy + y^3 - 8x$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 - 4xy^2 + 4y) = y^3 - 2xy - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2xy - 8x}{x^2 - 4xy^2 + 4y}$$

28) Diketahui $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 5$. Jika $f'(x) < 0$, tentukan nilai x

Jawab :

$$f'(x) = 2x^2 + 2x - 12 < 0$$

$$(2x - 4)(x + 3) < 0$$

$$2x - 4 = 0 \text{ atau } x + 3 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -3$$



$$H_p = \{ -3 < x < 2 \}$$

29) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x^3y + xy^3 = 4$ untuk x

$$= 2$$

Jawab :

$$x^3y + xy^3 = 4 \text{ untuk } x = 2$$

$$3x^2y + x^3 \frac{dy}{dx} + 1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} + x^3 \frac{dy}{dx} = -3x^2y - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 + x^3) = -3x^2y - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y - y^3}{3xy^2 + x^3} \text{ untuk } x=2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3 \cdot 2^2y - y^3}{3 \cdot 2 \cdot y^2 + 2^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-12y - y^3}{6y^2 + 8}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-12 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} \right) (6y^2 + 8) - (-12y - y^3) \left(12y \frac{dy}{dx} \right)}{(6y^2 + 8)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-72y^2 \frac{dy}{dx} - 96 \frac{dy}{dx} - 18y^4 \frac{dy}{dx} - 24y^2 \frac{dy}{dx} + 144y^2 \frac{dy}{dx} + 12y^4 \frac{dy}{dx}}{(6y^2 + 8)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx} (-72y^2 - 96 - 18y^4 - 24y^2 + 144y^2 + 12y^4)}{(6y^2 + 8)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}(48y^2 - 6y^4 - 96)}{(6y^2 + 8)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{dy}{dx}(6y^4 - 48y^2 + 96)}{(6y^2 + 8)^2}$$

30) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x + xy + y = 2$

Jawab :

$$x + xy + y = 2$$

$$xy + y = 2 - x$$

$$y(x + 1) = 2 - x$$

$$y = \frac{2 - x}{x + 1}$$

$$y' = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)(1)}{(x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{0(x + 1)^2 - (-3)(2x + 2)}{(x + 10)^4}$$

$$y'' = \frac{6x + 6}{(x + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{6(x + 1)}{(x + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

31) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$

Jawab :

$$y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$$

$$y = (2x)^{\frac{1}{2}} + 2(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2)(2x)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 1 \cdot (x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2x)^{-\frac{1}{2}} + (x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{x}}{2x}$$

32) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = \sqrt{x^3} - \frac{1}{x^5}$

Jawab :

$$y = \sqrt{x^3} - \frac{1}{x^5}$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} - x^{-5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (-5) \cdot x^{-6}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} + 5 \cdot \frac{1}{x^6}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{x^6}$$

33) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^2y - xy^2 + 3x^2 + 2y^2 = 0$

Jawab :

$$x^2y - xy^2 + 3x^2 + 2y^2 = 0$$

$$2xydx + x^2dy - y^2dx - 2xydy + 6xdx + 4ydy = 0$$

$$\frac{2xydx + x^2dy - y^2dx - 2xydy + 6xdx + 4ydy}{dx} = 0$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + 6x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (x^2 - 2xy + 4y) = -2xy + y^2 + 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy + y^2 + 6x}{x^2 - 2xy + 4y}$$

$$y' = \frac{-2xy + y^2 + 6x}{x^2 - 2xy + 4y}$$

34) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab :

$$xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$y^3dx + 3xy^2dy - 2xydx - x^2dy + 2xdx - 5dx = 0$$

$$\frac{y^3dx + 3xy^2dy - 2xydx - x^2dy + 2xdx - 5dx}{dx} = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} + 2x - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 - x^2) = y^3 - 2xy + 2x - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2xy + 2x - 5}{3xy^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{y^3 - 2xy + 2x - 5}{3xy^2 - x^2}$$

35) Diketahui $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$. Jika $f'(x) < 0$, tentukan nilai x

Jawab :

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$$

$$f'(x) < 0$$

$$6x^2 + 18x - 24 < 0$$

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$(x + 4)(x - 1) < 0$$

$$x = -4$$

$$x = 1$$



$$HP = \{-4 < x < 1\}$$

36) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $y = x^{\frac{3}{2}} - x^{-5}$

Jawab :

$$y = x^{\frac{3}{2}} - x^{-5}$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5x^{-6} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{x^6}$$

37) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^2y - xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$

Jawab :

$$x^2y - xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - \left(y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} \right) + 6x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - y^3 - 3xy^2 \frac{dy}{dx} + 6x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 - 3xy^2 - 4y) = -2xy + y^3 - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy + y^3 - 6x}{x^2 - 3xy^2 - 4y}$$

38) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^4 + 3y - 4x^3y^3 - 5x + 1 = 0$

Jawab :

$$x^4 + 3y - 4x^3y^3 - 5x + 1 = 0$$

$$4x^3 + 3 \frac{dy}{dx} - \left(12x^2y^3 + 12x^3y^2 \frac{dy}{dx} \right) - 5 = 0$$

$$4x^3 + 3 \frac{dy}{dx} - 12x^2y^3 - 12x^3y^2 \frac{dy}{dx} - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - 12x^3y^2) = -4x^3 + 12x^2y^3 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 + 12x^2y^3 + 5}{3 - 12x^3y^2}$$

39) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab :

$$xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 2x - 5 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} + 2x - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 - x^2) = -y^3 + 2xy - 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3 + 2xy - 2x + 5}{3xy^2 - x^2}$$

40) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $y(x+1) = 2-x$

Jawab :

$$y = \frac{2-x}{x+1}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-1(x+1) - 1(2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-(-3)(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{(3)(2)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{6}{(x+1)^3}$$

41) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $x = \sqrt{y} + 5$

Jawab :

$$x = \sqrt{y} + 5$$

$$y = (x - 5)^2$$

$$y = x^2 - 10x - 25$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 10$$

$$d.y = \sqrt{x^3 - \frac{1}{x^5}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - x^{-5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - (-5)(x)^{-6}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{5}{x^6}$$

42) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

Jawab :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

$$\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}$$

$$y = (1 - \sqrt{x})^2$$

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

43) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^2y - xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$

Jawab :

$$x^2y - xy^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$$

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - \left(1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + 6x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 3xy^2 \frac{dy}{dx} + 4y \frac{dy}{dx} = -2xy + y^3 - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} (x^2 - 3xy^2 + 4y) = y^3 - 2xy - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2xy - 6x}{x^2 - 3xy^2 + 4y}$$

44) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $x^4 + 3y - 4x^3y^3 = 5x + 1$

Jawab :

$$x^4 + 3y - 4x^3y^3 = 5x + 1$$

$$x^4 + 3y - 4x^3y^3 - 5x - 1 = 0$$

$$4x^3 + 3 \frac{dy}{dx} - \left(12x^2y^3 + 4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} \right) - 5 = 0$$

$$3 \frac{dy}{dx} - 4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} = -4x^3 + 12x^2y^3 + 5$$

$$4x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3 \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2y^3 - 5$$

$$\frac{dy}{dx} (4x^3 \cdot 3y^2 - 3) = 4x^3 - 12x^2y^3 - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 12x^2y^3 - 5}{4x^3 \cdot 3y^2 - 3}$$

45) Tentukan turunan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit $xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab :

$$xy^3 - x^2y + x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx} - \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 2x - 5 = 0$$

$$y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} + 2x - 5 = 0$$

$$3xy^2 \frac{dy}{dx} - x^2 \frac{dy}{dx} = -y^3 + 2xy - 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} (3xy^2 - x^2) = -y^3 + 2xy - 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3 + 2xy - 2x + 5}{3xy^2 - x^2}$$

46) Tentukan turunan pertama dan kedua dari persamaan $x + xy + y = 2$

Jawab :

$$x + xy + y = 2$$

$$xy + y = 2 - x$$

$$y(x + 1) = 2 - x$$

$$y = \frac{2 - x}{x + 1}$$

$$y' = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)(1)}{(x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{0(x+1)^2 - (-3)(2x+2)}{(x+10)^4}$$

$$y'' = \frac{6x+6}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{6(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$y'' = \frac{6}{(x+1)^3}$$

47) Diketahui $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$. Jika $f'(x) < 0$, tentukan nilai x

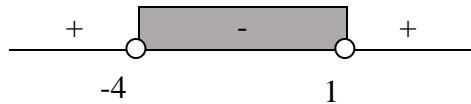
Jawab :

$$f'(x) = 6x^3 + 18x - 24 < 0$$

$$(6x - 6)(x + 4) < 0$$

$$6x - 6 = 0 \text{ atau } x + 4 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -4$$



$$H_p = \{-4 < x < 1\}$$

BAB III

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

1. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$

Jawab :

$$y' = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}^2 \sin x \cos x}{2}$$

$$y' = \sin x \cdot \sin x$$

$$y' = \sin^2 x$$

Gunakan aturan diferensial $\frac{d}{dg}(g^2) \cdot \frac{d}{dg}(\sin x) = 2g \cdot \cos x$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$y' = \sin 2x$$

2. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{\cos 4x}{1 - \sin 4x}$

Jawab :

Gunakan aturan Diferensiasi $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$y' = \frac{-\sin 4x \cdot 4(1 - \sin 4x) - \cos 4x(-\cos 4x \cdot 4)}{(1 - \sin 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-\sin 4x(1 - \sin 4x) + \cos 4x \cdot 4 \cos 4x}{(1 - \sin 4x)^2}$$

$$y' = \frac{-4\sin 4x + 4\sin^2 4x + 4\cos^2 4x}{(1-\sin 4x)^2}$$

Menggunakan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 4\sin^2 4x + 4\cos^2 4x = 4$

$$y' = \frac{-4\sin 4x + 4}{(1-\sin 4x)^2}$$

$$y' = \frac{4(-\sin 4x + 1)}{(1-\sin 4x)^2}$$

$$y' = \frac{4}{1-\sin 4x}$$

3. Tentukan turunan dari persamaan $y = \sqrt{\tan x}$

Jawab :

$$y = \sqrt{\tan x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \sec^2 x$$

$$y' = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$$

4. Tentukan turunan pertama dari persamaan $y = \frac{x}{x+\sin x}$

Jawab :

Gunakan aturan Diferensiasi $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$y' = \frac{(x+\sin x) - x(1+\cos x)}{(x+\sin x)^2}$$

$$y' = \frac{x+\sin x - x - x\cos x}{(x+\sin x)^2}$$

$$y' = \frac{\sin x - x \cos x}{(\sin x + x \cos x)^2}$$

5. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

Jawab :

Gunakan aturan Diferensiasi $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x + \cos x \sin x)}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - (\sin x \cos x - 1 + \cos x \sin x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$y' = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - (\sin x \cos x - 1 + \cos x \sin x)}{1 + \sin 2x}$$

$$y' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - (\sin x \cos x + \cos x \sin x - 1)}{1 + \sin 2x}$$

$$y' = \frac{1 + \sin 2x - (2 \sin x \cos x - 1)}{1 + \sin 2x}$$

$$y' = \frac{1 + \sin 2x - (\sin 2x - 1)}{1 + \sin 2x}$$

$$y' = \frac{1 + \sin 2x - \sin 2x + 1}{1 + \sin 2x}$$

$$y' = \frac{2}{1 + \sin 2x}$$

6. Tentukan turunan dari persamaan $y = x(3x + 4 \cos x)$

Jawab :

$$y = x(3x + 4 \cos x)$$

$$y = 3x^2 + 4x \cos x$$

$$y' = 6x + (4 \cos x + 4x - \sin x)$$

$$y' = 6x + 4 \cos x - 4x \sin x$$

7. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

Jawab :

$$u' = \cos x + \sin x \quad v' = \cos x - \sin x$$

$$u = \sin x - \cos x \quad v = \sin x + \cos x$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x) - (-\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{1 + 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

8. Tentukan turunan dari persamaan $y = x(5x + 3 \cos x)$

Jawab :

$$y = x(5x + 3 \cos x)$$

$$y = 5x^2 + 3x \cos x$$

$$y' = 10x + (3 \cos x + 3x - \sin x)$$

$$y' = 10x + 3 \cos x - 3x \sin x$$

9. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{\cos 4x}{1 - \sin 4x}$

Jawab :

Misal : $u = \cos 4x$, $v = 1 - \sin 4x$

$$u' = -4\sin 4x$$

$$v' = -4\cos 4x$$

$$y = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = \frac{-4\sin 4x(1 - \sin 4x) - \cos 4x \cdot -4\cos 4x}{(1 - \sin 4x)^2}$$

$$y = \frac{-4\sin 4x + 4\sin^2 4x + 4\cos^2 4x}{(1 - \sin 4x)^2}$$

10. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

Jawab :

$$u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = \sin x + \cos x \rightarrow v'(x) = \cos x - \sin x$$

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - \{u(x)v'(x)\}}{\{v(x)\}^2}$$

$$y' = \frac{1(\sin x + \cos x) - (x(\cos x - \sin x))}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x) - (x \cos x - x \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\sin x + x \sin x + \cos x - x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\sin x(1+x) + \cos x(1-x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

11. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

Jawab :

$$u(x) = \sin x \rightarrow u'(x) = \cos x$$

$$v(x) = \sin x + \cos x \rightarrow v'(x) = \cos x - \sin x$$

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - \{u(x)v'(x)\}}{\{v(x)\}^2}$$

$$y' = \frac{\cos x (\sin x + \cos x) - (\sin x (\cos x - \sin x))}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x - (\sin x \cos x - \sin^2 x)}{(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x)}$$

$$y' = \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{\sin^2 x \sin x \cos x + \sin x \cos x + \cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

12. Tentukan turunan dari persamaan $y = \frac{x}{x + \sin x}$

Jawab :

$$y = \frac{x}{x + \sin x}$$

$$y = \frac{(x + \sin x) - x(1 + \cos x)}{(x + \sin x)^2}$$

$$y = \frac{(x + \sin x) - x + x \cos x}{(x + \sin x)^2}$$

$$y = \frac{\sin x - \cos x}{(x + \sin x)^2}$$

BAB IV

GRADIEN GARIS SINGGUNG

- 1) Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan $y = 2x^2 + 3$ sejajar garis

$$8x - y + 3 = 0$$

Jawab :

$$y = 8x + 3$$

$$y' = m = 8$$

$$y = 2x^2 + 3$$

$$8 = 4x$$

$$x = 2$$

$$y = 2(2)^2 + 3 = 11 \rightarrow (x, y) \rightarrow (2, 11)$$

Sejajar $m_1 = m_2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 11 = 8(x - 2)$$

$$y = 8x - 5$$

- 2) Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan $y = \sqrt[3]{x}$ melalui titik singgung $(8, 2)$

Jawab :

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}} \rightarrow x = 8$$

$$y' = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{12} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8)$$

$$12y - 24 = x - 8$$

$$y = \frac{x + 16}{12}$$

3) Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan $y = (4x - 3)^2 - 1$ tegak lurus garis $x + 2y - 11 = 0$

Jawab :

$$2y = 11 - x$$

$$y = \frac{11 - x}{2}$$

$$y' = -1$$

$$y = (4x - 3)^2 - 1$$

$$y = 16x^2 - 24x + 8$$

$$y=2x^2-3x+1$$

$$y'=4x-3\rightarrow y'=-1$$

$$-1=4x-3$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$y=(4\left(\frac{1}{2}\right)-3)^2-1$$

$$y=0 \rightarrow (\frac{1}{2},0)$$

$$y-y1=m(x-x1)$$

$$\text{Tegak lurus} \rightarrow m1.m2 = -1$$

$$-1.m2 = -1$$

$$m2=1$$

$$y-0=1(x-\frac{1}{2})$$

$$y=x-\frac{1}{2}$$

$$2y=2x-1$$

$$y=\frac{2x-1}{2}$$

4) Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan $y = (2x - 4)^2 - 4$ tegak lurus garis $x + 2y - 10 = 0$

$$x + 2y - 10 = 0$$

Jawab :

Langkah pertama : cari nilai m_1

$$y = (2x - 4)^2 - 4$$

$$y = 4x^2 - 16x + 16 - 4$$

$$y = 4x^2 - 16x + 12$$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$m_1 = y' = 2x - 4$$

Langkah kedua : cari nilai m_2

$$x + 2y - 10 = 0$$

$$2y = -x + 10$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$m_2 = y' = -\frac{1}{2}$$

Langkah ketiga : cari nilai x

Karena dua garis tegak lurus maka berlaku :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_1 \cdot -\frac{1}{2} = -1$$

$$m_1 = 2$$

Langkah keempat : substitusikan $m_1 = 2$ kedalam persamaan langkah satu

$$m_1 = y' = 2x - 4$$

$$2 = 2x - 4$$

$$-2x = -4 - 2$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

Langkah kelima : cari y dengan substitusikan nilai x = 3

$$y = 4x^2 - 16x + 12$$

$$y = 4(3)^2 - 16(3) + 12$$

$$y = 36 - 48 + 12$$

$$y = 0 \text{ jadi titik singgungnya } (3,0)$$

Persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x - 3)$$

$$y = 2x - 6 + 0$$

$$y = 2x - 6$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 2x - 6$

- 5) Jika garis singgung pada kurva $y = (a + \frac{b}{x})\sqrt{x}$ di titik (4,8) mempunyai gradien

2. Tentukan harga a dan b!

Jawab :

$$y = \left(a + \frac{b}{x}\right)\sqrt{x}$$

$$y = \left(a + \frac{b}{x}\right)x^{1/2}$$

$$y = ax^{1/2} + \frac{bx^{1/2}}{x}$$

$$y' = \frac{1}{2}ax^{-1/2} - \frac{1}{2}bx^{-3/2}$$

substusikan $x = 4$

$$m = y'$$

$$m = \frac{1}{2}ax^{-1/2} - \frac{1}{2}bx^{-3/2}$$

$$2 = \frac{1}{2}a(4)^{-1/2} - \frac{1}{2}b(4)^{-3/2}$$

$$2 = \frac{1}{4}a - \frac{1}{16}b$$

$$32 = 4a - b \dots (1)$$

Substusikan nilai x dan y

$$y = \left(a + \frac{b}{x}\right)\sqrt{x}$$

$$8 = \left(a + \frac{b}{4}\right)\sqrt{4}$$

$$8 = 2a + \frac{1}{2}b$$

$$16 = 4a + b \dots$$

$$16 - 4a = b \dots (2)$$

Substusikan persamaan 2 ke persamaan 1

$$32 = 4a - b$$

$$32 = 4a - (16 - 4a)$$

$$32 = 4a - 16 + 4a$$

$$32 + 16 = 8a$$

$$48 = 8a$$

$$6 = a$$

$$16 - 4a = b$$

$$16 - 4(6) = b$$

$$16 - 24 = b$$

$$-8 = b$$

- 6) Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan $y = 3x^2 + 2$ sejajar garis

$$6x - y + 2 = 0$$

Jawab :

Langkah pertama : cari nilai m_1

$$y = 3x^2 + 2$$

$$m_1 = y' = 6x$$

Langkah kedua : cari nilai m_2

$$6x - y + 2 = 0$$

$$y = 6x + 2$$

$$m_2 = 6$$

Langkah ketiga : cari nilai x

Karena sejajar maka berlaku

$$m_1 = m_2$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Langkah keempat : cari nilai y dengan substitusikan $x = 1$

$$y = 2x^2 + 2$$

$$y = 2(1)^2 + 2$$

$$y = 2 + 2$$

$$y = 4 \text{ jadi titik singgungnya } (2,4)$$

Persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 6(x - 2)$$

$$y = 6x - 12 + 4$$

$$y = 6x - 8$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = 6x - 8$

7) Tentukan persamaan garis singgung dari persamaan $y = 2x^2+3$ sejajar garis $8x-y+3=0$

$$y+3=0$$

Jawab :

o $8x-y-3=0$

$$y = 8x - 3$$

$$m = 8$$

o $y = 2x^2+3$

$$y' = 4x$$

o $y' = m$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

o Subtistusi

$$x = 2$$

$$y = 2x^2 + 3$$

$$y = 2 \cdot 2^2 + 3$$

$$y = 11$$

o Titik singggung (2, 11)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 11 = 8(x - 2)$$

$$y - 11 = 8x - 16$$

$$y - 8x + 5 = 0$$

8) $y = 9 - x^2$ melalui titik di luar kurva (0,11)

Jawab :

$$y' = 9 - 2x$$

$$y' = -2x$$

$$m = -2x$$

$$m = -2 \cdot (0)$$

$$y - 11 = 0$$

$$y = 11$$

9) Tentukan persamaan garis singggung dari persamaan $y = \frac{1}{2x^2}$ melalui titik di luar kurva (1,-2)

Jawab :

$$y=2x^{-2}$$

$$y'=-4\mathbf{x}$$

$$m = -4.(1)$$

$$m = -4$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+2=-4(x-1)$$

$$y+2=-4x+4$$

$$y=-4x+2$$

BAB V

FUNGSI NAIK, STASIONER dan FUNGSI TURUN

- 1) Tunjukkan bahwa $y = x^5 + 20x - 6$ adalah fungsi naik untuk semua nilai x.

Jawab :

Fungsi naik saat $f'(x) > 0$

$$f'(x) > 0$$

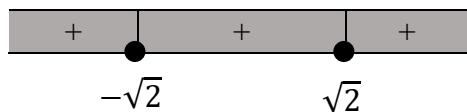
$$5x^4 + 20 > 0$$

$$x^4 + 4 > 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) > 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0$$

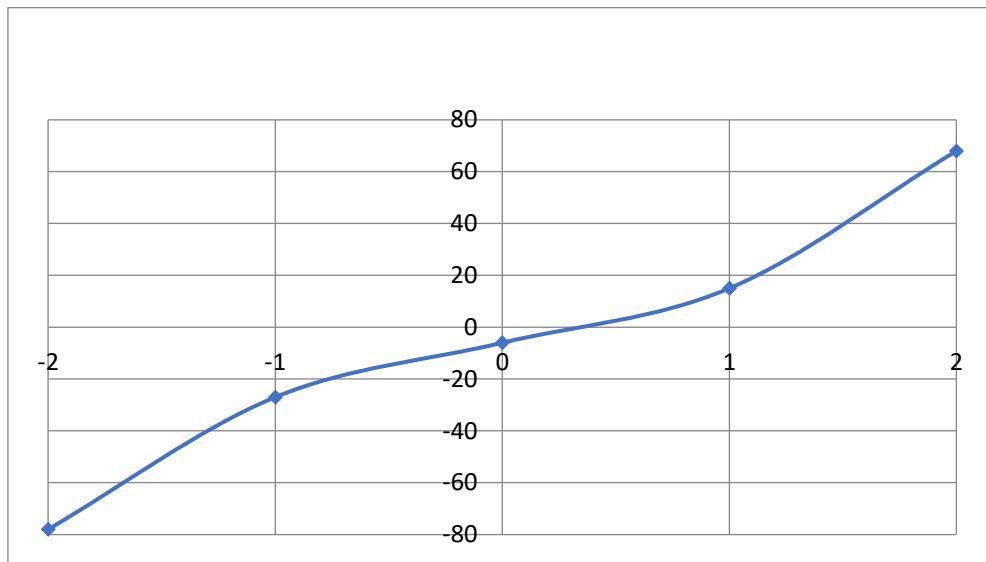
$$x = \sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2}$$



Karena semua bilangan yang dimasukkan ke persamaan $f'(x)$ menghasilkan nilai positif maka terbukti bahwa $y = x^5 + 20x - 6$ adalah fungsi naik

- Gambar sketsa grafik:

| | | | | | |
|---|-----|-----|----|----|----|
| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| Y | -78 | -27 | -6 | 15 | 68 |



- 2) Sebatang kawat 60 meter dipotong menjadi 2. Satu potongan dibentuk menjadi lingkaran dan potongan kedua menjadi bujur sangkar. Agar luas kedua bentuk itu maksimum, tentukan panjang masing-masing potongan kawat tersebut.

Jawab :

Misal keliling lingkaran = x meter

Misal keliling bujur sangkar / persegi = $(60-x)$ meter

a. Keliling lingkaran = x meter

$$2\pi r = x$$

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

Sehingga luas lingkaran

$$l_1 = \pi r^2$$

$$l_1 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$l_1 = \frac{x^2}{4\pi}$$

b. Keliling persegi = (60-x) meter

$$4p = (60-x)$$

$$P = \frac{(60-x)}{4}$$

Sehingga luas persegi

$$l_2 = p^2$$

$$l_2 = \frac{(60-x)^2}{4^2}$$

$$l_2 = \frac{(60-x)^2}{16}$$

Jumlah luas lingkaran dan persegi adalah

$$f(X) = l_1 + l_2$$

$$f(X) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(60-x)^2}{16}$$

Luas maks = $l' = 0$

$$\frac{x}{2\pi} + \frac{2 \cdot (60-x) \cdot -1}{16} = 0$$

$$\frac{x}{2\pi} - \frac{(60-x)}{8} = 0$$

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{(60-x)}{8}$$

$$X = \frac{(60-x)2\pi}{8}$$

$$= \frac{(60-x)\pi}{4}$$

$$= \frac{(60\pi - x\pi)}{4}$$

$$4X = 60\pi - x\pi$$

$$4X + x\pi = 60\pi$$

$$X (4+\pi) = 60\pi$$

$$X = \frac{60\pi}{4+\pi}$$

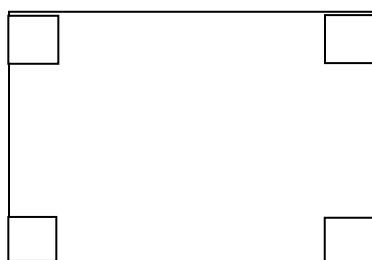
$$X = 26,4 \text{ meter}$$

Jadi, agar dapat luas maksimum kedua bangun maka panjang kawat lingkaran

= 26,4 meter dan panjang kawat bujur sangkar = 33,6 meter

- 3) Selembar karton berukuran 100 x 140 cm akan dibuat menjadi sebuah kotak tanpa tutup. Setiap sudut karton dipotong berbentuk bujur sangkar. Jika ingin diperoleh volume kotak maksimum, tentukan tinggi kotak tersebut.

Jawab :



$$V = PLT$$

$$V = (140-2x)(100-2x)x$$

$$V = 4x^3 - 480x^2 + 14000x$$

V maks ketika $v' = 0$

$$v' = 0$$

$$12x^2 - 960x + 14000 = 0$$

$$3x^2 - 240x + 3500 = 0$$

Rumus abc =

$$x_{1,2} = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = 240 \pm \frac{\sqrt{(-240)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3500}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1,2} = 240 \pm \frac{\sqrt{57600 - 42000}}{6}$$

$$x_{1,2} = 240 \pm \frac{\sqrt{15600}}{6}$$

$$x_{1,2} = 240 \pm \frac{20\sqrt{39}}{6}$$

$$x_{1,2} = 240 \pm 20,8167$$

$$x_1 = 19,1833$$

$$x_2 = 60,8167 \text{ (tidak berlaku, karena } 100-2 \cdot 60,8167 \text{ hasilnya negatif)}$$

Sehingga, tinggi balok agar tercapai volume maksimum adalah 19,1833 cm.

- 4) Ongkos produksi x buah TV per hari Rp $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ harga jual total Rp $(50 - \frac{1}{2}x)$. Berapa buah televisi harus diproduksi per hari agar keuntungannya maksimum?

Jawab :

$$\text{Keuntungan} = (\text{harga jual}) \text{ jumlah barang} - \text{ongkos produksi}$$

$$= (50 - \frac{1}{2}x)x - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$$

$$= 15x - \frac{3}{4}x^2 - 25$$

Agar keuntungan maksimum maka $k' = 0$

$$k' = 0$$

$$k' = -\frac{3}{2}x + 15 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x = -15 \rightarrow x = 10$$

Jadi, tv yang harus diproduksi setiap hari agar keuntungan maksimum adalah 10 unit

- 5) Diberikan $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$. Tentukan titik-titik kritis, interval y naik dan turun, dan nilai maksimum dan minimum. Gambarkan sketsa grafiknya.

Jawab :

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$$

$$y' = x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ atau } x = 2$$

Titik Kritis / Titik Ekstrem :

Jika $x = -3$, $y = \frac{43}{2}$

Jika $x = 2$, $y = \frac{2}{3}$

Jadi titik ekstrem dititik $\{(-3, \frac{43}{2}), (2, \frac{2}{3})\}$



Fungsi y naik pada interval $-3 < x < 2$

Fungsi y turun pada interval $x < -3$ dan $x > 2$

Nilai Maksimum :

$$y'' = 2x + 1$$

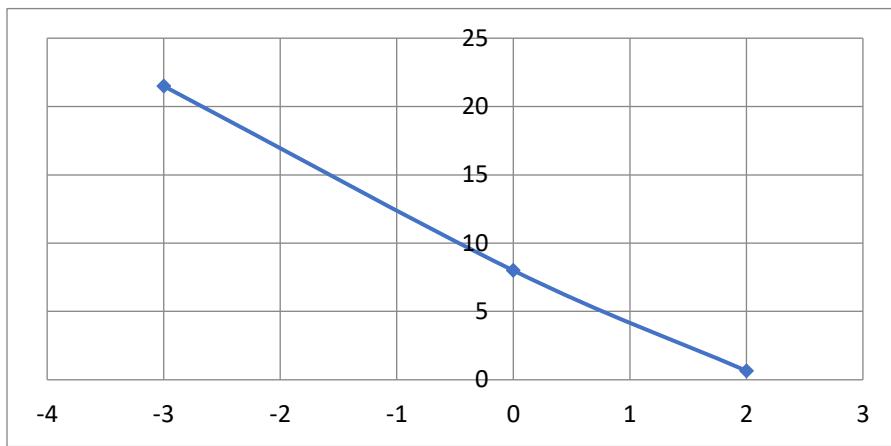
Untuk $x = -3$, $y = -5 < 0$, titik tersebut adalah titik maksimum

Untuk $x = 2$, $y = 5 > 0$, titik tersebut adalah titik minimum

Sketsa grafik

- sketsa grafik:

| | | | |
|---|------|---|-------|
| X | -3 | 0 | 2 |
| Y | 21.5 | 8 | 0,666 |



- 6) Tunjukkan bahwa $y = x^3 - 8$ tidak memiliki titik maksimum maupun minimum.

Jawab :

$$y = f(x) = x^3 - 8$$

Untuk turunan pertama

$$f'(x_0) = 3x^2$$

$$3x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Untuk turunan kedua

$$f''(x_0) = 6x$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

Karena $f'(x_0) = 0$ dan $f''(x_0) = 0$ maka titik stasioner (x_0, y_0) adalah titik belok, dan terbukti bahwa fungsi diatas tidak memiliki titik maksimum maupun minimum

7) Tunjukkan bahwa $y = x^5 + 20x - 6$ adalah fungsi naik untuk semua nilai x .

Jawab :

Syarat fungsi naik Jika $f'(x_0) > 0$

$$y = f(x) = x^5 + 20x - 6$$

$$f'(x_0) = 5x^4 + 20$$

$$5x^4 + 20 = 0$$

$$5x^4 = -20$$

$$x^4 = -4$$

Karena $f'(x_0)$ bernilai imajiner maka fungsi tersebut bukanlah fungsi naik,
berarti fungsi tersebut tidak terbukti fungsi naik

8) Tunjukkan bahwa $y = 1 - x^3 - x^7$ adalah fungsi turun untuk semua nilai x .

Jawab :

Syarat fungsi turun Jika $f'(x_0) < 0$

$$y = f(x) = 1 - x^3 - x^7$$

$$f'(x_0) = 3x^2 - 7x^6$$

$$3x^2 - 7x^6 = 0$$

$$3x(3 - 7x^4) = 0$$

$$3x = 0 \quad 3 - 7x^4 = 0$$

$$x = 0$$

$$7x^4 = 3$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{3}{7}}$$

$$x = 0.8091$$

Karena fungsi $f(x_0)$ tidak bernilai kurang dari 0, maka berarti fungsi tersebut tidak terbukti fungsi turun.

- 9) Ongkos produksi x buah TV per hari Rp($x^2 + 30x + 25$), harga jual total Rp($50 - x$). Berapa buah televisi harus diproduksi per hari agar keuntungannya maksimum?

Jawab :

$$\begin{aligned}\text{Harga jual } x \text{ unit barang} &= \text{Rp}(50 - x)x \\ &= \text{Rp}(50x - x^2)\end{aligned}$$

Untung = Harga jual – Ongkos produksi

$$\begin{aligned}U(x) &= (50x - x^2) - (x^2 + 30x + 25) \\ &= (-2x^2 + 20x - 25)\end{aligned}$$

Untung maksimum

$$U'(x) = 0$$

$$-4x + 20 = 0$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

Jadi jumlah tv yang diproduksi per hari agar mendapatkan keuntungan yang maksimum adalah 5 unit

- 10) Tunjukan bahwa $y = 2x^3 - 6$ tidak memiliki titik maksimum maupun minimum.

Jawab :

$$y = f(x) = 2x^3 - 6$$

Untuk turunan pertama

$$f'(x_0) = 6x^2$$

$$6x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Untuk turunan kedua

$$f''(x_0) = 12x$$

$$12x = 0$$

$$x = 0$$

Karena $f'(x_0) = 0$ dan $f''(x_0) = 0$ maka titik stasioner (x_0, y_0) adalah titik belok, dan terbukti bahwa fungsi diatas tidak memiliki titik maksimum maupun minimum.

11) Selidiki fungsi $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 60x - 7$ untuk titik belok. Interval fungsi naik atau turun, serta titik maksimum dan minimum. Gambarkan sketsa grafiknya

Jawab :

- Titik belok

$$\text{Syarat } y'' = 0$$

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 60 = 0$$

$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 0$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad x = 2$$

$$y = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^4 - 10\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 12\left(\frac{1}{3}\right) + 60\left(\frac{1}{3}\right) - 7$$

$$= 3\left(\frac{1}{81}\right) - \frac{10}{27} - \frac{12}{3} + \frac{60}{3} - 7 = \frac{-9}{27} + \frac{48}{3} - 7$$

$$= \frac{-9+432-189}{27} = \frac{234}{27} = \frac{26}{3} \rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{26}{3}\right)$$

$$y = 3(2)^4 - 10(2)^3 - 12(2)^2 + 60(2) - 7$$

$$= 3(16) - 10(8) - 12(4) + 120 - 7 = 33$$

- Fungsi naik dan turun

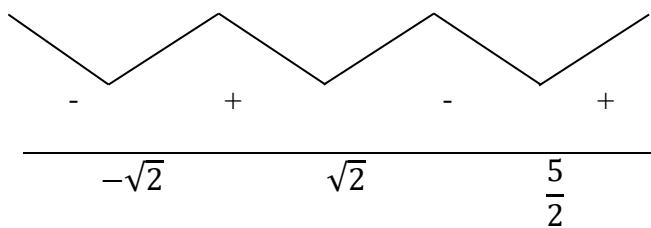
Syarat $y' = 0$

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 60 = 0$$

$$y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10 = 0$$

$$(2x-5)(x^2-2) = 0$$

$$x = \frac{5}{2}, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$



$$y'' = 0$$

$$36x^2 - 60x - 24 = 0$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\text{Untuk } x = \frac{5}{2} \quad y'' = \frac{421}{2} = 210,5$$

$$\text{Untuk } x = \sqrt{2} \rightarrow y'' = -36,8528$$

$$\text{Untuk } x = -\sqrt{2} \rightarrow y'' = 132,8528$$

12) Sebatang kawat 60 meter dipotong menjadi 2. Satu potongan dibentuk menjadi lingkaran dan potongan kedua menjadi bujur sangkar. Agar luas kedua bentuk itu maksimum, tentukan panjang masing-masing potongan kawat tersebut!

Jawab :

$$\text{Bagian I} = x \text{ m}$$

$$\text{Bagian II} = (60-x) \text{ m}$$

$$\text{Bagian I untuk lingkaran , jari-jari} = \frac{x}{2} \text{ m}$$

$$L_1 = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \pi$$

$$\text{Bagian II untuk persegi sisinya} = \frac{(60-x)}{4} \text{ meter}$$

$$L_2 = \left[\frac{(60-x)}{4}\right]^2 = \frac{3600 - 120x + x^2}{16}$$

Jumlah keduanya:

$$L = L_1 + L_2$$

$$= 3,14 \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{120x}{16} - \frac{3600}{16}$$

$$= \frac{13,56}{16} x^2 - \frac{120}{16} x - \frac{3600}{16}$$

$$L' = 0$$

$$= 6,78x - \frac{120}{16}$$

$$X = \frac{120}{16} \cdot \frac{1}{6,78} = \frac{120}{108,48} = 1,1062$$

$$\text{maka } L1\text{ maks} = 3,14 \left(\frac{1,1062}{2}\right)^2 = 0,9606 \text{ m}^2$$

$$\text{maka } L2 \text{ maks} = 1,1062^2 = 1,2237 \text{ m}^2$$

13) Diberikan $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$. Tentukan titik-titik kritis, interval y naik dan turun ,dan nilai maksimum dan minimum. Gambarkan sketsa grafiknya.

Jawab :

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$$

$$y' = 0$$

$$3x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{z^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = -2 \pm \sqrt{76}$$

$$x_{1= -2+8,7178=6,7178} \text{ (titik kritis)}$$

$$x_{2= -2-8,7178=-10,7178} \text{ (titik kritis)}$$

- Maksimum dan minimum

$$f''=0$$

$$6x + 2 = 0$$

$$\text{Untuk } x_{2=-10,7178} \rightarrow 6(-10,7178)+2 = -62,3068$$

$$x_{1=6,7178} \rightarrow 6(6,7178)+2 = 42,3068$$

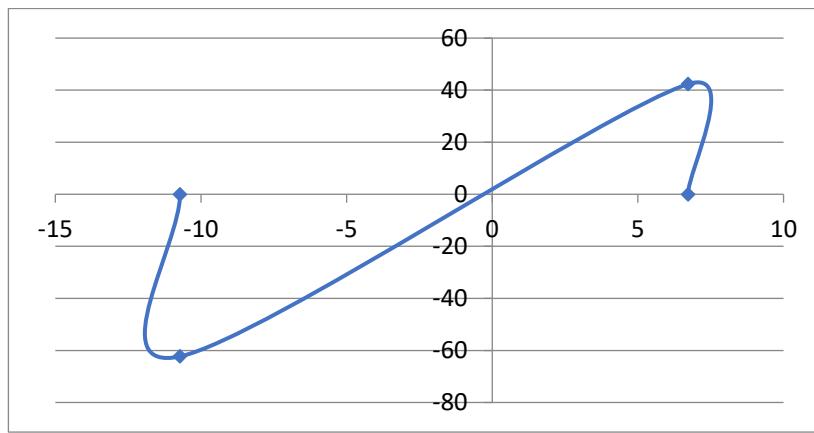
Jika

$x_1 = 6,7178 \rightarrow 42,3068 > 0$ maka titik tersebut adalah titik maksimum

Jika

$x_2 = -10,7178 \rightarrow -62,3068 < 0$ maka titik tersebut adalah titik minimum

Sketsa grafik sebagai berikut



- 14) Tunjukan bahwa $y = x^5 + 20x - 6$ adalah suatu fungsi naik untuk semua nilai x.

Jawab :

$$\text{Syarat fungsi naik } \rightarrow f'(x) > 0$$

$$\rightarrow 5x^4 + 20 > 0$$

$$f'(x) = 5x^4 + 20$$

$$f'(x) > 0$$

$$5x^4 + 20 > 0$$

$$5x^4 > 0$$

$$x^4 > -4$$

$$x > \sqrt[4]{-4} \text{ (imajiner)}$$

Maka untuk semua nilai x bukan merupakan fungsi naik

DAFTAR PUSTAKA

J. Stewart, L. Redlin, S. Watson, Precalculus. 1998. *Mathematics for Calculus 3rd*

Edition : Brooks/Cole Publishing Co.

Margha, M dan I. Besari. 1985. *Matematika Universitas Jilid 2*. Bandung : Armico.

Maurice D. Weir, Joel Hass, George B. Thomas. *Thomas' Calculus 12th Edition*.

Purcell dan Varberg. 2005. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I Edisi 9*. Jakarta :

Erlangga

Soemartojo, N. 1988. *Kalkulus*. Jakarta : Erlangga

Yohannes. 2012. *Diktat Bahan Kuliah Matematika Teknik Sipil*. Bandar Lampung :

Universitas Lampung