

Judul Makalah : Persamaan Umum Jumlah Edge dan Titik pada *Cycle Extension Cubic Graph*

Oleh :Mohamad Ibnu Hambali, Wamiliana, dan Fitriani

Dimuat pada : Jurnal MATEMATIKA, Vol. 17 No. 3, Desember 2014  
ISSN : 1410-8518  
Diterbitkan oleh Jurusan Matematika FSM Universitas  
Diponegoro

Diupload pada : [eprints.undip.ac.id/48667](http://eprints.undip.ac.id/48667)

# JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 17 No. 3, Desember 2014

---

Jurusan Matematika FSM  
Universitas Diponegoro Semarang

Jurnal Matematika	Vol. 17	No. 3	Halaman 93 - 139	Semarang Desember 2014	ISSN 1410-8518
----------------------	---------	-------	---------------------	---------------------------	-------------------

---

<b>Mohamad Ibnu Hambali, Wamiliana dan Fitriani</b> , Persamaan Umum Jumlah <i>Edge</i> dan Titik pada <i>Cycle Extension Cubic Graph</i>	93
<b>Dita Anies Munawarroh dan Sutrisno</b> , Kendali LQR Diskrit untuk Sistem Transmisi Data dengan Sistem Jaringan Tunggal	104
<b>YD. Sumanto</b> , Grup $\Gamma$ pada Kelas-Kelas Ekuivalensi	111
<b>Anissa Ratna Sari, Sunarsih dan Suryoto</b> , Program Fraksional Linier dengan Koefisien Interval	115
<b>Sutrisno dan Dita Anies Munawarroh</b> , Pendekatan Pemrograman Multiobjektif Interaktif untuk Menyelesaikan Masalah Alokasi Aset Optimal dan Studi Kasus pada Lima Sekuritas di Indonesia	121
<b>Laily Rahmania, Farikhin dan Bayu Surarso</b> , Analisis Kinerja Unit Usaha Menggunakan Model CCR (Studi Kasus pada Apotek Kimia Farma Semarang)	128
<b>Shintia Devi Wahyudy dan Bambang Irawanto</b> , Program Linier Fuzzy Penuh dengan Metode Kumar	134

# JURNAL MATEMATIKA

ISSN: 1410-8518

Vol. 17 No. 3, Desember 2014

---

**Chief Editor:**

Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si

**Managing Editor:**

Drs. Bayu Surarso, M.Sc., Ph.D

**Business Manager:**

Drs. Kartono, M.Si

**Dewan Editor:**

Prof. Dr. Roberd Saragih, MT, Matematika Terapan ITB  
Prof. Dr. Budi Nurani, M.Si, Statistika UNPAD  
Prof. Drs. St. Budi Waluyo, M.Si, Ph.D, Matematika Terapan UNNES  
Dr. Ch. Rini I., Matematika Analisis UGM  
Farikhin, Ph.D, Matematika Analisis UNDIP  
Dr. R. Heru Tjahjana, M.Si, Matematika Terapan UNDIP  
Dr. Sunarsih, M.Si, Matematika Terapan UNDIP  
Drs. Kushartantya, M.I.Komp, Informatika UNDIP  
Drs. Y.D Sumanto, M.Si, Matematika Aljabar UNDIP  
Dra. Titi Udjiani, M.Si, Matematika Aljabar UNDIP

**Editor Teknik:**

Suryoto, S.Si., M.Si.  
R. Heri Soelistyo Utomo, S.Si., M.Si.  
Siti Khabibah, S.Si., M.Sc.  
Nikken Prima Puspita, S.Si., M.Sc.  
Solikhin, S.Si., M.Sc

JURNAL MATEMATIKA terbit tiga kali setahun (April, Agustus, Desember), menerima artikel ilmiah dalam bidang matematika, statistika, dan ilmu komputer. Terbit sejak tahun 1998 dengan nama JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER dengan warna dasar sampul kuning dan warna tulisan hitam. Mulai tahun 2005 nama jurnal berubah menjadi JURNAL MATEMATIKA dengan warna dasar sampul kuning gading dan warna tulisan merah maron.

**Alamat Penerbit**

Jurusan Matematika Lt. 2 FSM Universitas Diponegoro Semarang  
Jl. Prof. Soedarto, SH Tembalang Semarang  
Telp (024) 70789493, Fax (024) 76480922  
E-mail: [jurnalmath@undip.ac.id](mailto:jurnalmath@undip.ac.id); [jurnalmath@gmail.com](mailto:jurnalmath@gmail.com)

## PERSAMAAN UMUM JUMLAH *EDGE* DAN *TITIK* PADA *CYCLE EXTENSION CUBIC GRAPH*

Mohamad Ibnu Hambali<sup>1</sup>, Wamiliana<sup>2</sup>, Fitriani<sup>3</sup>  
1,2,3Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

**Abstract.** In this research we will discuss about cycle extension  $Ext_C(G)$  of cubic graph. The cubic graphs used are the cubic graph with  $n(V(G)) \leq 8$  and  $k \geq 3$ ,  $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$ ;  $k$  is the length of the cycle  $C$  and  $l_i$  is the number of vertices or points on  $Ext_C(G)$  that located between  $x_i$  and  $x_{i+1}$ . The construction process for determining the  $Ext_C(G)$  use six operations which are  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ , dan  $M_6$ . The result of  $M_1$  process on  $Ext_C(G)$  is a non Hamiltonian cycle while the results of  $M_2, M_3, M_4, M_5$ , and  $M_6$  are Hamiltonian cycles. We also show that the number of vertices on the  $Ext_C(G)$  is  $n(V(Ext_C(G))) = n(V(G)) + 2kl_i$ , and the number of edges on the  $Ext_C(G)$  is  $n(E(Ext_C(G))) = n(E(G)) + 3k$ .

keywords: cycle extension, cubic graph, Hamiltonian circuit

### 1. PENDAHULUAN

Dalam teori graf dikenal beberapa macam sirkuit (*cycle*) diantaranya sirkuit Euler dan sirkuit Hamiltonian. Dalam penelitian ini akan dikaji lebih jauh tentang sirkuit yang diperluas dari suatu graf  $G$ , dengan  $G$  adalah graf kubik dengan jumlah vertex pada  $G$  adalah 4, 6, 8. Selanjutnya, hasil dari perluasan sirkuit pada graf  $G$  digabung dengan graf  $G$  yang dilambangkan dengan  $Ext_C(G)$ .

Pada penelitian ini, masalah dibatasi pada graf kubik dengan  $n(V(G)) \leq 8$  dan  $k \geq 3$ ,  $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$ . dengan  $k$  adalah bilangan bulat yang menotasikan panjang dari sirkuit  $C$  dan  $l_i$  adalah banyaknya titik di  $Ext_C(G)$  antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$  yang bernilai bilangan genap.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan persamaan umum penambahan jumlah *edge* dan *titik* di  $Ext_C(G)$  dan mencari persamaan umum jumlah *edge* dan *titik* di  $Ext_C(G)$  pada graf kubik yang diperluas dengan  $k \geq 3$ ,  $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$  dimana  $k$  adalah bilangan bulat yang menotasikan panjang dari sirkuit  $C$  dan  $l_i$  adalah banyaknya titik di  $Ext_C(G)$  antara  $x_i$  dan

$x_{i+1}$  yang bernilai bilangan genap. Jenis graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf kubik dengan jumlah vertex 4, 6 dan 8.

### 2. PEMBAHASAN

#### 2.1 Graf Kubik (*Cubic Graph*)

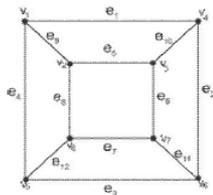
Graf Kubik (*cubic graph*) adalah graf teratur yang berderajat tiga atau graf teratur-3 [1]. Contoh graf kubik dapat dilihat pada gambar berikut.



**Gambar 2.1** Contoh Graf Kubik

Suatu graf dikatakan Graf Hamiltonian (*Hamiltonian graph*) apabila graf tersebut mempunyai sirkuit Hamiltonian sedangkan sirkuit Hamiltonian adalah sirkuit yang melalui tiap titik di dalam graf tepat satu kali, kecuali titik asal (sekaligus titik akhir) yang dilalui dua kali[1].

Contoh sirkuit Hamiltonian dapat dilihat dalam gambar berikut.



**Gambar 2.2** Graf yang memiliki sirkuit Hamiltonian

Salah satu sirkuit Hamiltonian pada Gambar 2.2 adalah  $v_1, e_9, v_2, e_8, v_3, e_{12}, v_4, e_3, v_5, e_2, v_6, e_1, v_7, v_8, e_{10}, v_1$ .

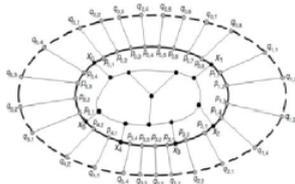
Suatu graf  $G$  dan  $C = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0 \rangle$  merupakan sirkuit dari  $G$  dengan  $k \geq 3$ ,  $k$  merupakan bilangan bulat yang menotasikan panjang dari sirkuit  $C$ . Perluasan sirkuit dari  $G$  sekitar  $C$  dinotasikan dengan  $Ext_C(G)$ .

$$V(Ext_C(G)) = \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{p_{i,j}, q_{i,j} | \forall 1 \leq j \leq l_i\} \cup V(G)$$

$$E(Ext_C(G)) = (E(G) - E(C)) \cup \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{ (p_{i,j}, q_{i,j}) | \forall 1 \leq j \leq l_i \} \cup \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{ (x_i, p_{i,1}), (p_{i,l_i}, x_{i+1}) \} \cup \{ (p_{i,j}, p_{i,j+1}) | \forall 1 \leq j \leq l_i - 1 \} \cup \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{ (q_{i,j}, q_{i,j+1}) | \forall 1 \leq j \leq l_i - 1 \} \cup \{ q_{i,l_i}, q_{i+1,1} \}$$

dengan  $l_i$  adalah bernilai genap untuk semua  $i$ .

Sirkuit yang terbentuk dari gabungan titik  $\bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{q_{i,j} | \forall 1 \leq j \leq l_i\}$  adalah perluasan sirkuit dari  $C$  yang dinotasikan  $\mathcal{O}_C$ .



**Gambar 2.3**  $Ext_C(G)$

**Keterangan:**

$l_i$  adalah banyaknya titik di  $Ext_C(G)$

antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$  yang bernilai bilangan genap.

$p_{i,j}$  adalah suatu titik di  $Ext_C(G)$  antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$ .

$q_{i,j}$  adalah suatu titik di  $Ext_C(G)$  yang adjacent ke  $p_{i,j}$ .

$V(Ext_C(G))$  adalah titik perluasan sirkuit dari  $G$  sekitar  $C$ .

$E(Ext_C(G))$  adalah sisi perluasan sirkuit dari  $G$  sekitar  $C$ .

Pengertian penggantian sirkuit diberikan sebagai berikut.  $H$  merupakan sirkuit dari graf  $G$ ,  $H_C^e$  dinotasikan sebagai sirkuit di  $Ext_C(G)$  yang diperoleh dari  $H$  dengan mengganti semua  $(x_j, x_{j+1})$  di  $E(H) \cap E(C)$  dengan  $(x_j, p_{j,1}, p_{j,2}, \dots, p_{j,l_j}, x_{j+1})$ .

$\Omega_H$  dinotasikan sebagai sirkuit yang diperoleh dari  $\mathcal{O}_C$  dengan mengganti setiap

$$\bigcup_{0 \leq i \leq k-1} \{q_{i,j} | \forall 1 \leq j \leq l_i\} = \{q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,l_i}\}$$

dengan  $\{q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2}, q_{i,2}, q_{i,3}, p_{i,3}, \dots, p_{i,l_i}, q_{i,l_i}\}$  jika  $\{p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i}\}$  bukan suatu path di  $H_C^e$  [2].

Penambahan sirkuit  $H$  di  $G$  merupakan suatu sirkuit di  $Ext_C(G)$ , dengan beberapa sisi  $e = (x_i, x_{i+1})$  di  $C$ . Dalam penambahan sirkuit ini digunakan enam operasi, yakni sebagai berikut:

1.  $M_1(H, e, j)$
2.  $M_2(H, e)$
3.  $M_i(H, x)$  untuk  $3 \leq i \leq 6$

Notasi berikut ini akan digunakan pada  $M_2, M_3, M_4, M_5$  dan  $M_6$

$$\Omega_{q_i} = \langle q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2}, q_{i,2}, q_{i,3}, p_{i,3}, \dots, p_{i,l_i}, q_{i,l_i} \rangle$$

$$\Omega_{p_i} = \langle p_{i,1}, q_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, p_{i,3}, q_{i,3}, \dots, q_{i,l_i}, p_{i,l_i} \rangle$$

[2].

Selanjutnya,  $H$  merupakan suatu sirkuit di  $G$  yang berisi sisi  $e$ . Operasi  $M_1$  digunakan untuk mengkonstruksi suatu

sirkuit

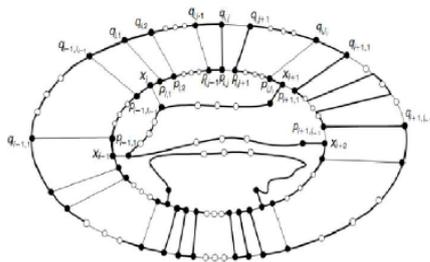
di  $Ext_G(G) \setminus \{(p_{i,j}, p_{i,j+1}), (q_{i,j}, q_{i,j+1})\}$  untuk beberapa  $1 \leq j \leq l_i - 1$ .

Q merupakan  $path$   $\Omega_H \setminus \{(q_{i,j}, q_{i,j+1})\}$  dan P adalah  $path$   $H_G^s \setminus \{(p_{i,j}, p_{i,j+1})\}$

Definisi

$$M_1(H, e, f) = \langle p_{i,j}, P, p_{i,j+1}, q_{i,j+1}, Q, q_{i,j}, p_{i,j} \rangle \quad [2].$$

Ilustrasi dari operasi  $M_1$  diberikan dalam gambar berikut.



Gambar 2.4 Ilustrasi dari Operasi  $M_1$

Selanjutnya operasi  $M_2$  dijelaskan sebagai berikut. Misal  $z_i$  dan  $z_{i+1}$  adjacent di G dan H adalah suatu sirkuit Hamiltonian di G yang berisi  $\langle x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$  sebagai suatu  $subpath$ . Operasi  $M_2(H, e)$  digunakan untuk mengkonstruksi suatu sirkuit Hamiltonian

di  $Ext_G(G) \setminus \{(q_{i-1}, q_{i-2}), (q_{i,l_i}, q_{i+1,1})\}$ .

$Y_i$  adalah  $neighborhood$  yang unik dari  $z_i$  yang berbeda diantara  $x_i$  dan  $z_{i+1}$ , dan  $y_{i+1}$  adalah  $neighborhood$  yang unik dari  $z_{i+1}$  yang berbeda diantara  $x_{i+1}$  dan  $z_i$ .

G adalah graf kubik,  $\langle x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \rangle$  adalah suatu  $subpath$  dari H, dan  $\langle y_i, z_i, z_{i+1}, y_{i+1} \rangle$  adalah  $subpath$  dari H di G.

$\langle q_{i-1}, q_{i-2}, q_{i,1}, \dots, q_{i,l_i}, q_{i+1,1} \rangle$  adalah  $subpath$  dari  $\Omega_H$  dan  $\langle p_{i-1}, p_{i-2}, x_i, p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1} \rangle$  adalah  $subpath$  dari  $H_G^s$ . Sehingga, diperoleh suatu  $path$  P dari  $H_G^s$  dengan mengganti

$\langle p_{i-1}, p_{i-2}, x_i, p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1} \rangle$  dengan  $\langle x_i, p_{i,1}, \Omega_{p_i}, p_{i,l_i}, x_{i+1} \rangle$  dan mengganti  $(z_i, z_{i+1})$  dengan  $(z_i, x_i)$  dan

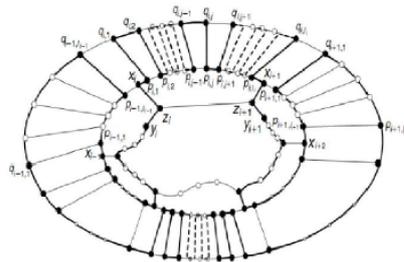
$(z_{i+1}, x_{i+1})$ . Selanjutnya, hapus

$\langle q_{i-1}, q_{i-2}, q_{i,1}, \dots, q_{i,l_i}, q_{i+1,1} \rangle$  dari  $\Omega_H$  sehingga hasil penghapusan dari  $\Omega_H$  merupakan suatu  $path$  Q.

Definisikan

$$M_2(H, e) = \langle p_{i-1}, p_{i-2}, x_i, p_{i,1}, p_{i,2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1} \rangle \quad [2]$$

Proses operasi  $M_2$  dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 2.5 Ilustrasi dari Operasi  $M_2$

Misal H adalah sirkuit Hamiltonian dari  $G \setminus \{x_{i+1}\}$ . Didefinisikan operasi  $M_3(H, x_{i+1})$  untuk mengkonstruksi sirkuit (cycle) Hamiltonian dari  $Ext_G(G) \setminus \{p_{i,j}\}$  dimana j ganjil, dan  $M_4(H, x_{i+1})$  untuk mengkonstruksi sirkuit Hamiltonian dari  $Ext_G(G) \setminus \{q_{i,j}\}$  dengan j genap.

Ketika  $x_{i+1}$  tidak ada di H,  $\langle x_{i-1}, x_i, z_i \rangle$  dan  $\langle x_{i+2}, x_{i+1}, z_{i+2} \rangle$  adalah  $subpath$  dari H, maka

$\langle q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i}, q_{i+1,1}, \Omega_{q_{i+1}}, q_{i+1,l_{i+1}} \rangle$  adalah  $subpath$  dari  $\Omega_H$ .

Q =

$$\Omega_H - \langle q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i}, q_{i+1,1}, \Omega_{q_{i+1}}, q_{i+1,l_{i+1}}, q_{i+2,1} \rangle$$

Q adalah  $path$  dari  $q_{i+2,1}$  ke  $q_{i,1}$ . P =  $H_G^s - \langle x_{i+2}, p_{i+2,1} \rangle$ . P adalah  $path$  dari  $x_{i+2}$  ke  $p_{i+2,1}$ .

Didefinisikan

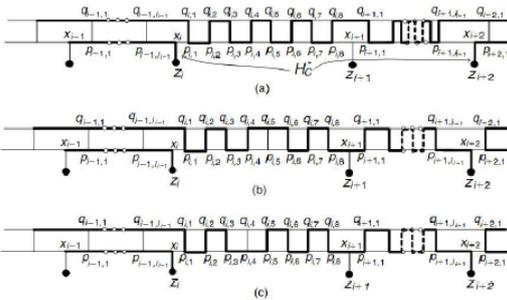
$$M_3(H, e) = \langle p_{i+2,1}, q_{i+2,1}, Q, q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2}, q_{i,2}, \dots, p_{i,j-1}, q_{i,j-1}, q_{i,j}, q_{i,j+1}, p_{i,j+1}, p_{i,j+2}, q_{i,j+2}, \dots, q_{i,l_i}, p_{i,l_i}, x_{i+1}, p_{i+1,1}, \Omega_{p_{i+1}}, p_{i+1,l_{i+1}}, x_{i+2}, P, p_{i+2,1} \rangle$$

$M_4(H, e) =$

$$\langle p_{i+2,1}, q_{i+2,1}, Q, q_{i,1}, p_{i,1}, p_{i,2},$$

$$\begin{aligned}
 & q_{i,2}, \dots, q_{i,j-1}, p_{i,j-1}, p_{i,j}, p_{i,j+1} \\
 & q_{i,j+1}, q_{i,j+2}, p_{i,j+2}, \dots, p_{i,l_i}, x_{i+1}, \\
 & p_{i+1,1}, \Omega_{p_{i+1}}, p_{i+1,l_{i+1}}, x_{i+2}, P, \\
 & p_{i+2,1} \succ [2].
 \end{aligned}$$

Proses operasi  $M_3$  dan  $M_4$  dapat dilihat pada Gambar 6 berikut :



**Gambar 2.6** Ilustrasi dari Operasi  $M_3$  dan  $M_4$

Operasi  $M_5$  dan  $M_6$  dijelaskan sebagai berikut. Misal  $H$  adalah sirkuit Hamiltonian dari  $G \setminus \{x_i\}$ . Definisikan operasi  $M_5 (H, x_i)$  untuk mengkonstruksi suatu sirkuit Hamiltonian dari  $Ext_G(G) \setminus \{p_{i,j}\}$  dengan  $j$  genap dan operasi  $M_6 (H, x_i)$  untuk mengkonstruksi suatu sirkuit (*cycle*) Hamiltonian dari  $Ext_G(G) \setminus \{q_{i,j}\}$  dengan  $j$  ganjil.

$$\begin{aligned}
 Q = & \Omega_H - (q_{i-2,l_{i-2}}, q_{i-1,1}, \Omega_{q_{i-1}}, \\
 & q_{i-1,l_{i-1}}, q_{i,1}, \Omega_{q_i}, q_{i,l_i})
 \end{aligned}$$

$Q$  adalah suatu *path* dari  $q_{i,l_i}$  ke  $q_{i-2,l_{i-2}}$ .

$P = H_C^* - (x_{i-1}, p_{i-2,l_{i-2}})$ .  $P$  adalah *path* dari  $p_{i-2,l_{i-2}}$  ke  $x_{i-1}$ .

Definisikan

$$M_5(H, x) = \langle$$

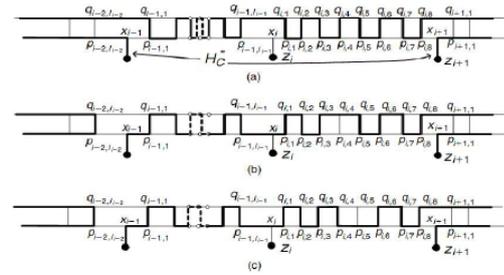
$$\begin{aligned}
 & x_{i-1}, p_{i-1,1}, \Omega_{p_{i-1}}, p_{i-1,l_{i-1}}, x_i, \\
 & p_{i,1}, q_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, p_{i,3}, \dots, p_{i,j-1}, \\
 & q_{i,j-1}, q_{i,j}, q_{i,j+1}, p_{i,j+1}, p_{i,j+2}, \\
 & q_{i,j+2}, \dots, q_{i,l_i}, Q, q_{i-2,l_{i-2}}, p_{i-2,l_{i-2}}, \\
 & P, x_{i-1} \rangle
 \end{aligned}$$

$$M_6(H, x) = \langle$$

$$x_{i-1}, p_{i-1,1}, \Omega_{p_{i-1}}, p_{i-1,l_{i-1}} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & x_i, p_{i,1}, q_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, p_{i,3}, \dots, q_{i,j-1}, \\
 & p_{i,j-1}, p_{i,j}, p_{i,j+1}, q_{i,j+1}, q_{i,j+2}, \\
 & p_{i,j+2}, \dots, q_{i,l_i}, Q, q_{i-2,l_{i-2}}, \\
 & p_{i-2,l_{i-2}}, P, x_{i-1} \rangle [2]
 \end{aligned}$$

Proses operasi  $M_5$  dan  $M_6$  dapat dilihat pada gambar berikut.



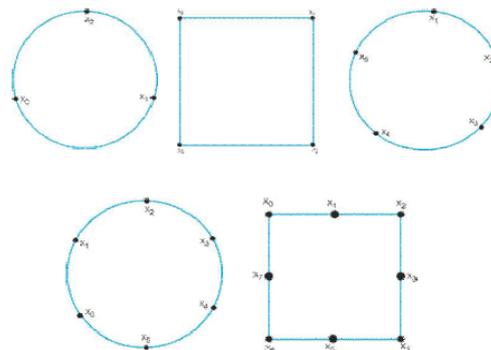
**Gambar 2.7** Ilustrasi dari Operasi  $M_5$  dan  $M_6$

## 2.2 Langkah-Langkah Dalam Penelitian

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan graf  $G$  dengan  $n$  ( $V(G) = 4, 6, 8$ ), lalu diambil sirkuit (*cycle*) dari graf  $G$  dengan nilai  $k \geq 3$  dan  $l_i = 2, 4, 6, \dots, 5$ .
2. Mencari persamaan umum penambahan jumlah *edge* dan *titik* pada sirkuit (*cycles*) dari graf kubik  $G$  yang diperluas dengan nilai  $k \geq 3$  dan  $l_i = 2, 4, 6, \dots, 5$ .
3. Menentukan persamaan umum jumlah sisi dan titik di  $Ext_G(G)$ .
4. Penarikan kesimpulan.

## 2.3 Cycle Extension Pada Graf Kubik



**Gambar 2.8** Sirkuit dari C dengan  $k=3$ ,  $k=4$ ,  $k=5$ ,  $k=6$  dan  $k=8$

Sirkuit dari C pada Gambar 8, dapat diperluas dengan nilai  $k \geq 3$ ,  $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$  sehingga sirkuit C akan mengalami penambahan titik dan sisi pada graf kubik. Berikut tabel penambahan titik dan sisi pada graf kubik tersebut.

**Tabel 2. 1** Bentuk  $Ext_C(G)$  pada graf kubik.

k	$l_i$	Bentuk $Ext_C(G)$	Penambahan titik di $Ext_C(G)$	Penambahan edge di $Ext_C(G)$
3	2		12	18
3	4		24	36
3	6		36	54
4	2		16	24
4	4		32	48
4	6		48	72

5	2		20	30
5	4		40	60
5	6		60	90
6	2		24	36
6	4		48	72
6	6		72	108
8	2		32	48
8	4		64	96
8	6		96	144

Pada Tabel 2.1, penambahan titik pada  $Ext_C(G)$  ditunjukkan dengan titik berwarna merah dan kuning, sedangkan penambahan edge pada  $Ext_C(G)$  berwarna hitam dan biru (terluar). Dari Tabel 1 dapat dilihat bahwa untuk nilai

suatu  $k$  yang sama maka penambahan titik dan sisi membentuk suatu aritmatika yang memiliki selisih yang sama.

Jika perhitungan penambahan *titik* dan *edge* tersebut dilakukan terus menerus dengan nilai  $k$  yang sama dan nilai  $l_i \geq 6$ , ternyata masih memiliki beda yang sama sesuai dengan pola yang terlihat pada Tabel 1, sehingga persamaan umum penambahan *titik* dan *edge* pada graf kubik dengan  $n(V(G)) = 4, 6, 8$  dan  $k \geq 3, l_i \geq 2$  dapat ditentukan perumusannya menggunakan konsep aritmatika dengan cara mengetahui pola penambahan titik dan sisi yang sesuai.

**2.4 Penambahan Titik dan Edge Pada Cycle Extension Graf Kubik**

Untuk menentukan rumus umum penambahan titik dan sisi pada  $Ext_C(G)$ , terlebih dahulu dilakukan penentuan pola aritmatika yang sesuai dengan penambahan titik dan sisi pada  $Ext_C(G)$  tersebut.

Berikut tabel pola aritmatika penambahan *titik* dan *edge* pada  $Ext_C(G)$  yang sesuai sebagai berikut :

**Tabel 2.2** Pola Aritmatika Penambahan Titik dan Sisi di  $Ext_C(G)$

k	$l_i$	Pola Penambahan titik di $Ext_C(G)$	Pola Penambahan edge di $Ext_C(G)$
3	2	12 = 2 . 3 . 2	18 = 3 . 3 . 2
	4	24 = 2 . 3 . 4	36 = 3 . 3 . 4
	6	36 = 2 . 3 . 6	54 = 3 . 3 . 6
4	2	16 = 2 . 4 . 2	24 = 3 . 4 . 2
	4	32 = 2 . 4 . 4	48 = 3 . 4 . 4
	6	48 = 2 . 4 . 6	72 = 3 . 4 . 6
5	2	20 = 2 . 5 . 2	30 = 3 . 5 . 2
	4	40 = 2 . 5 . 4	60 = 3 . 5 . 4
	6	60 = 2 . 5 . 6	90 = 3 . 5 . 6
6	2	24 = 2 . 6 . 2	36 = 3 . 6 . 2
	4	48 = 2 . 6 . 4	72 = 3 . 6 . 4
	6	72 = 2 . 6 . 6	108 = 3 . 6 . 6

8	2	32 = 2 . 8 . 2	48 = 3 . 8 . 2
	4	64 = 2 . 8 . 4	96 = 3 . 8 . 4
	6	96 = 2 . 8 . 6	144 = 3 . 8 . 6
Rumus Umum		$2 k l_i$	$3 k l_i$

**2.5 Jumlah Titik dan Edge Pada Cycle Extension Graf Kubik**

Penambahan titik dan sisi pada suatu sirkuit dari suatu graf kubik, mengakibatkan  $n(V(G))$  dan  $n(E(G))$  berubah menjadi  $n(V(Ext_C(G)))$  dan  $n(E(Ext_C(G)))$ . Secara logika, jumlah titik tambahan dan jumlah sisi tambahan pada graf kubik diasumsikan bahwa  $n(V(Ext_C(G))) = n(V(G)) +$  penambahan titik pada C di G =  $n(V(G)) + 2 k l_i$  dan  $n(E(Ext_C(G))) = n(E(G)) +$  penambahan edge pada cycle C di G =  $n(E(G)) + 3 k l_i$

Untuk menentukan kebenaran dugaan rumus umum jumlah *titik extension* dan *edge extension* pada  $Ext_C(G)$  tersebut, maka perlu dilakukan penentuan pola aritmatika yang sesuai dengan jumlah *titik* dan *edge* pada  $Ext_C(G)$  tersebut. Penentuan pola aritmatika yang sesuai dengan jumlah *titik* dan *edge* di  $Ext_C(G)$  graf kubik dapat dilihat seperti tabel berikut.

**Tabel 2.3** Pola aritmatika *titik extension* dan *edge extension* graf kubik

$n(V(G))$ $n(E(G))$	k	$l_i$	Pola n ( $V(Ext_C(G))$ )	Pola n ( $E(Ext_C(G))$ )
4	3	2	16 = 4 + 12	24 = 6 + 18
		4	28 = 4 + 24	42 = 6 + 36
		6	40 = 4 + 36	60 = 6 + 54
	4	2	20 = 4 + 16	30 = 6 + 24
		4	36 = 4 + 32	54 = 6 + 48
		6	52 = 4 + 48	78 = 6 + 72
6	3	2	18 = 6 + 12	27 = 9 + 18
		4	30 = 6 + 24	45 = 9 + 36
		6	42 = 6 + 36	63 = 9 + 54
	4	2	22 = 6 + 16	33 = 9 + 24
		4	38 = 6 + 32	57 = 9 + 48

6	6	54 = 6 + 48	81 = 9 + 72	
	5	2	26 = 6 + 20	39 = 9 + 30
		4	46 = 6 + 40	69 = 9 + 60
		6	66 = 6 + 60	99 = 9 + 90
	9	2	30 = 6 + 24	45 = 9 + 36
		6	4	54 = 6 + 48
6			78 = 6 + 72	117 = 9 + 108
8	4	2	24 = 8 + 16	36 = 12 + 24
		4	40 = 8 + 32	60 = 12 + 48
		6	56 = 8 + 48	84 = 12 + 72
	6	2	32 = 8 + 24	48 = 12 + 36
		4	56 = 8 + 48	84 = 12 + 72
		6	80 = 8 + 72	120 = 12 + 108
		8	104 = 8 + 96	156 = 12 + 144
	8	4	72 = 8 + 64	108 = 12 + 96
		6	104 = 8 + 96	156 = 12 + 144
		8	136 = 8 + 128	204 = 12 + 192
Rumus Umum		$n(V(G)) + 2k l_i$	$n(E(G)) + 3k l_i$	

**2.6 Operasi Penambahan Sirkuit Pada Graf Kubik**

Pada penambahan sirkuit graf kubik, ada 6 operasi yang berlaku untuk merekonstruksi suatu sirkuit yakni operasi  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5,$  dan  $M_6$ . Adapun 6 operasi pada penambahan sirkuit graf kubik sebagai berikut:

**Operasi  $M_1$**

Misalkan  $n(V(G)) = 4, k = 3$  dan  $l_i = 2$ .  $H$  merupakan sirkuit di  $G$  yang berisi edge,  $e = (x_i, x_{i+1}) = (x_0, x_1)$ . Ambil sirkuit  $H$  dari graf  $G$ , misal  $H = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$  dan Sirkuit  $C = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ .  
 $E(H) = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3)\}$  dan

$E(C) = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_0)\}$  maka  $E(H) \cap E(C) = \{(x_0, x_1)\}$  sehingga

$H_C^k = (x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, x_1, x_2, x_0)$  dan  $\Omega_H = (q_{0,1}, q_{0,2}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{2,1}, p_{2,1}, p_{2,2}, q_{2,2}, q_{0,1})$

karena  $(p_{0,1}, p_{0,2})$  merupakan path di  $H_C^k$  maka  $(p_{0,1}, p_{0,2})$  tidak ada didalam  $\Omega_H$ .

$Q = path \Omega_H \setminus \{(q_{i,j}, q_{i,j+1})\};$   
 $1 \leq j \leq l_i - 1; l_i = 2$

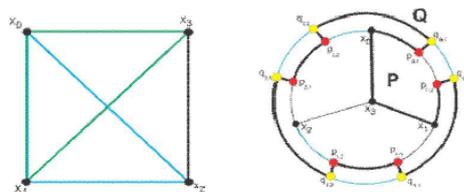
$= \{(q_{0,1}, q_{0,2}), (q_{0,2}, q_{1,1}), (q_{1,1}, p_{1,1}), (p_{1,1}, p_{1,2}), (p_{1,2}, q_{1,2}), (q_{1,2}, q_{2,1}), (q_{2,1}, p_{2,1}), (p_{2,1}, p_{2,2}), (p_{2,2}, q_{2,2}), (q_{2,2}, q_{0,1})\} - \{(q_{0,1}, q_{0,2})\}$   
 $= \{(q_{0,2}, q_{1,1}), (q_{1,1}, p_{1,1}), (p_{1,1}, p_{1,2}), (p_{1,2}, q_{1,2}), (q_{1,2}, q_{2,1}), (q_{2,1}, p_{2,1}), (p_{2,1}, p_{2,2}), (p_{2,2}, q_{2,2}), (q_{2,2}, q_{0,1})\}$

$P = path H_C^k \setminus \{(p_{i,j}, p_{i,j+1})\};$

$1 \leq j \leq l_i - 1; l_i = 2$   
 $= \{(x_0, p_{0,1}), (p_{0,1}, p_{0,2}), (p_{0,2}, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_0)\} - \{(p_{0,1}, p_{0,2})\}$   
 $= \{(x_0, p_{0,1}), (p_{0,2}, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_0)\}$

$M_1(H, e, f) = M_1(H, (x_i, x_{i+1}), f)$   
 $= M_1(H, (x_0, x_1), 1)$   
 $= (p_{i,j}, P, p_{i,j+1}, q_{i,j+1}, Q, q_{i,j}, p_{i,j})$   
 $= (p_{0,1}, P, p_{0,1+1}, q_{0,1+1}, Q, q_{0,1}, p_{0,1})$   
 $= (p_{0,1}, P, p_{0,2}, q_{0,2}, Q, q_{0,1}, p_{0,1})$

Sketsa gambar Operasi  $M_1$  dapat dilihat pada gambar berikut:



**Gambar 2.9** Graf dengan  $n(V(G)) = 4, k = 3$  dan  $l_i = 2$  dan  $M_1$

**Operasi  $M_2$**

Misal  $i = 1$  sehingga  $z_i = z_1$  dan  $z_{i+1} = z_2$  adjacent di  $G$  dan  $H$  adalah suatu sirkuit Hamiltonian (Hamiltonian cycle) di  $G$ ,  $H = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$  dan

$$\Omega_{P1} = \langle p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6} \rangle$$

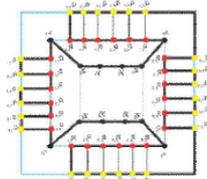
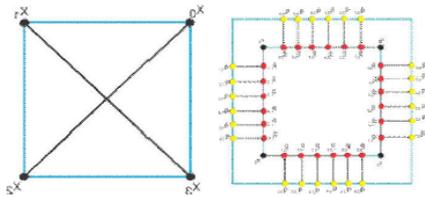
sehingga

$$\begin{aligned} Path P &= \langle x_i, p_{i,1}, \Omega_{p1}, p_{i,l_i}, x_{i+1} \rangle \\ &= \langle x_1, p_{1,1}, \Omega_{p1}, p_{1,l_1}, x_{1+1} \rangle \\ &= \langle p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_0, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} M_2(H, s) &= \langle p_{i-1,l_{i-1}}, q_{i-1,l_{i-1}}, Q, q_{i+1,1}, p_{i+1,1}, P, p_{i-1,l_{i-1}} \rangle \\ &= \langle p_{1-1,l_{1-1}}, q_{1-1,l_{1-1}}, Q, q_{1+1,1}, p_{1+1,1}, P, p_{1-1,l_{1-1}} \rangle \\ &= \langle p_{0,6}, q_{0,6}, Q, q_{2,1}, p_{2,1}, P, p_{0,6} \rangle \end{aligned}$$



Gambar 2.9 Graf dengan  $n(V(G)) = 4$ ,  $k = 4$  dan  $l_i = 6$  dan  $M_2$

### Operasi $M_3$ dan $M_4$

H adalah sirkuit (*cycle*) Hamiltonian dari  $G \setminus \{x_{i+1}\}$ . Misal  $H = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 \rangle$  dan  $C = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_0 \rangle$  sehingga

$$\begin{aligned} H_C^c &= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

$$\langle p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle$$

dan

$$\begin{aligned} \Omega_H &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

Ambil  $i = 1$ ,  $j = 3$  untuk  $M_3$ ,  $j = 4$  untuk  $M_4$ , dan  $l_i = 6$ , maka ketika  $x_{1+1} = x_2$  tidak ada di H,

$\langle x_{1-1}, x_1, z_1 \rangle = \langle x_0, x_1, z_1 \rangle$  dan

$\langle x_{1+3}, x_{1+2}, z_{1+2} \rangle = \langle x_3, z_3 \rangle$  adalah

*subpath* dari H, karena  $x_4$  tidak ada di G maka  $x_4$  dihilangkan dari *subpath* di H.

$\langle q_{1,1}, \Omega_{q1}, q_{1,l_1}, q_{1+1,1}, \Omega_{q_{1+1}}, q_{1+1,l_{1+1}} \rangle$  adalah *subpath* dari  $\Omega_H$ .

$$\begin{aligned} \Omega_{q1} &= \langle q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, q_{1,4}, q_{1,5}, p_{1,5}, p_{1,6}, q_{1,6} \rangle \\ \Omega_{q2} &= \langle p_{2,4}, q_{2,4}, q_{2,5}, p_{2,5}, p_{2,6}, q_{2,6} \rangle \\ \Omega_{p1} &= \langle p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6} \rangle \\ \Omega_{p2} &= \langle p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3} \rangle \\ &= \langle q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6} \rangle \end{aligned}$$

Q adalah *path* dari  $q_{1+2,1}$  ke  $q_{1,1}$  sehingga

$$\begin{aligned} Q &= \Omega_H - \langle q_{1,1}, \Omega_{q1}, q_{1,l_1}, q_{1+1,1}, \Omega_{q_{1+1}}, q_{1+1,l_{1+1}}, q_{1+2,1} \rangle \\ &= \Omega_H - \langle q_{1,1}, \Omega_{q1}, q_{1,6}, q_{2,1}, \Omega_{q2}, q_{2,l_2}, q_{3,1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, q_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle - \langle q_{1,1}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,1}, p_{2,1}, p_{2,2}, q_{2,2}, q_{2,3}, p_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, q_{3,1} \rangle \\ &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle \end{aligned}$$

Ketika  $x_2$  tidak ada di H maka

$$\langle p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6} \rangle$$

tidak ada di H, sehingga

$$\begin{aligned}
 Q &= \langle q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, \\
 &\quad q_{1,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1} \rangle \\
 &= \langle q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, \\
 &\quad q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1} \rangle \\
 &= \{(q_{3,1}, q_{3,2}), (q_{3,2}, q_{3,3}), (q_{3,3}, q_{3,4}), \\
 &\quad (q_{3,4}, q_{3,5}), (q_{3,5}, q_{3,6}), (q_{3,6}, q_{0,1}), \\
 &\quad (q_{0,1}, q_{0,2}), (q_{0,2}, q_{0,3}), (q_{0,3}, q_{0,4}), \\
 &\quad (q_{0,4}, q_{0,5}), (q_{0,5}, q_{0,6}), (q_{0,6}, q_{1,1})\}
 \end{aligned}$$

P adalah path dari  $x_{1+2}$  ke  $p_{1+2,1}$  sehingga

$$\begin{aligned}
 P &= H_C^* - (x_{1+2}, p_{1+2,1}) \\
 &= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, \\
 &\quad p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, \\
 &\quad p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, \\
 &\quad x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle \\
 &\quad - (x_{1+2}, p_{1+2,1}) \\
 &= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, \\
 &\quad p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, \\
 &\quad p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, \\
 &\quad p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, \\
 &\quad p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, \\
 &\quad p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, \\
 &\quad p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0 \rangle
 \end{aligned}$$

ketika  $x_2$  tidak ada di H, maka  $\{x_0, x_1, z_1\}$  dan  $\{x_3, z_3\}$  subpath dari H dan  $\langle p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, p_{1,6}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6} \rangle$  tidak ada di H juga, sehingga

$$\begin{aligned}
 P &= \langle x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, \\
 &\quad p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{2,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, \\
 &\quad p_{3,6}, x_0 \rangle \\
 &= \langle p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0, p_{0,1}, \\
 &\quad p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1 \rangle \\
 &= \langle p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, x_0, p_{0,1}, \\
 &\quad p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, z_1, x_3, z_3 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3(H, e) &= \langle p_{1+2,1}, q_{1+2,1}, Q, q_{1,1}, \\
 &\quad p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,3+1}, \\
 &\quad p_{1,3+1}, p_{1,3+2}, q_{1,3+2}, q_{1,6}, p_{1,6}, \\
 &\quad x_{1+1}, p_{1+1,1}, \Omega_{p_{1+1}, p_{1+1, i_{2+1}}}, \\
 &\quad x_{1+2}, P, p_{1+2,1} \rangle \\
 &= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, \\
 &\quad q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, \\
 &\quad p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, \Omega_{p_2}, p_{2,6}, x_3, \\
 &\quad P, p_{3,1} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, \\
 &\quad q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, \\
 &\quad q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, \\
 &\quad q_{1,3}, q_{1,4}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, \\
 &\quad x_2, p_{2,1}, p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, \\
 &\quad q_{2,3}, q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, \\
 &\quad p_{2,6}, x_3, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, \\
 &\quad x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, \\
 &\quad p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, z_1, x_3, z_3, p_{3,1} \rangle \\
 &= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, q_{3,5}, \\
 &\quad q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, \\
 &\quad q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}, \\
 &\quad p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, \\
 &\quad p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, \\
 &\quad q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, x_3, \\
 &\quad z_3, z_1, x_1, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, p_{0,5}, \\
 &\quad p_{0,6}, x_0, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, \\
 &\quad p_{3,6}, p_{3,1} \rangle
 \end{aligned}$$

$M_4(H, e)$

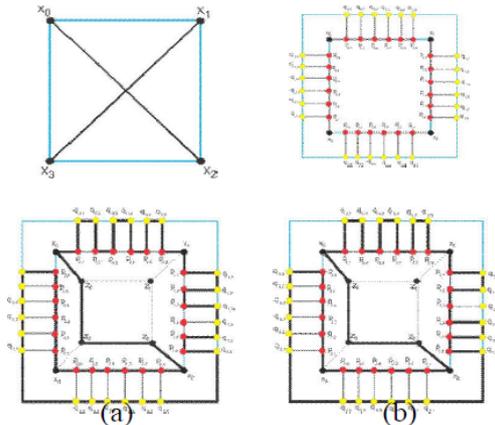
$$\begin{aligned}
 &= \langle p_{1+2,1}, q_{1+2,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, \\
 &\quad p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,4-1}, p_{1,4-1}, p_{1,4}, \\
 &\quad p_{1,4+1}, q_{1,4+1}, q_{1,4+2}, p_{1,4+2}, \\
 &\quad x_{1+1}, p_{1+1,1}, \Omega_{p_{1+1}, p_{1+1, i_{2+1}}}, \\
 &\quad x_{1+2}, P, p_{1+2,1} \rangle
 \end{aligned}$$

$M_4(H, e)$

$$\begin{aligned}
 &= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, Q, q_{1,1}, p_{1,1}, \\
 &\quad p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, \\
 &\quad q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, \Omega_{p_2}, \\
 &\quad p_{2,6}, x_3, P, p_{3,1} \rangle \\
 &= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, \\
 &\quad q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, \\
 &\quad q_{0,4}, q_{0,5}, q_{0,6}, q_{1,1}, q_{1,1}, p_{1,1}, \\
 &\quad p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, \\
 &\quad q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,1}, \\
 &\quad q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, q_{2,4}, \\
 &\quad p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, p_{2,6}, \\
 &\quad x_3, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, p_{0,4}, \\
 &\quad p_{0,5}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, \\
 &\quad p_{1,5}, p_{1,6}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, \\
 &\quad p_{3,6}, x_0, p_{3,1} \rangle \\
 &= \langle p_{3,1}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, \\
 &\quad q_{3,5}, q_{3,6}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}, q_{0,5}, \\
 &\quad q_{0,6}, q_{1,1}, p_{1,1}, p_{1,2}, q_{1,2}, q_{1,3}, \\
 &\quad p_{1,3}, p_{1,4}, p_{1,5}, q_{1,5}, q_{1,6}, p_{1,6}, x_2, \\
 &\quad p_{2,1}, q_{2,1}, q_{2,2}, p_{2,2}, p_{2,3}, q_{2,3}, \\
 &\quad q_{2,4}, p_{2,4}, p_{2,5}, q_{2,5}, q_{2,6}, p_{2,6}, \\
 &\quad x_3, z_3, z_1, x_1, x_0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}, \\
 &\quad p_{0,4}, p_{0,5}, p_{0,6}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, q_{3,4}, \\
 & q_{3,5}, q_{3,6}, q_{3,6}, p_{3,6}, x_0, x_2, p_{2,1}, \\
 & p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, \\
 & p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, z_2, \\
 & z_3, z_0, x_0 \rangle \\
 M_6(H, x) = & \langle x_{1-1}, p_{1-1,1}, \Omega_{p_{1-1}}, \\
 & p_{1-1,1}, x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, \\
 & p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,3+1}, q_{1,3+1}, q_{1,3+2}, \\
 & p_{1,3+2}, q_{1,i_1}, Q, q_{3,6}, \\
 & p_{3,6}, p, x_{1-1} \rangle \\
 = & \langle x_0, p_{0,1}, \Omega_{p_0}, p_{0,6}, x_1, p_{1,1}, \\
 & q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, q_{1,4}, \\
 & q_{1,5}, p_{1,5}, q_{1,6}, Q, q_{3,6}, \\
 & p_{3,6}, p, x_0 \rangle \\
 = & \langle x_0, p_{0,1}, q_{0,1}, q_{0,2}, p_{0,2}, p_{0,3}, \\
 & q_{0,3}, q_{0,4}, p_{0,4}, p_{0,5}, q_{0,5}, q_{0,6}, p_{0,6}, \\
 & x_1, p_{1,1}, q_{1,1}, q_{1,2}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, \\
 & q_{1,4}, q_{1,5}, p_{1,5}, q_{1,6}, q_{2,1}, q_{2,2}, \\
 & q_{2,3}, q_{2,4}, q_{2,5}, q_{2,6}, q_{3,1}, q_{3,2}, q_{3,3}, \\
 & q_{3,4}, q_{3,5}, q_{3,6}, p_{3,6}, x_2, p_{2,1}, p_{2,2}, \\
 & p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,5}, p_{2,6}, x_3, p_{3,1}, p_{3,2}, \\
 & p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,5}, p_{3,6}, z_2, \\
 & z_3, z_0, x_0 \rangle
 \end{aligned}$$



Gambar 2.11 Graf dengan  $n(V(G)) = 4$ ,  $k = 4$  dan  $l_i = 6$  dan (a)  $M_5$  dan (b)  $M_6$

3. PENUTUP

Dari penelitian yang telah dilakukan

pada Graf Kubik dengan  $n(V(G)) = 4, 6, 8$ , yang diperluas dengan  $k \geq 3$  dan  $l_i = 2, 4, 6, \dots, s$  maka dapat disimpulkan sebagai berikut: Persamaan umum jumlah titik pada cycle extension adalah  $n(V(Ext_C(G))) = n(V(G)) + 2 k l_i$

Persamaan umum jumlah sisi pada cycle extension adalah

$$n(E(Ext_C(G))) = n(E(G)) + 3 k l_i$$

Rekonstruksi sirkuit operasi  $M_1$  pada cycle extension graf kubik menghasilkan suatu sirkuit yang tidak Hamiltonian dan rekonstruksi sirkuit pada operasi  $M_2, M_3, M_4, M_5$ , dan  $M_6$  pada cycle extension graf kubik menghasilkan suatu sirkuit Hamiltonian.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Deo, N. (1989), *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice Hall Inc, New York.  
 [2] Hsu, Lih-Hsing and Lin, Cheng-Kuan. (2009), *Graph Theory and Interconnection Networks*, CRC Press, New York.  
 [3] Munir, Rinaldi. (2005), *Matematika Diskrit*. Informatika, Bandung.[4] Siang, J. J. (2002), *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Andi, Yogyakarta.  
 [5] Sjostrand, J. (2005), The Cover Pebbling Theorem. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 12 : 1-5  
 [6] Teng, Y.H.,Tan, J.J.M.,Hsu, L.H. (2005), *Honeycomb Rectangular Disk*. Parallel Computing, 31  
 [7] Wilson, J. R. and Jhon J. Watkins. (1990), *Graph an Introducing Approach*. Jhon Wiley and Sons, inc., New York.