

GRAF AMALGAMASI POHON BERBILANGAN KROMATIK LOKASI EMPAT

ASMIATI, FITRIANI

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof. Soemantri Brojonegoro No.1 Gedong Meneng, Bandar Lampung
Email : asmianti308@yahoo.com; fitriani_mathunila@yahoo.co.id

Abstrak. Misalkan $G=(V,E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan- k sejati dari G . Misalkan pula $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan c . Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah koordinat $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika semua titik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi. Bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $c_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan- k lokasi. Graf $T_{k,m}$ adalah graf pohon yang hanya memiliki satu titik akar, yaitu x yang mempunyai k anak dan setiap anaknya mempunyai m daun. Graf amalgamasi pohon $nT_{k,m}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah graf $T_{k,m}$ dengan cara menyatukan titik x pada setiap graf $T_{k,m}$ tersebut. Pada paper ini akan dibahas graf amalgamasi $nT_{k,m}$ yang berbilangan kromatik lokasi empat.

Kata Kunci. Bilangan kromatik lokasi, graf amalgamasi.

1 Pendahuluan

Pada tahun 2002, Chartrand dkk. [1] memperkenalkan konsep bilangan kromatik lokasi pada suatu graf yang merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi [2] dan pewarnaan graf.

Chartrand dkk. [1] mendefinisikan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut. Misalkan $G=(V,E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan- k sejati dari G . Misalkan pula $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh pewarnaan c . Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah koordinat $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika semua titik di G mempunyai kode warna berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi. Bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $c_L(G)$, adalah

bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan- k lokasi. Jelas bahwa graf berorde satu mempunyai bilangan kromatik lokasi satu, sedangkan graf berorde dua mempunyai bilangan kromatik lokasi dua. Secara umum, jika G berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) \geq 3$.

Penentuan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf secara umum merupakan persoalan *NP-hard* [1]. Karenanya, kajian penentuan bilangan kromatik lokasi graf dilakukan dengan membatasi untuk bilangan kromatik lokasi tertentu.

Pada permasalahan karakterisasi graf dengan bilangan kromatik lokasi tertentu, Chartrand dkk. [3] telah berhasil mengkarakterisasi graf dengan bilangan kromatik lokasi $n-1$ dan $n-2$. Asmiati dan Baskoro [4] telah mengkaji karakterisasi graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga. Karakterisasi pohon dengan bilangan kromatik lokasi tiga juga telah dibahas oleh Baskoro dan Asmiati [5].

Sejauh penelusuran literatur, penelitian yang terkait dengan penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon masih terbatas pada lintasan, graf bintang, dan graf bintang ganda [1]. Selanjutnya, Asmiati dkk. [6,7] telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bintang dan graf kembang api. Khusus untuk graf lobster berbilangan kromatik lokasi 4 juga telah dikaji oleh Asmiati [8].

Berikut ini adalah teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi.

Teorema 1.1 [1] Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$, untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v tidak bertetangga sedemikian sehingga himpunan tetangga u dan v sama ($N(u) = N(v)$), maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat dari teorema ini, didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk graf sebarang.

Akibat 1.2 [3] Misalkan G adalah graf terhubung. Jika G memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

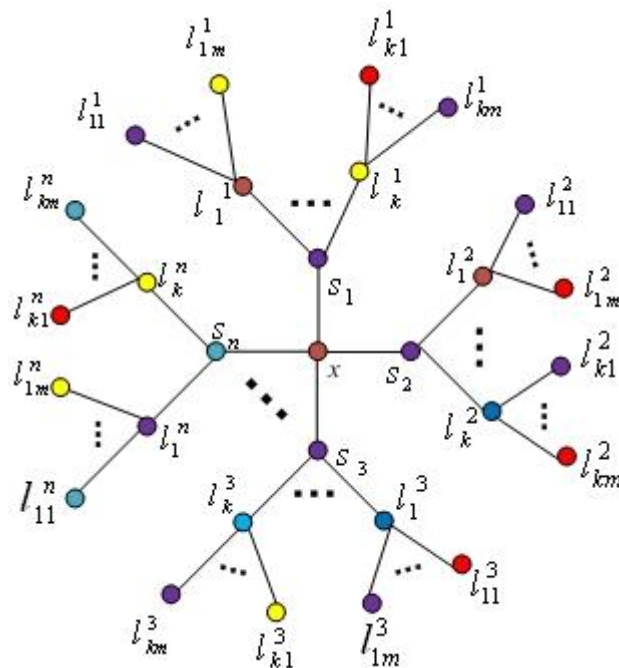
Graf $T_{k,m}$ adalah graf pohon yang hanya memiliki satu titik akar, yaitu x yang mempunyai k anak dan setiap anaknya mempunyai m daun. Graf amalgamasi pohon $nT_{k,m}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah graf $T_{k,m}$ dengan cara

menyatukan titik x pada setiap graf $T_{k,m}$ tersebut. Pada paper ini akan didiskusikan graf amalgamasi $nT_{k,m}$ yang berbilangan kromatik lokasi empat.

2 Hasil Utama

Pada bagian ini akan didiskusikan beberapa hasil dari graf amalgamasi $nT_{k,m}$ yang berbilangan kromatik lokasi empat.

Konstruksi graf $nT_{k,m}$ diberikan sebagai berikut.



Gambar 1. Konstruksi Graf $nT_{k,m}$

Teorema 2.1

Graf amalgamasi pohon $nT_{k,m}$ yang berbilangan kromatik lokasi empat adalah sebagai berikut.

1. $\chi_L(nT_{2,1}) = 4$, untuk $3 \leq n \leq 9$;
2. $\chi_L(nT_{2,2}) = 4$, untuk $2 \leq n \leq 7$;
3. $\chi_L(nT_{2,3}) = 4$, untuk $1 \leq n \leq 2$;
4. $\chi_L(nT_{3,1}) = 4$, untuk $2 \leq n \leq 3$;
5. $\chi_L(nT_{3,2}) = 4$, untuk $1 \leq n \leq 2$.

Bukti.

1. Pertama, akan ditentukan batas atas $\chi_L(nT_{2,1})$, dengan $3 \leq n \leq 9$.

Misalkan c adalah pewarnaan-4 pada graf $nT_{2,1}$, untuk $3 \leq n \leq 9$, dengan aturan sebagai berikut.

- a. $c(x) = 1$;
- b. s_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ diwarnai secara berturut-turut dengan warna 2, 3, 4 dengan masing-masing warna diberikan paling banyak $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ kali;
- c. $c(l_j^i)$ dipilih dua dari himpunan $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(s_i)\}$, dengan $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2$;
- d. daun-daun $c(l_{j1}^i) = c(s_i)$, dengan $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2$.

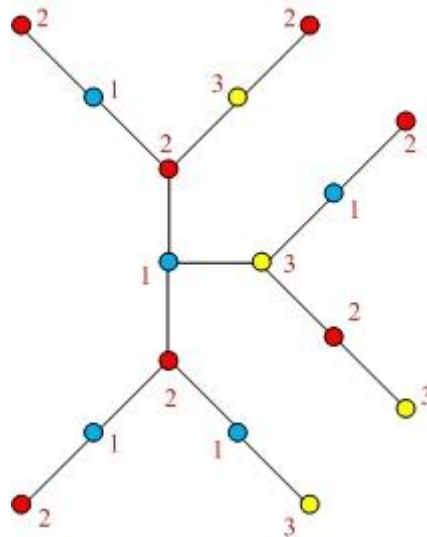
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa kode warna untuk setiap titik $v \in V(nT_{2,1})$, dengan $3 \leq n \leq 9$, berbeda.

- a. Jika $c(x) = c(l_j^i)$, maka $c_\pi(x) \neq c_\pi(l_j^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(x)$ memuat tepat 3 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_j^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- b. Jika $c(x) = c(l_{j1}^i)$, maka $c_\pi(x) \neq c_\pi(l_{j1}^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(x)$ memuat tepat 3 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_{j1}^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- c. Jika $c(s_p) = c(l_j^i)$, dengan $p \neq j$, maka $c_\pi(s_p) \neq c_\pi(l_j^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(s_p)$ memuat sekurang-kurangnya 2 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_j^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- d. Jika $c(s_p) = c(l_{j1}^i)$, maka $c_\pi(s_p) \neq c_\pi(l_{j1}^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(s_p)$ memuat sekurang-kurangnya 2 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_{j1}^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- e. Jika $c(l_{j1}^i) = c(l_{p1}^i)$, dengan $j \neq p$, maka $c_\pi(l_{j1}^i) \neq c_\pi(l_{p1}^i)$. Hal ini dikarenakan $c(l_j^i) \neq c(l_p^i)$.

- f. Jika $c(l_{j1}^i) = c(l_{p1}^r)$, dengan $j \neq p, i \neq r$, maka $c_\pi(l_{j1}^i) \neq c_\pi(l_{p1}^r)$.
 Hal ini dikarenakan jika $c(s_i) = c(s_r)$, maka $c(l_j^i) \neq c(l_p^r)$.
 Akibatnya, $c_\pi(l_{j1}^i) \neq c_\pi(l_{p1}^r)$.

Berdasarkan semua kasus yang telah diuraikan, kode warna untuk semua titik pada graf $nT_{2,1}$, untuk $3 \leq n \leq 9$, berbeda. Jadi, c merupakan pewarnaan-4 lokasi. Akibatnya, $\chi_L(nT_{2,1}) \leq 4$, untuk $3 \leq n \leq 9$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas bawah $\chi_L(nT_{2,1})$, untuk $3 \leq n \leq 9$. Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 2. Konstruksi batas bawah $\chi_L(nT_{2,1})$ dengan $3 \leq n \leq 9$

Andaikan c pewarnaan-3 pada graf $3T_{2,1}$ dengan aturan sebagai berikut.

- $c(x) = 1$,
- $c(s_1) = 2, c(s_2) = 3, c(s_3) = 2$,
- $c(l_1^1) = 1, c(l_{11}^1) = 2, c(l_2^1) = 3, c(l_{21}^1) = 2$,
 $c(l_1^2) = 1, c(l_{11}^2) = 3, c(l_2^2) = 2, c(l_{21}^2) = 3$.

Karena $c(s_3) = 2$, maka warna yang mungkin untuk $c(l_1^3)$ dan $c(l_2^3)$ adalah

- Akibatnya, warna untuk $c(l_{11}^3) = 3$ dan $c(l_{21}^3) = 2$. Jadi, $c_\pi(l_1^3) = c_\pi(x) = (0, 1, 1)$. Jadi, c bukan merupakan pewarnaan-3 lokasi. Sehingga, sekurang-kurangnya dibutuhkan 4 warna untuk mewarnai graf

tersebut. Oleh karena itu, $\chi_L(3T_{2,1}) \geq 4$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(nT_{2,1}) = 4$, untuk $3 \leq n \leq 9$.

2. Penentuan batas atas $\chi_L(nT_{2,2})$, dengan $2 \leq n \leq 7$. Cara pemberian warna yang digunakan pada graf $nT_{2,2}$ hampir serupa dengan pemberian warna pada graf $nT_{2,2}$. Yang menjadi perbedaannya adalah penentuan warna daun-daun pada graf $nT_{2,1}$ diberikan sebagai berikut:

$$c(l_{j1}^i) = c(s_i), \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2.$$

Sedangkan, penentuan warna daun-daun pada graf $nT_{2,2}$, $c(l_{jk}^i)$ adalah dipilih dua dari $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(l_j^i)\}$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2$. Akibatnya, $\chi_L(nT_{2,2}) \leq 4$. Selanjutnya, dengan cara serupa sebagaimana menentukan batas bawah $\chi_L(nT_{2,1})$, diperoleh $\chi_L(nT_{2,2}) \geq 4$. Oleh karena itu, $\chi_L(nT_{2,2}) = 4$, untuk $2 \leq n \leq 7$.

3. Penentuan batas atas $\chi_L(nT_{2,3})$. Cara pemberian warna yang digunakan pada graf $nT_{2,3}$ hampir serupa dengan pemberian warna pada graf $nT_{2,2}$. Yang menjadi perbedaannya adalah penentuan warna daun-daun pada graf $nT_{2,1}$ diberikan sebagai berikut:

$$c(l_{j1}^i) = c(s_i), \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2.$$

Sedangkan, penentuan warna daun-daun pada graf $nT_{2,3}$, $c(l_{jk}^i) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{c(l_j^i)\}$, dengan $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2, 3$. Akibatnya, $\chi_L(nT_{2,3}) \leq 4$. Selanjutnya, akan ditentukan batas bawah $\chi_L(nT_{2,3})$ dengan $1 \leq n \leq 2$. Karena setiap titik l_j^i , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2$ bertetangga dengan 3 daun, maka berdasarkan Akibat 1.2, $\chi_L(nT_{2,3}) \geq 4$. Oleh karena itu $\chi_L(nT_{2,3}) = 4$, untuk $1 \leq n \leq 2$.

4. Akan ditentukan batas atas $\chi_L(nT_{3,1})$, dengan $2 \leq n \leq 3$.

Misalkan c adalah pewarnaan-4 pada graf $nT_{3,1}$, untuk $2 \leq n \leq 3$, dengan aturan sebagai berikut.

- a. $c(x) = 1$;
- b. s_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ diwarnai secara berturut-turut dengan warna 2, 3, 4;

- c. $c(l_j^i)$ diwarnai secara berturut-turut dengan warna $\{1,2,3,4\} \setminus \{c(s_i)\}$, dengan $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,3$;
- d. daun-daun $c(l_{j1}^i) = c(s_i)$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa kode warna untuk setiap titik $v \in V(nT_{3,1})$, dengan $2 \leq n \leq 3$, berbeda.

- a. Jika $c(x) = c(l_j^i)$, maka $c_\pi(x) \neq c_\pi(l_j^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(x)$ memuat tepat 3 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_j^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- b. Jika $c(x) = c(l_{j1}^i)$, maka $c_\pi(x) \neq c_\pi(l_{j1}^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(x)$ memuat tepat 3 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_{j1}^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- c. Jika $c(s_p) = c(l_j^i)$, dengan $p \neq j$, maka $c_\pi(s_p) \neq c_\pi(l_j^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(s_p)$ memuat tepat 3 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_j^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- d. Jika $c(s_p) = c(l_{j1}^i)$, maka $c_\pi(s_p) \neq c_\pi(l_{j1}^i)$. Hal ini dikarenakan pada $c_\pi(s_p)$ memuat tepat 3 komponen bernilai 1, sedangkan pada $c_\pi(l_{j1}^i)$ memuat tepat 1 komponen bernilai 1.
- e. Jika $c(l_{j1}^i) = c(l_{p1}^i)$, dengan $j \neq p$, maka $c_\pi(l_{j1}^i) \neq c_\pi(l_{p1}^i)$. Hal ini dikarenakan $c(l_j^i) \neq c(l_p^i)$.

Berdasarkan semua kasus yang telah diuraikan, kode warna untuk semua titik pada graf $nT_{3,1}$, untuk $2 \leq n \leq 3$, berbeda. Jadi, c merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(nT_{3,1}) \leq 4$, untuk $2 \leq n \leq 3$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas bawah $\chi_L(nT_{3,1})$, untuk $2 \leq n \leq 3$.

The graph consists of 12 nodes and 15 edges. The nodes are colored purple, red, or blue. Each node has a numerical label in a color matching its own. The graph is connected and contains several cycles.

- Node 1 (red):** Located at the bottom left, connected to Node 2 (purple) and Node 3 (blue).
- Node 2 (purple):** Located at the top left, connected to Node 1 (red) and Node 3 (blue).
- Node 3 (blue):** Located at the top center, connected to Node 1 (red), Node 2 (purple), Node 4 (red), and Node 5 (blue).
- Node 4 (red):** Located at the top right, connected to Node 3 (blue) and Node 5 (blue).
- Node 5 (blue):** Located at the middle right, connected to Node 3 (blue), Node 4 (red), Node 6 (purple), and Node 7 (blue).
- Node 6 (purple):** Located at the bottom center, connected to Node 5 (blue) and Node 7 (blue).
- Node 7 (blue):** Located at the bottom right, connected to Node 5 (blue) and Node 6 (purple).
- Node 8 (red):** Located at the middle left, connected to Node 9 (blue) and Node 10 (purple).
- Node 9 (blue):** Located at the top left, connected to Node 8 (red) and Node 10 (purple).
- Node 10 (purple):** Located at the top center, connected to Node 8 (red), Node 9 (blue), and Node 11 (blue).
- Node 11 (blue):** Located at the top right, connected to Node 10 (purple) and Node 12 (red).
- Node 12 (red):** Located at the middle right, connected to Node 11 (blue) and Node 13 (blue).
- Node 13 (blue):** Located at the bottom right, connected to Node 12 (red) and Node 14 (purple).
- Node 14 (purple):** Located at the bottom center, connected to Node 13 (blue) and Node 15 (blue).
- Node 15 (blue):** Located at the bottom left, connected to Node 14 (purple) and Node 16 (blue).

$$c(l_{j1}^i) = c(k_j), \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3.$$

Sedangkan, penentuan warna daun-daun pada graf $nT_{3,2}$, $c(l_{jk}^i)$ adalah dipilih dua dari $\{1,2,3,4\} \setminus \{c(l_j^i)\}$, dengan $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,3$ dan $k = 1,2$. Akibatnya, $\chi_L(nT_{3,2}) \leq 4$. Selanjutnya, dengan cara serupa sebagaimana menentukan batas bawah $\chi_L(nT_{3,1})$, diperoleh $\chi_L(nT_{3,2}) \geq 4$. Oleh karena itu, $\chi_L(nT_{3,2}) = 4$, untuk $1 \leq n \leq 2$.

3 Kesimpulan

Graf amalgamasi $nT_{k,m}$ yang berbilangan kromatik lokasi empat adalah sebagai berikut.

1. $\chi_L(nT_{2,1}) = 4$, untuk $3 \leq n \leq 9$;
2. $\chi_L(nT_{2,2}) = 4$, untuk $2 \leq n \leq 7$;
3. $\chi_L(nT_{2,3}) = 4$, untuk $1 \leq n \leq 2$;
4. $\chi_L(nT_{3,1}) = 4$, untuk $2 \leq n \leq 3$;
5. $\chi_L(nT_{3,2}) = 4$, untuk $1 \leq n \leq 2$.

4 Daftar Pustaka

- [1] G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang, The locating-chromatic number of a graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **36**, 89-101, 2002.
- [2] G. Chartrand, E. Salehi, dan P. Zhang, On the partition dimension of graph, *Congr. Numer.*, **130**, 157-168, 1998
- [3] G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang, Graph of order n with locating-chromatic number n-1, *Discrete Math.*, **269**, 65-79, 2003.
- [4] Asmiati, E. T. Baskoro, Characterizing all graphs containing cycles with locating chromatic-number 3, *AIP Conf. Proc.* **1450**, 351- 357, 2012.
- [5] E. T. Baskoro, Asmiati, Characterizing all trees with locating chromatic-number 3, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* **1** (2), 109 – 117, 2013.
- [6] Asmiati, H. Assiyatun, E.T. Baskoro, Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars, *ITB J.Sci.*, **43A**, 1-8, 2011
- [7] Asmiati, H. Assiyatun, E.T. Baskoro, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa, Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **63(1)**, 11-23, 2012.
- [8] Asmiati, Graf lobster berbilangan kromatik lokasi 4, *Prosiding Semirata BKS-PTN Barat*, 35-38, 2013.

