

Pendugaan Model *Time Varying Parameter* Menggunakan Algoritma Kalman Filter

Riza Umami¹, Khoirin Nisa^{2*}

⁽¹⁾Jurusan Matematika Universitas Lampung, Bandar Lampung
Jl. Prof. Sumantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung 35145

*email korespondensi: khoirin.nisa@fmipa.unila.ac.id

Abstract. The *Time Varying Parameter (TVP)* model is a univariate time series model, where the parameters vary with time. The TVP model is specified in the state space model and is estimated by the Kalman Filter algorithm. Estimation of the model in the Kalman Filter algorithm uses maximum likelihood method. In this way, the Kalman Filter algorithm can be used with the maximum likelihood in the time domain to estimate the parameters of the TVP model and the state vector β_t through the prediction error decomposition function. A case example from this study is to suspect the TVP model from coal sales data (y_t) based on coal reference price data (x_t). The estimation results show that the TVP model is optimal because it meets the assumption that the residuals are normally distributed and the residuals between the measurement equation and the transition equation do not correlate. This model has a value of Mean Absolute Percentage Error (MAPE) and Root Mean Square Percentage Error (RMSPE) smaller than 10% which means the accuracy of the model is very good.

Keywords: Kalman Filter, Time Varying Parameter model, maximum likelihood estimator, state space.

Abstrak. Model *Time Varying Parameter (TVP)* adalah model deret waktu univariat, dimana parameternya bervariasi terhadap waktu. Model TVP dispesifikasikan pada model state space dan diduga dengan algoritma Kalman Filter. Pendugaan model pada algoritma Kalman Filter menggunakan maximum likelihood. Dengan cara ini, algoritma Kalman Filter dapat digunakan dengan maximum likelihood tepat dalam domain waktu untuk menduga parameter model TVP dan vektor state β_t melalui fungsi dekomposisi kesalahan prediksi. Contoh kasus dari penelitian ini adalah menduga model TVP dari data penjualan batubara (y_t) berdasarkan data harga acuan batubara (x_t). Hasil pendugaan menunjukkan bahwa model TVP optimal karena memenuhi asumsi bahwa residual berdistribusi normal dan residual antara persamaan pengukuran dan persamaan transisi tidak berkorelasi. Model ini memiliki nilai Mean Absolute Percentage Error (MAPE) dan Root Mean Square Percentage Error (RMSPE) lebih kecil dari 10% yang berarti tingkat keakuratan model sangat baik.

Kata kunci: Kalman Filter, model time varying parameter, penduga *maximum likelihood*, state space.

PENDAHULUAN

Peramalan merupakan suatu proses untuk meramalkan sesuatu yang akan terjadi pada masa yang akan datang berdasarkan data pada masa lalu dengan menggunakan teknik atau cara tertentu. Salah satu cara meramalkan suatu kejadian di masa

mendatang adalah dengan analisis deret waktu [1]. Secara umum terdapat empat macam pola data deret waktu yaitu *mean* konstan, *trend*, siklis, dan musiman. Umumnya, kelemahan dari beberapa metode peramalan deret waktu tidak dapat meramalkan suatu data deret waktu yang mempunyai efek kecenderungan (*trend*) dan

musiman (*seasonal*). Untuk mengatasi hal tersebut maka munculah metode dekomposisi. Metode ini didasarkan pada kenyataan bahwa apa yang telah terjadi akan berulang kembali melalui pola yang sama, dengan pola data deret waktu seperti unsur kecenderungan, musiman, siklus, ataupun perubahan yang bersifat acak.

Model *state space* merupakan suatu pendekatan untuk memodelkan dan memprediksi secara bersama beberapa deret waktu yang saling berhubungan serta variabel-variabel tersebut mempunyai interaksi dinamis. Model *state space* menggambarkan data deret waktu melalui variabel tambahan (*state vector*). *State vector* berisi ringkasan nilai sekarang dari suatu deret waktu yang sesuai dengan prediksi nilai yang akan datang [2].

Salah satu contoh model yang ditetapkan dalam suatu model *state space* adalah model *Time Varying Parameter* (TVP). Pada model TVP perubahan struktural berubah sepanjang waktu, sehingga parameternya adalah fungsi waktu. Algoritma Kalman *Filter* [3-4] mendeskripsikan solusi rekursif untuk masalah pemfilteran linear dari data diskrit. Dalam prosesnya, model yang telah ditransformasikan ke dalam representasi *state space*, selanjutnya dilakukan perhitungan berdasarkan algoritma Kalman Filter untuk mendapatkan prediksi dari data deret waktu. Penelitian yang berkaitan dengan model TVP telah dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya dapat dilihat pada [5-9].

Dalam kasus yang berurusan dengan data time series, model regresi konvensional dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

untuk $t = 1, 2, \dots, T$, dimana T merupakan ukuran sampel.

y_t = variabel dependen

X_t = matriks $T \times m$ dari variabel penjelas

β_t = vektor $m \times 1$ dari parameter yang tidak diketahui

ε_t = vektor residual, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2 I)$

Ada beberapa metode pendugaan untuk model regresi (1), misalnya *Ordinary Least Square (OLS)*, *Generalized Least Square (GLS)*, penduga instrumental variabel, dan sebagainya. Dalam kasus apapun, pendugaan parameter bersifat konstan dari waktu ke waktu. Model ini dikenal sebagai parameter model tetap. Namun, perubahan struktural, kesalahan spesifikasi, nonlinier, variabel *proxy* dan agregasi semua merupakan sumber dari variansi parameter. Oleh karena itu, perlu dipertimbangkan model dimana parameter adalah fungsi waktu, yang disebut model TVP [10].

Model TVP merupakan suatu model yang ditetapkan ke dalam suatu model *state space* dan diduga dengan algoritma Kalman Filter. Model *state space* ini mampu merepresentasikan variabel yang tidak teramati untuk ikut masuk ke dalam model dan diperkirakan bersama dengan model yang tampak.

Penggunaan metode Kalman *Filter* memberikan pendugaan dengan cara yang dapat meminimumkan *mean square error* sehingga memungkinkan mendapatkan hasil estimasi yang optimal [11]. Model TVP dengan Kalman *Filter* tidak membutuhkan asumsi bahwa data harus bersifat stasioner atau independen [12]. Menggunakan representasi *state space*, model TVP dinyatakan dalam bentuk dua persamaan berikut:

$$y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\beta_t = \Phi \beta_{t-1} + R_t \eta_t \quad (3)$$

Dengan

y_t = vector $T \times 1$ dari variabel terikat

X_t = matriks $T \times m$ dari variabel penjelas

β_t = vektor $m \times 1$ dari parameter (vektor *state*)

Φ = matriks transisi ($m \times m$)

R_t = matriks input yang menentukan struktur varians dari persamaan transisi berukuran $(m \times m)$

ε_t = vektor residual $T \times 1$ dengan *mean* $\mathbf{0}$ dan matriks kovarians H_t

η_t = vektor residual $T \times 1$ dengan *mean* $\mathbf{0}$ dan matriks kovarians Q_t

Persamaan (2) disebut sebagai persamaan pengukuran, di mana persamaan ini memungkinkan parameter untuk tergantung waktu, sementara persamaan (3) merupakan persamaan transisi, menentukan pergerakan parameter. Ini memungkinkan β_t mengikuti AR(p) untuk persamaan transisi. Parameter β_t adalah variabel acak yang tidak teramati, yang harus diestimasi menggunakan data yang diamati y_t dan X_t . Untuk menduga variabel *state*, ada tiga jenis pendugaan, yaitu prediksi, penyaringan dan pemulusan .

Metode Kalman *Filter* awalnya dikembangkan oleh Kalman [13] dalam konteks sistem linear adalah prosedur algoritma rekursif untuk menghitung estimator optimal dari *state vector* pada waktu t berdasarkan pada informasi yang tersedia pada waktu t dan untuk perkiraan variansi dalam model deret waktu.

Kalman *Filter* menyediakan metode pendugaan linier untuk model deret waktu apapun yang direpresentasikan dalam bentuk *state space* [8]. Kalman *Filter* bergantung pada asumsi residual dan inisial vektor *state* berdistribusi normal, sehingga memungkinkan fungsi *likelihood* dapat dihitung melalui prediksi dekomposisi residual yang diperoleh dari Kalman *Filter*. Ini menjadi langkah untuk menduga parameter yang tidak diketahui dalam model.

Kalman *Filter* terdiri dari serangkaian persamaan rekursif berikut:

$$\bar{\beta}_{t|t-1} = \Phi \bar{\beta}_{t-1} + c_t \quad (4)$$

$$\Sigma_{t|t-1} = \Phi \Sigma_{t-1} \Phi' + R_t Q_t R_t' \quad (5)$$

$$\hat{y}_{t|t-1} = X_t \bar{\beta}_{t|t-1} \quad (6)$$

$$v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} \quad (7)$$

$$F_t = X_t \Sigma_{t|t-1} X_t' + H_t \quad (8)$$

$$K_t = \Sigma_{t-1} X_t' F_t^{-1} \quad (9)$$

$$\bar{\beta}_t = \bar{\beta}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t-1} X_t' F_t^{-1} v_t \quad (10)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t X_t) \Sigma_{t|t-1} \quad (11)$$

Persamaan (4) dan (5) merupakan tahap prediksi *state*, dimana $\Sigma_{t|t-1}$ adalah matriks kovarians dari $\bar{\beta}_{t|t-1}$. v_t adalah prediksi residual satu periode untuk y_t , yang disebut inovasi. F_t^{-1} adalah invers dari matriks kovarians dari inovasi pada waktu t sementara K_t disebut gain dari Kalman *Filter* (*Kalman gain*). Persamaan (10) dan (11) adalah tahap memperbarui *state*.

Ketika Kalman *Filter* diterapkan pada deret univariat terdapat sedikit perubahan dalam notasi untuk persamaan penyaringan, dengan $N \times N$ matriks F_t digantikan oleh skala

$$f_t = X_t \Sigma_{t|t-1} X_t' + h_t \quad (12)$$

dimana h_t adalah komponen diagonal dari matriks H_t .

Aspek lain dari pemfilteran deret univariat adalah mengatur model *state space* dengan membiarkan varians gangguan menjadi proporsional ke skalar positif σ_*^2 , sehingga

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma_*^2 h_t, \quad Var(\eta_t) = \sigma_*^2 Q_t \quad (13)$$

Menerapkan rekursi menjadi salah satu alasan untuk melanjutkan dengan cara ini bahwa jika σ_*^2 adalah salah satu parameter yang tidak diketahui dalam Ψ dapat dikonsentrasikan keluar dari fungsi *likelihood* yang mengikuti varians dalam persamaan (13).

METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data sekunder

yang digunakan adalah data penjualan batubara yang diperoleh dari PT. Bukit Asam (Persero), Tbk. Unit Pelabuhan Tarahan, Bandar Lampung dan data Harga Acuan Batubara dari Januari 2012 sampai dengan Desember 2017 yang diperoleh dari situs www.indonesia-investments.com.

Program komputer yang digunakan untuk mendukung proses penelitian ini adalah *software* Eviews 8. Tahapan analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Identifikasi model TVP

Model TVP dinyatakan dalam bentuk *state space*, yaitu persamaan pengukuran (2) dan persamaan transisi (3).

2. Pendugaan model TVP

Pendugaan model TVP menggunakan algoritma Kalman *Filtery* dibagi menjadi tiga tahap. Pertama, inisialisasi *state* dengan memberi nilai awal $\bar{\beta}_0 = 0$ dan $\Sigma_0 = 10^6$. Kedua, prediksi *state* dengan memulai pendugaan. Pendugaan *state vector* dan varians pada waktu t dengan informasi yang tersedia pada saat $t - 1$. Berdasarkan persamaan (2) dan (3) diberikan $\bar{\beta}_{t-1}$ dan Σ_{t-1} , penduga optimal dari β_t diberikan oleh persamaan prediksi

$$\bar{\beta}_{t|t-1} = \bar{\beta}_{t-1} \quad (14)$$

dimana varians dari residual penduga adalah sebagai berikut:

$$\Sigma_{t|t-1} = \Sigma_{t-1} + Q_t \quad (15)$$

Persamaan (14) dan (15) diartikan sebagai penduga prior dan penduga residual kovarians dari β_t berdasarkan pengetahuan dari proses sebelum langkah t . Setelah memperoleh nilai $\bar{\beta}_{t|t-1}$ dan $\Sigma_{t|t-1}$ selanjutnya dapat diduga nilai y_t berdasarkan informasi pada $t - 1$, sebagai berikut:

$$\hat{y}_{t|t-1} = X_t \bar{\beta}_{t|t-1} \quad (16)$$

Residual prediksi dari y_t dapat dihitung dengan rumus:

$$v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} \quad (17)$$

dan varians *prediction error* dari y_t diperoleh dari Persamaan (12). Kemudian hitung *Kalman gain* (K_t),

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} X_t' f_t^{-1} \quad (18)$$

Tahap ketiga adalah memperbarui *state* yang merupakan proses pembaruan dengan menggunakan *Kalman gain* (K_t). Proses pembaruan *state* ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\bar{\beta}_t = \bar{\beta}_{t|t-1} + K_t v_t \quad (19)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t X_t) \Sigma_{t|t-1} \quad (20)$$

3. Kriteria kesesuaian model

Kriteria kesesuaian model digunakan untuk menguji ketepatan model adalah *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE) dan *Akaike Information Criterion* (AIC).

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{|\varepsilon_t|}{y_t}}{m} \quad (21)$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\varepsilon_t}{y_t} \right)^2} \quad (22)$$

dengan t merupakan banyak data pada periode yang digunakan, ε_t merupakan residual dari peramalan, Y_t dan merupakan nilai sebenarnya dari variabel jumlah data.

Menurut [14], AIC dirumuskan sebagai berikut:

$$AIC = -2 \left(\frac{l}{T} \right) + 2 \left(\frac{k}{T} \right) \quad (23)$$

dengan l adalah fungsi *log-likelihood*, k adalah jumlah parameter yang diestimasi, T adalah jumlah observasi.

4. Uji diagnostik terhadap hasil pendugaan.

a. Uji normalitas

Kalman Filter bergantung pada asumsi normalitas, pengujian normalitas

biasanya sebagai kunci spesifikasi pemeriksaan. Menggunakan deret dari residual, perubahan dari normalitas dinilai dari koefisien *skewness* (S) dan kurtosis (K), digabungkan pada kriteria Jarque-Bera (JB) sebagai berikut :

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \quad (24)$$

dimana,

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

dengan

JB = Statistik Jarque Bera

n = jumlah sampel

S = *Skewness*

K = Kurtosis

Pengujian menggunakan statistik Jarque-Bera dengan hipotesis sebagai berikut:

H₀: Residual berdistribusi normal

H₁: Residual tidak berdistribusi normal

Uji Jarque-Bera (JB) *Test of Normality* berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas 2 (χ_2^2). Jika hasil Jarque-Bera lebih besar dari distribusi *chi-square* maka Tolak H₀ yang berarti tidak berdistribusi normal [15].

b. Uji autokorelasi

Untuk autokorelasi residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi digunakan uji-*d* Durbin Watson. Statistik uji yang digunakan yaitu:

$$d = \frac{\sum_1^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_1^n \varepsilon_t^2} \quad (25)$$

Nilai *d* akan dibandingkan dengan nilai *d* Durbin Watson pada $d_{tabel}(d_L \text{ dan } d_U)$, d_L merupakan batas bawah dan

d_U merupakan batas atas[15].

c. Uji korelasi

Uji korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dan residual pada persamaan transisi menggunakan uji korelasi Pearson. Rumus korelasi Pearson adalah sebagai berikut:

$$r = \frac{n \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \eta_t - \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \sum_{t=1}^n \eta_t}{\sqrt{(n \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 - (\sum_{t=1}^n \varepsilon_t)^2) \sqrt{(n \sum_{t=1}^n \eta_t^2 - (\sum_{t=1}^n \eta_t)^2)}} \quad (26)$$

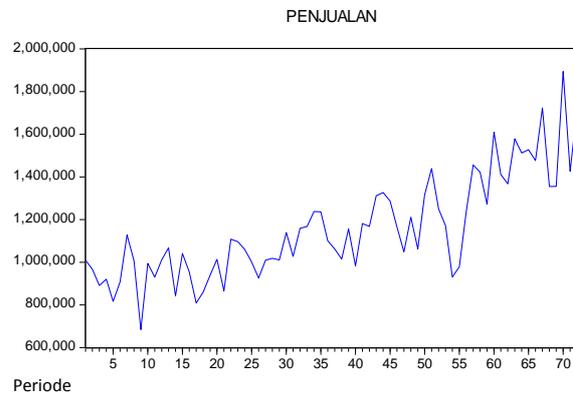
Untuk menguji signifikansi nilai *r* (koefisien korelasi) yang diperoleh maka dapat mengacu pada kriteria *r* (koefisien korelasi) yang diberikan oleh Guilford [16]

5. Transformasi data jika asumsi pada model *state space* dan algoritma Kalman *Filter* tidak terpenuhi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

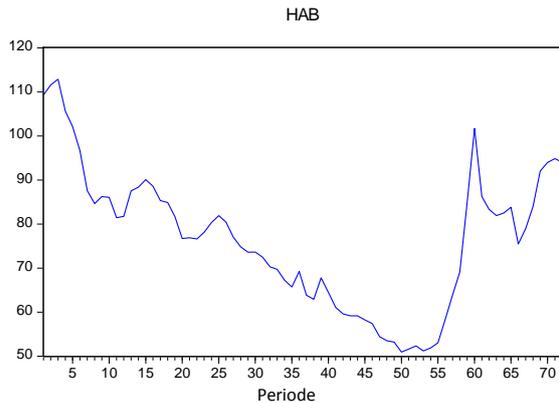
Identifikasi Model

Hasil plot data penjualan batubara PT. Bukit Asam (Persero), Tbk., dan harga batubara acuan Tahun 2012-2017 secara berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1. Plot Data Penjualan Batubara PT. Bukit Asam, Tbk. Unit Pelabuhan Tarahan

PLOT HARGA ACUAN BATUBARA



Gambar 2. Plot Data Harga Acuan Batubara (HAB)

Gambar 1 dan Gambar 2 menunjukkan secara deskriptif bahwa data yang di analisis adalah data yang bersifat *time varying* (berubah-ubah) bergantung pada waktu. Spesifikasi model TVP dari penjualan batubara dalam bentuk *state space* dinyatakan sebagai berikut:

$$y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \quad (27)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, Q_t) \quad (28)$$

Persamaan pengukuran (27) mendefinisikan hubungan antara variabel penjualan batubara (y_t) dengan variabel penjelas yaitu harga acuan batubara (X_t). Sedangkan persamaan transisi (28) menggambarkan pergerakan dari parameter yang berubah-ubah setiap waktu. Dalam persamaan di atas matriks Φ dan R_t sebagai matriks identitas. H_t dan Q_t tergantung parameter yang tidak diketahui. Parameter yang tidak diketahui diduga menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Misalkan $\bar{\beta}_t$ dan varians Σ_t secara berturut-turut adalah vektor state dan varians yang menunjukkan penduga optimal bagi β_t .

Pendugaan Parameter

Pendugaan menggunakan *maximum likelihood* diperoleh varians h_t dan q_t .

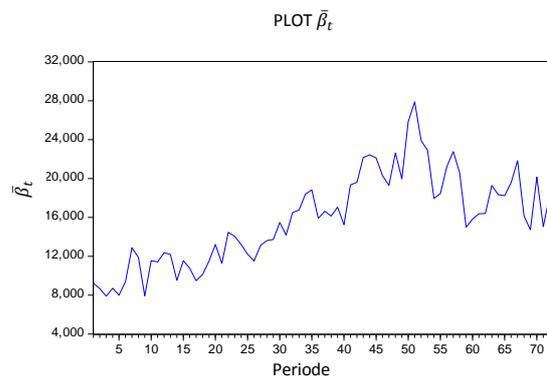
$$h_t = \exp(-0,393165) = 0,67491$$

$$q_t = \exp(0,001291) = 1,001292$$

sehingga

$$\text{var} \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,674918 & 0 \\ 0 & 1,001292 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nilai varians h_t dan q_t , dilakukan pendugaan dengan menggunakan algoritma Kalman *Filter* untuk memperoleh vektor *state* dan varians dari β_t . Hasil pendugaan menunjukkan bahwa model memiliki 72 data pengamatan membutuhkan 116 iterasi untuk mencapai solusi konvergen dengan toleransi 10^{-4} . Pada konvergensi maksimum *log-likelihood* diperoleh $2,00E+08$ dengan nilai *Akaike Information Criterion* sebesar 5563875. Hasil pendugaan menggunakan algoritma Kalman *Filter* diperoleh vektor *state* sebagai berikut:



Gambar 3. Plot $\bar{\beta}_t$ Bulan Januari 2012 - Desember 2017

Kriteria Kesesuaian Model

Nilai MAPE dan RMSPE yang diperoleh secara berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{72} \frac{|\varepsilon_t|}{y_t}}{n} = \frac{0,001058611}{72} = 0,0000147029$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{72} \left(\frac{\varepsilon_t}{y_t}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{72} (2,89015E - 08)}$$

$$= 0,0000200352$$

Nilai MAPE dan RMSPE mengindikasikan tingkat residual yang dapat terjadi pada model penjualan batubara menggunakan pendugaan model TVP. Semakin kecil nilai

MAPE dan RMSPE yang diperoleh maka semakin baik model yang digunakan. Berdasarkan perhitungan diperoleh nilai MAPE dan RMSPE berada di bawah 10% yang berarti bahwa pendugaan model TVP sangat baik digunakan.

Uji Diagnostik Residual

a. Uji Normalitas

Uji normalitas dilakukan untuk melihat apakah residual model berdistribusi normal atau tidak. Uji normalitas ini dilakukan dengan uji Jarque-Berra. Hipotesis dalam pengujian ini adalah sebagai berikut:

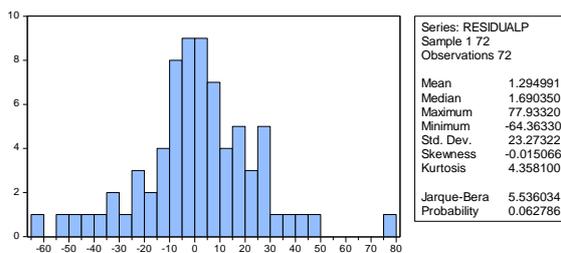
H_0 : Residual berdistribusi normal

H_1 : Residual tidak berdistribusi normal

Uji Jarque-Berra dilakukan menggunakan rumus:

$$\begin{aligned}
 JB &= \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \\
 &= \frac{72}{6} \left((-0,014796415)^2 + \frac{(4,358094967-3)^2}{4} \right) \\
 &= 12(0,000219 + 0,461324) \\
 &= 5,53589302
 \end{aligned}$$

Berdasarkan histogram residual model TVP pada Gambar 4, hasil uji Jarque-Berra dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 4. Histogram Residual Data

Hasil uji normalitas data residual di atas menunjukkan uji Jarque-Berra sebesar 5,536034 dengan p-value sebesar

0,062786 $>$ 0,05 sehingga tidak tolak H_0 yang artinya residual berdistribusi normal. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa model TVP memiliki residual yang berdistribusi normal.

b. Uji Autokorelasi

Uji autokorelasi dilakukan untuk melihat ada atau tidaknya korelasi pada ϵ_t dan korelasi pada η_t . Uji autokorelasi yang digunakan untuk ϵ_t dan η_t adalah uji Durbin Watson. Statistik uji yang digunakan adalah:

$$d_{\epsilon_t} = \frac{\sum_{t=2}^{72} (\epsilon_t - \epsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{72} \epsilon_t^2} = \frac{9.1190,03021}{38.577,3792} = 2,36382188$$

Nilai $d_{\epsilon_t} = 2,3638$, dengan $\alpha = 5\%$ diperoleh nilai d_{tabel} sebesar $d_L = 1,5895$ dan $d_U = 1,6457$, sehingga $4 - d_L < 2,3638 < 4 - d_U$ berdasarkan kaidah keputusan identifikasi autokorelasi maka dapat disimpulkan tidak ada keputusan autokorelasi pada ϵ_t .

$$d_{\eta_t} = \frac{\sum_{t=2}^{72} (\eta_t - \eta_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{72} \eta_t^2} = \frac{1.085.975.881}{486.385.713,4} = 2,23274625$$

Nilai $d_{\eta_t} = 2,2327$ dengan $\alpha = 5\%$ diperoleh nilai d_{tabel} sebesar $d_L = 1,5895$ dan $d_U = 1,6457$, sehingga $d_U < 2,2327 < 4 - d_U$ berdasarkan kaidah keputusan identifikasi autokorelasi maka dapat disimpulkan Tolak H_0 yang berarti tidak terdapat autokorelasi positif maupun negatif pada η_t .

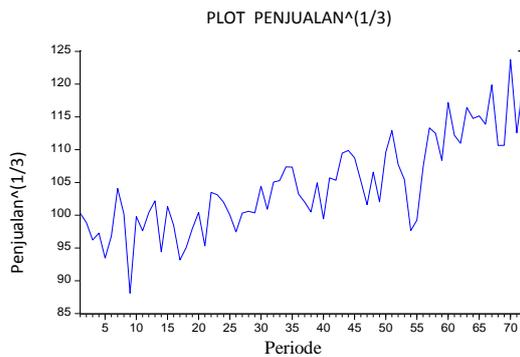
Uji korelasi antara ϵ_t dan η_t menggunakan koefisien korelasi Pearson. Uji korelasi untuk residual persamaan

$$r = \frac{72(3822993,252) - (93,23938)(18284,89)}{\sqrt{(72(38577,3792) - (8693,581983))} \sqrt{(72(486385713) - (334337202,3))}}$$

diperoleh $r = 0,882698285$. Untuk memeriksa apakah hasil perhitungan korelasi tersebut signifikan dilakukan dengan mengacu pada pada interpretasi nilai r yang diberikan oleh Guilford. Berdasarkan nilai r adalah 0,882698285 menunjukkan bahwa korelasi antara ϵ_t dan η_t memiliki korelasi yang sangat kuat.

Analisis Hasil Transformasi Data

Mengatasi masalah korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi pada data, dilakukan transformasi pada data penjualan batubara. Hal ini dilakukan untuk menghilangkan korelasi yang terjadi antara residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi. Berikut adalah hasil transformasi akar pangkat tiga pada penjualan batubara:



Gambar 5. Plot Data Transformasi Penjualan Batubara

Hasil pendugaan menggunakan *maksimum likelihood* menunjukkan bahwa nilai:

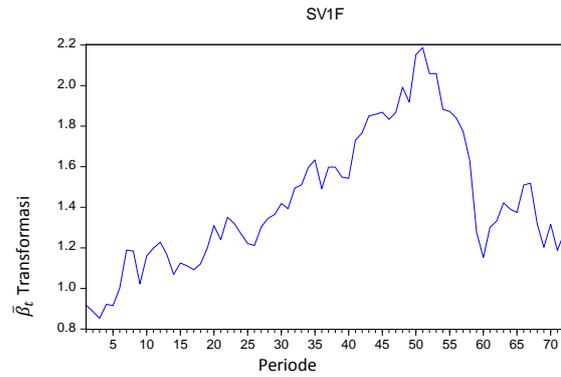
$$h_t = \exp(-93,55930) = 2,33191E - 41$$

dan

$$q_t = \exp(-4,516605) = 0,010926055$$

Berdasarkan nilai varians h_t dan q_t , dilakukan pendugaan dengan menggunakan algoritma Kalman *Filter* untuk memperoleh vektor *state* dan varians dari β_t . Hasil pendugaan menunjukkan bahwa model memiliki 72 data pengamatan membutuhkan 7 iterasi untuk mencapai solusi konvergen dengan toleransi 10^{-4} . Pada konvergensi maksimum *log-likelihood* diperoleh -255,4790 dengan nilai *Akaike Information Criterion* sebesar 7,152195. Hasil pendugaan menggunakan algoritma Kalman *Filter* diperoleh vektor *state* sebagai berikut:

PLOT β_t TRANSFORMASI



Gambar 6. Plot β_t Data Transformasi

Pendugaan menggunakan algoritma Kalman *Filter* pada data transformasi menghasilkan varians $\Sigma_t = 0,009886$. Selanjutnya dilihat kesesuaian model dan dilakukan uji diagnostik terhadap residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi.

Nilai MAPE dan RMSPE yang diperoleh dari model transformasi data secara berturut-turut adalah sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{72} \frac{|\varepsilon_t|}{y_t}}{n} = \frac{9,86155E - 10}{72} = 1,36966E - 11$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{72} \left(\frac{\varepsilon_t}{y_t}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{72} (2,12E - 20)} = 1,72E - 11$$

Hasil perhitungan nilai MAPE dan RMSPE berada di bawah 10% yang berarti bahwa pendugaan model TVP sangat baik digunakan. Selanjutnya dilakukan uji normalitas dengan hasil hipotesis uji sebagai berikut:

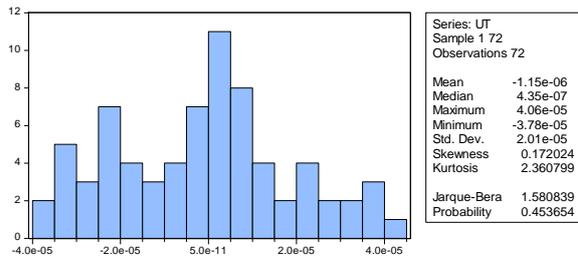
H_0 : Residual berdistribusi normal

H_1 : Residual tidak berdistribusi normal

Uji Jarque-Berra dilakukan menggunakan rumus:

$$\begin{aligned} JB &= \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \\ &= \frac{72}{6} \left((0,172023045)^2 + \frac{(2,360798953 - 3)^2}{4} \right) \\ &= 12(0,029592 + 0,102144) \\ &= 1,580837068 \end{aligned}$$

Berdasarkan histogram residual model TVP pada Gambar 7, hasil uji Jarque-Bera dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 7. Histogram Residual Data Transformasi

Hasil uji normalitas data residual di atas menunjukkan uji Jarque-Bera sebesar dengan p-value sebesar $0,453654 > 0,05$ sehingga tidak tolak H_0 yang artinya residual berdistribusi normal. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa model TVP memiliki residual yang berdistribusi normal.

Uji autokorelasi dilakukan untuk melihat ada atau tidaknya korelasi pada ϵ_t dan korelasi pada η_t . Statistik uji yang digunakan adalah uji Durbin-Watson:

$$d_{\epsilon_t} = \frac{\sum_{t=2}^{72} (\epsilon_t - \epsilon_{t-1})^2}{\sum_1^{72} \epsilon_t^2} = \frac{5,5422E - 08}{2,88199E - 08} = 1,923046871$$

Nilai $d_{\epsilon_t} = 1,9230$, dengan $\alpha = 5\%$ diperoleh nilai d_{tabel} sebesar $d_L = 1,5895$ dan $d_U = 1,6457$, sehingga $d_U < 1,9230 < 4 - d_U$ berdasarkan berdasarkan kaidah keputusan identifikasi autokorelasi dapat disimpulkan Tolak H_0 yang berarti tidak terdapat autokorelasi positif maupun negatif pada ϵ_t .

$$d_{\eta_t} = \frac{\sum_{t=2}^{72} (\eta_t - \eta_{t-1})^2}{\sum_1^{72} \eta_t^2} = \frac{2,20759069}{1,544264603} = 1,42954173$$

Nilai $d_{\eta_t} = 1,4295$ dengan $\alpha = 5\%$ diperoleh nilai d_{tabel} sebesar $d_L = 1,5895$ dan $d_U = 1,6457$, sehingga $0 < 1,4295 < d_U$ berdasarkan kaidah keputusan identifikasi autokorelasi dapat disimpulkan Tolak H_0 yang berarti tidak terdapat autokorelasi positif maupun negatif pada η_t .

Uji korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dengan persamaan transisi menggunakan koefisien korelasi Pearson. Uji korelasi untuk residual persamaan

$$r = \frac{72(-1,11643E - 11) - (-8,28262E - 05)(0)}{\sqrt{(72(2,88199E - 08) - (6,86018E - 09))} \sqrt{(72(1,544264603) - (1,622986821))}}$$

diperoleh $r = 0,001669724$. Untuk memeriksa apakah hasil perhitungan korelasi tersebut signifikan dilakukan dengan mengacu pada interpretasi nilai r yang diberikan oleh Guilford. Berdasarkan nilai r adalah $0,001669724$ menunjukkan bahwa korelasi antara ϵ_t dan η_t memiliki korelasi yang sangat lemah, sehingga asumsi model TVP pada terpenuhi bahwa residual antara persamaan pengukuran dan persamaan transisi tidak berkorelasi.

KESIMPULAN

Model TVP dari data penjualan batubara berdasarkan harga acuan batubara pada penelitian ini menghasilkan nilai vektor *state* ($\bar{\beta}_t$) yang dapat dilihat pada Gambar 7 dan varians dari vektor *state* adalah $0,009886$, dengan model TVP sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_{72} \end{bmatrix}$$

Model \hat{y}_t tersebut memiliki nilai MAPE dan RMSPE lebih kecil dari 10% yang berarti tingkat keakuratan model sangat baik. Hasil uji diagnostik menunjukkan residual model berdistribusi normal. Sehingga asumsi Kalman *Filter* terpenuhi dan parameter $\bar{\beta}_t$ merupakan penduga optimal bagi β_t .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] R. H. Shumway dan D. S. Stoffer, "Time Series Analysis and Its Applications," Springer New York, 2011.
- [2] SAS Institute Inc., "SAS User Guide Version 9.1," 2002.
- [3] B. McGough, "Statistical Learning

- with Time Varying Parameters,” *Macroeconomic Dynamics*, vol 7, no. 1, pp 119-139, 2003.
- [4] Y. Kim and H. Bang, “Introduction to Kalman Filter and its Applications,” IntechOpen, 2018.
- [5] J. Chen, dan H. Wu, “Estimation of Time Varying Parameter in Deterministic Dynamic Models,” *Statistica sinica.*, no. 18, pp. 987 - 1006, 2008.
- [6] B. A. Eroglu, “Spurious Regression Problem in Kalman Filter Estimation of Time Varying Parameter Models,” *Tesis*, Bilkent University, 2010.
- [7] A. G. S. Pinales, “Time Varying Coefficient Models and The Kalman Filter,” *Thesis*, 2011.
- [8] B. Ge, H. Zhang, L. Jiang , Z. Li dan M. M. Butt, “Adaptive Unscented Kalman Filter for Target Tracking with Unknown Time-Varying Noise Covariance,” *Sensors*, vol 19, no. 1371; doi:10.3390/s19061371, 2019.
- [9] X. Lai, T. Yang, Z. Wang dan P. Chen, “Implementation of Kalman Filter to Improve Accuracy of Air Quality Monitoring and Prediction,” *Applied Sciences*, vol 9, no. 1831, doi:10.3390/app9091831, 2019.
- [10] H. Tanizaki, “The Time Varying Parameter Model Revisited,” *Journal Economic Review*, no. 45, pp. 41-57, 2000.
- [11] G. Welch, dan G. Bishop, “An Introduction to the Kalman Filter,” 2001.
- [12] L. Guo, “Estimating Time-Varying Parameter by the Kalman Filter Based Algorithm: Stability and Convergence,” *IEEE Transactions on Automatic Control.* vol. 2 no. 35, pp 141-147, 1990.
- [13] R. E. Kalman, “A New Approach to Linier Filtering and Prediction Problems,” *Journal of Basic Engineering, Transaction ASME .*, no. 82, pp. 17, 1960.
- [14] I. Azam, “The Effect of Model Selection Uncertainty on Autoregressive Model Estimates,” *Journal of Finance and Economic.*, no. 11, pp. 80-99, 2007.
- [15] A. Setiawan, D. C. Kasabarang, dan B. Susanto, “Uji Normalitas Menggunakan Statistik Jarque-Bera Berdasarkan Metode Bootstrap,” Seminar Nasional, ” 2013.
- [16] J. P. Guilford, “Fundamental Statistic in Psychology and Education,” *Ed.kw-3*, 1956.